Středoškolská odborná činnost

Dělitelnost pro konečná zobrazení

Obor 1 – Matematika a statistika

Tereza Krejčí

Jihomoravský kraj

Brno 2024

Středoškolská odborná činnost

Dělitelnost pro konečná zobrazení
Divisibility for finite mappings

Obor 1 – Matematika a statistika

Autorka: Tereza Krejčí
Škola: Gymnázium Brno, tř. Kpt. Jaroše, p. o.
Kraj: Jihomoravský
Vedoucí práce: Mgr. Dominik Trnka

Brno 2024

Čestné prohlášení

Prohlašuji, že jsem práci **Dělitelnost pro konečná zobrazení** vypracovala samostatně a veškeré použité prameny a informace uvádím v seznamu použité literatury.

Prohlašuji rovněž, že tištěná a elektronická verze této práce jsou shodné.

Nemám závažný důvod proti zpřístupňování této práce v souladu se zákonem č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a změně některých zákonů (autorský zákon) v platném znění.

V Brně dne 12. května 2024 ....

podpis

Poděkování

Děkuji především vedoucímu práce Mgr. Dominiku Trnkovi za odborné vedení, mnoho cenných rad a podnětných připomínek. Velice si vážím veškerého času, který mi ochotně věnoval.
Tato páce byla vypracována za finanční podpory JCMM a JMK.

Abstract

This thesis aims to introduce divisibility for mappings between finite ordinals. Based on Number theory, we define an analogy of classical divisibility for finite mappings and their composition and describe its main properties. We focus closer on finding greatest common divisors and least common multiples for mappings and describing them formally. In the end, we compare our results with the classical divisibility and point out their similarities as well as some important differences. We also include a geometrical interpretation.

Key words: mapping; divisibility; finite ordinal; function composition; Number theory

Abstrakt

Práce si klade za cíl představit dělitelnost zobrazení mezi konečnými ordinály. Na základě teorie čísel definujeme analogicky dělitelnost pro konečná zobrazení a jejich skládání a popisujeme jejich hlavní vlastnosti. Zejména se zaměřujeme na hledání největších společných dělitelů a nejmenších společných násobků zobrazení. Na závěr zavedenou dělitelnost porovnáváme s klasickou dělitelností a popisujeme jejich podobnosti i hlavní rozdíly. Také zahrneme geometrickou interpretaci.

Klíčová slova: zobrazení; dělitelnost; konečný ordinál; skládání zobrazení; teorie čísel

Obsah

1 Úvod

Dělitelnost je jedním ze základních kamenů matematiky a využívá se jí napříč nejrůznějšími obory. Teorie čísel, která se dělitelností zaobírá, patří mezi nejstarší odvětví matematiky a řeší nejznámější matematické problémy.

I přes svoji komplexnost stojí na jednoduché definici. Pro dvě celá čísla řekneme, že a dělí b, pokud existuje celé číslo c takové, že

$$b = a \cdot c.$$

Je patrné, že naprosto analogicky lze dělitelnost definovat pro jakoukoli binární operaci na libovolné množině. Pavel Růžička ve své práci (3) dělitelnost zobecňuje pro komutativní monoidy a zabývá se jejími obecnými vlastnostmi. V této práci se věnujeme dělitelnosti na konkrétní množině, a to na množině zobrazení mezi konečnými ordinály (dále jen konečná zobrazení) s binární operací skládání, která komutativní není. I když se objekty, které tato dělitelnost popisuje, od čísel značně liší, mnohé základní definice ponecháváme téměř nezměněné a můžeme vysledovat mnohé analogie.

V prvních třech kapitolách shrnujeme základní poznatky o teorii čísel a zobrazeních, se kterými později pracujeme, a formulujeme jednoduchá pomocná tvrzení, která budeme potřebovat k důkazům komplikovanějších vět.

Čtvrtá část práce se zabývá samotnou definicí dělitelnosti pro konečná zobrazení a zkoumá podmínky dělitelnosti. V této kapitole dále propojíme základy teorie čísel s nově definovanou dělitelností konečných zobrazení a analogicky definujeme některé pojmy obecně využívané při práci s čísly, jako jsou největší společný dělitel a nejmenší společný násobek. Na rozdíl od násobení není operace skládání zobrazení komutativní, a tak mnohé části práce dělíme podle toho, zda se zabývají pravou, nebo levou dělitelností. Díky kategoriálnímu přístupu, tj. chytré práci s jazykem, však nacházíme dualitu jak mezi násobky a děliteli, tak i mezi pravou a levou dělitelností. Díky tomu nám popis jednoho ze čtyř případů dává návod, jak popsat zbylé tři. To je vidět zejména na formulaci a důkazech Vět 55, 61 a 65, vycházejících z Věty 51. Schématicky:

nejmenší společný levý násobek	nejmenší společný pravý násobek
největší společný levý dělitel	největší společný pravý dělitel

Pátá kapitola má za cíl vzájemně porovnat dělitelnost čísel s dělitelností konečných zobrazení a poukázat na jejich zásadní rozdíly. Na závěr se podíváme na vlastnosti konečných zobrazení a jejich dělitelnost z geometrického hlediska a intuitivně interpretujeme některé pojmy.

Zatímco první a částečně druhá kapitola opakují obecně známé skutečnosti, z nichž práce vychází, zbylé části jsou *čistě naší prací.*

Cíl práce

Cílem práce je definovat analogii k dělitelnosti čísel pro konečná zobrazení s operací skládání zobrazení, přizpůsobit jí vybrané pojmy z teorie čísel a porovnat ji s klasickou dělitelností. Na závěr abstraktní koncept námi zavedené dělitelnosti intuitivně popíšeme pomocí geometrické interpretace.

2 Základy teorie čísel

V této části práce připomeneme některé základní pojmy z teorie čísel, které pak zobecníme pro konečná zobrazení. Nejprve zopakujeme definici dělitelnosti, od níž se práce bude dále odvíjet:

Definice 1. *Nechť a, $b \in \mathbb{Z}$. Řekneme, že a dělí b, pokud existuje celé číslo c takové, že*

$$b = a \cdot c,$$

píšeme $a \mid b$. Číslo a pak nazýváme dělitelem čísla b, naopak číslo b je násobkem čísla a.

Zejména se zaměříme na pojmy *největší společný dělitel* a *nejmenší společný násobek*:

Definice 2. *Nechť a, $b \in \mathbb{Z}$. Společným dělitelem čísel a a b rozumíme číslo $d \in \mathbb{Z}$ takové, že*

$$d \mid a \wedge d \mid b.$$

Definice 3. *Nechť a, $b \in \mathbb{Z}$. Největším společným dělitelem čísel a a b rozumíme číslo* $\mathrm{NSD}(a, b)$ *definované následovně:*

$$\mathrm{NSD}(a, b) = \max\{d : d \in \mathbb{N}, d \mid a \wedge d \mid b\}.$$

Definice 4. *Nechť a, $b \in \mathbb{Z}$. Společným násobkem čísel a a b rozumíme číslo $n \in \mathbb{Z}$ takové, že*

$$a \mid n \wedge b \mid n.$$

Definice 5. *Nechť a, $b \in \mathbb{Z}$. Nejmenším společným násobkem čísel a a b rozumíme číslo* $\mathrm{nsn}(a, b)$ *definované následovně:*

$$\mathrm{nsn}(a, b) = \min\{n : n \in \mathbb{N}, a \mid n \wedge b \mid n\}.$$

Vedle klasické definice si uvedeme i alternativní charakterizaci největšího společného dělitele a nejmenšího společného násobku. Obdobně jako v následujících větách tyto pojmy později definujeme pro konečná zobrazení, neboť pro zobrazení nebudeme zavádět uspořádání, a tedy ani maximální a minimální prvek.

Věta 6. *Nechť a, $b \in \mathbb{Z}$, $d \in \mathbb{N}$. Číslo d je největší společný dělitel čísel a a b právě tehdy, když pro každého společného dělitele c čísel a, b platí $c \mid d$.*

Důkaz. Uvažme pro spor společného dělitele c, který nedělí $\mathrm{NSD}(a, b)$. Potom jistě existuje prvočíslo p takové, že $v_p(c) \geqq v_p(\mathrm{NSD}(a, b))$[1]. Jelikož c dělí a, b, pak jistě i $\mathrm{NSD}(a, b) \cdot p$ dělí a a b. Existuje tedy společný dělitel a a b, který je zřejmě vetší než $\mathrm{NSD}(a, b)$, což je spor (pokud by toto číslo bylo záporné, pak i číslo k němu

[1] Zápis $v_p(x)$, kde p je prvočíslo, značí nezáporné celé číslo takové, že $p^{v_p(x)}$ dělí x a zároveň $p^{v_p(x)+1}$ nedělí x.

opačné musí být společným dělitelem a a b. Vidíme tedy, ze číslo $\mathrm{NSD}(a, b)$ musí být násobkem všech společných dělitelů a a b).
Nyní dokažme opačnou implikaci, tedy že pokud d je dělitel čísel a a b takový, že pro každého společného dělitele c čísel a, b platí $c \mid d$, je d největším společným dělitelem. Zřejmě pokud d je přirozené a $c \mid d$, platí $d \geqq c$, a tedy d je největší ze všech kladných společných dělitelů čísel a a b. Jelikož je přirozené, je jistě i větší než všichni záporní dělitelé. □

Věta 7. *Nechť a, $b \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. Číslo n je nejmenší společný násobek čísel a a b právě tehdy, když pro každý společný násobek c čísel a, b platí $n \mid c$.*

Důkaz. Předpokládejme, že máme $\mathrm{nsn}(a, b)$ a společný násobek c čísel a a b, který není násobkem $\mathrm{nsn}(a, b)$. Potom musí existovat prvočíslo p takové, že $v_p(c) \leqq v_p(\mathrm{nsn}(a, b))$. Z předpokladu $a \mid c$ a $b \mid c$ musí obě dělit i $\frac{\mathrm{nsn}(a,b)}{p}$. Tento násobek je zřejmě menší než $\mathrm{nsn}(a, b)$, což je spor s předpokladem.
Nyní ukažme, že pokud přirozené číslo n je násobek čísel a a b takový, že pro každý společný násobek c čísel a, b platí $n \mid c$, je n nejmenším společným násobkem. Je zřejmé, že pokud c je kladným násobkem n, platí $n \leqq c$. Číslo n je tedy mezi kladnými společnými násobky nejmenší. □

Povšimněme si, že pokud bychom v předchozích větách nespecifikovali, že největší společný násobek i nejmenší společný dělitel jsou přirozená čísla, nebyli by definováni jednoznačně. Pokud například číslo $d = \mathrm{NSD}(a, b)$, pak i $-d$ by podle podmínky Věty 6 bylo největším společným dělitelem, neboť $d \mid (-d)$ i $(-d) \mid d$ pro všechna $d \in \mathbb{Z}$. Analogii k tomuto pozorování v pozdější části práce popíšeme i u největších společných dělitelů a nejmenších společných násobků konečných zobrazení.

Dalším pozorováním, které stojí za zmínku, je dualita předchozích dvou vět. Ačkoli se zabývají hledáním jiného objektu, jejich formulace i důkazy jsou vystavěny analogicky, stačí znaky $\geqq$ nahradit $\leqq$ a místo násobení uvažovat dělení a získáváme návod, jak z jedné věty získat druhou. Této skutečnosti budeme využívat i při popisování dělitelnosti zobrazení, a to nejen mezi násobky a děliteli, ale i mezi pravou a levou dělitelností.

3 Úvod do zobrazení

V této části formálně zavedeme zobrazení a s nimi související pojmy, se kterými budeme později pracovat.

Definice 8. *Kartézský součin množin A a B je množina*

$$A \times B = \{(a, b) \colon a \in A, b \in B\}.$$

Definice 9. *Binární relace R mezi množinami A a B je množina $R \subseteq A \times B$.*

Definice 10. *Binární relaci f mezi množinami A a B nazýváme zobrazením mezi množinami A a B, jestliže*

$$\forall a \in A \colon \exists! b \in B \colon (a, b) \in f.$$

Pro zobrazení f mezi množinami A a B používáme značení $f \colon A \to B$ a místo $(a, b) \in f$ píšeme $f(a) = b$.

Zobrazením tedy rozumíme binární relaci, která každému prvku množiny A přiřadí právě jeden prvek množiny B. Základním kamenem pro práci s dělitelností pro nás bude skládání zobrazení definované následovně.

Definice 11. *Nechť $f \colon A \to B$, $g \colon B \to C$ jsou zobrazení. Složeným zobrazením $g \circ f \colon A \to C$ rozumíme zobrazení definované předpisem*

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)).$$

Zaměřme se na některé vlastnosti zobrazení:

Definice 12. *Zobrazení $f \colon A \to B$ se nazývá injektivní (též injekce), jestliže*

$$\forall a, b \in A \colon f(a) = f(b) \Rightarrow a = b.$$

Lemma 13. *Nechť $f = h \circ g$ a f je injekce. Potom i zobrazení g musí být injektivní.*

Důkaz. Jestliže f je injekce, platí $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$, a tedy $h(g(a)) = = h(g(b)) \Rightarrow a = b$, odkud vidíme, že $g(a) = g(b) \Rightarrow a = b$. □

Lemma 14. *Nechť $f \colon A \to B$ je zobrazení a existuje injekce $d \colon A \to C$. Potom existuje zobrazení $g \colon C \to B$ takové, že $g \circ d = f$.*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, tail, "d"'] & B \\
C \arrow[ur, dashed, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

Důkaz. Zobrazení g definujeme následovně: pro prvky x množiny C takové, že existuje $y\colon d(y) = x$, nechť $g(x) = f(y)$. Toto y existuje jednoznačně, neboť d je injekce. Pro ostatní x nechť $f(x)$ je libovolné. Potom pro každé $y \in A$ platí $(g \circ d)(y) = g(x) = f(y)$. □

Definice 15. *Zobrazení $f\colon A \to B$ se nazývá surjektivní (též surjekce), jestliže*

$$\forall b \in B\colon \exists a \in A\colon f(a) = b.$$

Lemma 16. *Nechť $f = h \circ g$, $f\colon A \to B$ a f je surjekce. Potom i zobrazení h musí být surjektivní.*

Důkaz. Připusťme, že h není surjektivní, a tedy existuje $x \in B$ takové, že na něj h nezobrazí žádný prvek. Potom pro žádné $a \in A$ neplatí $h(g(a)) = x$, což je spor s předpokladem, že f je surjekce. □

Lemma 17. *Nechť $f\colon A \to B$ je zobrazení a existuje surjekce $d\colon C \to B$. Potom existuje zobrazení $g\colon A \to C$ takové, že $d \circ g = f$.*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, dashed, "g"'] & B \\ & C \arrow[u, two heads, "d"'] \end{tikzcd}$$

Důkaz. Jelikož d je surjekce, $\forall b \in B\ \exists c_b \in C$ takové, že $d(c) = b$. Zobrazení g tedy můžeme definovat předpisem $g(x) = c_{f(x)}$. □

Definice 18. *Zobrazení $f\colon A \to B$ se nazývá bijektivní, jestliže je zároveň injektivní i surjektivní.*

Definice 19. *Identitou nazveme bijektivní zobrazení $\mathbb{I}_A\colon A \to A$ definované pro všechna $a \in A$ předpisem $\mathbb{I}_A(a) = a$.*

Definice 20. *Nechť $A \subseteq B$. Inkluzí množiny A do množiny B rozumíme zobrazení $i\colon A \to B$ definované předpisem $i(a) = a$ pro všechna $a \in A$.*

Lemma 21. *Zobrazení $f\colon A \to B$ je bijekce právě tehdy, když existuje zobrazení $f^{-1}\colon B \to A$ takové, že*

$$f \circ f^{-1} = \mathbb{I}_B \quad \wedge \quad f^{-1} \circ f = \mathbb{I}_A.$$

Důkaz.

(i) Dokažme pravou implikaci. Jelikož je f surjekce, pro každé $b \in B$ existuje $a \in A$ takové, že $f(a) = b$. Definujme f^{-1} předpisem $f^{-1}(f(a)) = a$. Jelikož f je injektivní, existuje takové a jednoznačně.
Potom pro každé $a \in A$ platí $(f^{-1} \circ f)(a) = f^{-1}(f(a)) = a$ a pro každé $b \in B$, kde $b = f(a)$ platí $(f \circ f^{-1})(b) = f(f^{-1}(b)) = f(f^{-1}(f(a))) = f(a) = b$.

(ii) Dokažme levou implikaci. Zobrazení $\mathbb{I}_B$ je surjekce, a tak podle Lemma 16 a první rovnosti musí být i zobrazení f surjektivní.
Z druhé rovnosti vidíme, že injektivní zobrazení $\mathbb{I}_A$ odpovídá složení $f^{-1} \circ f$, a tak podle Lemma 13 i zobrazení f musí být injektivní. Odtud plyne, že f je bijekce.

$\square$

Definice 22. *Nechť $f\colon A \to B$ je zobrazení. Jeho obrazem rozumíme množinu $\mathrm{im} f \subseteq B$,*

$$\mathrm{im} f = \{b \in B\colon \exists a \in A\colon f(a) = b\}.$$

Pokud je zobrazení f surjektivní, pak zřejmě $\mathrm{im} f = B$.

Lemma 23. *Nechť $f\colon A \to B$. Potom ho lze rozložit na injekci po surjekci následovně:*

$$f = i_f \circ f|_{\mathrm{im}},$$

kde i_f je inkluze $\mathrm{im} f \hookrightarrow B$ a $f|_{\mathrm{im}}$ je zobrazení $A \to \mathrm{im} f$ definované předpisem $f|_{\mathrm{im}}(x) = f(x)$. Situaci můžeme znázornit následujícím diagramem:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, two heads, bend right, "f|_{\mathrm{im}}"'] & & B \\ & \mathrm{im} f \arrow[ur, hook, bend right, "i_f"'] & \end{tikzcd}$$

Důkaz. Zřejmě $i_f \circ f|_{\mathrm{im}}(a) = (i_f(f|_{\mathrm{im}}(a))) = (i_f(f(a))) = f(a)$. $\square$

Lemma 24. *Nechť $f = h \circ g$. Potom $\mathrm{im} f \subseteq \mathrm{im} h$.*

Důkaz. Uvažme $b \in \mathrm{im} f$, tedy existuje a takové, že $b = f(a)$. Potom $b = f(a) = h(g(a))$, a tedy $b \in \mathrm{im} h$. $\square$

Lemma 25. *Nechť $f = h \circ g$ a g je surjekce. Potom $\mathrm{im} f = \mathrm{im} h$.*

Důkaz. Z Lemma 24 plyne $\mathrm{im} f \subseteq \mathrm{im} h$. Dokažme $\mathrm{im} h \subseteq \mathrm{im} f$. Uvažme $b \in \mathrm{im} h$, tedy existuje a takové, že $h(a) = b$. Jelikož g je surjekce, existuje i c takové, že $g(c) = a$. Proto $b = h(a) = h(g(c)) = f(c)$, a tedy $b \in \mathrm{im} h$.

$\square$

Definice 26. *Nechť $f\colon A \to B$ je zobrazení. Relaci $\sim_f$ pro zobrazení f definujme jako podmnožinu kartézského součinu $A \times A$ takovou, že $f(a') = f(a'') \Leftrightarrow a' \sim_f a''$.*

Lemma 27. *Relace $\sim_f$ je ekvivalence.*

Důkaz.

(i) Jelikož platí $f(a) = f(a)$, je relace $\sim_f$ reflexivní.

(ii) Jelikož rovnost je symetrická, i relace $\sim_f$ je symetrická.

(iii) Pokud platí $a \sim_f b$ a $b \sim_f c$, tedy $f(a) = f(b)$ a $f(b) = f(c)$, pak jistě platí i $f(a) = f(c)$, a tedy $a \sim_f c$. Relace $\sim_f$ je tranzitivní.

$\square$

Definice 28. *Nechť $\sim$ je relace ekvivalence, $\sim \subseteq A \times A$. Třídou ekvivalence $[a]$ pro $a \in A$ rozumíme množinu prvků $x \in A$ takových, že $x \sim a$.*

Definice 29. *Nechť $f\colon A \to B$ je zobrazení. Koobrazem[2] zobrazení f rozumíme množinu tříd ekvivalence $\sim_f$, značíme ji $\mathrm{coim} f$.*

Definice 30. *Značením $\mathrm{coim} f \cap g$ budeme rozumět množinu tříd ekvivalence $\sim_{f\cap g}$ definovanou následovně: $a' \sim_{f\cap g} a'' \Leftrightarrow (f(a') = f(a'') \wedge g(a') = g(a''))$. Značením $\mathrm{coim} f \cup g$ potom takovou, že $a' \sim_{f\cup g} a'' \Leftrightarrow (f(a') = f(a'') \vee g(a') = g(a''))$.*

Lemma 31. *Nechť $f\colon A \to B$. Zobrazení f lze rozložit na injekci po surjekci následovně:*

$$f = j_f \circ f|_{\mathrm{coim}},$$

kde j_f je zobrazení $\mathrm{coim} f \to B$ definované předpisem $j_f([a]) = f(a)$ a $f|_{\mathrm{coim}}$ je zobrazení $A \to \mathrm{coim} f$ definované předpisem $f|_{\mathrm{coim}}(a) = [a]$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "f"'] \arrow[dr, two heads, "f_{\mathrm{coim}}"'] & & B \\
& \mathrm{coim} f \arrow[ur, tail, "j_f"'] &
\end{tikzcd}$$

Důkaz. Z definice $(j_f \circ f|_{\mathrm{coim}})(x) = j_f(f|_{\mathrm{coim}}(x)) = j_f([x]) = f(x)$. $\square$

Dualita mezi obrazy a koobrazy je nejlépe vidět z následujícího lemma. Důležitá bude zejména při srovnávání pravé a levé dělitelnosti v následujících kapitolách.

Lemma 32. *Nechť f je zobrazení. Existuje bijekce β mezi $\mathrm{coim} f$ a $\mathrm{im} f$ taková, že $\beta([a]) = f(a)$.*

Důkaz. Z definice mají všechny prvky třídy ekvivalence stejný obraz, neboť $[a'] = [a''] \Leftrightarrow f(a') = f(a'')$, a tedy je zobrazení definováno korektně. Z této ekvivalence zároveň vyplývá, že $\beta([a']) = \beta([a'']) \Rightarrow f(a') = f(a'') \Rightarrow [a'] = [a'']$, tedy zobrazení β je injektivní. Z definice obrazu pak zobrazení β je i surjektivní, a je tedy bijekcí. $\square$

Bijekce v Lemma 32 nám ukazuje dualitu mezi obrazy a koobrazy, a tedy i mnohými vlastnostmi popsanými v této kapitole. Získáváme tak dva různé způsoby, jak popsat jedno zobrazení, které nám pomohou pracovat zvlášť s pravou a levou dělitelností. Zároveň ale mezi nimi nacházíme mnohé analogie, jež nám usnadní práci a dají návod, jak k jednotlivým případům přistupovat.

Následující tabulka ukazuje příklady duálních pojmů v této kapitole. Doporučujeme porovnat definice a formulace následujících pojmů a tvrzení.

[2] Můžeme se také setkat s anglickým termínem „coimage“, proto také značíme $\mathrm{coim} f$.

injekce	surjekce
Lemma 13	Lemma 16
Lemma 14	Lemma 17
obraz	koobraz

Poznámka. Abychom rozlišili třídy ekvivalence různých zobrazení, budeme psát dané zobrazení v dolním indexu, například $[x]_f$.

Lemma 33. *Nechť f a g jsou zobrazení z množiny A. Pokud platí $\sim_g \subseteq \sim_f$, lze sestrojit surjekci $\sigma\colon \operatorname{coim} g \twoheadrightarrow \operatorname{coim} f$ s předpisem $\sigma([x]_g) = [x]_f$.*

Důkaz.

(i) Dokažme, že je zobrazení σ definováno korektně. Uvažme $x', x'' \in \operatorname{coim} g$ takové, že $[x']_g = [x'']_g$. Abychom ukázali, že zobrazení bylo definováno korektně, musíme dokázat $[x']_f = [x'']_f$. To ale přímo vyplývá z předpokladu $\sim_g \subseteq \sim_f$.

(ii) Dokažme, že zobrazení σ je surjekce, tedy že pro každý prvek $\operatorname{coim} f$ dokážeme nalézt takový prvek z $\operatorname{coim} g$, který se na něj zobrazí. Vezměme prvek $[x]_f \in \operatorname{coim} f$. Máme $x \in A$ a $[x]_g \in \operatorname{coim} g$ a z definice $\sigma([x]_f) = [x]_g$.

□

4 Dělitelnost zobrazení

V této části přizpůsobíme vybrané pojmy teorie čísel pro konečná zobrazení, zejména definujeme jejich dělitelnost. Pro přehlednost a jednoznačnost budeme pracovat se zobrazeními mezi konečnými ordinály, která zachovávají pořadí:

Definice 34. *Konečný ordinál*[3] $\underline{n}$ *je uspořádaná množina* $\underline{n} = \{1, \ldots, n\}$.

Definice 35. *Zobrazení* $f\colon \underline{n} \to \underline{m}$ *zachovává pořadí, jestliže*

$$\forall a', a'' \in \underline{n}\colon a' \leqq a'' \Rightarrow f(a') \leqq f(a'').$$

Lemma 36. *Nechť* f *je zobrazení* $\underline{n} \to \underline{m}$, g *je zobrazení* $\underline{m} \to \underline{l}$*, přičemž obě zachovávají pořadí. Potom i zobrazení* $g \circ f$ *zachovává pořadí.*

Důkaz. Nechť $a', a'' \in \underline{n}, a' \leqq a''$. Jelikož zobrazení f zachovává pořadí, $f(a') \leqq$ $\leqq f(a'')$. Zobrazení g také zachovává pořadí, proto i $g(f(a')) \leqq g(f(a''))$. □

Poznámka. Od této chvíle budeme předpokládat, že všechna zobrazení zachovávají pořadí, aniž bychom to pokaždé specifikovali. Díky tomu máme například zaručeno, že mezi dvěma množinami existuje nanejvýše jedna bijekce.

Věta 37. *Nechť* $f\colon \underline{n} \to \underline{m}$ *je zobrazení. Pak existují jednoznačně konečný ordinál* $\underline{k}$*, surjektivní zobrazení* $g\colon \underline{n} \to \underline{k}$ *a injektivní zobrazení* $h\colon \underline{k} \to \underline{m}$ *taková, že*

$$h \circ g = f.$$

Důkaz. Nejprve si uvědomme, že množina $\mathrm{im} f$ je, jakožto podmnožina uspořádaného konečného ordinálu $\underline{m}$, sama uspořádaná. Uvažme rozklad zobrazení f na $f|_{\mathrm{im}}$ a i_f, která obě zachovávají pořadí, a označme Φ jedinou bijekci mezi uspořádanými množinami $\mathrm{im} f$ a $\underline{k}$, kde $k = |\mathrm{im} f|$. Zobrazení g a h definujme předpisem $g(x) := (\Phi \circ f|_{\mathrm{im}})(x)$ a $h(x) := (i_f \circ \Phi^{-1})(x)$, viz následující diagram.

$$\begin{tikzcd}
\underline{n} \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, two heads, "f|_{\mathrm{im}}"] \arrow[ddr, dashed, two heads, bend right, "g"'] & & \underline{m} \\
& \mathrm{im} f \arrow[ur, tail, "i_f"'] \arrow[d, shift right, two heads, tail, "\Phi"'] & \\
& \underline{k} \arrow[u, shift right, two heads, tail, "\Phi^{-1}"'] \arrow[uur, dashed, tail, bend right, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

Zobrazení g je zřejmě surjekce, neboť je složením dvou surjekcí, a stejně tak h je injektivní, jelikož je složením dvou injekcí. Obě zobrazení také zachovávají pořadí, protože i $f|_{\mathrm{im}}$, i_f a Φ zachovávají pořadí. Zbývá dokázat, že g a h splňují podmínky věty.

[3] V literatuře se klasicky setkáváme spíše se značením $\underline{n} = \{0, 1, \ldots, n-1\}$. My jsme se však rozhodli pracovat s touto pro nás přirozenější definicí.

(i) Dokažme $f = h \circ g$:

$$(h \circ g)(a) = ((i_f \circ \Phi^{-1}) \circ (\Phi \circ f|_{\mathrm{im}}))(a) = (i_f \circ f|_{\mathrm{im}}))(a) = f(a).$$

(ii) Dokažme, že zobrazení g a h existují jednoznačně. Připusťme, že existují zobrazení g' a h', která též rozkládají f a splňují podmínky vět. Potom z Lemma 25 plyne $\mathrm{im} h' = \mathrm{im} f$. Můžeme tedy zkonstruovat $h'|_{\mathrm{im}}$ a $i_{h'}$ jako na obrázku.

$$\begin{tikzcd}
 & \underline{k'} \arrow[dr, tail, bend left, "h'"] \arrow[dd, tail, two heads, dashed, "h'|_{\mathrm{im}}"] & \\
\underline{n} \arrow[ur, two heads, bend left, "g'"] \arrow[rr, tail, "f"] \arrow[dr, two heads, "f|_{\mathrm{im}}"'] \arrow[ddr, two heads, bend right, "g"'] & & \underline{m} \\
 & \mathrm{im} f \arrow[ur, tail, "i_f"'] \arrow[ur, tail, dashed, bend left, "i_h"] \arrow[d, shift right, tail, two heads, "\Phi"'] & \\
 & \underline{k} \arrow[uur, tail, bend right, "h"'] \arrow[u, shift right, tail, two heads, "\Phi^{-1}"'] &
\end{tikzcd}$$

Z Lemma 13 je $h'|_{\mathrm{im}}$ injektivní, neboť samo h' je injekce. Proto $h'|_{\mathrm{im}}$ je bijekce. Potom $\Phi \circ h'|_{\mathrm{im}}$ je složení dvou bijekcí, a tedy bijekce mezi konečnými ordinály. Odtud plyne $k = k'$.
Z definic dostáváme

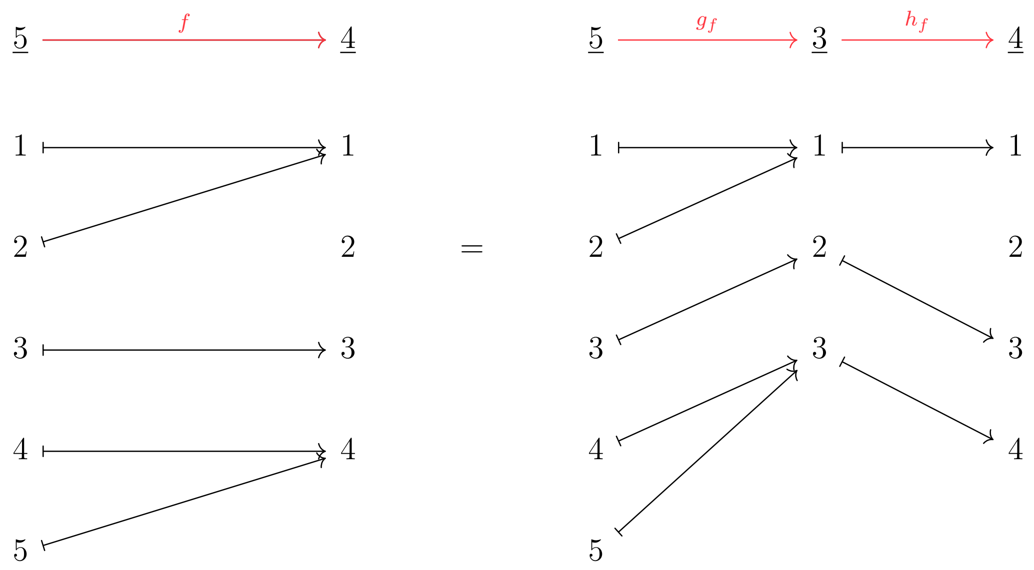
$$h = i_f \circ \Phi^{-1} = i_f \circ \Phi^{-1} \circ \mathbb{I}_{\underline{k}} = i_f \circ \Phi^{-1} \circ \Phi \circ h'|_{\mathrm{im}} = i_f \circ h'|_{\mathrm{im}} = i_{h'} \circ h'|_{\mathrm{im}} = h',$$

$$g' = h'|_{\mathrm{im}}{}^{-1} \circ f|_{\mathrm{im}} = \mathbb{I}_{\underline{k}} \circ h'_{\mathrm{im}}{}^{-1} \circ f|_{\mathrm{im}} = \Phi \circ h'_{\mathrm{im}} \circ h'_{\mathrm{im}}{}^{-1} \circ f|_{\mathrm{im}} = \Phi \circ f|_{\mathrm{im}} = g.$$

□

Dále budeme pro rozklad libovolného zobrazení f podle Věty 37 používat značení $f = h_f \circ g_f$.

Na následujícím obrázku vidíme příklad rozkladu zobrazení $f \colon \underline{5} \to \underline{4}$ na injekci po surjekci podle Věty 37 přes množinu $\underline{3}$.



4.1 Definice dělitelnosti

V následujících dvou definicích zavádíme dělitelnost zobrazení. Povšimněme si, že operace skládání zobrazení není komutativní, a tak na rozdíl od dělitelnosti čísel musíme rozlišovat *pravou* a *levou dělitelnost*.

Definice 38. *Řekneme, že zobrazení* $g\colon \underline{k} \to \underline{m}$ *zprava dělí zobrazení* $f\colon \underline{n} \to \underline{m}$*, pokud existuje zobrazení* $h\colon \underline{n} \to \underline{k}$ *takové, že:*

$$g \circ h = f.$$

Pokud zobrazení g *zprava dělí zobrazení* f*, říkáme, že* f *je pravým násobkem* g*.*

$$\begin{tikzcd}
\underline{n} \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, dashed, "h"'] & & \underline{m} \\
& \underline{k} \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

Z obrázku je zřejmé, proč říkáme, že g dělí f *zprava*, přestože píšeme $f = g \circ h$, kde g je nalevo.

Definice 39. *Řekneme, že zobrazení* $g\colon \underline{n} \to \underline{l}$ *zleva dělí zobrazení* $f\colon \underline{n} \to \underline{m}$*, pokud existuje zobrazení* $h\colon \underline{l} \to \underline{m}$ *takové, že:*

$$h \circ g = f.$$

Pokud zobrazení g *zleva dělí zobrazení* f*, říkáme, že* f *je levým násobkem* g*.*

$$\begin{tikzcd}
\underline{n} \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, bend right, "g"'] & & \underline{m} \\
& \underline{l} \arrow[ur, dashed, bend right, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

Zaměřme se na charakterizaci dělitelnosti zobrazení. Získáme následující ekvivalence, kterých budeme hojně využívat, neboť nám značně zjednoduší úvahy. Následně se zaměříme na souvislosti mezi dělitelností a rozkladem zobrazení na injekci po surjekci.

Lemma 40. *Nechť f je zobrazení $f\colon \underline{a} \to \underline{b}$ a d je zobrazení $d\colon \underline{n} \to \underline{b}$. Zobrazení d dělí zprava f právě tehdy, když* $\mathrm{im} f \subseteq \mathrm{im} d$.

Důkaz.

(i) Dokažme, že $\mathrm{im} f \subseteq \mathrm{im} d$ je podmínkou nutnou. Pokud d zprava dělí f, pak existuje zobrazení h takové, že $f = d \circ h$. Podle Lemma 24 potom platí $\mathrm{im}\ f \subseteq$ $\subseteq \mathrm{im}\ d$.

(ii) Dokažme, že $\mathrm{im} f \subseteq \mathrm{im} d$ je podmínkou dostačující, tedy že lze zkonstruovat zobrazení h, aby $f = d \circ h$. Podle Lemma 23 můžeme f i d rozložit na injekci po surjekci (viz diagram níže). Z předpokladu $\mathrm{im} f \subseteq \mathrm{im} d$ lze sestrojit inkluzi $i\colon\ \mathrm{im}\ f \ \to\ \mathrm{im}\ d$. Pak z Lemma 17 plyne, ze existuje zobrazení h takové, že $d|_{\mathrm{im}} \circ h = i \circ f|_{\mathrm{im}}$, a tedy i $d \circ h = f$.

$$\begin{tikzcd}
\underline{a} \arrow[rrr, "f"] \arrow[dr, two heads, bend right, "f|_{\mathrm{im}}"] \arrow[ddrr, bend right, "i \circ f|_{\mathrm{im}}"'] \arrow[dddrrr, dashed, bend right, "h"'] & & & \underline{b} \\
& \mathrm{im} f \arrow[urr, hook, bend right, "i_f"'] \arrow[dr, hook, "i"] & & \\
& & \mathrm{im} d \arrow[uur, hook, "i_d"] & \\
& & & \underline{n} \arrow[ul, two heads, "d|_{\mathrm{im}}"] \arrow[uuu, "d"']
\end{tikzcd}$$

$\square$

Lemma 41. *Nechť f je zobrazení $f\colon \underline{a} \to \underline{b}$ a d je zobrazení $d\colon \underline{a} \to \underline{n}$. Zobrazení d dělí zleva f právě tehdy, když $\sim_d \subseteq \sim_f$.*

Důkaz.

(i) Dokažme, že $\sim_d \subseteq \sim_f$ je podmínkou nutnou. Předpokládejme, že $f = g \circ d$ a zároveň $x' \sim_d x''$, tedy $d(x') = d(x'')$. Aplikujme g na obě strany, čímž dostáváme $g(d(x')) = g(d(x''))$, což je ale $f(x') = f(x'')$, a proto $x' \sim_f x''$.

(ii) Dokažme, že $\sim_d \subseteq \sim_f$ je podmínkou dostačující. Mějme zobrazení f a d splňující podmínku a ukažme, že existuje zobrazení h takové, že $f = h \circ d$, kde $h\colon \underline{n} \to \underline{b}$. Podle Lemma 14 existuje zobrazení $g\colon \underline{n} \to \mathrm{coim} f$ takové, že $g \circ j_d = i$. Zobrazení h definujeme jako $j_f \circ g$. Potom $h \circ d = j_f \circ g \circ j_d \circ d|_{\mathrm{coim}} = j_f \circ i \circ d|_{\mathrm{coim}} = j_f \circ f|_{\mathrm{coim}} = f$.

$$\begin{tikzcd}
\underline{a} \arrow[rrr, "f"] \arrow[drr, two heads] \arrow[ddr] \arrow[dddrr, bend right, "d"'] & & & \underline{b} \\
& & \mathrm{coim} f \arrow[ur, tail, "j_f"] & \\
& \mathrm{coim} d \arrow[ur, "i"'] \arrow[dr, tail, "j_d"] & & \\
& & \underline{n} \arrow[uu, dashed, "g"'] \arrow[uuur, dashed, bend right, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

□

V kontextu předchozích dvou lemmat z Věty 37 vyplývá, že z pohledu pravé dělitelnosti pro nás budou zásadní injektivní složky zobrazení, zatímco z pohledu levé dělitelnosti to budou ty surjektivní. Následující věty ukazují, že díky tomu mohou existovat zobrazení f', f'', která se zprava či zleva dělí navzájem[4].

Věta 42. *Nechť $f'\colon \underline{a}' \to \underline{b}$ a $f''\colon \underline{a}'' \to \underline{b}$ jsou zobrazení. Uvažme jejich rozklady $f' = h_{f'} \circ g_{f'}$ a $f'' = h_{f''} \circ g_{f''}$ podle Věty 37. Potom f' a f'' se navzájem dělí zprava, právě když $h_{f'} = h_{f''}$.*

Důkaz.

(i) Dokažme pravou implikaci. Z Lemma 40 plyne $\mathrm{im} f' = \mathrm{im} f''$. Jelikož $g_{f'}$ i $g_{f''}$ jsou surjektivní, platí pole Lemma 25 $\mathrm{im} f' = \mathrm{im} h_{f'}$ a $\mathrm{im} f'' = \mathrm{im} h_{f''}$, a tedy $\mathrm{im} h_{f'} = \mathrm{im} h_{f''}$. Tato zobrazení jsou injektivní, zachovávají pořadí a mají stejný obraz, a proto i $h_{f'} = h_{f''}$.

(ii) Dokažme levou implikaci. Pokud $h_{f'} = h_{f''}$, pak podle Lemma 25 $\mathrm{im} f' = \mathrm{im}(h_{f'} \circ g_{f'}) = \mathrm{im} h_{f'} = \mathrm{im} h_{f''} = \mathrm{im}\,(h_{f''} \circ g_{f''}) = \mathrm{im} f''$, a proto podle Lemma 40 f' dělí f'' a zároveň f'' dělí f'.

□

Věta 43. *Nechť $f'\colon \underline{a} \to \underline{b}'$ a $f''\colon \underline{a} \to \underline{b}''$ jsou zobrazení. Uvažme jejich rozklady $f' = h_{f'} \circ g_{f'}$, $f'' = h_{f''} \circ g_{f''}$ podle Věty 37. Potom f' a f'' se navzájem dělí zleva, právě když $g_{f'} = g_{f''}$.*

Důkaz.

[4] Formulací "f' a f'' se dělí navzájem" myslíme $f'|f'' \wedge f''|f'$.

(i) Dokažme pravou implikaci. Z Lemma 41 víme, že pokud se zobrazení f' a f'' dělí navzájem, platí $\sim_{f'}=\sim_{f''}$. Protože $h_{f'}$ je injektivní, platí $h_f(g_f(x')) = = h_f(g_f(x'')) \Leftrightarrow g_f(x') = g_f(x'')$, a tedy $\sim_{f'}=\sim_{g_{f'}}$ a stejně tak $\sim_{f''}=\sim_{g_{f''}}$. Odtud plyne $\sim_{g_{f'}}=\sim_{g_{f''}}$. Jelikož ale $g_{f''}$ i $g_{f'}$ jsou surjektivní a zachovávají pořadí, jsou jednoznačně zadané svým koobrazem, a tedy $g_{f''} = g_{f'}$.

(ii) Dokažme levou implikaci. Nechť $g_{f'} = g_{f''}$. Jelikož $h_{f'}$ je injektivní, $\sim_{f'}=\sim_{g'}$. Analogicky i $\sim_{f''}=\sim_{g''}$, a tedy $\sim_{f'}=\sim_{g'}=\sim_{g''}=\sim_{f''}$. Z Lemma 41 plyne, že potom f' dělí f'' i f'' dělí f'.

□

Lemma 44. *Nechť f je zobrazení. Potom h_f je jediné injektivní zobrazení, které se navzájem zprava dělí s f.*

Důkaz. Předpokládejme, že d je takové injektivní zobrazení, které se navzájem zprava dělí s f. Potom podle Věty 42 $h_d = h_f$. Jelikož d je injektivní, i g_d je injekce, a tedy identita. Proto $d = h_d \circ g_d = h_d = h_f$. □

Lemma 45. *Nechť f je zobrazení. Potom g_f je jediné surjektivní zobrazení, které se navzájem zleva dělí s f.*

Důkaz. Předpokládejme, že d je takové zobrazení, které se navzájem zleva dělí s f. Potom podle Věty 43 $g_d = g_f$. Jelikož d je surjektivní, h_d je podle Lemma 16 také surjektivní. Potom h_d je surjektivní i injektivní zobrazení zachovávající pořadí, a tedy identita. Proto $d = h_d \circ g_d = g_d = g_f$. □

4.2 Největší společní dělitelé

V sekci zabývající se teorií čísel jsme pro dvě čísla definovali jejich největšího společného dělitele, kterého intuitivně chápeme jako největší číslo, které dělí obě stanovená čísla. Tímto způsobem však na největšího společného dělitele dvou zobrazení pohlížet nebudeme, namísto toho ho definujeme podobně jako ve Větě 6.

Definice 46. *Nechť f, g jsou zobrazení, $f\colon \underline{n} \to \underline{m}, g\colon \underline{k} \to \underline{m}$. Největším pravým společným dělitelem těchto zobrazení nazveme zobrazení d, které zprava dělí obě zobrazení f, g a každý společný pravý dělitel zobrazení f, g zprava dělí zobrazení d.*

Definice 47. *Nechť f, g jsou zobrazení, $f\colon \underline{n} \to \underline{m}, g\colon \underline{n} \to \underline{k}$. Největším levým společným dělitelem těchto zobrazení nazveme zobrazení d, které zleva dělí obě zobrazení f, g a každý společný levý dělitel zobrazení f, g zleva dělí zobrazení d.*

Zde už můžeme vidět, že největší společný dělitel dvou zobrazení, ať pravý, či levý, nemusí zdaleka být jen jediný. Naopak těchto dělitelů bude nekonečně mnoho, což je důsledek následujících vět.

Definice 48. *Nechť f, g jsou zobrazení, $f\colon \underline{n} \to \underline{m}, g\colon \underline{k} \to \underline{m}$. Označme b jedinou bijekci $\underline{a} \to \mathrm{im}f \cup \mathrm{im}g$, kde $\underline{a}$ je konečný ordinál. Dále označme i inkluzi $\mathrm{im}f \cup \mathrm{im}g \hookrightarrow \underline{m}$ a $\psi_{fg} = i \circ b$.*

$$\begin{tikzcd}
 & & \underline{m} & & \\
\underline{n} \arrow[urr, bend left, "f"] \arrow[dr, two heads, "f|_{\mathrm{im}}"'] & & & & \underline{k} \arrow[ull, bend right, "g"'] \arrow[dl, two heads, "g|_{\mathrm{im}}"] \\
 & \mathrm{im}f \arrow[uur, hook, bend left, "i_f"] \arrow[dr, hook] & & \mathrm{im}g \arrow[uul, hook, bend right, "i_g"'] \arrow[dl, hook] & \\
\underline{a} \arrow[rr, tail, two heads, "b"'] \arrow[uuurr, dashed, "\psi_{fg}"'] & & \mathrm{im}f \cup \mathrm{im}g \arrow[uuu, hook, bend right, "i"'] & &
\end{tikzcd}$$

Věta 49. *Nechť f, g jsou zobrazení, $f\colon \underline{n} \to \underline{m}, g\colon \underline{k} \to \underline{m}$. Potom ψ_{fg} je největším společným pravým dělitelem zobrazení f a g.*

Důkaz.

(i) Dokažme, že ψ_{fg} je společným pravým dělitelem zobrazení f a g. Platí $\mathrm{im}f \subseteq$ $\subseteq \mathrm{im}f \cup \mathrm{im}g = \mathrm{im}i = \mathrm{im}\psi_{fg}$, poslední rovnost plyne z Lemma 24. Proto podle Lemma 40 je ψ_{fg} pravým dělitelem f. Obdobně pro g.

(ii) Dále ukažme, že ψ_{fg} je největším pravým dělitelem. Uvažme libovolného společného pravého dělitele d zobrazení f a g. Potom z Lemma 40 plyne $\mathrm{im}f \cup \mathrm{im}g \subseteq \mathrm{im}d$, tedy $\mathrm{im}\psi_{fg} \subseteq \mathrm{im}d$ a d zprava dělí ψ_{fg}.

□

Věta 50. *Nechť $f\colon \underline{a} \to \underline{c}$ a $g\colon \underline{b} \to \underline{c}$ jsou dvě zobrazení. Zobrazení $d\colon \underline{n} \to \underline{c}$ je jejich největší společný pravý dělitel právě tehdy, když $\mathrm{im}d = \mathrm{im}f \cup \mathrm{im}g$.*

Důkaz.

(i) Dokažme pravou implikaci. Zobrazení d dělí zprava f, respektive g, proto podle Lemma 40 $\mathrm{im}d \supseteq \mathrm{im}f$ a $\mathrm{im}d \supseteq \mathrm{im}g$, a tedy $\mathrm{im}d \supseteq \mathrm{im}f \cup \mathrm{im}g$.
Jelikož d je největší společný dělitel, dělí ho zprava i zobrazení ψ_{fg} z předcházející věty. Proto podle Lemma 40 $\mathrm{im}\psi_{fg} \supseteq \mathrm{im}d$, respektive $\mathrm{im}f \cup \mathrm{im}g \supseteq \mathrm{im}d$.
Z poznatků $\mathrm{im}d \supseteq \mathrm{im}f \cup \mathrm{im}g$ a $\mathrm{im}f \cup \mathrm{im}g \supseteq \mathrm{im}d$ pak vyplývá rovnost $\mathrm{im}d = \mathrm{im}f \cup \mathrm{im}g$.

(ii) Dokažme levou implikaci. Nechť platí $\mathrm{im}d = \mathrm{im}f \cup \mathrm{im}g$. Pak i $\mathrm{im}d \subseteq \mathrm{im}f \cup$ $\cup \mathrm{im}g = \mathrm{im}\psi_{fg}$. Proto d dělí zprava ψ_{fg}, a tedy dělí f i g a d je tedy společným dělitelem.

Z inkluze $\mathrm{im} f \cup \mathrm{im} g \subseteq \mathrm{im} d$ plyne, že ψ_{fg} dělí d, a tedy d je také největším společným dělitelem.

□

V tomto bodě už je zřejmé, že největších společných pravých dělitelů dvou zobrazení je nekonečně mnoho. Jedinou podmínkou, kterou klademe, je právě $\mathrm{im} d = \mathrm{im} f \cup \mathrm{im} g$ a lze si snadno rozmyslet, že dokážeme sestrojit libovolně mnoho zobrazení s daným obrazem. Pokud ale stanovíme podmínku, že chceme nalézt největšího společného pravého dělitele, který je injektivní, pak existuje jediný, jak ukazuje následující věta.

Věta 51. *Největší injektivní společný pravý dělitel zobrazení $f\colon \underline{a} \to \underline{c}$ a $g\colon \underline{b} \to \underline{c}$ existuje jednoznačně a je jím zobrazení ψ_{fg}.*

Důkaz. Podle Věty 49 je zobrazení ψ_{fg} největším společným dělitelem f a g. Z definice je injektivní. Pokud by existoval i nějaký jiný injektivní největší společný pravý dělitel d, musel by se navzájem dělit s ψ_{fg}. Z Lemma 44 ale vyplývá $d = h_{\psi_{fg}} = \psi_{fg}$. □

V následující části budeme charakterizovat největšího společného levého dělitele. Postupovat budeme velice analogicky jako v případě pravého dělitele a jednotlivé věty dostaneme pouze duální záměnou pojmů. Tu lze vysledovat i na přiložených diagramech – místo obrazů využíváme koobrazy, injekce zaměňujeme za surjekce, ale hlavní struktura zůstává stále stejná.

Definice 52. *Nechť f, g jsou zobrazení, $f\colon \underline{n} \to \underline{m}, g\colon \underline{n} \to \underline{k}$. Označme $(f \cap g)|_{\mathrm{coim}}$ surjekci $\underline{n} \to \mathrm{coim} f \cap g$ takovou, že $(f \cap g)|_{\mathrm{coim}}(x) = [x]$, a b jedinou bijekci $\mathrm{coim} f \cap$ $\cap\, g \to \underline{a}$. Zobrazení χ_{fg} definujeme jako $b \circ (f \cap g)|_{\mathrm{coim}}$.*

$$\begin{tikzcd}
 & & \underline{n} \arrow[dll, bend right, "f"'] \arrow[drr, bend left, "g"] \arrow[ddl, two heads, "f|_{\mathrm{coim}}"'] \arrow[ddr, two heads, "g|_{\mathrm{coim}}"] \arrow[ddd, two heads, "f\cap g|_{\mathrm{coim}}"] \arrow[dddll, dashed, bend right, "\chi_{fg}"'] & & \\
\underline{m} & & & & \underline{k} \\
 & \mathrm{coim} f \arrow[ul, tail, "j_f"] & & \mathrm{coim} g \arrow[ur, tail, "j_g"'] & \\
\underline{a} & & \mathrm{coim} f \cap g \arrow[ll, tail, two heads, "b"] \arrow[ul, two heads] \arrow[ur, two heads] & &
\end{tikzcd}$$

Vidíme, že zobrazení χ_{fg} je jakožto bijekce po surjekci surjektivní a aby dva prvky měly stejný obraz, musí být v relaci jak podle zobrazení f, tak podle g, tedy $\sim_{\chi_{fg}} = (\sim_f \cap \sim_g)$.

Věta 53. *Nechť f, g jsou zobrazení, $f: \underline{n} \to \underline{m}, g: \underline{n} \to \underline{k}$. Pak zobrazení χ_{fg} je jejich největším společným levým dělitelem.*

Důkaz. Ukažme, že zobrazení χ_{fg} je levým dělitelem zobrazení f a g. Vidíme, že $\chi_{fg}(a') = \chi_{fg}(a'') \Leftrightarrow a' \sim_f a'' \wedge a' \sim_g a'' \Leftrightarrow f(a') = f(a'') \wedge g(a') = g(a'')$, a tedy podle Lemma 41 χ_{fg} dělí zobrazení f a g.
Ukažme, že je největším společným levým dělitelem. Uvažme zobrazení d, které je společným levým dělitelem f a g. Pak podle Lemma 41 plyne $\sim_d \subseteq \sim_f \wedge \sim_d \subseteq \sim_g$, tedy $\sim_d \subseteq (\sim_f \cap \sim_g)$. Z definice plyne $\sim_f \cap \sim_g \subseteq \sim_{\chi_{fg}}$. Vidíme tedy, že $\sim_d \subseteq \sim_{\chi_{fg}}$, a tedy d zleva dělí χ_{fg}. □

Věta 54. *Nechť $f: \underline{a} \to \underline{b}$ a $g: \underline{a} \to \underline{c}$ jsou zobrazení. Zobrazení $d: \underline{a} \to \underline{n}$ je jejich největším společným levým dělitelem, právě pokud platí $\sim_d = (\sim_f \cap \sim_g)$.*

Důkaz.

(i) Dokažme levou implikaci, tedy že pokud dané $d: \underline{a} \to \underline{n}$ splňuje podmínku $\sim_d = (\sim_f \cap \sim_g)$, je největším společným levým dělitelem.
Podle Lemma 41 je d levým dělitelem zobrazení f i g. Nechť d' je společným levým dělitelem f a g. Pak podle Lemma 41 platí $\sim_{d'} \subseteq (\sim_f \cap \sim_g)$, a tedy $\sim_{d'} \subseteq \sim_{d'}$ a zobrazení d' dělí podle Lemma 41 zobrazení d.

(ii) Dokažme pravou implikaci, tedy že každý největší společný levý dělitel splňuje $\sim_d = (\sim_f \cap \sim_g)$.
Podle Lemma 41 pro největšího společného dělitele musí platit $\sim_d \subseteq (\sim_f \cap \sim_g)$. Jestliže je zobrazení d největší společný dělitel, pak zobrazení χ_{fg} dělí d. Potom podle Lemma 41 $\sim_{\chi_{fg}} \subseteq \sim_d$, a tedy $(\sim_f \cap \sim_g) \subseteq \sim_d$.
Máme tedy $\sim_d \subseteq (\sim_f \cap \sim_g)$ a $(\sim_f \cap \sim_g) \subseteq \sim_d$. Odtud $(\sim_f \cap \sim_g) = \sim_d$.

□

Z této věty, podobně jako z Věty 50, vidíme, že i levých největších společných dělitelů je nekonečně mnoho, neboť neklademe žádné podmínky na velikost množiny $\underline{n}$. Surjektivní největší společný levý dělitel ale existuje jen jediný:

Věta 55. *Největší surjektivní společný levý dělitel zobrazení $f: \underline{a} \to \underline{b}$ a $g: \underline{a} \to \underline{c}$, existuje jednoznačně a je jím zobrazení χ_{fg}.*

Důkaz. Podle Věty 53 je zobrazení χ_{fg} největším společným levým dělitelem f a g a zároveň je z definice surjektivní.
Uvažme nyní největšího společného levého surjektivního dělitele d zobrazení f a g. Potom se podle Věty 54 zobrazení d a χ_{fg} dělí navzájem. Z Lemma 45 ale vyplývá $d = g_{\chi_{fg}} = \chi_{fg}$. □

4.3 Nejmenší společné násobky

Nejmenší společné násobky definujeme zcela analogicky k největším společným dělitelům. Opět ve formulaci vět i důkazů vycházíme z předchozí sekce, pouze vhodně zaměňujeme pojmy. I násobky nebudou obecně jednoznačné a budeme muset doplnit podmínku injektivity/surjektivity.

Definice 56. *Nechť f, g jsou zobrazení, $f\colon \underline{n} \to \underline{m}, g\colon \underline{k} \to \underline{m}$. Nejmenším pravým společným násobkem těchto zobrazení nazveme zobrazení ν takové, že obě zobrazení f, g zprava dělí ν a zobrazení ν zprava dělí každý společný pravý násobek zobrazení f, g.*

Definice 57. *Nechť f, g jsou zobrazení, $f\colon \underline{n} \to \underline{m}, g\colon \underline{n} \to \underline{k}$. Nejmenším levým společným násobkem těchto zobrazení nazveme zobrazení ν takové, že obě zobrazení f, g zleva dělí ν a zobrazení ν zleva dělí každý společný pravý násobek zobrazení f, g.*

Definice 58. *Nechť f, g jsou zobrazení, $f\colon \underline{n} \to \underline{m}, g\colon \underline{k} \to \underline{m}$. Označme b jedinou bijekci $\underline{a} \to \mathrm{im} f \cap \mathrm{im} g$, kde $\underline{a}$ je konečný ordinál, a i inkluzi $\mathrm{im} f \cap \mathrm{im} g \hookrightarrow \underline{m}$. Dále označme $\phi_{fg} = i \circ b$.*

$$
\begin{tikzcd}
 & & \underline{m} & & \\
\underline{n} \arrow[urr, bend left, "f"] \arrow[dr, two heads, "f|_{\mathrm{im}}"'] & & & & \underline{k} \arrow[ull, bend right, "g"'] \arrow[dl, two heads, "g|_{\mathrm{im}}"] \\
 & \mathrm{im} f \arrow[uur, hook, bend left, "i_f"] & & \mathrm{im} g \arrow[uul, hook, bend right, "i_g"'] & \\
\underline{a} \arrow[rr, tail, two heads, "b"'] \arrow[uuurr, dashed, "\phi_{fg}"] & & \mathrm{im} f \cap \mathrm{im} g \arrow[ul, hook] \arrow[ur, hook] \arrow[uuu, hook, "i"] & &
\end{tikzcd}
$$

Věta 59. *Nechť f, g jsou zobrazení, $f\colon \underline{n} \to \underline{m}, g\colon \underline{k} \to \underline{m}$. Potom je ϕ_{fg} nejmenším společným pravým násobkem zobrazení f a g.*

Důkaz.

(i) Dokažme, že ϕ_{fg} je společným pravým násobkem zobrazení f a g. Zřejmě $\mathrm{im}\phi_{fg} = \mathrm{im} f \cap \mathrm{im} g$. Zároveň $\mathrm{im} f \cap \mathrm{im} g \subseteq \mathrm{im} f$, a proto $\mathrm{im}\phi_{fg} \subseteq \mathrm{im} f$. A tedy podle Lemma 40 zobrazení f dělí ϕ_{fg}. Analogicky pak i g dělí ϕ_{fg}.

(ii) Dále ukažme, že ϕ_{fg} je nejmenším pravým násobkem. Uvažme nějaké zobrazení ν, které je společným násobkem f a g. Pak podle Lemma 40 platí $\mathrm{im}\nu \subseteq \mathrm{im} f$ a $\mathrm{im}\nu \subseteq \mathrm{im} g$, a tedy $\mathrm{im}\nu \subseteq \mathrm{im} f \cap \mathrm{im} g$ neboli $\mathrm{im}\nu \subseteq \mathrm{im}\phi_{fg}$. Z čehož podle Lemma 40 vyplývá, že ϕ_{fg} dělí ν.

□

Věta 60. *Nechť* $f\colon \underline{a} \to \underline{c}$ *a* $g\colon \underline{b} \to \underline{c}$ *jsou dvě zobrazení. Zobrazení* $\nu\colon \underline{n} \to \underline{c}$ *je jejich nejmenší společný pravý násobek právě tehdy, když* $\mathrm{im}\nu = \mathrm{im}f \cap \mathrm{im}g$.

Důkaz.

(i) Dokažme levou implikaci. Zřejmě platí $\mathrm{im}\nu \subseteq imf$ i $\mathrm{im}\nu \subseteq img$, a proto f, g zprava dělí ν, tedy ν je pravý násobek f, g. Nyní uvažme libovolný jiný společný násobek zobrazení f a g, zobrazení ν'. Aby ν' bylo násobkem f i g, musí platit $\mathrm{im}\nu' \subseteq \mathrm{im}f$, respektive $\mathrm{im}\nu' \subseteq \mathrm{im}g$, tedy $\mathrm{im}\nu' \subseteq \mathrm{im}f \cap \mathrm{im}g = \mathrm{im}\nu$. A tedy ν zprava dělí ν'.

(ii) Dokažme pravou implikaci. Víme, že zobrazení ϕ_{fg} je pravým násobkem f i g. Jelikož zobrazení ν je největším společným pravým násobkem, musí být pravým dělitelem zobrazení ϕ_{fg}. Podle Lemma 40 tedy platí $\mathrm{im}\phi_{fg} \subseteq \mathrm{im}\nu$, respektive $\mathrm{im}f \cap \mathrm{im}g \subseteq \mathrm{im}\nu$.
Zároveň, jelikož ν je násobkem f, respektive g, podle Lemma 40 $\mathrm{im}\nu \subseteq \mathrm{im}f$, respektive $\mathrm{im}\nu \subseteq \mathrm{im}g$, tedy $\mathrm{im}\nu \subseteq \mathrm{im}f \cap \mathrm{im}g$.
Máme tedy $\mathrm{im}f \cap \mathrm{im}g \subseteq \mathrm{im}\nu$ a zároveň $\mathrm{im}\nu \subseteq \mathrm{im}f \cap \mathrm{im}f$. Odtud už plyne kýžená rovnost $\mathrm{im}\nu = \mathrm{im}f \cap \mathrm{im}g$.

□

Věta 61. *Nechť* $f\colon \underline{a} \to \underline{c}$ *a* $g\colon \underline{b} \to \underline{c}$ *jsou dvě zobrazení. Jejich nejmenší injektivní společný pravý násobek existuje jednoznačně a je jím zobrazení* ϕ_{fg}.

Důkaz. Podle Věty 59 je ϕ_{fg} nejmenší společný pravý násobek. Z definice je jakožto injekce po bijekci injektivní. Uvažme zobrazení $\nu\colon \underline{k} \to \underline{c}$, které je injektivním nejmenším společným násobkem f a g. Potom se zobrazení ν a ϕ_{fg} dělí navzájem a podle Lemma 44 platí $\nu = h_{\phi_{fg}} = \phi_{fg}$.

□

Definice 62. *Nechť* f, g *jsou zobrazení,* $f\colon \underline{n} \to \underline{m}, g\colon \underline{n} \to \underline{k}$. *Označme* $f \cup g|_{\mathrm{coim}}$ *surjekci* $\underline{n} \to \mathrm{coim}f \cup g$ *takovou, že* $f \cup g|_{\mathrm{coim}}(x) = [x]$, *a* b *jedinou bijekci* $\mathrm{coim}f \cap g \to \underline{a}$. *Zobrazení* ξ_{fg} *definujeme jako* $b \circ f \cup g|_{\mathrm{coim}}$.

$$\begin{tikzcd}
 & & \underline{n} \arrow[dll, "f"'] \arrow[drr, "g"] \arrow[ddl, "f|_{\mathrm{coim}}"'] \arrow[ddr, "g|_{\mathrm{coim}}"] \arrow[ddd, "f\cup g|_{\mathrm{coim}}"] \arrow[dddll, dashed] & & \\
\underline{m} & & & & \underline{k} \\
 & \mathrm{coim}f \arrow[ul, "i'_f"] & & \mathrm{coim}g \arrow[ur, "i'_g"'] & \\
\underline{a} & & \mathrm{coim}f \cup g \arrow[ll, "b"] \arrow[ul, "\xi_{fg}"] \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

Jako složení dvou surjekcí je zobrazení ξ_{fg} surjektivní. Zároveň vidíme, že dva prvky mají stejný obraz, právě když $f(a') = f(a'') \vee g(a') = g(a'')$.

Věta 63. *Nechť f, g jsou zobrazení, $f \colon \underline{n} \to \underline{m}, g \colon \underline{k} \to \underline{m}$. Potom je ξ_{fg} nejmenším společným levým násobkem zobrazení f a g.*

Důkaz. Dokažme, že ξ_{fg} je společným levým násobkem zobrazení f a g. Z definice platí $\xi_{fg}(a') = \xi_{fg}(a'') \Leftrightarrow f(a') = f(a'') \vee g(a') = g(a'')$, tedy $\sim_{\xi_{fg}} = (\sim_f \cup \sim_g)$, a tedy $\sim_f$, respektive $\sim_g$, $\subseteq \sim_{\xi_{fg}}$. Podle Lemma 41 je zobrazení ξ_{fg} společným násobkem zobrazení f a g.
Dále ukažme, že ξ_{fg} je nejmenším levým násobkem. Uvažme nějaký společný levý násobek ν. Podle Lemma 41 $(\sim_f \cup \sim_g) \subseteq \sim_\nu$ neboli $\sim_{\xi_{fg}} \subseteq \sim_\nu$, a tedy podle Lemma 41 zobrazení ξ_{fg} dělí ν. □

Věta 64. *Nechť $f \colon \underline{a} \to \underline{b}$ a $g \colon \underline{a} \to \underline{c}$ jsou zobrazení. Zobrazení $\nu \colon \underline{a} \to \underline{n}$ je nejmenším společným levým násobkem, právě pokud platí $\sim_\nu = (\sim_f \cup \sim_g)$.*

Důkaz.

(i) Dokažme levou implikaci. Podle Lemma 41 jsou zobrazení f a g zřejmě levými děliteli ν. Nechť zobrazení ν' je libovolný násobek f a g. Pak z Lemma 41 plyne $\sim_f \subseteq \sim_{\nu'}$, respektive $\sim_g \subseteq \sim_{\nu'}$, tedy $(\sim_f \cup \sim_g) \subseteq \sim_{\nu'}$ neboli $\sim_\nu \subseteq \sim_{\nu'}$. Odtud vidíme, že zobrazení ν zleva dělí zobrazení ν', a tedy ν je podle definice nejmenším společným levým násobkem f a g.

(ii) Dokažme pravou implikaci. Aby ν bylo nejmenším společným levým násobkem zobrazení f a g, musí být levým násobkem obou z nich, a tedy z Lemma 41 platí $(\sim_f \cup \sim_g) \subseteq \sim_\nu$.
Zobrazení ξ_{fg} je levým násobkem zobrazení f a g. Proto z definice musí platit ν dělí ξ_{fg}, tedy $\sim_\nu \subseteq \sim_{\xi_{fg}}$. Odtud plyne $\sim_\nu \subseteq (\sim_f \cup \sim_g)$.
Máme tedy $(\sim_f \cup \sim_g) \subseteq \sim_\nu$ a zároveň $\sim_\nu \subseteq (\sim_f \cup \sim_g)$. Vidíme, že $\sim_\nu = (\sim_f \cup \cup \sim_g)$.

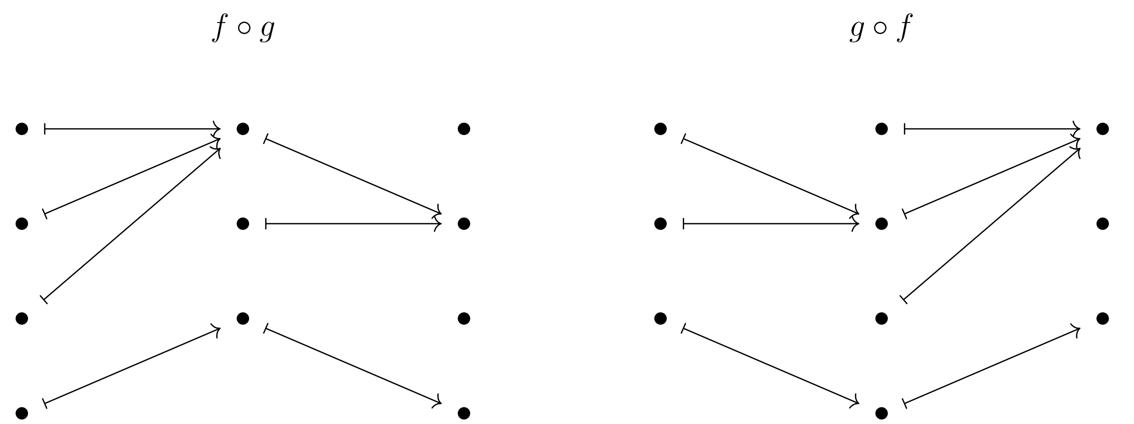
□

Věta 65. *Nechť $f \colon \underline{a} \to \underline{b}$ a $g \colon \underline{a} \to \underline{c}$ jsou zobrazení. Jejich nejmenší surjektivní společný levý násobek existuje jednoznačně a je jím zobrazení ξ_{fg}.*

Důkaz. Podle Věty 63 je zobrazení ξ_{fg} nejmenším společným levým násobkem f a g. Uvažme nyní nějaký surjektivní nejmenší společný levý násobek ν zobrazení f a g. Potom víme, že zobrazení ν a ξ_{fg} se dělí navzájem, a tedy podle Lemma 45 platí $\nu = g_{\xi_{fg}} = \xi_{fg}$. □

5 Srovnání dělitelnosti čísel a zobrazení

Nejvýraznějším rozdílem mezi klasickou dělitelností čísel a dělitelností zobrazení definovanou v této práci je nutnost rozlišovat mezi pravou a levou dělitelností. Tento rozdíl je způsoben tím, že operace skládání zobrazení není na rozdíl od násobení komutativní. Proto i část této kapitoly rozdělíme na dvě sekce, které se budou věnovat zmíněným dvěma případům. Na obrázku můžeme vidět rozdíl mezi složeními dvou zobrazení v různém pořadí:



Povšimněme si, že aby bylo možné dělitelnost zobrazení vůbec uvažovat, musejí obě zobrazení sdílet alespoň jednu z množin, mezi nimiž zobrazujeme. Nemá tedy smysl uvažovat nad dělitelností pro obecná dvě zobrazení. Když uvážíme množinu všech zobrazení z, respektive do jistého konečného ordinálu, můžeme najít neutrální prvek vůči operaci skládání – vždy jím bude identita na dané množině. Ve světě čísel toto odpovídá číslu 1, jakožto neutrálnímu prvku vzhledem k násobení. Podobně jako číslo 1 dělí libovolné číslo, platí, že identita dělí všechna zobrazení.

Na rozdíl od teorie čísel máme pro zobrazení k dispozici pouze jednu operaci, a nenabízí se tedy možnost hledat analogii k větě o dělení se zbytkem ani dalším navazujícím konceptům, se kterými se v teorii čísel běžně pracuje.

Poznamenejme, že na jednoznačnost jsme narazili velice zřídka, přestože jsme pracovali se zobrazeními mezi konečnými ordinály, která zachovávají pořadí, tedy s velice úzkou množinou.

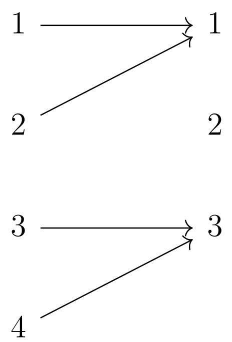
Za zmínku jistě stojí i význam Věty 37 o jednoznačném rozkladu zobrazení na injekci po surjekci, který může v souvislosti s teorií čísel připomínat základní větu aritmetiky o rozkladu na prvočinitele. (Tuto podobnost je ovšem potřeba brát s rezervou, neboť daná zobrazení nelze považovat za analogie prvočísel. Těmi se zabývá např. kniha *Categories for the Working Mathematician* (2, s. 177) a popisuje jednoznačný rozklad zobrazení na dále nedělitelné „prvočinitele“.) Pro každé zobrazení tak dostáváme dvě zobrazení, která mají každé význam v různých kontextech. Vzhledem k tomu, že jednoznačnost dělitelnosti zobrazení nastává při podmínce surjektivity/injektivity, je toto tvrzení užitečné a ukazuje nám, která zobrazení budou mít z pohledu pravé/levé dělitelnosti podobné vlastnosti, jak můžeme vidět ve Větách 42 a 43.

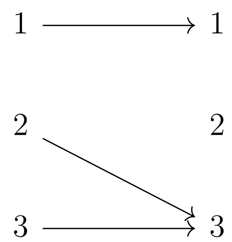
Díky práci s obrazy a koobrazy vidíme nejen dualitu mezi násobky a děliteli, ale i mezi pravou a levou dělitelností či injektivitou a surjektivitou. Mnohé věty jsou si proto strukturou velmi podobné, byť každá popisuje jiný koncept a pracuje s odlišnými objekty.

5.1 Pravá dělitelnost

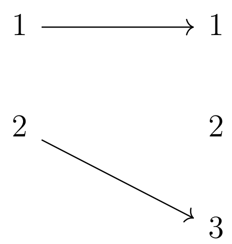
Už z Lemma 40 vidíme, že pravá dělitelnost závisí na obrazech zobrazení. Aby zobrazení d zprava dělilo f, musí d, intuitivně řečeno, poslat nějaký prvek do každého prvku im$f$. Tím budeme mít pojištěno, že při složení d zobrazí prvky právě tam, kam by je zobrazilo zobrazení f.

Jak už bylo zmíněno, dvě zobrazení, která se dělí navzájem, můžeme v jistých kontextech považovat za stejná, neboť většina jejich vlastností vychází z jejich obrazů. Například následující dvě zobrazení budou mít z pohledu pravé dělitelnosti podobné vlastnosti, protože mají stejný obraz, a tak se podle Věty 42 dělí navzájem.





To je důvod, proč na jednoznačnost narazíme jen zřídka. Na množinu, do níž zobrazujeme, ale klademe docela přísné nároky. Pokud tedy budeme hledat pouze injektivní zobrazení se zadaným obrazem, které navíc zachovává pořadí, bude jediné, jak nám říká Lemma 44. Na obrázku vidíme příklad jediného injektivního zobrazení do množiny $\underline{3}$, kde im $= \{1, 3\}$.

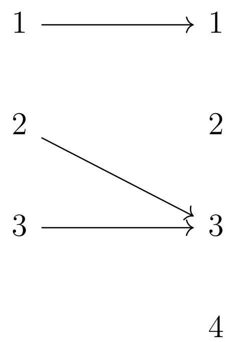


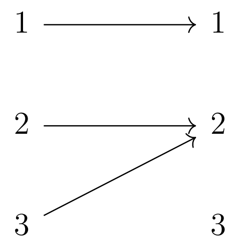
Všimněme si, že jde o zobrazení h_f v rozkladech zobrazení na obrázku výše podle Věty 37, které je z Věty 42 u obou zobrazení stejné. Proto i později budeme pro jednoznačnost klást podmínku na injektivitu zobrazení.

5.2 Levá dělitelnost

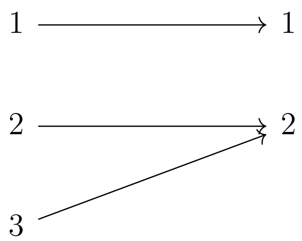
Levá dělitelnost pro zobrazení na rozdíl od pravé dělitelnosti nezávisí na obrazech zobrazení, nýbrž na jejich koobrazech, tedy na tom, které prvky daná zobrazení „scvaknou“ neboli pošlou na stejný obraz. Toto vidíme z Lemma 41 a stejně jako u pravé dělitelnosti na tuto podmínku můžeme nahlížet intuitivně – pokud zobrazení d dělí zleva zobrazení f, znamená to, že pokud f ztotožní nějaké dva prvky, musí je ztotožnit také d.

Podobně jako u pravé dělitelnosti si můžeme všimnout, že i tentokrát mnoho zobrazení lze z pohledu levé dělitelnosti považovat za stejná, protože budou mít stejné vlastnosti. Opět to budou ta, která se dělí navzájem. Například následující dvě:





Obě tato zobrazení se dělí navzájem podle Věty 43. Zobrazení h_f (tj. jediné surjektivní zobrazení, které se s těmito zobrazeními navzájem zleva dělí) je následující:



5.3 Jednoznačnost injektivních a surjektivních zobrazení

Jestliže se dvě zobrazení dělí navzájem a jedno z nich je největším společným dělitelem nějakých dvou zobrazení, pak jím je přímo z definice i druhé. Stejně to platí i pro nejmenší společné násobky. Pokud pro čísla definujeme největšího společného dělitele podle Věty 6, setkáváme se s podobným výsledkem. Stejně jako u čísel nepovažujeme za největšího společného dělitele i číslo k němu opačné, nemusíme ani v kontextu zobrazení k jednotlivým největším společným dělitelům přistupovat zvlášť. Namísto toho tedy klademe podmínku injektivity či surjektivity, a tedy podle Lemma 44 a Lemma 45 hledáme zobrazení h_f a g_f shodná pro všechny největší dělitele a nejmenší násobky.

5.4 Dualita mezi pravou a levou dělitelností

Podobnosti mezi pravou a levou dělitelností zobrazení jsme už několikrát zmiňovali, přesto bychom chtěli v této podkapitole ještě jednou celistvě popsat tyto souvislosti.

Protože operace skládání není komutativní, chovají se pravá a levá dělitelnost na první pohled naprosto odlišně. Tyto zjevné rozdíly lze vidět i v Lemma 40 a 41. Pokud bychom pracovali pouze s relacemi a neuvažovali koobrazy zobrazení, museli bychom k oběma dělitelnostem přistupovat zcela zvlášť. Koobrazy představují duální pojem k obrazům zobrazení, podobně jako průnik k sjednocení, surjekce k injekci a levá k pravé. Když se podíváme na diagramy v kapitolách 4.2 a 4.3, můžeme si všimnout, že oba zastávají analogickou pozici. Navíc Lemma 32 říká, že mezi obrazem a koobrazem vždy existuje bijekce, a tedy že se jedná o ten samý objekt, pouze popsaný ze dvou různých úhlů.

Náš přístup je výhodný v tom, že z kteréhokoliv diagramu lze jednoduše sestavit i ostatní pouhou záměnou surjekcí za injekce, obrazů za koobrazy a obrácením šipek. Tím získáváme formulace a důkazy důležitých vět téměř bez práce.

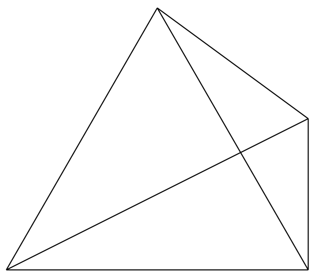
6 Geometrická interpretace dělitelnosti zobrazení

Se zobrazeními jsme doteď pracovali abstraktně. V této kapitole se pokusíme zobrazení vizualizovat a ukázat vlastnosti jejich dělitelnosti názorně na příkladech. Tato kapitola nemá za cíl představit nové poznatky, nýbrž přiblížit teoretické konstrukce z předchozích částí práce.

K vizualizaci nám budou sloužit takzvané n–simplexy, které si můžeme představit jako n–rozměrné útvary sestávající z $n+1$ bodů (tzv. vrcholů) pospojovaných hranami. Proto 0–simplex bude bod, 1–simplex úsečka, 2–simplex trojúhelník a tak dále. Analyticky můžeme n–simplex chápat jako podmnožinu $\mathbb{R}^n$.

Definice 66. *Nechť $n \in \mathbb{N}$, potom n–simplexem rozumíme množinu*

$$\{[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}] \colon x_i \in [0,1] \wedge x_1 + x_2 + \cdots + x_{n+1} = 1\}.(2, s.\ 178)$$



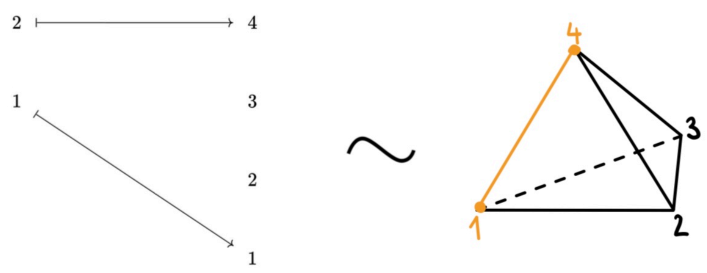
Obrázek 1: 3–simplex

Simplexy jsou, podobně jako konečné ordinály, zadány pouze množinou n bodů, tj. vrcholů. Místo abstraktního ordinálu $\underline{n} = \{1, \ldots, n\}$ tedy můžeme uvažovat $(n-1)$–simplex, kde vrcholy reprezentují jednotlivé prvky; hrany, respektive stěny (a obecně ve vyšších dimenzích další podsimplexy) představují nějaký vztah mezi nimi. Podívejme se na tuto interpretaci z pohledu obou dělitelností.

6.1 Pravá dělitelnost geometricky

Už víme, že z hlediska pravé dělitelnosti záleží především na obrazech zobrazení. Budeme uvažovat pouze zobrazení zachovávající pořadí, která jsou injektivní, a tedy je jejich obraz určuje jednoznačně. Potom na každé zobrazení $f : \underline{a} \to \underline{b}$ můžeme pohlížet jako na inkluzi jednoho ordinálu do druhého, z hlediska naší interpretace tedy i inkluzi $(a-1)$–simplexu do $(b-1)$–simplexu.

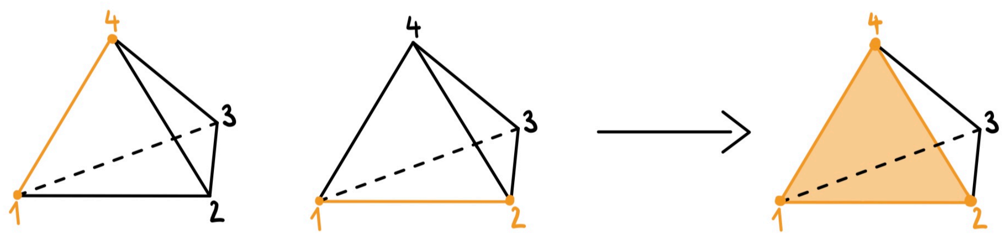
To znamená, že každé zobrazení f si lze představit jako výběr podsimplexu reprezentujícího obraz zobrazení f. Na následujícím obrázku vidíme příklad zobrazení $\underline{2} \to \underline{4}$ a jeho geometrickou interpretaci.



Obrázek 2: Geometrická interpretace (pravá) zobrazení $\underline{2} \to \underline{4}$

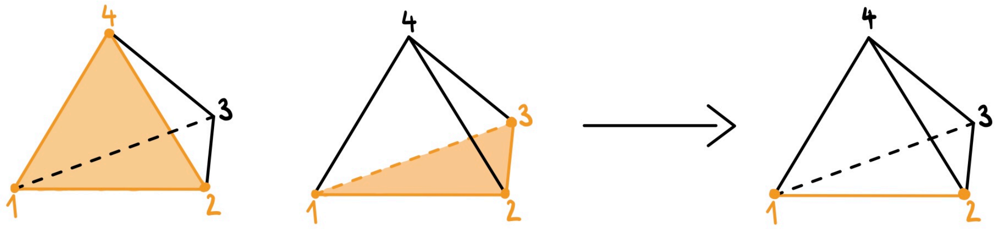
Když hledáme největšího společného dělitele d dvou zobrazení f' a f'' do množiny $\underline{a}$, chceme nejprve, aby d dělilo obě zobrazení. Podle Lemma 40 musí obrazy f' a f'' být podmnožinami obrazu d, geometricky tedy hledáme podsimplex obsahující oba vybrané (zvýrazněné) podsimplexy f' a f''.

Aby námi zvolený simplex d reprezentoval *největšího* dělitele, musí dělit všechny ostatní společné dělitele, tedy být podmnožinou každého podsimplexu obsahujícího oba podsimplexy f' a f''. Podsimplex d je tedy „sjednocením" podsimplexů f' a f''. Přesněji řečeno, podsimplex d dostaneme jako podsimplex zadaný vrcholy z obou podsimplexů f' a f'', jak znázorňuje následující obrázek. Tímto dostáváme geometrickou interpretaci Věty 50.



Obrázek 3: Největší společný pravý dělitel

Při hledání nejmenšího společného pravého násobku postupujeme analogicky. Je patrné, že v této duální situaci bude namísto sjednocení hrát roli průnik množin; nejmenším společným násobkem zobrazení f' a f'' je průnik jejich podsimplexů, který opět tvoří podsimplex. Tím dostáváme geometrickou interpretaci Věty 60.

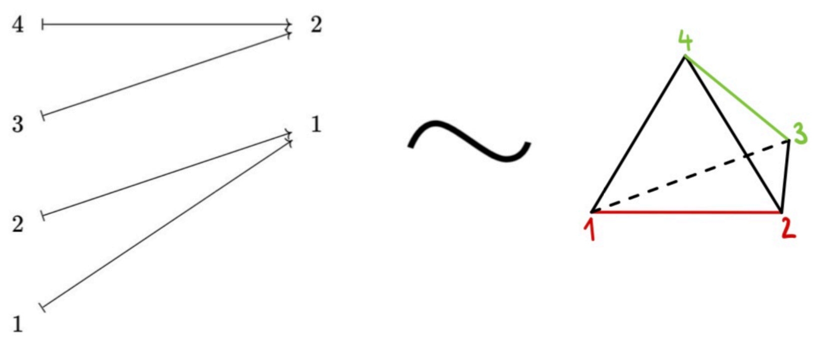


Obrázek 4: Nejmenší společný pravý násobek

6.2 Levá dělitelnost geometricky

Když zkoumáme vlastnosti levé dělitelnosti pro konečná zobrazení, je pro nás zásadní, které vzory mají stejný obraz. Dokázali jsme, že pro pochopení a práci se zobrazením z hlediska levé dělitelnosti nám stačí uvažovat pouze surjektivní zobrazení, a na ta se tedy nyní zaměříme.

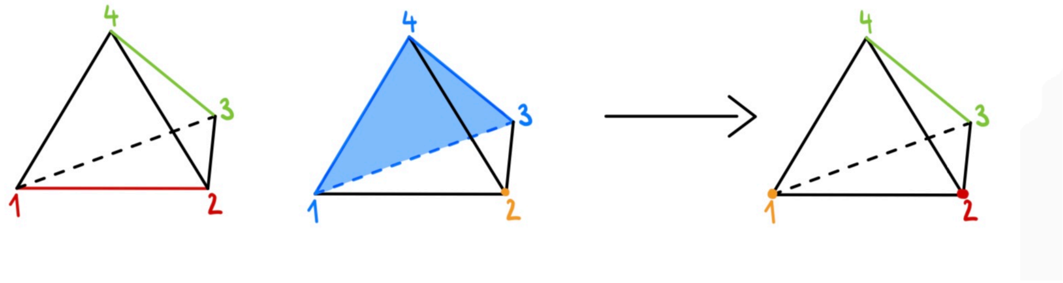
Uvažujme surjektivní zobrazení $f\colon \underline{a} \to \underline{b}$. Toto zobrazení budeme geometricky interpretovat na $(a-1)$–simplexu pomocí koobrazu f. Koobraz zobrazení f je rozdělením množiny vzorů na podmnožiny, zobrazení f můžeme vnímat jako rozdělení $(a-1)$–simplexu na množinu b disjunktních podsimplexů. Tyto podsimplexy budou odpovídat jednotlivým třídám, tedy vrcholy v daném podsimplexu budou reprezentovat prvky, které mají v zobrazení f stejný obraz.



Obrázek 5: Geometrická interpretace (levá) zobrazení $\underline{4} \to \underline{2}$

Z hlediska levé dělitelnosti zobrazení f interpretujeme jako rozklad simplexu na disjunktní podsimplexy. Ukážeme, jak lze pomocí této geometrické interpretace pohlížet na levé největší společné dělitele a nejmenší společné násobky. Pro přehlednost uvažujme obarvení vrcholů simplexu, kterým reprezentujeme surjektivní zobrazení f, tak, že každému z podsimplexů odpovídajících rozdělení podle f přiřadíme unikátní barvu. Největším společným levým dělitelem dvou obarvení podle f'

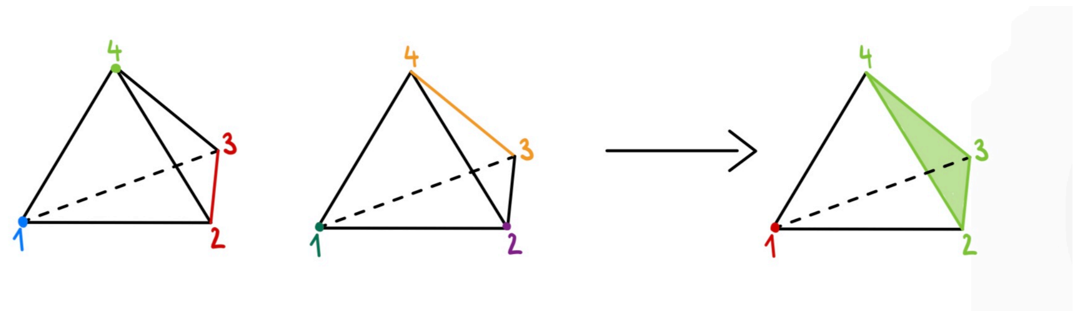
a f'' pak bude obarvení d zkonstruované následovně: dva vrcholy budou mít stejnou barvu právě tehdy, když měly stejnou barvu jak v obarvení f', tak i v obarvení f''.



Obrázek 6: Největší společný levý dělitel

Obarveními se nám podařilo geometricky interpretovat neintuitivní pojem kobrazu zobrazení a předchozí diskuze interpretuje Větu 54. Můžeme si všimnout, že jde v podstatě o jistý typ průniku jednotlivých obarvení, což odpovídá dualitě mezi pravou a levou dělitelností i podmínkám popsaným v předchozích kapitolách práce. Podobně jako kritéria dělitelnosti byla pro levou dělitelnost komplikovanější než ta pro pravou dělitelnost, i geometrická interpretace je v tomto případě o něco méně intuitivní.

Analogicky potom můžeme nalézt i jejich nejmenší společný násobek, tentokrát však podle pravidla: stejnou barvou na novém simplexu obarvíme právě ty dvojice vrcholů, které mají stejnou barvu alespoň v jednom z obarvení f' a f''. Dostáváme interpretaci Věty 64.



Obrázek 7: Nejmenší společný levý násobek

7 Závěr

Cílem práce bylo definovat dělitelnost pro konečná zobrazení a srovnat její vlastnosti s vlastnostmi klasické dělitelnosti. Dělitelnost jsme definovali pomocí operace skládání zobrazení. Jelikož skládání není komutativní, rozlišujeme mezi pravou a levou dělitelností.

Zaměřili jsme se zejména na nalezení největších společných dělitelů a nejmenších společných násobků zobrazení a zjistili jsme, že v mnoha ohledech se chovají podobně jako v teorii čísel. Analogicky jako u klasické dělitelnosti pracujeme zejména s přirozenými čísly, v naší práci jsme ukázali, že můžeme pracovat pouze se surjektivními/injektivními zobrazeními, čímž jsme dospěli k jednoznačnosti. Musíme si ale uvědomit, že kromě podmínky injektivity/surjektivity klademe na zobrazení ještě další nároky – uvažujeme pouze zobrazení mezi konečnými ordinály, která zachovávají pořadí. Pokud bychom se zaměřovali na obecnější zobrazení, na jednoznačnost bychom nenarazili vůbec. Přesto by nebyl problém práci zobecnit i pro jiné množiny.

Díky popsané dualitě mezi obrazy a koobrazy, průnikem a sjednocením množin a otáčením šipek byl postup hledání všech čtyř konstrukcí velice analogický. Zásluhou chytré práce s grafickým znázorněním jsme získávali návod na sestrojení odpovídajících zobrazení v různých kontextech.

V poslední části jsme zobrazení interpretovali pomocí simplexů s cílem přiblížit čtenáři vlastnosti jednotlivých zkoumaných objektů a intuitivně popsat jejich konstrukci.

Ukázalo se, že námi definovaná dělitelnost vede k zajímavým výsledkům a jsme schopni nalézt mnohé analogie k teorii čísel. Mohlo by být hodno dalšího zkoumání pokusit se definovat dělitelnost i pro jiné množiny a operace.

Seznam literatury

[1] HORÁK, Pavel. *Základy matematiky* [online]. Brno: Masarykova univerzita, 2006 [cit. 26. 3. 2023]. Dostupné z:

`https://is.muni.cz/el/ped/podzim2011/MA2BP_PAL1/Algebra-skripta.pdf.`

[2] MAC LANE, Saunders. *Categories for the Working Mathematician.* New York: Springer, 1971. ISBN 0–387–90035–7.

[3] RŮŽIČKA, Pavel. *Divisibility in commutative monoids* [online]. Praha: Karlova univerzita, 2019 [cit. 24. 2. 2024]. Dostupné z:

`https://www.karlin.mff.cuni.cz/~ruzicka/algebra19l/lecture2-1.pdf.`