STŘEDOŠKOLSKÁ ODBORNÁ ČINNOST
Obor SOČ: 1. Matematika a statistika

Antipalindromy

Antipalindromes

Autor:	**David Ryzák**
Škola:	**Gymnázium Trutnov**
	Jiráskovo náměstí 325, Trutnov, 541 01
Konzultant:	**doc. Ing. Ľubomíra Dvořáková, Ph.D.**

Trutnov 2018

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou práci vypracoval samostatně, použil jsem pouze podklady (literaturu, SW atd.) uvedené v přiloženém seznamu a postup při zpracování a dalším nakládání s prací je v souladu se zákonem č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon) v platném znění.

V Trutnově dne 28.3.2018 podpis:

Poděkování

Chtěl bych poděkovat především doc. Ing. Ľubomíře Dvořákové, Ph.D. za cenné rady a připomínky týkající se této práce a také za pomoc s výběrem tématu. Dále bych rád poděkoval i všem ostatním, kteří mě podporovali během tvorby této práce.

ANOTACE

Každý zná jistě palindromy: slova, která se čtou stejně zepředu i pozpátku (např. krk, rotor, nepotopen). Palindromy v přirozených bázích, tj. čísla, která mají palindromický zápis v nějaké přirozené bázi, jsou dobře matematicky prostudované. Palindromy hrají také důležitou roli v matematické disciplíně zvané kombinatorika na slovech. Právě tato disciplína nás inspirovala ke studiu antipalindromů.

Hlavním cílem práce je seznámit s novými poznatky o antipalindromech v přirozených bázích a porovnat je s palindromy. Představujeme výsledky týkající se počtu po nějakou mez, dělitelnosti a výskytu prvočísel mezi antipalindromy, vzdálenosti, pořadí, výskytu palindromů mezi antipalindromy a naopak atd.
Klíčová slova: palindrom, palindromické číslo, antipalindrom, antipalindromické číslo, zápis (rozvoj) čísla v bázi

ANNOTATION

Everybody has certainly heard about palindromes: words that stay the same when read backwards (e.g. pop, rotor, tattarrattat). Palindromes in a natural base, i.e. numbers having palindromic expansion in a natural base, have been deeply explored by mathematicians. Palindromes play an important role in a mathematical field called Combinatorics on words, too. This field inspired our study of antipalindromes.

We introduce a new notion of antipalindromes in a natural base and we obtain a lot of new results for them. We present results concerning the number of antipalindromes bounded by a constant, divisibility and occurrence of prime numbers among antipalindromes, distances, order, occurrence of palindromes among antipalindromes and conversely, etc.
Key words: palindrome, palindromic number, antipalindrome, antipalindromic number, expansion of a number in a base

Obsah

Kapitola 1

Úvod

Palindromy jsou slova, která se čtou stejně zepředu a pozpátku. Jsou často oblíbenou slovní hříčkou. Právě jejich přiblížením začneme úvod. V této práci se budeme zabývat především antipalindromy, které můžeme chápat jako zobecnění palindromu. V druhé části úvodu přiblížíme, jak nás motivovala kombinatorika na slovech ke zkoumání antipalindromů. V poslední části úvodu popíšeme členění práce.

1.1 Palindromy pod lupou

Moc nás jistě nepřekvapí, že v přirozených jazycích příliš dlouhé palindromy nenajdeme. Nejdelšími palindromickými slovy v češtině jsou příčestí typu 'nepochopen', 'nepotopen', 'nezasazen', 'nezařazen'. V angličtině je nejdelším palindromickým slovem 'tattarrattat'. Jeho vítězství ovšem nemusíme považovat za zcela zasloužené, protože nejde o běžné slovo, avšak o fantazii Jamese Joyce, který ve svém románu Odysseus [3] použil tento neologismus k popsání zvuku energického poklepání na dveře:

"I was just beginning to yawn with nerves thinking he was trying to make a fool of me
when I knew his tattarrattat at the door."

Zajímavější jsou pak palindromické věty. Palindromy z nich většinou vzniknou jen v případech, že zapomeneme na mezery mezi slovy, případně i na diakritiku. V češtině patří mezi známé palindromické věty:

"V elipse spí lev."
"Jelenovi pivo nelej."
"Kobyla má malý bok."

Neméně zajímavé jsou také palindromy tvořené čísly. Zajímavějšími se stávají ve chvíli, když se k nim váže například nějaká historická událost. Například datum (včetně času) položení základního kamene Karlova mostu můžeme vyjádřit jako palindrom. Tento palindrom je složen jen z lichých cifer 135797531. Muzeum Karlova mostu jej použilo jako své logo. Podle historika astronomie Zdeňka Horského byl základní kámen položen 9. července 1357 v 5:31. V tu chvíli prý byla příznivá konstelace Slunce a Saturnu. Palindrom je tedy sestaven z údajů: rok - den - měsíc - hodina - minuty.

Obrázek 1.1: Logo Muzea Karlova mostu

1.2 Motivace z kombinatoriky na slovech

Pojmy z kombinatoriky na slovech jsou intuitivní, proto potřebné definice uvádíme jen v poznámce pod čarou [1]. Zajímavější než v přirozených jazycích je situace týkající se palindromů v nekonečných slovech. Pro naše účely můžeme uvažovat konečná a nekonečná slova sestávající ze dvou symbolů, např. z nul a jedniček. Říkáme jim binární slova. V těchto slovech můžeme nacházet binární palindromy libovolných délek. Tato slova však mají nějakou strukturu. Nekonečné slovo může totiž obsahovat v libovolném faktoru délky n maximálně n různých neprázdných palindromů [2].

Definice 1 ([2])**.** *Nekonečné slovo* $\mathbf{u}$ *nazýváme bohatým na palindromy, pokud v každém svém faktoru délky* $n \in \mathbb{N}$ *obsahuje právě* n *neprázdných palindromů.*

Příklad 1. *Nejznámějším slovem bohatým na palindromy je jedno ze dvou nejslavnějších slov kombinatoriky na slovech – Fibonacciho slovo. Vyrobíme je tzv. přepisovacími pravidly:* $0 \to 01$ *a* $1 \to 0$*. Začneme nulou a pořád dál budeme aplikovat přepisovací pravidla:*

0
01
010
01001
01001010
0100101001001
...

Takto vyrábíme delší a delší prefixy Fibonacciho slova.
Vezměme libovolný faktor Fibonacciho slova, např. 001010 *(délka je* 6*), a ověřme, že obsahuje* 6 *neprázdných palindromů. To skutečně platí, neboť všechny jeho palindromické faktory jsou* 0, 1, 00, 010, 101 *a* 01010*.*

Zaveďme nyní dvě zobrazení: zrcadlení R (reflection) a výměnu E (exchange). Konečnému slovu přiřadí opět konečné slovo stejné délky. Zrcadlení čte slovo pozpátku a výměna čte slovo pozpátku a zároveň nulu přepíše na jedničku a naopak. Uveďme si jejich působení na příkladě slova $w = 00110101$. Dostaneme $R(w) = 10101100$ a $E(w) = 01010011$. Nyní se dá palindrom definovat jako pevný bod zrcadlení, tedy jako slovo w splňující $R(w) = w$. Například 0010100 je palindrom, protože $R(0010100) = 0010100$. Podobně slovo w nazveme antipalindromem, pokud $E(w) = w$. Například 0010101011 je antipalindrom, protože E přečte slovo pozpátku jako 1101010100 a poté vymění nuly a jedničky, dostaneme tak 0010101011.

[1] *Binárním slovem* w nazýváme konečnou posloupnost dvou symbolů, např. 0 a 1. Jeho *délkou* rozumíme počet symbolů, které obsahuje. Pod *nekonečným binárním slovem* $\mathbf{u}$ rozumíme nekonečnou posloupnost 0 a 1, tj. $\mathbf{u} = u_0u_1u_2\ldots$, kde $u_i \in \{0,1\}$. Konečné slovo w nazveme *faktorem* konečného či nekonečného slova u, pokud existuje slovo v a slovo t (konečné či nekonečné) tak, že $u = vwt$. Je-li v prázdné slovo, nazveme w *prefixem* slova u.

Příklad 2. *Nejznámějším příkladem nekonečného slova, které v každém faktoru obsahuje maximální možný počet palindromů a antipalindromů, je druhé ze dvou nejslavnějších slov kombinatoriky na slovech – Thueovo-Morseovo slovo [4]. Toto binární nekonečné slovo vyrobíme opět přepisovacími pravidly:* $0 \to 01$ *a* $1 \to 10$. *Začneme nulou a pořád dál budeme aplikovat přepisovací pravidla:*

0
01
0110
01101001
0110100110010110
01101001100101101001011001101001
...

Takto vyrábíme delší a delší prefixy Thueova-Morseova slova.
Na palindromy Thueovo-Morseovo slovo bohaté není. Například faktor 011010011 *délky* 9 *obsahuje pouze* 8 *neprázdných palindromů* 0, 1, 00, 11, 010, 101, 0110, 1001. *Naopak Fibonacciho slovo není bohaté na palindromy a antipalindromy zároveň.*

Motivací ke studiu antipalindromů je nám fakt, že v kombinatorice na slovech je jedno ze dvou nejslavnějších nekonečných slov bohaté právě na palindromy a antipalindromy zároveň (viz příklad 2). Právě toto zjištění probudilo v oblasti kombinatoriky na slovech v posledních letech velký zájem o studium antipalindromů. Pod pokličku kombinatoriky na slovech můžete nahlédnout v článku [1], mimo jiné se v něm dozvíte, proč si právě Fibonacciho slovo a Thueovo-Morseovo slovo získala takovou slávu.

1.3 Členění práce

V této práci se zabýváme antipalindromy v různých přirozených bázích. Zkoumáme pro ně vlastnosti, které jsou známé pro palindromy, a při této příležitosti nacházíme celou řadu nových výsledků. Rozčleněny jsou následujícím způsobem. V kapitole 2.1 definujeme antipalindrom, resp. palindrom v přirozené bázi a uvádíme základní vlastnosti bezprostředně získané z definic. Kapitola 2.2 informuje o počtech palindromů a antipalindromů s daným počtem cifer a s počtem cifer omezeným nějakou konstantou. V kapitole 2.3 ukazujeme zajímavé výsledky týkající se dělitelnosti antipalindromů a z nich odvozujeme, že jediná netriviální prvočísla mezi antipalindromy existují v bázi 3. Kapitola 2.4 přináší návod, jak ze zápisu antipalindromu určit jeho pořadí. V kapitole 2.5 ukazujeme, jakých vzdáleností mohou nabývat po sobě jdoucí antipalindromy a palindromy. V kapitole 2.6 zodpovídáme otázku, zda a kolik může být palindromů mezi antipalindromy a naopak. V kapitole 2.7 vysvětlujeme základní poznatky o mocninách mezi antipalindromy, a také ukazujeme jednu analogii mezi mocninami dvouciferných antipalindromů a palindromů. V příloze najdeme seznam několika prvních antipalindromů v bázích $b = 10, b = 3$ a $b = 2$.

Kapitola 2

Antipalindromy

2.1 Definice

Začneme formální definicí palindromu a antipalindromu v přirozené bázi a uvedením základních vlastností.

Definice 2. *Nechť $b \in \mathbb{N}, b \geq 2$. Uvažujme přirozené číslo m, jehož zápis v bázi b má tvar*

$$m = i_n b^n + \cdots + i_1 b + i_0,$$

kde $i_0, i_1, \ldots, i_n \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$. Potom m nazveme

1. palindromem *v bázi b, pokud jeho cifry v bázi b splňují podmínku:*

$$i_j = i_{n-j} \quad \textit{pro každé } j \in \{0, 1, \ldots, n\}, \tag{2.1}$$

2. antipalindromem *v bázi b, pokud jeho cifry v bázi b splňují podmínku:*

$$i_j = b - 1 - i_{n-j} \quad \textit{pro každé } j \in \{0, 1, \ldots, n\}. \tag{2.2}$$

Příklad 3. *Uvažujme nyní různé báze b a podívejme, jak vypadají antipalindromy v těchto bázích:*

- *V bázi $b = 10$ je antipalindromem např.* 395406.
- *V bázi $b = 3$ je antipalindromem např.* 2011120.
- *V bázi $b = 2$ je antipalindromem např.* 110100.

Věta 1. *Antipalindrom může mít lichý počet cifer pouze v liché bázi b. Navíc prostřední cifra má pak hodnotu $\frac{b-1}{2}$.*

Důkaz. Označme cifry uvažovaného antipalindromu $i_0, i_1, i_2, \ldots, i_{2n}$. Uspořádejme cifry do dvojic a sečtěme: $i_0 + i_{2n}, i_1 + i_{2n-1}, \ldots, i_{n-1} + i_{n+1}$. Z definice antipalindromu má každá tato dvojice součet $b - 1$. Zůstane nám však cifra i_n, kterou musíme takto spárovat samu se sebou, a tudíž $2i_n = b - 1$.
Z toho vyplývá, že prostřední cifra i_n je celé číslo jen pro $b = 2k + 1$, kde $k \in \mathbb{N}$, tedy pokud b je liché. Navíc platí $i_n = \frac{b-1}{2}$. $\square$

Věta 2. *Antipalindrom může být zároveň palindromem, jen když báze b je lichá a pokud jsou všechny cifry rovny $\frac{b-1}{2}$.*

Důkaz. Mějme antipalindrom s ciframi $i_0, i_1, \dots, i_n$. Aby byl palindromem musí platit $i_j = i_{n-j}$ pro každé $j \in \{0, 1, \dots, n\}$. Z definice antipalindromu zároveň plyne, že $i_j + i_{n-j} = b - 1$. Dostáváme tedy $i_j = \frac{b-1}{2}$ pro každé $j \in \{0, 1, \dots, n\}$ neboli všechny cifry mají hodnotu $\frac{b-1}{2}$ a báze b je tudíž nutně lichá. □

2.2 Počty

V této kapitole odvodíme počet palindromů a antipalindromů o n cifrách a také s nejvýše n ciframi. Pro drobné zjednodušení značení budeme používat symboly: $s_k = \frac{k-1}{2}$ pro liché přirozené číslo k a $a_k = \frac{k}{2}$ pro sudé přirozené k.

2.2.1 Počty antipalindromů

Věta 3. *Počet antipalindromů obsahujících k cifer závisí na paritě báze a na paritě k následujícím způsobem:*

- *Je-li k sudé číslo, pak je počet roven $(b-1)b^{a_k-1}$.*
- *Je-li k liché číslo a báze b sudá, pak je počet nulový.*
- *Je-li k liché číslo větší než jedna a báze b lichá, pak je počet roven $(b-1)b^{s_k-1}$.*
- *Jednociferný antipalindrom je v liché bázi jeden.*

Důkaz. Rozdělíme důkaz na dvě části podle parity počtu cifer:

1. Pro $k = 2n$ označme cifry antipalindromu $i_{2n-1}, i_{2n-2}, \dots, i_1, i_0$. Cifry od i_{2n-1} až do i_n se mění a jejich hodnotami už jsou určené cifry i_{n-1} až i_0. Protože cifry $i_{2n-1}, \dots, i_n \in \{0, 1, \dots, b-1\}$ (s výjimkou i_{2n-1}, která nebude nikdy 0, protože stojí na začátku čísla), bude počet antipalindromů s počtem cifer $2n$ roven počtu variací s opakováním i_{2n-1} až i_n podle výše zmíněných podmínek. Proto platí, že počet antipalindromů s počtem cifer $2n$ je $(b-1)b^{n-1} = (b-1)b^{a_k-1}$.

2. Pro $k = 2n+1$ závisí výsledek na paritě báze. Pokud je báze b sudé číslo, pak je podle věty 1 počet nulový. Pokud je báze b liché číslo, pak označme cifry antipalindromu analogicky jako v prvním případě $i_{2n}, i_{2n-1}, \dots, i_1, i_0$. Prostřední cifra i_n má podle věty 1 hodnotu pevně danou: $i_n = \frac{b-1}{2}$. Cifry předcházející i_n určují hodnoty cifer následujících po i_n, proto je výsledek analogický jako u sudého počtu cifer, a to $(b-1)b^{n-1} = (b-1)b^{s_k-1}$. Speciálně pro jednociferné antipalindromy platí, že v sudé bázi neexistují a v liché bázi je takový antipalindrom jediný, a to roven $\frac{b-1}{2}$.

□

Z věty 3 známe počet antipalindromů pro nějaký počet cifer k. Abychom získali počet antipalindromů do nějakého počtu cifer n, stačí sečíst počty antipalindromů s k ciframi pro $k \leq n$.

Sudá báze b
O sudých bázích víme, že se v nich nacházejí jen antipalindromy se sudým počtem cifer. Počet antipalindromů s nejvýše n ciframi je roven

$$\sum_{a=1}^{a_n}(b-1)b^{a-1} \quad \text{pro sudé } n$$

a je roven

$$\sum_{a=1}^{a_{n-1}}(b-1)b^{a-1} \quad \text{pro liché } n.$$

Sumu lze upravit vytknutím a posunutím mezí a poté sečíst:

$$(b-1)\sum_{a=0}^{a_n-1} b^a = b^{a_n}-1,$$

respektive

$$(b-1)\sum_{a=0}^{a_{n-1}-1} b^a = b^{a_{n-1}}-1.$$

Důsledek 1. *Počet antipalindromů v sudé bázi b s počtem cifer nejvýše n je roven:*

$$b^m-1, \quad \text{\textit{přičemž}} \quad \begin{cases} m=\frac{n}{2} & \text{\textit{pro n sudé,}} \\ \\ m=\frac{n-1}{2} & \text{\textit{pro n liché.}} \end{cases}$$

Lichá báze b
O počtech antipalindromů s počtem cifer $2j$ a $2j+1$ víme, že jsou stejné, protože $a_{2j} = \frac{2j}{2} = j = \frac{(2j+1)-1}{2} = s_{2j+1}$ a podle věty 3 pro počty platí

$$(b-1)b^{a_{2j}-1} = (b-1)b^{s_{2j+1}-1}.$$

Počet všech antipalindromů s počtem cifer maximálně n tak můžeme spočítat jako dvojnásobek počtu antipalindromů s lichým počtem cifer rovným maximálně n, pokud je n liché číslo, nebo jako dvojnásobek počtu antipalindromů s lichým počtem cifer rovným maximálně $n+1$ zmenšený o počet antipalindromů s $n+1$ ciframi, pokud je n sudé číslo.

Dostáváme tak pro n liché sumu:

$$\sum_{s=1}^{s_n} 2(b-1)b^{s-1} = 2b^{s_n}-2.$$

Nezapočítali jsme však ještě poslední jednociferný antipalindrom, a tak počet antipalindromů pro liché báze s počtem cifer maximálně n, kde n je liché číslo, je

$$2b^{s_n}-1.$$

Podobně pro n sudé máme sumu:

$$\sum_{s=1}^{s_{n+1}} 2(b-1)b^{s-1} - (b-1)b^{s_{n+1}-1} = 2b^{s_{n+1}}-2-(b-1)b^{s_{n+1}-1}.$$

Nezapočítali jsme však opět poslední jednociferný antipalindrom, a tak počet antipalindromů pro liché báze s počtem cifer maximálně n, kde n je sudé číslo, je

$$2b^{s_{n+1}}-1-(b-1)b^{s_{n+1}-1} = (b+1)b^{s_{n+1}-1}-1.$$

Důsledek 2. *Počet antipalindromů v liché bázi b s počtem cifer nejvýše n je roven:*

$$\begin{aligned} &2b^m - 1\,, && \text{kde } m = \tfrac{n-1}{2} \text{ pro } n \text{ liché},\\ &(b+1)b^{m-1} - 1\,, && \text{kde } m = \tfrac{n}{2} \text{ pro } n \text{ sudé}. \end{aligned}$$

2.2.2 Počty palindromů

Počty palindromů jsou podobné jako počty u antipalindromů v lichých bázích b, protože v každém počtu cifer najdeme nějaký palindrom (stejně jako u antipalindromů v lichých bázích). Pojďme se nyní podívat na analogii počtu palindromů s antipalindromy. Počty palindromů rozdělíme podle počtu cifer:

- jednociferné palindromy.
- počet cifer $2n+1, n \in \mathbb{N}$.
- počet cifer $2n, n \in \mathbb{N}$.

Jednociferných palindromů je celkem b (pro každou možnou hodnotu cifer od 0 do $b-1$). Všimněme si, že u palindromu se sudým počtem cifer se mění prvních $\frac{k}{2}$ cifer, kde k je počet cifer. U lichých počtů cifer se mění prvních $\frac{k+1}{2}$ cifer. Zbylé cifry se mění už pouze v závislosti na těchto. A protože tyto cifry kromě první cifry i_{k-1}, která nemůže nábývat hodnoty 0, nabývají hodnot od 0 do $b-1$, platí, že počet palindromů v nějakém počtu cifer je pro sudé k roven $b^{a_k - 1}(b-1)$ a pro liché k roven $b^{s_k}(b-1)$.
Nyní uděláme malé pozorování: Počet antipalindromů (v liché bázi) v počtu cifer k je po řadě $1, b-1, b-1, b(b-1), b(b-1), b^2(b-1), \ldots$. Počet palindromů v počtu cifer k je po řadě $b, b-1, b(b-1), b(b-1), b^2(b-1), b^2(b-1), \ldots$. Můžeme si všimnout, že pro součet počtů antipalindromů v počtech cifer 1,2,3 platí, že je stejný jako součet počtu palindromů v počtech cifer 1,2, a to $2b-1$. V dalších počtech cifer jsou již počty palindromů v k stejné jako počet antipalindromů v počtu cifer $k+1$. Platí tedy, že počet palindromů po nějaké k je stejný jako počet antipalindromů v liché bázi b po $k+1$. A protože v takovém případě je parita cifer jiná, musíme u vzorců pro výpočet počtu antipalindromů změnit s na a a obráceně.

Důsledek 3. *Počet palindromů po lichý počet cifer je $(b+1)b^s - 1$, kde s je polovina počtu cifer zmenšeného o jedna. Počet palindromů po sudý počet cifer je $2b^a - 1$, kde a je polovina počtu cifer.*

2.3 Dělitelnost

V této kapitole připomeneme známý výsledek týkající se dělitelnosti palindromů. Představíme nové výsledky týkající se dělitelnosti antipalindromů. Z těchto výsledků poté odvodíme, jak je to s výskytem prvočísel mezi palindromy a antipalindromy.

2.3.1 Dělitelnost palindromů

Věta 4. *Palindrom se sudým počtem cifer je dělitelný $b+1$.*

Důkaz. Uvažujme palindrom $m = i_n b^n + i_{n-1} + \cdots + i_1 b + i_0$ pro lichá n. Můžeme spárovat jednotlivé dvojice $i_{n-j} b^{n-j} + i_j b^j = i_j(b^{n-j} + b^j)$, protože definice palindromu říká, že

$i_{n-j} = i_j$. Díky sudému počtu cifer můžeme tímto způsobem spárovat všechny dvojice $i_{n-j}b^{n-j}; i_j b^j$ pro $j \in \{0, 1, \ldots, \frac{n-1}{2}\}$. Dokažme, že pro palindrom upravený spárováním koeficientů platí:

$$m = i_0(b^n + 1) + i_1(b^{n-1} + b) + \cdots + i_k(b^{n-k} + b^k) \equiv 0 \pmod{b+1},$$

kde $k = \frac{n-1}{2}$. Všechny členy kongruence můžeme zapsat i jako $i_j b^j(b^{n-2j} + 1)$ pro $j \in \{0, 1, \ldots, \frac{n-1}{2}\}$, a protože vždy $2j < n$, tak v každém členu kongruence najdeme člen $b^{n-2j} + 1$, kde $n - 2j \geq 1$. Zbývá tedy ukázat, že $(b^\ell + 1) \equiv 0 \pmod{b+1}$ pro lichá přirozená čísla ℓ, a to plyne ze známého vzorce pro rozklad:

$$(b^\ell + 1) = (b+1)(b^{\ell-1} - b^{\ell-2} + \ldots - b + 1) \equiv 0 \pmod{b+1}.$$

Tímto je dokázáno, že palindromy se sudým počtem cifer jsou dělitelné $b + 1$. □

2.3.2 Dělitelnost antipalindromů

V desítkové soustavě známe tvrzení, které říká, že přirozené číslo je dělitelné 9, právě když jeho ciferný součet je dělitelný 9. Zobecněme nyní toto tvrzení pro soustavy s libovolným přirozeným základem b.

Lemma 1. *Nechť m je přirozené číslo a jeho zápis v soustavě o základu b je roven $i_n b^n + i_{n-1}b^{n-1} + \ldots + i_1 b + i_0$. Potom m je dělitelné $b - 1$, právě když jeho ciferný součet v bázi b je dělitelný $b - 1$, tj. $(b-1)|(i_n + i_{n-1} + \cdots + i_1 + i_0)$.*

Důkaz. Jelikož $b^k - 1 = (b-1)(b^{k-1} + b^{k-2} + \ldots + b + 1)$, dostáváme kongruenci $b^k \equiv 1 \pmod{b-1}$ pro každé $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Z vlastností kongruencí pak plyne, že $i_k b^k \equiv i_k \pmod{b-1}$, tudíž také platí

$$i_n b^n + i_{n-1}b^{n-1} + \ldots + i_1 b + i_0 \equiv i_n + i_{n-1} + \ldots + i_1 + i_0 \pmod{b-1}.$$

□

Věta 5. *Antipalindrom se sudým počtem cifer v soustavě o základu b je dělitelný číslem $b - 1$.*

Důkaz. Uvažujme antipalindrom $m = i_{2n-1}b^{2n-1} + i_{2n-2}b^{2n-2} + \cdots + i_1 b + i_0$. Podle lemmatu 1 máme kongruenci

$$i_{2n-1}b^{2n-1} + i_{2n-2}b^{2n-2} + \cdots + i_1 b + i_0 \equiv i_{2n-1} + i_{2n-2} + \cdots + i_1 + i_0 \pmod{b-1}.$$

Podle definice antipalindromu platí $i_{2n-1-k} + i_k = b - 1$ pro každé $k \in \{0, 1, \ldots, 2n-1\}$. Ze sudosti počtu cifer pak plyne $i_{2n-1} + i_{2n-2} + \cdots + i_1 + i_0 \equiv 0 \pmod{b-1}$, tudíž antipalindrom m je dělitelný číslem $b - 1$. □

Věta 6. *Antipalindrom s lichým počtem cifer v soustavě o základu b je dělitelný číslem $\frac{b-1}{2}$.*

Důkaz. Uvažujme antipalindrom $m = i_{2n}b^{2n} + i_{2n-1}b^{2n-1} + \cdots + i_1 b + i_0$. Z definice antipalindromu s lichým počtem cifer vyplývá, že všechny cifry kromě prostřední i_n lze spárovat $i_{2n} + i_0, i_{2n-1} + i_1, \ldots, i_{n+1} + i_{n-1}$ vždy se součtem $b - 1$. Ciferný součet čísla $m - i_n b^n$ je tedy dělitelný číslem $b - 1$, a tedy podle lemmatu 1 je také přímo $m - i_n b^n$ dělitelné číslem $b - 1$, a tudíž samozřejmě i $\frac{b-1}{2}$. Jelikož prostřední cifra podle věty 1 splňuje $i_n = \frac{b-1}{2}$, dozvěděli jsme se zatím, že číslo $m - \frac{b-1}{2}b^n$ je dělitelné $\frac{b-1}{2}$. Tím je dokázáno, že antipalindrom m je dělitelný číslem $\frac{b-1}{2}$. □

2.3.3 Prvočísla mezi antipalindromy a palindromy

Dělitelnost a prvočísla spolu úzce souvisí. Pojďme se tedy podívat, jak to s nimi vypadá mezi antipalindromy a palindromy. Z věty 4 víme, že palindromy se sudým počtem cifer nejsou prvočísla, až na případ, kdy $b+1$ je prvočíslo a 11 je pak jeho příslušný palindromický zápis (se sudým počtem cifer) v bázi b.

Palindromických prvočísel můžeme najít spoustu v naší desítkové soustavě, např. $101, 131, 353, 757, \dots$, posloupnost $A002385$ v OEIS [5]. Avšak i v dalších bázích b není složité prvočísla najít, např.

$$\begin{aligned} 1011101_2 &= 93, \\ 111_8 &= 73, \\ 212_3 &= 23, \\ B222B_{16} &= 729643. \end{aligned}$$

Zatímco najít prvočíselné palindromy nebylo příliš náročné, najít prvočíselné antipalindromy je o něco složitější.

Báze $b > 3$

Věta 7. *Nechť je dána báze $b > 3$.*

- *Pak existuje maximálně jeden prvočíselný antipalindrom p v bázi b splňující $p < b$, a to $p = \frac{b-1}{2}$.*
- *Prvočíselný antipalindrom p v bázi b splňující $p \geq b$ neexistuje.*

Důkaz.
- Jelikož cifry v soustavě o základu b mají hodnoty od 0 do $b-1$, má každé číslo $p < b$ jednociferný zápis v bázi b. Jediný jednociferný antipalindrom v bázi b je číslo $\frac{b-1}{2}$, viz věta 1. Odtud již plyne první tvrzení věty.
- Druhé tvrzení plyne z dělitelnosti antipalindromů (věty 5 a 6).

□

Důsledek 4. *Existuje nekonečně mnoho prvočísel splňujících, že jsou zároveň antipalindromy v nějaké bázi $b > 3$ a že mají hodnotu menší než b.*

Důkaz. Tvrzení plyne z faktu, že prvočísel je nekonečně mnoho. Zvolíme-li totiž libovolné prvočíslo $q > 3$ a položíme $\frac{b-1}{2} = q$, tj. $b = 2q+1$, potom q je prvočíselný antipalindrom v bázi b, viz věta 7. □

Báze $b = 2$

Věta 8. *V bázi 2 existuje jediný prvočíselný antipalindrom p, a to $p = 2$ se zápisem 10.*

Důkaz. V této bázi z definice antipalindromu vyplývá, že poslední cifra v číselném rozvoji v této bázi bude 0. Každý antipalindrom má tedy zápis tvaru $2^n + i_{n-1}2^{n-1} + \cdots + i_1 2$, tudíž je dělitelný dvěma. Jediné takové prvočíslo je tudíž 2. □

Báze $b = 3$

Věta 9. *V bázi $b = 3$ existují prvočíselné antipalindromy. Nutně mají lichý počet cifer a navíc minimálně tři cifry.*

Důkaz. O bázi 3 víme z věty 5, že antipalindromy se sudým počtem cifer v této bázi jsou dělitelné dvěma. Pro antipalindromy s lichým počtem cifer plyne z věty 6 pouze triviální fakt, že jsou dělitelné číslem 1, a tak všechny prvočíselné antipalindromy v bázi 3 mají lichý počet cifer. Jediný jednociferný antipalindrom v bázi 3 je číslo 1. Pro všechny prvočíselné antipalindromy p v bázi $b = 3$ tak platí, že $b < p$. Příkladem prvočíselného antipalindromu v bázi 3 je číslo 13 se zápisem 111. □

Kolik takových prvočíselných antipalindromů $p > b$ v bázi $b = 3$ existuje? To je otázka, na kterou bohužel v této práci neodpovíme. Uvedeme alespoň, jakého tvaru jsou.

Lemma 2. *Antipalindromy v bázi 3 začínající cifrou 2 jsou dělitelná číslem 3.*

Důkaz. Máme antipalindrom $m = i_n 3^n + i_{n-1} 3^{n-1} + \cdots + i_1 3 + i_0$, přičemž $i_n = 2$. Jelikož $i_n + i_0 = 2$, musí být $i_0 = 0$. Odtud již plyne dělitelnost antipalindromu m číslem 3. □

Věta 10. *Všechny prvočíselné antipalindromy v bázi 3 jsou ve tvaru $6k + 1$, kde $k \in \mathbb{N}$.*

Důkaz. Uvažujme prvočíselný antipalindrom $m = i_{2n} 3^{2n} + i_{2n-1} 3^{2n-1} + \cdots + i_1 3 + i_0$ (počet cifer je nutně lichý podle věty 9). Podle lemmatu 2 je $i_{2n} = 1$ a $i_0 = 1$ a z věty 1 vyplývá, že $i_n = 1$. Spárujme spolu jednotlivé členy antipalindromu m (kromě i_0, i_n, i_{2n}): $i_{2n-1} 3^{2n-1} + i_1 3, \ldots, i_{n+1} 3^{n+1} + i_{n-1} 3^{n-1}$. Jednotlivé dvojice lze zapsat obecně ve tvaru $i_{2n-j} 3^{2n-j} + i_j 3^j, j \in \{1, \ldots, n-1\}$. Dokažme, že pro každé $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ existuje $s \in \mathbb{N}$ splňující:

$$3^j (i_{2n-j} 3^{2n-2j} + i_j) = 6s.$$

V závorce můžeme předpokládat pouze 3 možnosti pro cifry: $i_{2n-j} = 2; i_j = 0$ nebo $i_{2n-j} = i_j = 1$ nebo $i_{2n-j} = 0; i_j = 2$. Ve všech těchto případech rovnost platí, protože v závorce bude sudé číslo. Dostáváme proto rovnost

$$\begin{aligned} m &= i_{2n} 3^{2n} + i_n 3^n + i_0 + 6\ell \\ &= 3^{2n} + 3^n + 1 + 6\ell \\ &= 3^n (3^n + 1) + 1 + 6\ell. \end{aligned}$$

pro nějaké přirozené nebo nulové číslo ℓ. Odtud je vidět, že m je skutečně tvaru $6k + 1$ pro nějaké přirozené k. □

2.4 Pořadí

Máme antipalindrom v bázi b s ciframi $i_{2n}, i_{2n-1}, \ldots, i_1, i_0$, případně bez i_{2n} při sudém počtu cifer. Budou nás zajímat cifry, které se mění při přechodu na nejbližší vyšší antipalindrom, konkrétně ty nacházející se v druhé polovině čísla $i_{n-1}, \ldots, i_1, i_0$. Nejvyšší antipalindrom v nějakém počtu cifer bude mít tyto cifry nulové. Např. pro $b = 10$ je 999000 nejvyšší antipalindrom se šesti ciframi. Když se však přesuneme k nižšímu antipalindromu, tak se postupně tato část cifer mění. Posuneme-li se o čtyři antipalindromy dolů, pak dostaneme pro náš příklad 995400. Pokud tyto cifry přečteme z druhé strany, obdržíme číslo 4, které udává o kolik antipalindromů jsme se posunuli od nejvyššího antipalindromu se šesti ciframi. Pro obecnou bázi b platí následující tvrzení. Využívá se důsledků 1 a 2.

Věta 11. *Nechť b je lichá báze.*

1. *Mějme antipalindrom m v bázi b s ciframi $i_{2n}, i_{2n-1}, \ldots, i_1, i_0$. Potom pořadí tohoto antipalindromu je rovno počtu antipalindromů s nejvýše $2n+1$ ciframi zmenšeného o $i_0 b^{n-1} + i_1 b^{n-2} + \cdots + i_{n-1} b^0$, tj.*

$$2b^n - 1 - (i_0 b^{n-1} + i_1 b^{n-2} + \cdots + i_{n-1} b^0).$$

2. *Mějme antipalindrom m v bázi b s ciframi $i_{2n-1}, \ldots, i_1, i_0$. Potom pořadí tohoto antipalindromu je rovno počtu antipalindromů s nejvýše $2n$ ciframi zmenšeného o $i_0 b^{n-1} + i_1 b^{n-2} + \cdots + i_{n-1} b^0$, tj.*

$$(b+1)b^{n-1} - 1 - (i_0 b^{n-1} + i_1 b^{n-2} + \cdots + i_{n-1} b^0).$$

Nechť b je sudá báze. Mějme antipalindrom m v bázi b s ciframi $i_{2n}, i_{2n-1}, \ldots, i_1, i_0$, resp. s ciframi $i_{2n-1}, \ldots, i_1, i_0$. Potom pořadí m je rovno

$$b^n - 1 - (i_0 b^{n-1} + i_1 b^{n-2} + \cdots + i_{n-1} b^0).$$

Příklad 4. *V bázi $b = 3$ uvažujme antipalindrom* 2011120. *Tento antipalindrom v bázi* 3 *je* 46.*, protože počet antipalindromů o nejvýše sedmi cifrách je podle důsledku 2 roven* $2 \cdot 3^3 - 1$ *a od něj odečteme číslo s ciframi* 021 *v bázi* 3*, tj.*

$$2 \cdot 3^3 - 1 - (0 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + 1) = 46.$$

V bázi $b = 8$ uvažujme antipalindrom 451623. *Tento antipalindrom v bázi* 8 *je* 297.*, protože počet antipalindromů o nejvýše šesti cifrách je podle důsledku 1 roven* $8^3 - 1$ *a od něj odečteme číslo s ciframi* 326 *v bázi* 8*, tj.*

$$8^3 - 1 - (3.8^2 + 2.8 + 6) = 297 = (451)_8.$$

Pro sudé báze dokonce platí, že první polovina cifer je číslem v dané bázi udávajícím, kolikátý antipalindrom je. Je to tak, protože první polovina cifer jde od cifry 1 *a postupně se zvyšuje vždy o jedna v dané bázi a nikdy se neopakuje (souvisí to s neexistencí antipalindromů s lichým počtem cifer). V liché bázi se naopak první polovina cifer opakuje pro sudý počet cifer a poté pro lichý počet cifer o jedna větší, a tak výše popsaný postup je uveden především pro ní.*

2.5 Vzdálenosti

Vzdáleností mezi dvěma antipalindromy, respektive mezi dvěma palindromy budeme rozumět jejich rozdíl.

Definice 3. Vzdálenost *mezi dvěma (anti)palindromy m_1 a m_2, kde $m_1 > m_2$, je rovna $m_1 - m_2$.*

2.5.1 Vzdálenosti mezi antipalindromy

Vzdálenosti mezi antipalindromy se stejným počtem cifer

Pokud přecházíme mezi antipalindromy se stejným počtem cifer na další v pořadí a pozorujeme, co se děje s ciframi vlevo od středu, pak platí následující:

- Cifra s nejnižším indexem, která ještě nemá maximální možnou hodnotu $b-1$, se zvýší o jedna.
- Cifry s nižším indexem (které tedy mají maximální hodnotu) se vynulují.

Cifry vpravo od středu se upraví tak, aby vznikl opět antipalindrom.

Příklad 5. *Uvažujme sudou bázi* $b = 10$. *Pak příkladem po sobě jdoucích antipalindromů se šesti ciframi jsou* 509094 *a* 510984. *Jejich vzdálenost je* 1890.

Příklad 6. *Uvažujme lichou bázi* $b = 3$. *Pak příkladem po sobě následujících antipalindromů se sedmi ciframi jsou* 1405 *se zápisem* 1221001 *a* 1509 *se zápisem* 2001220. *Jejich vzdálenost je* 104.

Pro vzdálenosti mezi antipalindromy se stejným počtem cifer zavedeme symbol p, který nazveme indexem (pořadím) změny.

Definice 4. Index změny p *udává, jaká nejvyšší cifra (počítáno od středu zápisu čísla) se změnila při přechodu od jednoho antipalindromu k následujícímu.*

Pro příklad 5 platí, že $p = 2$, a pro příklad 6 platí, že $p = 3$. Pro antipalindrom se sudým počtem cifer rovným $2n$ platí, že se při přechodu k následujícímu antipalindromu mění všechny cifry s indexy i_{n-p} až i_{n-1+p}. Pro antipalindrom s lichým počtem cifer $2n+1$ platí, že se mění všechny cifry s indexy i_{n-p} až i_{n+p} kromě prostřední cifry i_n, která zůstává rovna $\frac{b-1}{2}$.

Sudý počet cifer

Věta 12. *Pro vzdálenost mezi dvěma antipalindromy v pořadí za sebou se stejným sudým počtem cifer platí vztah* $b^{a-p}(2b^p - b - 1)$, *kde* a *značí polovinu počtu cifer.*

Důkaz. Máme antipalindrom $m = i_{2n-1}b^{2n-1} + i_{2n-2}b^{2n-2} + \cdots + i_1 b + i_0$ ($b^n = b^a$). Víme, že u antipalindromu se sudým počtem cifer se při přechodu na další antipalindrom v pořadí změní všech prostředních $2p$ cifer. Cifry na místě i_{n-p} a i_{n-1+p} se změní o jedna, zatímco všechny ostatní cifry právě mezi těmito dvěma se změní z cifer $b-1$ na 0 nebo obráceně z 0 na $b-1$. Nyní spočítáme rozdíl mezi takovými dvěma po sobě jdoucími antipalindromy. Rozdělíme si spočtení rozdílu na dvě části (v jedné spočítáme rozdíl z první poloviny antipalindromu a v druhé z druhé poloviny antipalindromu):

1. $b^{a+p-1} - b^{a+p-2}(b-1) - b^{a+p-3}(b-1) - \ldots - b^a(b-1) = b^{a+p-1} - b^{a+p-1} + b^{a+p-2} - b^{a+p-2} + b^{a+p-3} - \cdots + b^{a+1} - b^{a+1} + b^a = b^a$
   Jak vidíme, tak všechny členy b^{a+j}, kde $j \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$, se odečtou a z první části nám tak zbyde jen b^a.

2. $b^{a-1}(b-1) + b^{a-2}(b-1) + \cdots + b^{a-p+1}(b-1) - b^{a-p} = b^a - b^{a-1} + b^{a-1} - b^{a-2} + b^{a-2} - \cdots + b^{a-p+2} - b^{a-p+1} - b^{a-p} = b^a - b^{a-p+1} - b^{a-p}$
   V této druhé části je rozdíl roven $b^a - b^{a-p+1} - b^{a-p}$.

Rozdíl mezi dvěma po sobě jdoucími antipalindromy se sudým počtem cifer tak je:

$$2b^a - b^{a-p+1} - b^{a-p} = b^{a-p}(2b^p - b - 1).$$

$\square$

Podívejme se teď na příklad 5. Dosadíme-li do vzorce z věty 12 pro vzdálenost antipalindromů se sudým počtem cifer hodnoty z tohoto příkladu, tedy $b = 10, p = 2, a = 3$, dostaneme výraz $10(2 \cdot 10^2 - 10 - 1)$, který je také roven 1890, což skutečně odpovídá vzdálenosti antipalindromů 509094 a 510984.

Lichý počet cifer V tomto případě pracujeme automaticky pouze s lichou bází b, viz věta 1.

Věta 13. *Pro vzdálenost mezi dvěma antipalindromy v pořadí za sebou se stejným lichým počtem cifer platí vztah $b^{s-p}(b^{p+1}+b^p-b-1)$, kde s značí polovinu z počtu cifer zmenšeného o jedna.*

Důkaz. Máme antipalindrom $m = i_{2n}b^{2n} + i_{2n-1}b^{2n-1} + \cdots + i_1 b + i_0$ $(b^n = b^s)$. Pro liché počty cifer můžeme postupovat analogicky jen s drobnými změnami. Víme, že prostřední cifra i_n antipalindromu m nabývá ve všech antipalindromech se stejným počtem lichých cifer stejné hodnoty $\frac{b-1}{2}$ a můžeme ji tak zanedbat. A dále si rozdělíme spočtení rozdílu na dvě části analogicky jako u sudého počtu cifer, konkrétně pro cifry od i_{n+1} po i_{n+p} a cifry od i_{n-p} po i_{n-1}:

1. $b^{s+p} - b^{s+p-1}(b-1) - b^{s+p-2}(b-1) - \ldots - b^{s+1}(b-1) = b^{s+p} - b^{s+p} + b^{s+p-1} - b^{s+p-1} + b^{s+p-2} - \cdots + b^{s+2} - b^{s+2} + b^{s+1} = b^{s+1}$
   Jak vidíme, tak všechny členy b^{s+j}, kde $j \in \{2, \ldots, p\}$, se odečtou a z první části nám tak zbyde jen b^{s+1}.

2. $b^{s-1}(b-1) + b^{s-2}(b-1) + \cdots + b^{s-p+1}(b-1) - b^{s-p} = b^s - b^{s-1} + b^{s-1} - b^{s-2} + b^{s-2} - \ldots - b^{s-p+2} + b^{s-p+2} - b^{s-p+1} - b^{s-p} = b^s - b^{s-p+1} - b^{s-p}$
   V této druhé části je rozdíl roven $b^s - b^{s-p+1} - b^{s-p}$.

Rozdíl mezi dvěma po sobě jdoucími antipalindromy s lichým počtem cifer tak je:

$$b^{s+1} + b^s - b^{s-p+1} - b^{s-p} = b^{s-p}(b^{p+1} + b^p - b - 1).$$

$\square$

Podívejme se teď na příklad 6. Dosadíme-li do vzorce z věty 12 pro vzdálenost antipalindromů s lichým počtem cifer hodnoty z tohoto příkladu, tedy $b = 3, p = 3, a = 3$, dostaneme výraz $3^{3-3}(3^4+3^3-3-1)$, který je roven 104, což skutečně odpovídá vzdálenosti antipalindromů 1405 a 1509.

Vzdálenosti mezi antipalindromy s různým počtem cifer

Podívejme se nyní na rozdíly mezi antipalindromy v pořadí za sebou s různými počty cifer.

Sudá báze b

Příklad 7. *Uvažujme sudou bázi* $b = 10$. *Pak příkladem po sobě následujících antipalindromů s 4 a 6 ciframi jsou* 9900 *a* 100998. *Jejich vzdálenost je* 91098.

Věta 14. *Pro vzdálenost mezi dvěma antipalindromy v pořadí za sebou v sudé bázi s počtem cifer* $2a$ *a* $2a+2$ *platí vztah* $b^{2a+1} - b^{2a} + b^{a+1} + b^a - 2$, *kde* a *značí polovinu z počtu cifer menšího z palindromů.*

Důkaz. U sudých bází víme z definice antipalindromu, že antipalindromy tam nalezneme jen v sudých počtech cifer. Uvažujme tedy po sobě jdoucí antipalindromy s $2n$ a $2n+2$ ciframi. Zapsat menší z těchto antipalindromů můžeme takto:

$$b^{2a-1}(b-1) + b^{2a-2}(b-1) + \cdots + b^{a-1}(b-1) + b^a(b-1) = b^{2a} - b^a.$$

A větší z antipalindromů pak takto:

$$b^{2a+1} + b^a(b-1) + b^{a-1}(b-1) + \cdots + b(b-1) + b - 2 = b^{2a+1} + b^{a+1} - 2.$$

Odečteme-li od sebe tyto dva tvary dostaneme rozdíl mezi takovýmito dvěma antipalindromy:

$$b^{2a+1} - b^{2a} + b^{a+1} + b^a - 2$$

□

Podívejme se nyní na příklad 7. Dosadíme-li do vzorce z věty 14 dostaneme $10^5 - 10^4 + 10^3 + 10^2 - 2$, a to je 91098.

Lichá báze b

Příklad 8. *Uvažujme lichou bázi* $b = 3$. *Pak příkladem po sobě následujících antipalindromů se 4 a 5 ciframi jsou* 72 *se zápisem* 2200 *a* 97 *se zápisem* 10121. *Jejich vzdálenost je* 25.

Příklad 9. *Uvažujme lichou bázi* $b = 3$. *Pak příkladem po sobě následujících antipalindromů s 5 a 6 ciframi jsou* 225 *se zápisem* 22100 *a* 268 *se zápisem* 100221. *Jejich vzdálenost je* 43.

Věta 15. *Vzdálenost mezi dvěma po sobě jdoucími antipalindromy v liché bázi* b, *kde menší z nich má sudý počet cifer, je dána vztahem* $\frac{b^{s+1}+3b^s-4}{2}$, *kde* s *značí polovinu z počtu cifer zmenšeného o jedna u většího z antipalindromů.*

Důkaz. Pokud menší z antipalindromů má sudý počet cifer, pak člen b^s většího antipalindromu odpovídá členu b^a menšího antipalindromu ($s = a \Leftrightarrow a = \frac{2k}{2} as = \frac{(2k+1)-1}{2}$). Menší z těchto dvou antipalindromů je posledním antipalindromem v daném sudém počtu cifer. Jeho rozvoj v bázi b tak můžeme zapsat takto (použijeme-li počet cifer antipalindromu dalšího v pořadí):

$$b^{2s-1}(b-1) + b^{2s-2}(b-1) + \cdots + b^s(b-1).$$

První antipalindrom v lichém počtu cifer má takovýto zápis:

$$b^{2s} + b^s\frac{b-1}{2} + b^{s-1}(b-1) + b^{s-2}(b-1) + \cdots + b(b-1) + b - 2.$$

Pro spočtení rozdílu odečteme tyto dvě hodnoty: $b^{2s} - b^{2s-1}(b-1) - b^{2s-2}(b-1) - \ldots - b^s(b-1) + b^{s-1}(b-1) + b^{s-2}(b-1) + \cdots + b(b-1) + b - 2 = b^{s+1} - b^s\frac{b-1}{2} + b^s - 2 = \frac{b^{s+1}+3b^s-4}{2}$ □

Podívejme se na příklad 8. Dosadíme hodnoty z tohoto příkladu do vzorce z věty 15. Dostaneme vzdálenost $\frac{3^{2+1}+3\cdot 3^2-4}{2} = 25$, což je stejný výsledek jako v příkladu 8.

Věta 16. *Vzdálenost mezi dvěma po sobě jdoucími antipalindromy v liché bázi b, kde menší z nich má lichý počet cifer, je dána vztahem $\frac{3b^{a+1}+b^a-4b}{2b}$, kde a značí polovinu z počtu cifer většího z antipalindromů.*

Důkaz. Pokud má menší z antipalindromů lichý počet cifer, pak jeho člen b^s odpovídá členu b^{a-1} u většího antipalindromu. Postupovat dále můžeme analogicky jako v případě rozdílu mezi posledním antipalindromem v sudém počtu cifer a prvním v lichém počtu cifer. Rozvoj menšího z antipalindromů vypadá takto:

$$b^{2a-2}(b-1) + b^{2a-3}(b-1) + \cdots + b^{a-1}\frac{b-1}{2}.$$

Větší antipalindrom můžeme zapsat takto:

$$b^{2a-1} + b^{a-1}(b-1) + b^{a-2}(b-1) + \cdots + b(b-1) + b - 2.$$

Pro rozdíl mezi těmito antipalindromy dostáváme:$b^{2a-1} - b^{2a-2}(b-1) - b^{2a-3}(b-1) + \cdots + b^a(b-1) + b^{a-1}\frac{b-1}{2} + b^{a-1}(b-1) + b^{a-2}(b-1) + \cdots + b(b-1) + b - 2 = 2b^a - 2 - b^{a-1}\frac{b-1}{2} = \frac{3b^{a+1}+b^a-4b}{2b}$. □

Podívejme se nyní na příklad 9. Dosadíme hodnoty z tohoto příkladu do vzorce z věty 16. Po dosazení dostaneme vzdálenost $\frac{3\cdot 3^{3+1}+3^3-4\cdot 3}{2\cdot 3} = 43$, a to je stejný výsledek jako v příkladu 9.

2.5.2 Vzdálenosti mezi palindromy

Nyní ukážeme, jak je to se vzdálenostmi mezi palindromy.

Vzdálenosti mezi palindromy s různým počtem cifer

Příklad 10. *Uvažujme sudou bázi $b = 10$. Pak příkladem po sobě následujících palindromů s* 6 *a* 7 *ciframi jsou* 999999 *a* 1000001*. Jejich vzdálenost je* 2.

Věta 17. *Rozdíl mezi dvěma palindromy s různými počty cifer v pořadí za sebou je 2.*

Důkaz. U palindromu, který je v nějakém počtu cifer k největší, platí, že je celý složen z cifer hodnoty $b-1$. Další palindrom v pořadí má počet cifer $k+1$. První palindrom v nějakém počtu cifer však má jen dvě nenulové cifry, a to první a poslední (obě jsou 1). Takové dva palindromy mají rozdíl 2. □

Vzdálenosti mezi palindromy se stejným počtem cifer

Stejně jako u antipalindromů využijeme definice 4 pro zavedení indexu změny p. U palindromů v lichých počtech cifer neplatí, že prostřední člen nabývá jen jedné hodnoty jako u antipalindromů, ale může nabývat všech celočíselných hodnot od 0 do $b-1$, stejně jako další cifry, kromě první a poslední. U palindromů také pro každou cifru, která se nachází ve vzdálenosti dané indexem změny p od středu, platí, že je rovna $b-1$.

Sudý počet cifer

Příklad 11. *Uvažujme bázi* $b = 10$*. Pak příkladem po sobě následujících palindromů s 6 ciframi jsou* 599995 *a* 600006*. Jejich vzdálenost je* 11.

Věta 18. *Vzdálenost mezi dvěma po sobě jdoucími palindromy se sudým počtem cifer je dána vztahem* $b^{a-p}(b+1)$*, kde* a *značí polovinu z počtu cifer.*

Důkaz. Budeme postupovat analogicky jako u antipalindromů. Nebudeme však rozdělovat výpočet vzdálenosti na dvě části. $b^{a+p-1} - b^{a+p-2}(b-1) - b^{a+p-3}(b-1) + \ldots - b^{a-p+1}(b-1) + b^{a-p} = b^{a+p-1} - b^{a+p-1} + b^{a+p-2} - b^{a+p-2} - \cdots + b^{a-p+2} - b^{a-p+2} + b^{a-p+1} + b^{a-p} = b^{a-p+1} + b^{a-p} = b^{a-p}(b+1)$. □

Podíváme se na příklad 11. Do vzorce z věty 18 dosadíme hodnoty z tohoto příkladu a dostaneme vzdálenost $10^{3-3}(10+1) = 11$, což je stejné jako v příkladu.

Lichý počet cifer

Příklad 12. *Uvažujme bázi* $b = 10$*. Pak příkladem po sobě následujících palindromů se 7 ciframi jsou* 1599951 *a* 1600061*. Jejich vzdálenost je* 110.

Věta 19. *Vzdálenost mezi dvěma po sobě jdoucími palindromy s lichým počtem cifer je dána vztahem* $b^{s-p}(b+1)$ *pro* $p > 0$ *a pro* $p = 0$ *je* b^s*, kde* s *značí polovinu z počtu cifer zmenšeného o jedna.*

Důkaz. Postupujeme analogicky jako u sudých počtů cifer a antipalindromů $b^{s+p} - b^{s+p-1}(b-1) - b^{s+p-2}(b-1) + \ldots - b^{s-p+1}(b-1) + b^{s-p} = b^{s+p} - b^{s+p} + b^{s+p-1} - b^{s+p-1} - \cdots + b^{s-p+2} - b^{s-p+2} + b^{s-p+1} + b^{s-p} = b^{s-p+1} + b^{s-p} = b^{s-p}(b+1)$. Pro $p > 0$ nám zbydou při tomto odvození dva členy $b^{s-p+1} + b^{s-p}$ a můžeme tak říci, že pro $p > 0$ tento vztah platí. Zřejmě toto neplatí, když $p = 0$, máme palindromy v bázi 10 např. $121 - 111 = 10$. V takovém případě je rozdíl b^s, protože jediné, co se mění, je právě prostřední člen s mocninou b^s. □

Podívejme se nyní na příklad 12 a dosaďme hodnoty z tohoto příkladu do vzorce z věty 19. Dostaneme tak vzdálenost $10^{3-2}(10+1) = 110$. Výsledek je tedy stejný jako v příkladu 12.

2.6 Výskyt palindromů mezi antipalindromy

V této části se podíváme na to, kolik maximálně můžeme najít antipalindromů mezi dvěma po sobě jdoucími palindromy a zda vůbec můžeme najít dva po sobě jdoucí antipalindromy, mezi kterými není žádný palindrom. Odpovědi na naše otázky najdeme u sudých bází. Platí pro ně následující pozorování:

- Pokud půjdeme od čísla 0 nahoru, dokud nenarazíme na antipalindrom, najdeme $b+1$ palindromů. (Jejich zápisy v bázi b jsou $0, 1, \ldots, b-1, 11$.)

- Žádné antipalindromy s lichým počtem cifer v sudé bázi nenajdeme, a tudíž to je místo, kde najdeme velké množství palindromů mezi dvěma antipalindromy.

  Věta 20. *Nejvíce palindromů mezi dvěma antipalindromy najdeme v sudé bázi mezi posledním antipalindromem s počtem cifer* $2n$ *a prvním antipalindromem s počtem cifer* $2n+2$*, a to* $b^n(b-1)+2$*.*

Důkaz. Poslední antipalindrom v počtu cifer $2n$ má první polovinu cifer složenou z cifer $b-1$. Palindrom, který má první polovinu cifer stejnou jako tento antipalindrom, je jen jeden, a protože je složen jen z cifer $b-1$, je jistě větší. Analogicky se můžeme podívat na první antipalindrom v počtu cifer $2n+2$. Takový antipalindrom má první cifru 1 a zbytek v první půlce cifer jsou nuly, je tudíž roven $b^{2n+1}+(b-1)b^{n+1}+\cdots+(b-1)b+b-2$. Pro první palindrom s $2n+2$ ciframi také platí, že má první cifru 1 a zbytek v první půlce cifer jsou nuly. Takový palindrom je jistě obecně menší, protože se rovná $b^{2n+1}+1$. Druhý palindrom je již větší než první antipalindrom, to lze lehce ukázat, když se podíváme na první polovinu cifer, která bude u druhého palindromu v pořadí větší. Mezi posledním antipalindromem v počtu cifer $2n$ a prvním v počtu cifer $2n+2$ jsou tak dva palindromy, které mají sudý počet cifer. K nim musíme ještě přičíst počet palindromů s $2n+1$ ciframi, což je $b^n(b-1)$. Počet palindromů mezi uvažovanými dvěma antipalindromy je tak $b^n(b-1)+2$. □

V sudém počtu cifer je počet antipalindromů i palindromů shodný, a to $b^{a-1}(b-1)$, kde a je polovina počtu cifer. To je místo, kde můžeme najít dva antipalindromy, mezi kterými nenajdeme žádný palindrom.

Příklad 13. *Uvažujme dva po sobě jdoucí antipalindromy* 1458 *a* 1548 *v bázi* $b=10$. *Podívejme se nyní na jim nejbližší palindromy. Jsou to* 1441 *a* 1551. *Z toho již vidíme, že může nastat situace, kdy mezi dvěma antipalindromy není palindrom.*

2.7 Mocniny

V této kapitole se podíváme především na dvouciferné antipalindromy a palindromy.

2.7.1 Mocniny u antipalindromů

Věta 21. *Pokud pro bázi b platí, že $b-1=c^n$, kde $n>1, n\in\mathbb{N}$, pak v této bázi je celkem $\sqrt[n]{b-1}-1$ n-tých mocnin, které jsou dvoucifernými antipalindromy.*

Důkaz. Podle věty 5 víme, že v sudém počtu cifer je antipalindrom násobkem $b-1$. Podle věty 12 víme, že mezi dvoucifernými antipalindromy je vzdálenost vždy $b-1$ a to znamená, že všechny dvouciferné antipalindromy v bázi b jsou po řadě násobky čísla $b-1$ (př. v bázi $b=10$ vidíme, že antipalindromy jsou po řadě násobky čísla 9, a to $18, 27, 36, \ldots, 81, 90$). Pokud tedy platí $b-1=c^n$, pak antipalindrom, který má být n-tou mocninou musí být ve tvaru $(b-1)a^n$, kde $a\in\mathbb{N}$. Takový antipalindrom, pak bude ve tvaru $(ac)^n$. Nyní se podíváme jakých hodnot může nabývat a. Antipalindrom ve tvaru $(b-1)a^n$ je jistě větší nebo roven nejmenšímu dvoucifernému antipalindromu a také je menší nebo roven největšímu dvoucifernému antipalindromu:

$$(b-1)b \geq (b-1)a^n \geq b+b-2 \Rightarrow b \geq a^n \wedge a^n \geq 2$$

Z toho již vidíme, že nejmenší a bude 2. Protože neexistují dvě stejné mocniny dvou různých celých čísel větších než jedna, mezi kterými by byl rozdíl jedna, tak nejvyšším číslem, které může a nabývat je $\sqrt[n]{b-1}$. Platí tak, že $a\in\{2,3,\ldots,\sqrt[n]{b-1}-1,\sqrt[n]{b-1}\}$. Takových čísel je celkem $\sqrt[n]{b-1}-1$, čímž je důkaz hotov. □

Příklad 14. *Pro příklad využijeme bázi 10, pro kterou platí* $c^2 = 10 - 1$. *Vyhovuje tak předpokladům ve větě 21. Druhých mocnin nějakých celých čísel, které jsou zároveň antipalindromy, tak má být celkem* $\sqrt{10-1} - 1 = 2$. *Takové dva antipalindromy najdeme snadno jako* $9a^2$, *pro* $a \in \{2, 3\}$. *A to platí pro tyto dva antipalindromy* $36, 81$.

Příklad 15. *Podíváme-li se na větu 21, pak je pro bázi 10 jisté, že existují právě dvě druhé mocniny celých čísel, které jsou antipalindromy. Co však z věty nemusí být hned vidět, je to, že v bázi 10 existuje i čtvrtá mocnina celého čísla, a to* $3^4 = 81$. *To vlastně není nic jiného než* 9^2. *Obecně je pak jasné, že pokud* $(ac)^n$ *je antipalindrom a zároveň* $a = c$, *pak také* a^{2n} *je antipalindrom.*

Příklad 16. *Podle věty 21 také nelze říci vždy, jestli v nějaké bázi je nějaká mocnina, což lze předvést na tomto příkladu v bázi 10. V této bázi můžeme najít dvouciferný antipalindrom, který je třetí mocninou přirozeného čísla, i když* $b - 1 \neq c^3$. *Konkrétně je tím antipalindromem* 27. *Zde také platí, že antipalindrom je násobkem* $b - 1 = 9 = 3^2$. *Je však třetí mocninou přirozeného čísla.*

Na příkladu 16 můžeme dobře vidět, že věta 21 nám říká pouze to, že pokud $b-1 = c^n$, tak v tu chvíli víme jistě, kolik takových n-tých mocnin najdeme, avšak nevylučuje existenci jiných mocnin, jak můžeme vidět na příkladu 16.
Mezi antipalindromy můžeme také najít spoustu mocnin i v jiných počtech cifer (např. $b = 10, 3^7 = 2187$). Pro bázi deset lze snadno najít několik takových mocnin ve tvaru 3^n(např. $3^3, 3^4, 3^7$) , které jsou antipalindromy. Můžeme si tedy položit otázku, jestli existuje další taková mocnina nebo jestli jich například existuje nekonečně mnoho. O podobném případu můžeme uvažovat i v bázi 5, kde jsou všechny antipalindromy podle vět 6 a 5 dělitelné dvěma, a tak si můžeme položit otázku, zda existují v bázi 5 antipalindromy ve tvaru 2^n nebo kolik jich je.

2.7.2 Mocniny u palindromů

U palindromů se především můžeme dívat na analogii s antipalindromy. Můžeme vyslovit podobnou větu pro dvouciferné palindromy.

Věta 22. *Pokud pro bázi* b *platí, že* $b + 1 = c^n$, *pak v této bázi je celkem* $\sqrt[n]{b+1} - 1$ *dvouciferných palindromů, které jsou* n*-tými mocninami.*

Důkaz. Podle věty 4 víme, že dvouciferný palindrom je vždy násobkem $b + 1$. Podle věty 18 víme, že mezi dvoucifernými palindromy je vzdálenost vždy $b + 1$, a to znamená, že všechny dvouciferné palindromy v bázi b jsou po řadě násobky čísla $b + 1$ (př. v bázi $b = 10$ vidíme, že palindromy jsou po řadě násobky čísla 11, a to $11, 22, 33, \ldots, 88, 99$). Pokud tedy platí $b + 1 = c^n$, pak palindrom, který má být n-tou mocninou, musí být ve tvaru $(b+1)a^n$, kde $a \in \mathbb{N}$. Takový palindrom, pak bude ve tvaru $(ac)^n$. Nyní se podíváme jakých hodnot může nabývat a. Palindrom ve tvaru $(b + 1)a^n$ je jistě větší nebo roven nejmenšímu dvoucifernému palindromu a také je menší nebo roven největší dvoucifernému palindromu:

$$(b - 1)b + b - 1 \geq (b + 1)a^n \geq b + 1 \Rightarrow b - 1 \geq a^n \wedge a^n \geq 1$$

Z toho snadno vidíme, že nejmenší a bude 1. Máme zde mocninu $b+1$ nějakého celého čísla, proto největším a bude $\sqrt[n]{b+1} - 1$. Platí tak, že $a \in \{1, 2, \ldots, \sqrt[n]{b+1} - 2, \sqrt[n]{b+1} - 1\}$. Takových čísel je celkem $\sqrt[n]{b+1} - 1$, čímž je důkaz hotov. $\square$

Kapitola 3

Závěr a otevřené problémy

Tato práce popisuje rozdíly a analogie mezi palindromy a antipalindromy v přirozených bázích. Přináší celou řadu nových výsledků a je tak počátečním prvkem pro další zkoumání antipalindromů, které se ukázaly být zajímavou strukturou.

Podle námi zkoumaných vlastností se zdají být antipalindomy o něco komplikovanější než palindromy. Podíváme-li se například na vzdálenosti, vystačíme u palindromů s menším počtem vztahů vyjadřujících rozdíly mezi nimi.

Antipalindromy se ale naopak často zdají mít zajímavější strukturu. To můžeme sledovat například u dělitelnosti, kdy každý antipalindrom v přirozené bázi různé od 3 je dělitelný nějakým celým číslem podle jasného vzorce (až na výjimky v lichých bázích a v bázi 2). Konkrétně antipalindromy se sudým počtem cifer jsou dělitelné číslem $b - 1$ a antipalindromy s lichým počtem cifer jsou dělitelné číslem $\frac{b-1}{2}$.

Mezi počty palindromů a antipalindromů s počtem cifer omezeným nějakou konstantou můžeme najít podobnost ve vzorci vyjadřujícím tento počet. Pro antipalindromy a palindromy v liché bázi je velmi podobný. Pokud chceme zjistit, kolikátý je nějaký antipalindrom, tak to lze především v sudé bázi snadno: postačí přečíst první polovinu cifer jako číslo v dané bázi b a máme jeho pořadí. Avšak i obecnější postup, který lze využít zejména pro liché báze, není složitý. Kompletně jsou popsány také vzdálenosti mezi antipalindromy.

Zbývá celá řada otevřených otázek, kterým se chceme dále věnovat. Uveďme namátkou některé z nich.

- Platí pro většinu čísel m, že jsou v bázi $b < m$ antipalindromická?
- Je v bázi 3 nekonečně mnoho antipalindromů, které jsou prvočísly?
- Existuje nekonečně mnoho antipalindromů v nějaké bázi b takových, že $(\sqrt{b} - 1)^n$ je antipalindrom?
- Existuje vzdálenost mezi dvěma antipalindromy v bázi b, která je sama antipalindromem v bázi b? Případně kolik takových vzdáleností v bázi b můžeme najít.

Literatura

[1] L. Balková: *Nahlédnutí pod pokličku kombinatoriky na nekonečných slovech*. Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, *56* (2011), 9–18.

[2] X. Droubay, J. Justin, G. Pirillo: *Episturmian words and some constructions of de Luca and Rauzy*, Theoret. Comput. Sci. *255* (2001), 539–553.

[3] Joyce, J.: *Ulysses*, Sylvia Beach's Shakespeare and Company in Paris, 1922.

[4] E. Pelantová, Š. Starosta: *Constructions of words rich in palindromes and pseudopalindromes*, DMTCS *18* (2016), # 16.

[5] https://oeis.org/A002385, on-line encyclopedia of integer sequences

Kapitola 4

Příloha

V příloze se nachází seznam prvních 120 antipalindromů v bázi $b = 10$, prvních 53 antipalindromů v bázi $b = 3$ (tj. všechny s počtem cifer menším než 8) a prvních 31 antipalindromů v bázi $b = 2$ (tj. všechny s počtem cifer menším než 11) .

Seznam antipalindromů v bázi $b = 10$

- Antipalindromy s 2 ciframi: 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90
- Antipalindromy s 4 ciframi: 1098, 1188, 1278, 1368, 1458, 1548, 1638, 1728, 1818, 1908, 2097, 2187, 2277, 2367, 2457, 2547, 2637, 2727, 2817, 2907, 3096, 3186, 3276, 3366, 3456, 3546, 3636, 3726, 3816, 3906, 4095, 4185, 4275, 4365, 4455, 4635, 4725, 4815, 4905, 5094, 5184, 5274, 5364, 5454, 5634, 5724, 5814, 5904, 6093, 6183, 6273, 6363, 6453, 6633, 6723, 6813, 6903, 7092, 7182, 7272, 7362, 7452, 7632, 7722, 7812, 7902, 8091, 8181, 8271, 8361, 8451, 8631, 8721, 8811, 8901, 9090, 9180, 9270, 9360, 9450, 9540, 9630, 9720, 9810, 9900
- Antipalindromy s 6 ciframi: 100998, 101898, 102798, 103698, 104598, 105498, 106398, 107298, 108198, 109098, 110988, 111888, 112788, 113688, 114588, 115488, 116388, 117288, 118188, 119088, 120978

Seznam antipalindromů v bázi $b = 3$

- Antipalindromy s 1 cifrou: 1
- Antipalindromy s 2 ciframi: 11, 20
- Antipalindromy s 3 ciframi: 111, 210
- Antipalindromy s 4 ciframi: 1021, 1111, 1201, 2020, 2110, 2200
- Antipalindromy s 5 ciframi: 10121, 11111, 12101, 20120, 21110, 22100
- Antipalindromy s 6 ciframi: 100221, 101121, 102021, 110211, 111111, 112011, 120201, 121101, 122001, 200220, 201120, 202020, 210210, 211110, 212010, 220200, 221100, 222000
- Antipalindromy se 7 ciframi: 1001221, 1011121, 1021021, 1101211, 1111111, 1121011, 1201201, 1211101, 1221001, 2001220, 2011120, 2021020, 2101210, 2111110, 2121010, 2201200, 2211100, 2221000

Seznam antipalindromů v bázi $b = 2$

- Antipalindromy s 2 ciframi: 10
- Antipalindromy s 4 ciframi: 1010, 1100
- Antipalindromy s 6 ciframi: 100110, 101010, 110100, 111000
- Antipalindromy s 8 ciframi: 10001110, 10010110, 10101010, 10110010, 11001100, 11010100, 11101000, 1111000
- Antipalindromy s 10 ciframi: 1000011110, 1000101110, 1001010110, 1001100110, 1010011010, 1010101010, 1011010010, 1011100010, 1100011100, 1100101100, 1101010100, 1101100100, 1110011000, 1110101000, 1111010000, 1111100000