# STŘEDOŠKOLSKÁ ODBORNÁ ČINNOST

**Obor SOČ: 1. Matematika a statistika**

**Basilejský problém**

**The Basel Problem**


**Autor:** **Alexandr Jankov**

**Škola:** Matiční gymnázium, Ostrava
Dr. Šmerala 25, 728 04 Ostrava

**Kraj:** Moravskoslezský kraj

**Konzultant:** **RNDr. Petr Blaschke Ph.D.**


**Ostrava 2016**

**Prohlášení**

*Prohlašuji, že jsem svou práci SOČ vypracoval samostatně a použil jsem pouze podklady uvedené v seznamu vloženém v práci SOČ.*

*Prohlašuji, že tištěná verze a elektronická verze soutěžní práce SOČ jsou shodné.*

*Nemám závažný důvod proti zpřístupňování této práce v souladu se zákonem č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně autorských zákonů v platném znění.*

V ..........dne..................... podpis:........................

**Poděkování**

Mé velké poděkování patří panu doktoru Petru Blaschkemu z matematického ústavu Slezské univerzity v Opavě za velmi cenné pravidelné odborné konzultace, trpělivost a hlavně obětavou pomoc s průběžnou korekturou práce.

## Abstrakt

Primárním cílem práce je přednést vlastní, co možná nejsrozumitelnější řešení Basilejského problému a také jeho zobecnění. Uvedený problém spočívá v sečtení převrácených hodnot čtverců všech přirozených čísel. Problém bude dále zobecněn i na jakýkoliv sudý exponent. Hlavní podstata použitého postupu se ukrývá v práci s tzv. gamma funkcí a funkcí psí od gamma funkce odvozené. Sekundárním cílem je co nejzevrubnější seznámení čtenáře s použitou metodikou a některými zajímavými výskyty odvozených hodnot nejen v matematice, ale i ve fyzice. Největším přínosem je vytvoření zobecnitelného důkazu, který nemusí využívat nijak silných matematických prostředků.



**Klíčová slova:** Faktoriál, gamma funkce, psí funkce, Bernoulliho čísla, zeta funkce



## Abstract

The primary goal of this paper is to perforn own and the most intelligible solution of so-called Basel problem asi possible. Stated problem asks for sum of reciprocal values of squares of all integers. The problem will be furthemore generalized to any even exponent. The main nature of the approach used in the paper lies in working with gamma function and psi function, which is later derived from gamma function. The secondary goal would be the most deteailed familiarization with used theory and some interesting occurences of derived values not only in mathematics but in physics as well. The most valued benefit would be creation of generalizable proof, which doesn't need to rely on some really strong mathematical means.



**Key words:** Factorial, gamma function, psi function, Bernoulli numbers, zeta function

# Obsah

# Úvod

Matematické řady jsou zajisté velmi krásnými a nevyzpytatelnými útvary. Krásné v tom smyslu, že se při práci s nimi můžeme ponořit do tajů najednou dvou královských disciplín, kterými jsou matematická analýza a teorie čísel, nevyzpytatelné zase tím, že zahrnují pojem nekonečno. Pod pojmem matematická řada vůbec rozumíme každý součet všech členů nekonečné posloupnosti čísel. Nekonečno je samozřejmě hodně citlivé a vždy se s ním musí pracovat velmi opatrně. V případě řad tomu není jinak a mnohdy nás operování s nimi zavede k pozoruhodným, překvapivým a někdy i zcela intuici odporujícím výsledkům.

Mezi ty nejvíce překvapivé budeme řadit i součet, ke kterému sečtením jedné řady poprvé roku 1734 dospěl slavný matematik Leonhard Euler. Jedná se o problém, s kterým údajně už roku 1644 přišel Pietro Mengoli. Zadání je vcelku jednoduché a ptá se nás kolik je $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$, neboli chceme nalézt součet převrácených hodnot čtverců všech přirozených čísel. Tento problém byl posléze pojmenován *Basilejský problém* a fakt, že je jeho řešením ve skutečnosti $\pi^2/6$ můžeme opravdu shledat lehce zarážejícím.

Obecný součet $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^t$, kde $t \in \mathbb{R}^+$ se nazývá *zeta funkce* a zpravidla se značí $\zeta(t)$.

Eulerův originální důkaz spočíval v jednak rozvinutí funkce sinus do Taylorovy řady a dále i v jejím zapsání ve formě nekonečného součinu. Euler však poprvé tento součinový tvar spíše uhodl a jeho rigorózní vysvětlení si žádá použití netriviálních a již pokročilejších prostředků. Odvodit podobu Taylorovy řady pro funkci sinus a následně dokázat její konvergenci není nikterak náročný úkol, ale není tomu tak v případě nekonečných součinů. Pro vyjádření funkce, coby nekonečného součinu, je zapotřebí tzv. Weierstrassovy faktorizační formule ([11]). Nám stačí vědět, že se jedná o velmi pokročilou větu, jejíž důkaz je složitý a dalece přesahuje i poznatky nutné k dokázání Taylorovy věty. Kromě tohoto Eulerova důkazu samozřejmě za celou dobu vznikla i řada dalších, například pomocí Fourierových řad nebo integrální reprezentace uvedeného součtu.

Práce se zaměřuje na nalezení vlastního důkazu a postupné dopracování se k němu skrze co možná nejlépe uchopitelnou teorii. Osobně jsem na tento problém narazil hned při svých začátcích s matematikou, stejně jako mnohé, i mě jeho výsledek velmi zaujal a pokusil jsem se k němu různými metodami dospět, avšak tehdy zatím bez úspěchu. Poté jsem shromažďoval co nejvíce známých řešení a zároveň zkoušel přijít s nějakým vlastním. Nakonec se jako úspěšný ukázal postup využívající tzv. gamma funkce, což je krátce zobecnění faktoriálu do všech kladných reálných čísel. Samotné řešení a důkazy důležitých pomocných tvrzení jsou koncipovány tak, aby co nejvíce redukovaly používání velmi silných matematických zbraní a snažily se spokojit více méně se základy matematické analýzy.

Kdybychom nezkoumali původ všech použitých tvzrení (čehož se však v průběhu práce pokusíme), tak je samotný důkaz tvořen jednoduchými úpravami mezi výrazy a řadami, přičemž je zakončen výpočtem relativně jednoduché limity.

Po zavedení zajímavé posloupnosti Bernoulliho čísel je i docela snadné předložené řešení Basilejského problému zobecnit pro jakýkoliv exponent $2m$, kde $m \in \mathbb{N}$, tj. nalezneme obecné vyjádření uzavřeného tvaru pro hodnoty $\zeta(2m)$.

Závěrem práce je ukázka některých výskytů odvozených hodnot v teorii čísel a například i ve fyzice.

# 1 gamma funkce

## 1.1 Zavedení gamma funkce v oboru reálných čísel

Už ze středních škol zajisté známe funkci faktoriál, která je definována jako konečný součin prvních $n$ přirozených čísel

$$\prod_{k=1}^{n} k = n!,$$

kde také definujeme $0! = 1$. Okamžitě si všimneme nedostatku, který spočívá v tom, že je tato funkce definována pouze v oboru přirozených čísel. Našim cílem nyní bude její zobecnění do oboru čísel (resp. posléze i komplexních) reálných. Na první pohled se může zdát krajně nepředstavitelné, jak vypočítat například faktoriál ze zlomku nebo ještě lépe z čísla $\pi$, ale v pozdějších kapitolách si vskutku ukážeme, jak by to mohlo jít.

Jedním ze záměrů matematiků v osmnáctém století bylo funkci faktoriál interpolovat, tj. nalézt křivku, která prochází všemi body určené rovností

$$y = (x + 1)!$$

Takovýchto křivek můžeme vymyslet nekonečně mnoho. Jedinou podmínkou je, aby protínala body $[n, n!]$, a jinak ji může reprezentovat i nějaká „škaredá“ a vlnitá funkce, se kterou nebude možné velmi dobře pracovat. Zkusme tedy náš hledáček trochu zúžit a nalézt nějakou „pěknou“ interpolující křivku.

Pod ne příliš určitým výrazem „pěkný“ si zde můžeme představit konvexní funkci, tj. jakákoliv spojnice dvou bodů na grafu této funkce, se bude nacházet v útvaru, který funkce ohraničuje, čemuž odpovídá následující definice:

**Definice 1.1.1.** Pokud pro libovolné dva body $x_1, x_2$, z intervalu $J$ a pro každé $\lambda \in [0; 1]$ platí, že

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2),$$

tak o funkci $f$ říkáme, že je *konvexní* na intervalu $J$. Pokud obrátíme znaménko nerovnosti, tak dostáváme podmínku pro *konkávní* funkci.

Pokud je funkce $f$ na intervalu $J$ navíc dvakrát spojitě diferencovatelná, dá se dokázat, že tato podmínka je ekvivalentní s podmínkou

$$f''(x) \geq 0,$$

kde $x \in J$ (viz [1]).

My nyní budeme hledat takovou funkci, která je takzvaně *logaritmicky konvexní*. Logaritmicky proto, že kdykoliv vytvoříme složenou funkci $\log f$, tak logaritmus výrazně zpomalí růst funkce $f$. O logaritmu dobře víme, že roste do nekonečna, ale neskutečně pomalým způsobem a sám o sobě je konkávní. Pokud tedy bude funkce $\log f$ konvexní a $f$ takto ustojí logaritmickou zátěž, pak tím spíše bude $f$ konvexní a bude se zakřivovat hodně vzhůru. Takovýmto funkcím také říkáme *superkonvexní*. To se nám pro naši interpolaci velmi hodí, neboť víme, že faktoriál je prudce rostoucí funkce.

Funkci s požadovanou vlastností se říká *gamma funkce*. Tu se zanedlouho pokusíme klasickým způsobem zavést, tj. nejprve definujeme její předpis, odvodíme její charakteristické vlastnosti a poté dokážeme, že se jedná o jedinou funkci s takovými vlastnostmi.

Ještě předtím se však k její definici zkusme nějakým způsobem dopracovat, tj. popsat postup, který k ní matematiky v čele s Leonardhem Eulerem dovedl.

**Příklad 1.1.2 (Euler - 1730).** V následujících úvahách se pokusme o vyjádření $n!$ pomocí integrálu. Uvažujme nyní určitý integrál $\int\limits_0^1 x^\alpha(1-x)^n \mathrm{d}x$, kde $n \in \mathbb{N}$ a $\alpha \in \mathbb{R}$. Uplatněme dále binomickou větu na člen $(1-x)^n$ a postupně upravujme:

$$\int\limits_0^1 x^\alpha(1-x)^n \mathrm{d}x = \int\limits_0^1 x^\alpha \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-x)^k \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} \int\limits_0^1 \binom{n}{k} x^\alpha(-x)^k \mathrm{d}x =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \int\limits_0^1 x^\alpha(-x)^k \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k+\alpha+1},$$

odkud

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k+\alpha+1} = \frac{1}{0!(\alpha+1)} - \frac{n}{1!(\alpha+2)} + \frac{n(n-1)}{2!(\alpha+3)} - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!(\alpha+4)} + \ldots + \frac{(-1)^n}{(\alpha+n+1)},$$

což nám po převedení všech zlomků na společného jmenovatele dává vyjádření

$$\int\limits_0^1 x^\alpha(1-x)^n \mathrm{d}x = \frac{n!}{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n+1)}.$$

Nyní předpokládejme, že je $\alpha$ racionální a položme $\alpha = u/v$, z čehož je

$$\int\limits_0^1 x^{\frac{u}{v}}(1-x)^n \mathrm{d}x = \frac{n!}{\left(1+\frac{u}{v}\right)\left(2+\frac{u}{v}\right)\ldots\left(n+1+\frac{u}{v}\right)} = \frac{n!}{\frac{u+v}{v}\cdot\frac{u+2v}{v}\cdot\ldots\cdot\frac{u+nv+v}{v}} =$$

$$\frac{v^{n+1}n!}{(u+v)(u+2v)\ldots(u+v(n+1))} = \frac{v^{n+1}}{u+v(n+1)} \cdot \frac{n!}{(u+v)(u+2v)\ldots(u+nv)},$$

tedy

$$\frac{n!}{(u+v)(u+2v)\ldots(u+nv)} = \frac{u+v(n+1)}{v^{n+1}} \int\limits_0^1 x^{\frac{u}{v}}(1-x)^n \mathrm{d}x. \tag{1}$$

Dále zavedeme v pořadí už druhou substituci $w = x^{v/(u+v)}$. Je

$$\mathrm{d}w = \frac{vx^{-\frac{v}{u+v}}}{u+v}\mathrm{d}x,$$

přičemž nám horní a dolní mez zůstanou obě stejné, z čehož máme

$$\frac{u+v(n+1)}{v^{n+1}}\int\limits_0^1 x^{\frac{u}{v}}(1-x)^n\mathrm{d}x = \frac{1+v(n+1)}{v^{n+1}}\int\limits_0^1 x^{\frac{v}{u+v}}\left(1-x^{\frac{v}{u+v}}\right)^n \frac{vx^{-\frac{v}{u+v}}}{u+v}\mathrm{d}x =$$

$$\frac{1+v(n+1)}{v^{n+1}}\int\limits_0^1 \frac{v}{u+v}\left(1-x^{\frac{v}{u+v}}\right)^n \mathrm{d}x = \frac{1+v(n+1)}{(u+v)^{n+1}}\int\limits_0^1 \frac{(u+v)^n}{v^n}\left(1-x^{\frac{v}{u+v}}\right)^n \mathrm{d}x =$$

$$\frac{1+v(n+1)}{(u+v)^{n+1}}\int\limits_0^1 \left(\frac{1-x^{\frac{v}{u+v}}}{\frac{v}{u+v}}\right)^n \mathrm{d}x.$$

Podle (1) tedy platí

$$\frac{n!}{(u+v)(u+2v)\dots(u+nv)} = \frac{1+v(n+1)}{(u+v)^{n+1}}\int\limits_0^1 \left(\frac{1-x^{\frac{v}{u+v}}}{\frac{v}{u+v}}\right)^n \mathrm{d}x. \tag{2}$$

Jasně vidíme, že pokud bychom zde postupně položili $u = 1$ a $v = 0$, tak bychom hned získali kýžené vyjádření $n!$. Problémem je ovšem pravá strana, kde bychom po takovémto kroku obdrželi neurčitý výraz. Dosaďme tedy do (2) $u = 1$ a poté vezměme obě strany rovnosti limitou $v \to 0$, tj.

$$n! = \lim_{v\to 0}\int\limits_0^1 \left(\frac{1-x^{\frac{v}{1+v}}}{\frac{v}{1+v}}\right)^n \mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \lim_{v\to 0}\left(\frac{1-x^{\frac{v}{1+v}}}{\frac{v}{1+v}}\right)^n \mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left(\lim_{v\to 0}\frac{1-x^{\frac{v}{1+v}}}{\frac{v}{1+v}}\right)^n \mathrm{d}x.$$

Limitu v argumentu integrálu můžeme lehce spočítat ze známého l'Hospitalova pravidla, podle kterého je za určitých podmínek limita podílu dvou funkcí rovna limitě podílu jejich derivací. Jelikož se jedná o typ „$\frac{0}{0}$“, máme pro tento krok oprávnění. Také nezapomínejme, že derivujeme podle $v$, tj. vždy podle proměnné, kterou limitně posíláme k nějaké hodnotě, nikoliv podle $x$, odkud

$$\lim_{v\to 0}\frac{1-x^{\frac{v}{1+v}}}{\frac{v}{1+v}} = \lim_{v\to 0}\frac{-\frac{x^{\frac{v}{v+1}}\log x}{(v+1)^2}}{\frac{1}{(v+1)^2}} = -\lim_{v\to 0} x^{\frac{v}{v+1}}\log x = -\log x.$$

Vidíme také, že tato limita konverguje tzv. stejnoměrně (tedy nezávisle na $x$), což nás také opravňuje k přehození limity a integrálu ve výpočtu výše. Čili finálně

$$n! = \int\limits_0^1 (-\log x)^n\,\mathrm{d}x, \tag{3}$$

což je přesně výsledek ke kterému jsme chtěli dospět a stejně tak výsledek k němuž již roku 1730 dospěl Euler, a který 8.ledna stejného roku také formou dopisu oznámil Christianu Goldbachovi, s kterým v těchto letech také, kvůli právě problematice zobecňování faktoriálu, udržoval stálou korespondenci. Vedle něj je dalším z prvních matematiků, kteří se o toto zajímali také Daniel Bernoulli. Vyjádření (3) pokládá základ pro samotnou definici gamma funkce, k níž dospějeme pouhou změnou souřadnic, viz tedy (toto řešení bylo částečně inspirováno podklady [3] a [4], které jsou oba vřele doporučeny pro další navazující studium gamma funkcí):

**Definice 1.1.3.** Pro všechna $x \in \mathbb{R}^+$, definujeme *gamma funkci* jako nevlastní určitý integrál

$$\Gamma(x) = \int\limits_0^\infty t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t.$$

To, že tento integrál je pro $x = n$ pro přirozené $n$ roven $n!$, je možné snadno ověřit integrací *per partes*, ale důvodem, proč uvádíme předchozí příklad je, abychom přiblížili, jak k danému výsledku poprvé matematici vůbec dospěli. Kdybychom definici 1.1.3 uhodli a poté aplikovali zmíněný per partes, bylo by vše v pořádku, nicméně podoba gamma funkce není příliš intuitivní, tudíž lze považovat zavhodné, popsat jak se k takovéto definici dopracovat přímou cestou.

**Příklad 1.1.4** (Konvergence gamma funkce)**.** Bylo by na místě vyšetřit konvergenci nevlastního integrálu, který funkce gamma reprezentuje, tj. chceme dokázat, že je vždy menší než $\infty$. Zkusme si pomoci menším trikem, a sice tím, že si rozdělíme výchozí integrál na dva:

$$\int\limits_0^\infty t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \int\limits_0^1 t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t + \int\limits_1^\infty t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t.$$

Prvně se zaměřme na integrál $\int\limits_0^1 t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$. Víme, že je funkce $\mathrm{e}^{-t}$ na celém $\mathbb{R}$ klesající, a tedy má pro $t \geq 0$ maximum v bodě 0, odkud mimo jiné

$$\int\limits_0^1 t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t < \int\limits_0^1 t^{x-1}\mathrm{e}^{0}\mathrm{d}t = \int\limits_0^1 t^{x-1}\mathrm{d}t.$$

Pravá strana konverguje k $\frac{1}{x}$, z čehož už vyplývá konvergence levé strany. V druhém a také těžším kroku musíme ještě samozřejmě dokázat, že konverguje i $\int\limits_1^\infty t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$. Nejprve ukažme, že exponenciální funkce roste rychleji než polynom, tedy budeme dokazovat, že

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} c_k t^k}{\mathrm{e}^t} = 0.$$

Máme rovněž

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} c_k t^k}{c_n t^n} = \lim_{t\to\infty} \left(1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{c_k t^k}{c_n t^n}\right) = 1,$$

tj. stačí, když dokážeme

$$\lim_{t\to\infty} \frac{c_n t^n}{\mathrm{e}^t} = 0,$$

kde však při porovnávání polynomu a exponenciály nebude v nekonečnu na nějaké konstantě $c_n$ vůbec záležet. Využijeme nyní známého faktu, že pro jakékoliv $t \in \mathbb{R}$ lze funkci $\mathrm{e}^t$ rozepsat do nekonečné mocninné řady ve tvaru (poněkud bližší drobnohled nad touto vlastností se nachází v kapitole 3 a v materiálech [1], [2] a [5]):

$$\mathrm{e}^t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!},$$

potom tedy

$$0 < \frac{t^n}{\mathrm{e}^t} = \lim_{t\to\infty} \frac{t^n}{\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}} = \frac{1}{t^n \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}} = \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{t^{k-n}}{k!}} < \frac{1}{\frac{1}{n!} + \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}} = \frac{(n+1)!}{n+1+t^n},$$

a jelikož platí

$$\lim_{t\to\infty} \frac{n!}{t^{n-x+1}} = \lim_{t\to\infty} 0 = 0,$$

tak podle věty o limitě sevřené funkce platí, že i

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^n}{\mathrm{e}^t} = 0,$$

což jsme chtěli dokázat. Z toho vyplývá, že existuje konstanta $C$, závisející na $x$, taková, že $C\mathrm{e}^{t/2} > t^{x-1}$, odkud

$$\int_1^{\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t < C\int_1^{\infty} \mathrm{e}^{-t/2}\mathrm{d}t = C\lim_{t\to\infty}\left(-2\mathrm{e}^{-t/2}\right) - C\lim_{t\to 1}\left(-2\mathrm{e}^{-t/2}\right) = 2C\mathrm{e}^{-1/2},$$

tedy integrál $\int\limits_1^{\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ konverguje pro $x \in \mathbb{R}^+$ a $t \geq 0$ a konverguje pro tyto hodnoty tím pádem i gamma funkce. ■

Nyní se podívejme, zdali náš nalezený konvergentní integrál skutečně splňuje požadavky, které jsme kladli hned v úvodním povídání o faktoriálech na začátku této kapitoly. Shrňme je do této věty, kterou také vzápětí hned dokážeme.

**Věta 1.1.5** (Vlastnosti gamma funkce v $\mathbb{R}$)**.**

(i) *gamma funkce splňuje funkcionální rovnici*

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

*pro všechna* $x \in \mathbb{R}^+$.

(ii) *Pro všechna* $n \in \mathbb{N}$ *platí* $\Gamma(n+1) = n!$.

(iii) *Funkce* $\log\Gamma(z)$ *je konvexní pro všechna* $x \in \mathbb{R}^+$.

*Důkaz.* Integrací metodou *per partes* dostaneme

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t = \lim_{t\to\infty} \left(-t^x \mathrm{e}^{-t}\right) - \lim_{t\to 0} \left(-t^x \mathrm{e}^{-t}\right) - \int_0^\infty -x t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t = x \int_0^\infty t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}x,$$

což je tedy podle definice 1.1.3 ekvivalentní s $x\Gamma(x)$, čímž jsme dokázali (i). Vlastnost (i) se také nazývá rekurentní formule pro gamma funkci a podle ní dále platí

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = n(n-1)(n-2)\Gamma(n-2) = \ldots = n!\Gamma(1). \quad (1)$$

Nyní musíme vypočítat hodnotu $\Gamma(1)$. Podle opět základní definice je

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t = \lim_{t\to\infty} (-\mathrm{e}^{-t}) - \lim_{t\to 0} (-\mathrm{e}^{-t}) = 1,$$

což spolu s (1) vede k důkazu (ii). Důkaz posledního bodu bude o poznání náročnější. Využijeme k němu tzv. *Hölderovy nerovnosti* ([12]). Nechť pro dvojici čísel $p, q \in \mathbb{R}$ platí $p > 1$, $q > 1$ a $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ a nechť jsou $f_1, f_2, f_3$ kladné funkce definované pro všechna $t \in \mathbb{R}^+$, potom silnější verze Hölderovy nerovnosti udává

$$\int_0^\infty |f_1(t) f_2(t) f_3(t)| \mathrm{d}t \leq \left( \int_0^\infty |f_1(t)^p f_3(t)| \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_0^\infty |f_2(t)^q f_3(t)| \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Nyní položme $f_1(t) = t^{\frac{1}{p}(x_1-1)}$, $f_2(t) = t^{\frac{1}{q}(x_2-1)}$ a $f_3(t) = \mathrm{e}^{-t}$, kde $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$, tj.

$$\int_0^\infty \left| t^{\frac{x_1}{p} + \frac{x_2}{q} - 1} \mathrm{e}^{-t} \right| \mathrm{d}t \leq \left( \int_0^\infty \left| t^{x_1-1} \mathrm{e}^{-t} \right| \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_0^\infty \left| t^{x_2-1} \mathrm{e}^{-t} \right| \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Všimněme si dále, že jsou definované funkce na celém $\mathbb{R}$ kladné, tedy můžeme výrazy v nerovnosti nahoře psát i bez absolutních hodnot, a dále tedy podle definice 1.1.3 máme

$$\Gamma\left(\frac{x_1}{p} + \frac{x_2}{q}\right) \leq \Gamma(x_1)^{\frac{1}{p}} \Gamma(x_2)^{\frac{1}{q}}.$$

Nyní tuto nerovnici budeme chtít zlogaritmovat logaritmem o základu e. Polarita znaménka nerovnosti se nám zde zachová, neboť je logaritmus rostoucí funkce, tj. dostaneme

$$\log\Gamma\left(\frac{x_1}{p} + \frac{x_2}{q}\right) \leq \log\Gamma(x_1)^{\frac{1}{p}} \Gamma(x_2)^{\frac{1}{q}},$$

což po použití vzorce $\log ab = \log a + \log b$ na pravé straně, dává

$$\log\Gamma\left(\frac{x_1}{p} + \frac{x_2}{q}\right) \leq \log\Gamma(x_1)^{\frac{1}{p}} + \log\Gamma(x_2)^{\frac{1}{q}}.$$

Nyní na téže straně aplikujeme vzorec $\log a^b = b \log a$ a dostaneme

$$\log \Gamma\left(\frac{x_1}{p} + \frac{x_2}{q}\right) \leq \frac{1}{p} \log \Gamma(x_1) + \frac{1}{q} \log \Gamma(x_2).$$

Jelikož je $\frac{1}{p} = 1 - \frac{1}{q}$, tak na závěr bude

$$\log \Gamma\left(\left(1 - \frac{1}{q}\right) x_1 + \frac{1}{q} x_2\right) \leq \left(1 - \frac{1}{q}\right) \log \Gamma(x_1) + \frac{1}{q} \log \Gamma(x_2),$$

čímž je podle definice 1.1.1 (iii) dokázáno. ∎

Tři ukázané vlastnosti jsou, jak se zanedlouho přesvědčíme, schopny gamma funkci zcela charakterizovat a je jimi jednoznačně určena, viz tedy následující věta:

**Věta 1.1.6** (Jednoznačnost gamma funkce v $\mathbb{R}^+$). *Je-li $f$ kladná funkce, definovaná pro všechna $x \in \mathbb{R}^+$, a která navíc splňuje podmínky*

(i) $f(x+1) = xf(x)$,

(ii) $f(1) = 1$,

(iii) $\log f$ *je konvexní pro* $x \in \mathbb{R}^+$,

*pak nutně* $f(x) = \Gamma(x)$.

Samotnému důkazu předešleme lemma týkající se jednoho užitečného důsledku konvexnosti funkce:

**Lemma 1.1.7.** *Funkce $f$ je konvexní na nějakém intervalu $J \subset \mathbb{R}$, právě tehdy když pro libovolné body $x_1, x_2, x_3 \in J$, kde $x_1 < x_2 < x_3$ platí soustava nerovnic:*

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

*Důkaz.* Máme dokázat ekvivalenci, tedy musíme dokázat obě implikace zvlášť. Začneme s implikací $\leftarrow$, tedy předpokládejme, že platí nerovnost:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Toto je dále po vynásobení nerovnosti kladným členem $(x_3 - x_2)(x_2 - x_1)$ ekvivalentní s

$$(x_3 - x_2)(f(x_2) - f(x_1)) \leq (x_2 - x_1)(f(x_3) - f(x_2)).$$

Tuto nerovnost přeuspořádat:

$$f(x_2)(x_3 - x_1) \leq (x_3 - x_2)f(x_1) + (x_2 - x_1)f(x_3). \tag{1}$$

Položme nyní

$$\lambda = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}. \tag{2}$$

Vidíme, že $0 < \lambda < 1$ a dále

$$1 - \lambda = 1 - \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}. \tag{3}$$

Z toho také vyplývá vyjádření $x_2$ jako

$$x_2 = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_3.$$

Vydělením (1) kladným $x_3 - x_1$ obdržíme

$$f(x_2) \leq \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_3). \tag{4}$$

Díky (2) a (3), lze (4) zapsat jako

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_3) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda) f(x_2).$$

Poslední nerovnost reprezentuje základní definici konvexní funkce, čímž jsme pokryli důkaz první implikace. Obdobně lze vyjít z druhé nerovnosti a dojít ke stejnému závěru podobným způsobem. Jelikož jsme používali jen ekvivalentní úpravy, obrácením logiky dospějeme k důkazu opačné implikace, a tedy jsme hotovi (důkaz je v podstatě převzat z [1], jen je místy doplněn o nějaký dodatečný slovní doprovod). ■

Nyní už můžeme přejít k samotnému důkazu:

*Důkaz* (Věty 1.1.6). Předpokládejme, že všechny uvedené vlastnosti pro funkci $f$ platí a vyberme nyní trojici čísel $n, n+1, n+x+1$, kde $0 < x \leq 1$ a $n \in \mathbb{N}$. Tato čísla zcela zřejmě splňují soustavu nerovností $n < n+1 < n+z+1$. Podle (iii) je $\log f$ konvexní funkce, tedy podle lemmatu 1.1.7 máme

$$\frac{\log f(n+1) - \log f(n)}{(n+1) - n} \leq \frac{\log f(n+x+1) - \log f(n+1)}{(n+x+1) - (n+1)}.$$

Podle (i) je $\log f(n+1) - \log f(n) = \log n$, tedy

$$\log n \leq \frac{\log f(n+x+1) - \log f(n+1)}{x}.$$

Obdobně nyní vyberme trojici čísel $n+1, n+x+1, n+2$, kde opět $0 < x \leq 1$, $n \in \mathbb{N}$, a pro kterou je $n+1 < n+x+1 < n+2$. Podle (iii) je

$$\frac{\log f(n+x+1) - \log f(n+1)}{x} \leq \frac{\log f(n+2) - \log f(n+1)}{(n+2) - n - 1}, \tag{1}$$

de se výraz na pravé straně podle (i) shoduje s $\log(n+1)$, tj.

$$\frac{\log f(n+x+1) - \log f(n+1)}{x} \leq \log(n+1). \tag{2}$$

Z poznatků (1) a (2) obdržíme soustavu nerovnic

$$\log n \leq \frac{\log f(n+x+1) - \log f(n+1)}{x} \leq \log(n+1),$$

kde po jejím vynásobení faktorem $x$ dostaneme

$$\log n^x \leq \log f(n+x+1) - \log f(n+1) \leq \log(n+1)^x.$$

Podle (i) a (ii) je nadále $\log f(n+1) = \log n!$, což dává

$$\log n^x \leq \log f(n+x+1) - \log n! \leq \log(n+1).$$

Odečtením $\log n^x$ od všech nerovnic dále získáme

$$0 \leq \log f(n+x+1) - \log n^x n! \leq \log \left(1 + \frac{1}{n}\right)^x. \tag{3}$$

Z podmínky $f(x+1) = xf(x)$ mimo jiné vyplývá i, že:

$$\log f(n+x+1) = \log f(n+x) + \log(n+x).$$

V aplikaci tohoto tvrzení lze dále pokračovat i na výrazu $\log f(n+x)$

$$\log f(n+x+1) = \log f(n+x-1) + \log(n+x-1) + \log(n+x)$$

a odtud i na výrazu $\log f(n+x-1)$, atd. Obdobný proces můžeme tedy dále opakovat dokud nedospějeme k vyjádření

$$\log f(n+x+1) = \log f(x) + \sum_{k=1}^{n} \log(n+x-k+1).$$

Nyní využijme vzorce $\log ab = \log a + \log b$, čímž převedeme součet na pravé straně na součin:

$$\log f(n+x+1) = \log f(x) + \log \prod_{k=1}^{n} (n+x-k+1) = \log f(x) \prod_{k=1}^{n} (n+x-k+1),$$

tedy nerovnost (3) můžeme dále upravit na tvar

$$0 \leq \log \frac{f(x)}{n^x n!} \prod_{k=1}^{n} (n+x-k+1) \leq \log \left(1 + \frac{1}{n}\right)^x.$$

Samozřejmě platí, že $\log 1 = 0$, tedy lze psát

$$\log 1 \leq \log \frac{f(x)}{n^x n!} \prod_{k=1}^{n} (n+x-k+1) \leq \log \left(1 + \frac{1}{n}\right)^x,$$

což je po zbavení se logaritmů ekvivalentní s

$$1 \leq \frac{f(x)}{n^x n!} \prod_{k=1}^{n} (n+x-k+1) \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^x.$$

Dále je

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^x = 1,$$

a to nám společně s $\lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$ a rovněž aplikací věty o limitě sevřené funkce dává

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x)}{n^x n!} \prod_{k=1}^{n} (n+x-k+1) = f(x) \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^x n!} \prod_{k=1}^{n} (n+x-k+1) = 1,$$

odkud už konečně

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} n^x n! \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{n+x-k+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)},$$

čímž jsme odvodili jednoznačný předpis pro funkci $f$, a tedy je důkaz Věty 1.1.6 pro $0 < x \leq 1$ hotov. Její důkaz pro všechna $x \in \mathbb{R}^+$ plyne z vlastnosti (i). ∎

**Důsledek 1.1.8** (Alternativní definice gamma funkce)**.** Pro všechna $x \in \mathbb{R}^+$, lze gamma funkci vyjádřit jako

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}.$$

*Důkaz.* Důkazem Věty 1.1.6 jsme předpokládáním některých vlastností pro funkci $f$ dospěli k jejímu jednoznačnému vyjádření. Podle Věty 1.1.5 má funkce gamma ty stejné vlastnosti, a tedy při opakování analogického postupu dosáhneme stejného definičního vztahu jaký má funkce $f$. ∎

## 1.2 Doplňková formule pro gamma funkci

Následující věta je stěžejním odrazovým můstkem pro důkaz dalších velmi důležitých tvrzení, která nás už přímo povedou k řešení Basilejského problému, který jsme si zadali v úvodu práce. Pro její důležitost by bylo vhodné ji patřičně dokázat, což nebude zcela jednoduchý úkol, a proto důkazu samotnému věnujeme samotnou kapitolu.

**Věta 1.2.1.** *Pro všechna* $0 < x < 1$ *platí*

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \pi \csc \pi x,$$

*kde* csc *značí tzv. kosekans funkci, která nabývá hodnot převrácených k hodnotám funkce sinus.*

*Důkaz.* Vyjdeme ze základní definice gamma funkce (definice 1.1.3), tedy je

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \left( \int_0^\infty t_1^{x-1} \mathrm{e}^{-t_1} \mathrm{d}t_1 \right) \cdot \left( \int_0^\infty t_2^{-x} \mathrm{e}^{-t_2} \mathrm{d}t_2 \right).$$

Jeden z integrálů bychom mohli vzhledem k tomu druhému chápat jako konstantu a převést uvedený součin integrálů na dvojný integrál, tj.

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \iint\limits_{(0,\infty)^2} t_1^{x-1} t_2^{-x} \mathrm{e}^{-(t_1+t_2)} \mathrm{d}t_1 \mathrm{d}t_2. \tag{1}$$

Tento krok však nemusí být vždy korektní. Musíme totiž vyšetřit existenci daného dvojného integrálu. K tomu nám může posloužit tzv. *Fubiniho věta*. Podle Fubiniho věty náš dvojný integrál absolutně konverguje, pokud platí buďto

$$\int_0^\infty \left| \int_0^\infty \left| t_1^{x-1} t_2^{-x} \mathrm{e}^{-(t_1+t_2)} \right| \mathrm{d}t_2 \right| \mathrm{d}t_1 < \infty$$

a nebo také

$$\int_0^\infty \left| \int_0^\infty \left| t_1^{x-1} t_2^{-x} \mathrm{e}^{-(t_1+t_2)} \right| \mathrm{d}t_1 \right| \mathrm{d}t_2 < \infty.$$

V obou případech je zcela zřejmě integrand na celém $\mathbb{R}^+$ kladný, tudíž můžeme bez problémů odstranit absolutní hodnoty. Již na začátku v příkladu 1.1.4 jsme ukázali, že gamma funkce konverguje. Jelikož je její integrand kladný, konverguje rovněž absolutně. Z toho už prostřednictvím Fubiniho věty velmi snadno plyne konvergence (absolutní) integrálu (1).

Nyní zaveďme substituce $t_1(u,v) = uv$ a $t_2(u,v) = u(1-v)$. Potom pro oblast integrace dostaneme, že $(0,\infty)^2 \to (0,\infty) \times (0,1)$. Dále je

$$\iint\limits_{(0,\infty)^2} t_1^{x-1} t_2^{-x} \mathrm{e}^{-(t_1+t_2)} \mathrm{d}t_1 \mathrm{d}t_2 = \int_0^\infty \int_0^1 (uv)^{x-1} \left(u(1-v)\right)^{-x} \mathrm{e}^{-uv-u(1-v)} |\det \mathbf{J}(u,v)| \mathrm{d}u\mathrm{d}v, \tag{2}$$

kde $\mathbf{J}$ je *Jacobiho matice*, pro kterou platí

$$\mathbf{J}(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial t_1}{\partial u} & \frac{\partial t_1}{\partial v} \\ \frac{\partial t_2}{\partial u} & \frac{\partial t_2}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v & u \\ 1-v & -u \end{pmatrix}.$$

Determinant této $2 \times 2$ matice lze určit velmi jednoduše jako

$$|\det \mathbf{J}(u,v)| = \left| \det \begin{pmatrix} v & u \\ 1-v & -u \end{pmatrix} \right| = |-uv - u(1-v)| = |-u| = u,$$

odkud podle (1) a (2) je

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \int_0^\infty \int_0^1 (uv)^{x-1} \left(u(1-v)\right)^{-x} \mathrm{e}^{-uv-u(1-v)} u\mathrm{d}u\mathrm{d}v =$$

$$\int_0^\infty \int_0^1 u^x v^{x-1} u^{-x} (1-v)^{-x} \mathrm{e}^{-u} \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \int_0^\infty \int_0^1 v^{x-1} (1-v)^{-x} \mathrm{e}^{-u} \mathrm{d}u\mathrm{d}v. \tag{3}$$

Dalším z důsledků Fubiniho věty je, že nám také umožňuje zaměnit pořadí integrace, tj.

$$\int_0^\infty \int_0^1 v^{x-1} (1-v)^{-x} \mathrm{e}^{-u} \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-u} \mathrm{d}u \int_0^1 v^{x-1} (1-v)^{-x} \mathrm{d}v =$$

$$\left(-\lim_{u\to\infty} \mathrm{e}^{-u} + \lim_{u\to 0} \mathrm{e}^{-u}\right) \int_0^1 v^{x-1} (1-v)^{-x} \mathrm{d}v = \int_0^1 v^{x-1} (1-v)^{-x} \mathrm{d}v,$$

což nám spolu s výsledkem (3) dává

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \int_0^1 v^{x-1}(1-v)^{-x}\mathrm{d}v. \tag{4}$$

Doteď jsme to tajili, ale tomuto integrálu se také říká *beta funkce*, která pro dvě reálná čísla $x, y \in \mathbb{R}^+$ splňuje vztah

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)},$$

což jsme teď v podstatě dokázali. V našem případě je totiž $y = 1-x$, a tedy $\Gamma(x+y) := 1$. Na pravé straně si takto můžeme před integrálem klidně představit zlomek $\frac{1}{\Gamma(1)}$, neboli v podstatě po celou dobu chceme nalézt vyjádření pro $B(x, 1-x)$.

Zvolme dále v integrálu ve vztahu (4) substituci $v = \frac{s}{s+1}$. Stávající horní mez je 1, aby tato podmínka byla v rámci nové substituce zachována, pak musí být nová horní mez rovna $\infty$. Členy $s$ a $s+1$ jsou v nekonečnu nerozeznatelné, tj. $\frac{s}{s+1} \to 1$ právě pro $s \to \infty$. Dolní mez očividně zůstane stále 0. Je

$$\mathrm{d}v = \frac{\mathrm{d}s}{(s+1)^2}$$

, odkud máme

$$\int_0^1 v^{x-1}(1-v)^{-x}\mathrm{d}v = \int_0^\infty s^{x-1}(s+1)^{1-x}\left(1-\frac{s}{s+1}\right)^{-x}(s+1)^{-2}\mathrm{d}s =$$

$$\int_0^\infty s^{x-1}(s+1)^{1-x}\frac{1}{(s+1)^{-x}}(s+1)^{-2}\mathrm{d}s = \int_0^\infty s^{x-1}(s+1)^{1-x}(s+1)^{x}(s+1)^{-2}\mathrm{d}s =$$

$$\int_0^\infty \frac{s^{x-1}}{s+1}\mathrm{d}s.$$

Pokračujme dále v substitucích volbou $s = w^{\frac{1}{x}}$. Postupně platí $w^{\frac{1}{x}} \to \infty$ pro $w \to \infty$ a $w^{\frac{1}{x}} \to 0$ pro $w \to 0$, a to znamená, že ani dolní mez nám zůstanou zachovány. Pro diferenciál platí

$$\mathrm{d}s = \frac{1}{x}w^{\frac{1}{x}-1}\mathrm{d}w$$

, a tedy

$$\int_0^\infty \frac{s^{x-1}}{s+1}\mathrm{d}s = \frac{1}{x}\int_0^\infty \frac{w^{1-\frac{1}{x}}}{1+w^{\frac{1}{x}}}w^{\frac{1}{x}-1}\mathrm{d}w = \frac{1}{x}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}w}{1+w^{\frac{1}{x}}}.$$

Z tohoto podle (4) dostáváme, že

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{1}{x}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}w}{1+w^{\frac{1}{x}}}. \tag{5}$$

Položme $x = \frac{m}{n}$, kde $m$ a $n$ jsou nějaká dvě navzájem různá přirozená čísla, pro která platí $m < n$. Zaveďme nyní už v pořadí čtvrtou, a také poslední substituci $w = y^m$, kde

$$\mathrm{d}w = my^{m-1}\mathrm{d}y.$$

Pro pořadě horní a dolní mez stále, obdobně jako v předchozí substituci, platí $y_2 \to \infty$ a $y_1 \to 0$, tj.

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}w}{1 + w^{\frac{1}{x}}} = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}w}{1 + w^{\frac{n}{m}}} = \int_0^\infty \frac{my^{m-1}}{1 + y^n}\mathrm{d}y,$$

a podle (5) je

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{n}{m}\int_0^\infty \frac{my^{m-1}}{1 + y^n}\mathrm{d}y. \tag{6}$$

Jmenovatel integrandu je zde polynom $n$-tého řádu, který si můžeme rozložit na součin

$$1 + y^n = \prod_{k=1}^{n}(y - \alpha_k),$$

kde $\alpha_k$ je posloupnost jeho kořenů. Aby nám rozklad dával všeobecně smysl, pak se musí anulovat i člen $y^{m-1}$, který si rozepišme jako

$$y^{m-1} = \prod_{k=1}^{n} \alpha_k^{m-1},$$

tedy celkově pro integrovanou funkci dostáváme konečný součin

$$\frac{my^{m-1}}{1 + y^n} = \prod_{k=1}^{n} \frac{m\alpha_k^{m-1}}{y - \alpha_k}. \tag{7}$$

Dále chceme tvrdit, že je splněn vztah

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{y - \alpha_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{y - \alpha_k} \prod_{j=1, j\neq k}^{n} \frac{1}{\alpha_k - \alpha_j}. \tag{8}$$

Toto si zpětně dokažme vcelku lehkou indukcí podle $n$. Pro $n = 1$ tvrzení platí zcela očividně. Pro indukční krok dále předpokládejme, že je (8) splněno pro jakékoliv přirozené $n$ a rovnost vhodně vynásobme:

$$\frac{1}{y - \alpha_{n+1}} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{y - \alpha_k} = \frac{1}{y - \alpha_{n+1}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{y - \alpha_k} \prod_{j=1, j\neq k}^{n} \frac{1}{\alpha_k - \alpha_j}.$$

Toto je ekvivalentní s

$$\prod_{k=1}^{n+1} \frac{1}{y - \alpha_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(y - \alpha_k)(y - \alpha_{n+1})} \prod_{j=1, j\neq k}^{n} \frac{1}{\alpha_k - \alpha_j}.$$

Skrze rozklad na parciální zlomky jsme schopni odbržet

$$\frac{1}{(y-\alpha_k)(y-\alpha_{n+1})} = \frac{1}{(y-\alpha_k)(\alpha_k-\alpha_{n+1})} + \frac{1}{(y-\alpha_{n+1})(\alpha_{n+1}-\alpha_k)},$$

z čehož plyne

$$\prod_{k=1}^{n+1} \frac{1}{y-\alpha_k} = \sum_{k=1}^{n} \left( \frac{1}{(y-\alpha_k)(\alpha_k-\alpha_{n+1})} + \frac{1}{(y-\alpha_{n+1})(\alpha_{n+1}-\alpha_k)} \right) \prod_{j=1,j\neq k}^{n} \frac{1}{\alpha_k-\alpha_j} =$$
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(y-\alpha_k)(\alpha_k-\alpha_{n+1})} \prod_{j=1,j\neq k}^{n} \frac{1}{\alpha_k-\alpha_j} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(y-\alpha_{n+1})(\alpha_{n+1}-\alpha_k)} \prod_{j=1,j\neq k}^{n} \frac{1}{\alpha_k-\alpha_j} =$$
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{y-\alpha_k} \prod_{j=1,j\neq k}^{n} \frac{1}{(\alpha_k-\alpha_j)(\alpha_k-\alpha_{n+1})} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{y-\alpha_{n+1}} \prod_{j=1,j\neq k}^{n} \frac{1}{(\alpha_k-\alpha_j)(\alpha_{n+1}-\alpha_k)} =$$
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{y-\alpha_k} \prod_{j=1,j\neq k}^{n+1} \frac{1}{\alpha_k-\alpha_j} + \frac{1}{y-\alpha_{n+1}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\alpha_{n+1}-\alpha_k} \prod_{j=1,j\neq k}^{n} \frac{1}{\alpha_k-\alpha_j}. \tag{9}$$

Podle indukčního předpokladu, tj. vztahu (8), musí pro $y=\alpha_{n+1}$ platit

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\alpha_{n+1}-\alpha_k} \prod_{j=1,j\neq k}^{n} \frac{1}{\alpha_k-\alpha_j} = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\alpha_{n+1}-\alpha_k},$$

což můžeme dosadit do (9) a dostat

$$\prod_{k=1}^{n+1} \frac{1}{y-\alpha_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{y-\alpha_k} \prod_{j=1,j\neq k}^{n+1} \frac{1}{\alpha_k-\alpha_j} + \frac{1}{y-\alpha_{n+1}} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\alpha_{n+1}-\alpha_k} \prod_{j=1,j\neq k}^{n} \frac{1}{\alpha_k-\alpha_j} =$$
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{y-\alpha_k} \prod_{j=1,j\neq k}^{n+1} \frac{1}{\alpha_k-\alpha_j} + \frac{1}{y-\alpha_{n+1}} \prod_{j=1,j\neq k}^{n+1} \frac{1}{\alpha_k-\alpha_j} =$$
$$\left( \frac{1}{y-\alpha_{n+1}} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{y-\alpha_k} \right) \prod_{j=1,j\neq k}^{n+1} \frac{1}{\alpha_k-\alpha_j} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{y-\alpha_k} \prod_{j=1,j\neq k}^{n+1} \frac{1}{\alpha_k-\alpha_j},$$

čímž jsme konečně z platnosti tvrzení pro přirozené $n$ vyvodili i jeho platnost pro $n+1$, což spolu s jeho platností pro $n=1$ nám dává platnost pro všechna přirozená $n$, jak jsme chtěli. Vraťme se ke vztahu (7), ve kterém jsme odvodili tvar integrandu, a pravou stranu upravme s využitím výsledku (8):

$$\frac{my^{m-1}}{1+y^n} = \prod_{k=1}^{n} \frac{m\alpha_k^{m-1}}{y-\alpha_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{y-\alpha_k} m\alpha_k^{m-1} \prod_{j=1,j\neq k}^{n} \frac{1}{\alpha_k-\alpha_j},$$

kde pro přehlednost značme

$$\beta_k = m\alpha_k^{m-1} \prod_{j=1,j\neq k}^{n} \frac{1}{\alpha_k-\alpha_j},$$

tj.

$$\frac{my^{m-1}}{1+y^n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\beta_k}{y-\alpha_k}.$$

Nyní k této funkci hledejme funkci primitivní:

$$\int_0^y \frac{my^{m-1}}{1+y^n}\mathrm{d}y = \int_0^y \sum_{k=1}^{n} \frac{\beta_k}{y-\alpha_k}\mathrm{d}y = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \int_0^y \frac{1}{y-\alpha_k}\mathrm{d}y = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \log(y-\alpha_k). \tag{10}$$

Dále upravujme:

$$\sum_{k=1}^{n} \beta_k \log(y-\beta_k) = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \log y + \sum_{k=1}^{n} \log\left(1-\frac{\alpha_k}{y}\right) = \sum_{k=1}^{n} \log\left(1-\frac{\alpha_k}{y}\right).$$

Poslední rovnost vyplývá z faktu, že

$$\sum_{k=1}^{n} \beta_k = 0,$$

což se dá uvidět vynásobíme-li rovnost

$$\frac{my^{m-1}}{1+y^n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\beta_k}{y-\alpha_k}$$

členem $y$, čímž dostaneme

$$\frac{my^{m}}{1+y^n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{y\beta_k}{y-\alpha_k},$$

kde nyní vezměme obě strany limitou $y \to \infty$. Jelikož je $m < n$ pak jde levá strana pro $y \to \infty$ k nule, kdežto levá strana má ve jmenovateli i čitateli polynom stejného řádu, tj. nám na ní poté zůstane pouze $\sum_{k=1}^{n} \beta_k$. Porovnáním obou stran dostáváme žádaný výsledek. Zcela jistě platí

$$\lim_{y\to\infty} \log\left(1-\frac{\alpha_k}{y}\right) = 0.$$

S využitím (10) tedy máme

$$\int_0^\infty \frac{my^{m-1}}{1+y^n}\mathrm{d}y = -\sum_{k=1}^{n} \beta_k \log(-\alpha_k). \tag{11}$$

Vztah (8) můžeme dvojicí jednoduchých ekvivalentních úprav přepsat do tvaru

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{y-\alpha_k} \prod_{k=1}^{n} (y-\alpha_k) = \prod_{j=1, j\neq k}^{n} (\alpha_k-\alpha_j).$$

Označme

$$Q(y) = \prod_{k=1}^{n} (y-\alpha_k),$$

a každou ze stran v předchozí rovnosti dejme dále pod limitu $y \to \alpha_k$, kde na levé straně posléze můžeme aplikovat L'Hospitalovo pravidlo, odkud máme

$$Q'(\alpha_k) = \prod_{j=1, j\neq k}^{n} (\alpha_k - \alpha_j),$$

neboli

$$\prod_{j=1, j\neq k}^{n} \frac{1}{\alpha_k - \alpha_j} = \frac{1}{Q'(\alpha_k)}.$$

Všiměneme si, že když do argumentu $Q$ dosadíme $\alpha_k$, pak se nám všechny faktory vyruší a zbude $\alpha_k^n$, čili

$$Q'(\alpha_k) = n\alpha_k^{n-1},$$

z čehož

$$\beta_k = m\alpha_k^{m-1} \prod_{j=1, j\neq k}^{n} \frac{1}{\alpha_k - \alpha_j} = m\alpha_k^{m-1} \frac{1}{\alpha_k^{n-1}} = \frac{m}{n}\alpha_k^{m-n},$$

což lze dosadit do pravé strany (11), a to nám dá

$$\int_0^\infty \frac{my^{m-1}}{1+y^n} \mathrm{d}y = -\frac{m}{n} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^{m-n} \log(-\alpha_k).$$

Tuto rovnost můžeme vydělit $\frac{m}{n}$ a podle (6) tak obdržíme

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = -\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^{m-n} \log(-\alpha_k), \tag{12}$$

pro tedy zatím $x \in \mathbb{Q}$. Řadu na pravé straně nyní prostřednictvím vzorce pro logaritmus součinu trikově upravme

$$-\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^{m-n} \log(-\alpha_k) = -\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^{m-n} \left(\log(-1) + \log \alpha_k\right). \tag{13}$$

Odvolejme se nyní na *Eulerovu formuli*, která zní

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \cos t + \mathrm{i} \sin t.$$

Jedná se o velmi známou větu, která nalézá spoustu různorodých využitích, zejména v komplexní analýze. Pokud si za $t$ dosadíme $\pi$, pak dostaneme *Eulerův vzorec*:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} + 1 = 0.$$

Z něj mimojiné plyne i

$$\log(-1) = \mathrm{i}\pi.[1]$$

[1]Pro tzv. Hlavní část logaritmu

Ve všech těchto vztazích i reprezentuje tzv. *imaginární jednotku.* Komplexní číslo je uspořádaná dvojice čísel $a, b$. Rovnost a sčítání dvou komplexních čísel zde zavádíme obdobně jako u čísel reálných a násobení definujeme jako $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$. Právě dvojice $(0, 1)$ nese značení „i", tj. $(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a + b(0, 1) = a + \mathrm{i}b$. Zde se nám i originálně bere relativně známá definice $\mathrm{i}^2 = -1$.

Z drobné teoretické odbočky se vraťme k hlavnímu důkazu. Podle výsledku s logaritmem tedy platí

$$-\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^{m-n} (\log(-1) + \log \alpha_k) = -\mathrm{i}\pi \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^{m-n} - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^{m-n} \log \alpha_k = -\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^{m-n} \log \alpha_k,$$

neboť

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^{m-n} = \frac{n}{m} \sum_{k=1}^{n} \beta_k = 0,$$

což jsme již dříve dokázali, že jde k nule. Podle (12) a (13) je

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = -\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^{m-n} \log \alpha_k. \tag{14}$$

Obecnou podobu koeficientů/kořenů $\alpha_k$ také jednoduše determinujeme pomocí Eulerova formule jako

$$\alpha_k = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi(2k-1)}{n}},$$

tedy

$$\begin{aligned}
-\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^{m-n} \log \alpha_k = -\sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{i}\pi(2k-1)}{n} \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi(2k-1)(m-n)}{n}} &= \\
-\sum_{k=1}^{n} \frac{2\mathrm{i}\pi k}{n} \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi(2k-1)(m-n)}{n}} - \frac{\mathrm{i}\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi(2k-1)(m-n)}{n}} &= \\
-\sum_{k=1}^{n} \frac{2\mathrm{i}\pi k}{n} \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi(2k-1)(m-n)}{n}} - \frac{\mathrm{i}\pi}{n} \cdot \frac{n}{m} \sum_{k=1}^{n} \beta_k = -\sum_{k=1}^{n} \frac{2\mathrm{i}\pi k}{n} \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi(2k-1)(m-n)}{n}} &= \\
-\frac{2\mathrm{i}\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} k \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi k(m-n)}{n}} \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi(m-n)}{n}} = -\frac{2\mathrm{i}\pi}{n} \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi(m-n)}{n}} \sum_{k=1}^{n} k \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi k(m-n)}{n}} &= \\
-\frac{2\mathrm{i}\pi}{n} \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi m}{n}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} \sum_{k=1}^{n} k \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi k(m-n)}{n}} = \frac{2\mathrm{i}\pi}{n} \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi m}{n}} \sum_{k=1}^{n} k \left(\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi(m-n)}{n}}\right)^k&.
\end{aligned} \tag{15}$$

Vidíme, že tento součet nám jaksi spojuje sčítání členů aritmetické a geometrické posloupnosti. I pro to naštěstí existuje lehce odvoditelný vzorec:

$$\sum_{k=1}^{n} k r^k = \frac{r\left(n r^{n+1} - (n+1) r^n + 1\right)}{(1-r)^2},$$

kde $0 < r < 1$. Z něj máme

$$\sum_{k=1}^{n} k\left(\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi(m-n)}{n}}\right)^k = \frac{\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi(m-n^2)}{n}}\left(n\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi m(n+1)}{n}} - \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi m}(n+1) + \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi m}\right)}{\left(\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi m}{n}} - 1\right)^2} =$$

$$\frac{\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi m}{n}}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi n}\left(n\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi m}{n}} - n\right)}{\left(\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi m}{n}} - 1\right)^2} = \frac{n\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi m}{n}}\left(\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi m}{n}} - 1\right)}{\left(\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi m}{n}} - 1\right)^2} = \frac{n\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi m}{n}}}{\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi m}{n}} - 1}.$$

Podle (14) a (15) tedy je

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{2\mathrm{i}\pi}{n}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi m}{n}}\frac{n\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi m}{n}}}{\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi m}{n}} - 1} = 2\mathrm{i}\pi\frac{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi m}{n}}}{\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi m}{n}} - 1} =$$

$$2\mathrm{i}\pi\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi x}}{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi x} - 1} = 2\mathrm{i}\pi\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi x}}{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi x} - 1}\cdot\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi x}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi x}} = \frac{2\mathrm{i}\pi}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi x}} = \frac{\pi}{\sin \pi x},$$

kde jsme také v poslední úpravě využili vyjádření funkce sinus v exponenciálním tvaru, kterýžto je $\sin x = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi x}\right)/2\mathrm{i}$ a lze jej rovněž pěkně odvodit z Eulerovy formule. Zatím jsme však platnost vzorce dokázali pouze pro jakékoliv racionální číslo na intervalu $(0, 1)$. Ukažme si, že z toho snadno plyne i platnost vzorce pro všechna reálná čísla $x$, která splňují $0 < x < 1$. V rovnosti

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$$

jsou funkce na obou stranách spojité. Rovněž víme, že každé reálné číslo lze reprezentovat jako limitu posloupnosti racionálních čísel, odkud platnost žádaného tvzrení pro všechna existující $0 < x < 1$. ∎

**Poznámka 1.2.2.** Existuje vcelku velká řada cest, kterými se důkaz Věty 1.2.1 může ubírat. Kromě právě popsaného, je další alternativou zejména aplikace nahrazení sinu jeho Weierstrassovým součinem:

$$\sin x = x\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right). \tag{$\star$}$$

K tomu se například přímo nabízí důsledek 1.1.8. Jak jsme však již nastínili v úvodu, odvodit takovýto součin není jednoduchý úkol. *Weierstrassova faktorizační formule* ([11]) zapadá mezi velmi pokročilé matematické poznatky a její důkaz je vskutku náročný. Navíc kdybychom už měli takto odvozený součin, proč pomocí něj dokazovat pomocná tvrzení pro gamma funkce a ne jej rovnou použít k vyřešení Basilejského problému.

Jen pro zajímavost, dosáhnout vztahu ($\star$) lze i bez Weierstrassovy věty. Tímto jednodušším způsobem, kterým jej pravděpodobně kdysi odvodil Euler, je opět využít důsledku 1.1.8, kde však musíme počítat s výskytem dvojné limity. Výrazy $\Gamma(x)$ a $\Gamma(1-x)$ se totiž zřejmě budou muset svými parametry, které limitou na pravé straně posíláme k nekonečnu, lišit. Spočítat takovou limitu by byl zajisté také nelehký úkol a vyžadoval by nějaké složitější nuance diferenciálního počtu funkcí více proměnných.

Vraťme se ale zase zpátky k možným metodám důkazů doplňkové formule. Dalším z možných postupů je využití komplexní analýzy. Sám o sobě by důkaz obsahoval tvrzení spíše středně náročná na dokázání a jednalo by se také o vědomosti méně známé.

Právě přednesený důkaz se skládá z relativně známých a také většinou lehce odvoditelných poznatků, akorát Fubiniho věta a transformace dvojného integrálu se mohou jevit o něco složitějšími, i když jejich důkaz by také nikterak dalece nepřevyšoval základní poznatky z matematické analýzy a algebry. Tak či onak, je pravděpodobně vždy lepší, pakliže to situace umožňuje, uplatnit reálnou analýzu, a ne komplexní.

Důkaz používající křivkové integrály je uveden v příloze.

# 2 Psí funkce

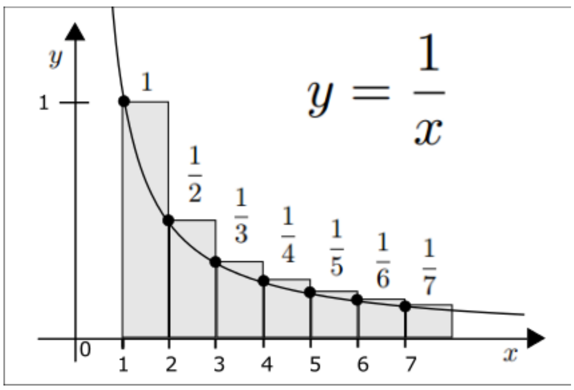
## 2.1 Definice a základní formule

Řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

se nazývá *harmonická*. Nabízí se hned okamžitá otázka, čím může být tak speciální. Je možná překvapivým, ale stále velmi známým faktem, že diverguje, což znamená, že i kdybychom sečetli nekonečný počet jejích po sobě jdoucích členů, tak dostaneme $\infty$. Na první pohled by se totiž mohlo dokonce zdát, že je řada konvergentní, neboť do součtu postupně přidáváme menší a menší hodnoty, ale existuje mnoho elegantních způsobů jak dokázat, že byť velmi pomalu, tak opravdu diverguje.

Rozdělme si nyní kladnou poloosu $x$ v soustavě souřadnic $Oxy$ a nekonečně mnoho obdélníčků délky 1, kde výška každého z nich bude představovat jeden ze sčítanců harmonické řady. Rovněž je zakreslujme tak, aby na nich byl pěkně vidět klesající průběh harmonické posloupnosti, tj. od nejvyššího obdélníčku s výškou jedna, budeme jejich výšku stále zmenšovat, viz tedy obrázek:




Na obrázku rovněž vidíme, že když si do soustavy souřadnic mimo jiné zakreslíme průběh funkce $\frac{1}{x}$, tak uvedená část jejího grafu nikdy nepřevýší výšku žádného z obdélníku, což znamená, že celkový součet jejích obsahů je větší než obsah plochy ohraničené grafem, jinak také

$$\int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \log(n+1) < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Jelikož je zřejmě $\log(n+1) \to \infty$ pro $n \to \infty$, pak tím spíše musí být i $\sum_{k=1}^{n} 1/k \to \infty$, když $n \to \infty$. Zajímavou a pro nás velmi nepostradatelnou vlastnost má ale jen částečná suma harmonické řady, tj. součet

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Při důkazu divergence jsem se rozhodl použít právě integrální důkaz, abychom byli schopni vidět jistou paralelu mezi harmonickou řadou a logaritmy. Stejně jako funkce $\log x$ se hodnota harmonické řady blíží k nekonečnu, ale neuvěřitelně pomalým způsobem, tak že bychom ani skoro nevěřili, že jej někdy dosáhne. Nebylo by tedy žádným překvapením, kdyby i nějakým způsobem součty jako $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ s logaritmem úzce souvisely. Platí například následující pozoruhodná identita

$$\frac{\Gamma'(n+1)}{\Gamma(n+1)} - \Gamma'(1) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k},$$

kde číslo $-\Gamma'(1)$ je velmi speciální a nazývá se *Eulerova-Mascheroniho konstanta*, která je základem řady doposud stále nevyřešených matematických záhad. Uvedený vzorec si zanedlouho dokážeme, jelikož v sobě pro nás skrývá velkou důležitost. Pro takovéto účely nyní definujme jednu další speciální funkci, která velmi úzce souvisí s dříve definovanou gamma funkcí:

**Definice 2.1.1.** Pro všechna $x \in \mathbb{R}^+$, nyní definujme funkci $\psi$ jako tzv. logaritmickou derivaci gamma funkce, tj.

$$\psi(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \log \Gamma(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}.$$

Funkci $\psi$ budeme nazývat *psí funkce*.

Tato funkce bude skrze své vlastnosti, které si záhy dokážeme, klíčovým komponentem při samotném řešení Basilejského problému. Stejně jako předcházející funkce gamma, má i funkce psí svou doplňkovou a rekurentní formuli, viz dvě nadcházející věty:

**Věta 2.1.2** (Doplňková formule pro psí funkci)**.** *Pro všechna $x \in \mathbb{R}^+$ platí*

$$\psi(1-x) - \psi(x) = \pi \cot \pi x.$$

*Důkaz.* Zkoumaný rozdíl si nejprve vyjádřeme z původní definice funkce psí (definice 2.1.1) a výchozí rozdíl zlomků poté převeďme na společného jmenovatele:

$$\psi(1-x)-\psi(x) = \frac{\Gamma'(1-x)}{\Gamma(1-x)} - \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \frac{\Gamma'(1-x)\Gamma(x) - \Gamma'(x)\Gamma(1-x)}{\Gamma(x)\Gamma(1-x)} = \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-\Gamma(x)\Gamma(1-x))}{\Gamma(x)\Gamma(1-x)}.$$

Podle Věty 1.2.1 je $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \pi \csc \pi x$, tedy

$$\psi(1-x) - \psi(x) = \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-\pi \csc \pi x)}{\pi \csc \pi x} = \frac{\pi^2 \cot \pi x \csc \pi x}{\pi \csc \pi x} = \pi \cot \pi x,$$

což jsme chtěli dokázat. ■

**Věta 2.1.3** (Rekurentní formule pro psí funkci)**.** *Pro všechna $x \in \mathbb{R}^+$ platí*

$$\psi(x+1) = \psi(x) + \frac{1}{x}.$$

*Důkaz.* Na rozdíl od důkazu předchozí věty, tento nebude natolik přímočarý. Ponechme funkci psí ve tvaru (viz definice 2.1.1) $\psi(x) = \mathrm{d}/\mathrm{d}x(\log\Gamma(x))$, potom také samozřejmě máme $\psi(x+1) = \mathrm{d}/\mathrm{d}x(\log\Gamma(x+1))$, odkud podle rekurentní formule pro gammu je $\mathrm{d}/\mathrm{d}(\log x\Gamma(x))$, což můžeme pomocí vzorce pro logaritmus součinu následně upravit do tvaru $\mathrm{d}/\mathrm{d}x(\log x + \log\Gamma(x)) = 1/x + \mathrm{d}/\mathrm{d}x(\log\Gamma(x))$, čímž jsme vlastně hotovi. ∎

## 2.2 Nahrazení psí funkce řadou

**Příklad 2.2.1.** Nyní se dostáváme k snad pro nás nejstěžejnější vlastnosti, kterou psí funkce má, a sice její zápis pomocí nekonečné řady, který se nyní pokusíme odvodit. Zkusme postupně zkoumat možné důsledky Věty 2.1.2 a zjistit kam až můžeme při její opakované aplikaci zajít při postupném zjednodušování výrazu $\psi(x+1)$:

$$\psi(x+1) = \psi(x) + \frac{1}{x} = \psi(x-1) + \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} = \psi(x-2) + \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} =$$
$$\psi(x-3) + \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} = \ldots = \psi(x-n+1) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x-k+1},$$

kde $n \in \mathbb{N}$, přičemž $n \leq x$. Zde dosazením $n$ za $x$ dostaneme

$$\psi(n+1) - \psi(1) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}. \tag{1}$$

Aplikací vcelku obdobného postupu na $\psi(x+n)$ obdržíme

$$\psi(x+n) = \psi(x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+x-1},$$

čili

$$\psi(n+x+1) - \psi(x+1) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+x}. \tag{2}$$

Dále si vezměme rozdíl (1) a (2)

$$\psi(n+1) - \psi(1) - \psi(n+x+1) + \psi(x+1) = \sum_{k=1}^{n} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right),$$

kde už naši žádanou řadu obdržíme limitou pro $n \to \infty$. Musíme však ještě dokázat, že platí

$$\lim_{n\to\infty} \left(\psi(n+1) - \psi(n+x+1)\right) = 0.$$

Nejprve dokažme pro $0 < x \leq 1$ a uvažujme základní vlastnosti psí funkce. Vraťme se krátce úvahami k důkazu Věty 1.1.5, kde jsme pomocí Hölderovy nerovnosti ukázali, že je logaritmus gamma funkce na $\mathbb{R}^+$ konvexní. Toto tvrzení je však ekvivalentní se skutečností, že

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\log\Gamma(x) > 0. \tag{3}$$

Podle definice 2.1.1 je

$$\psi(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\log\Gamma(x),$$

což podle (3) znamená, že

$$\psi'(x) > 0,$$

a to implikuje, že je $\psi$ rostoucí na $\mathbb{R}^+$. Lze tedy vybrat tři čísla $n+1 \leq n+x+1 \leq n+2$, pro která platí soustava nerovnic

$$\psi(n+1) \leq \psi(n+x+1) \leq \psi(n+2).$$

Následně od této soustavy odečtěme $\psi(n+1)$, tj.

$$\psi(n+x+1) - \psi(n+1) \leq \psi(n+2) - \psi(n+1),$$

kde lze pravou stranu upravit pomocí rekurentní formule

$$\psi(n+x+1) - \psi(n+1) \leq \frac{1}{n+1}$$

a jelikož je levá strana vždy kladná a pravá je pro $n \to \infty$ rovna nule, tak z použití věty o limitě sevřené funkce plyne požadovaný výsledek. Při finálním řešení Basilejského problému nám sice bude stačit pouze platnost tohoto tvrzení pro $0 < x \leq 1$, ale pro úplnost jej dokažme i pro všechna $x \in \mathbb{R}^+$. Pro trojici $n+1 \leq n+x+1 \leq n+m+1$, kde $m \in \mathbb{N}$, a kde také samozřejmě $m > x$, platí

$$\psi(n+x+1) - \psi(n+1) \leq \psi(n+m+1) - \psi(n+1) = \sum_{k=1}^{n+m}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{n+k}.$$

Číslo $n$ v uvedené sumě vystupuje pouze jako parametr, zcela nezávislý na horní mezi, tj.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{n+k} = 0,$$

odkud už

$$\lim_{n\to\infty}\left(\psi(n+1) - \psi(n+x+1)\right) = 0,$$

jak jsme chtěli. Finálně tedy máme

$$\psi(x+1) - \psi(1) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right).$$

Jedním z ústředních motivů práce je nalézt hodnotu $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$. K tomuto však nutně potřebujeme výsledek, ke kterému jsme právě dospěli a o jehož naprosté korektnosti se však ještě musíme přesvědčit. Hodilo by se totiž zjistit, zdali řada na pravé straně konverguje.

Nejprve zjistěme, jestli nám konverguje řada $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$. Je jisté, že pro $k$ přirozené platí soustava nerovnic

$$0 \leq \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k^2-k} = \frac{1}{k(k-1)}.$$

Je dále

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-k} = \sum_{k=2}^{n} \left( \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 1 - \frac{1}{n},$$

kde si můžeme všimnout, jak se nám pěkně vykrátily všechny členy kromě prvního a posledního (jedná se o tzv. *teleskopickou řadu*). Je tedy $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-k} \to 1$ pro $n \to \infty$, odkud konvergence řady $\sum_{k=2}^{\infty} 1/k^2$ a také samozřejmě řady $1 + \sum_{k=2}^{\infty} 1/k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$. Konvergence naší řady nahoře už plyne z jednoduchého faktu, že $1/k(k+x) < 1/k^2$ a aplikace obdobné logiky jako předtím.

# 3 Vlastní řešení

## 3.1 Úprava řady $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$

Připomeňme ještě jednou co je našim úkolem. Chceme zjistit, jaký je součet řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Hned na konci minulé kapitoly jsme se přesvědčili o její konvergenci a lze tedy přejít k samotnému výpočtu. Podle výsledku příkladu 2.2.1 lze rozdíl $\psi(x+1) - \psi(1)$, kde $x \in \mathbb{R}_0^+$, vyjádřit ve tvaru

$$\psi(x+1) - \psi(1) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right).$$

Položme nyní v tomto vztahu postupně $x = \frac{\varepsilon}{\pi}$ a $x = -\frac{\varepsilon}{\pi}$, čímž dostaneme

$$\psi\left(1 + \frac{\varepsilon}{\pi}\right) - \psi(1) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k + \frac{\varepsilon}{\pi}} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{k} - \frac{\pi}{k\pi + \varepsilon} \right)$$

a

$$\psi\left(1 - \frac{\varepsilon}{\pi}\right) - \psi(1) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k - \frac{\varepsilon}{\pi}} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{k} - \frac{\pi}{k\pi - \varepsilon} \right).$$

Odečtením první rovnice od druhé dostáváme

$$\psi\left(1 - \frac{\varepsilon}{\pi}\right) - \psi\left(1 + \frac{\varepsilon}{\pi}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\pi}{k\pi + \varepsilon} - \frac{\pi}{k\pi - \varepsilon} \right). \tag{1}$$

Podle věty 2.1.2 pro $x = \frac{\varepsilon}{\pi}$ platí

$$\psi\left(1 - \frac{\varepsilon}{\pi}\right) - \psi\left(\frac{\varepsilon}{\pi}\right) = \pi \cot \varepsilon.$$

Podle dále Věty 2.1.3 je pro tatáž $x$

$$\psi\left(1+\frac{\varepsilon}{\pi}\right)=\psi\left(\frac{\varepsilon}{\pi}\right)+\frac{\pi}{\varepsilon},$$

odkud

$$\psi\left(1-\frac{\varepsilon}{\pi}\right)-\psi\left(1+\frac{\varepsilon}{\pi}\right)=\pi\cot\varepsilon-\frac{\pi}{\varepsilon}.$$

Nyní celou tuto rovnost vydělme $2\pi$, čímž dostaneme

$$\frac{\psi\left(1-\frac{\varepsilon}{\pi}\right)-\psi\left(1+\frac{\varepsilon}{\pi}\right)}{2\pi}=\frac{\cot\varepsilon}{2}-\frac{1}{2\varepsilon}=\frac{\varepsilon\cot\varepsilon-1}{2\varepsilon},$$

a tedy podle (1) je

$$\frac{1-\varepsilon\cot\varepsilon}{2\varepsilon}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k\pi-\varepsilon}-\frac{1}{k\pi+\varepsilon}\right),$$

odkud můžeme snadno vyjádřit

$$\cot\varepsilon=\frac{1}{\varepsilon}-\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k\pi-\varepsilon}-\frac{1}{k\pi+\varepsilon}\right)=\frac{1}{\varepsilon}+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2-k^2\pi^2}.$$

Tímto se nám vlastně povedlo vyjádřit kotangens pomocí nekonečné řady, jiné než Taylorovy. Dále je

$$1-\pi\varepsilon\cot\pi\varepsilon=1-\left(1+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\pi^2\varepsilon^2}{\pi^2\varepsilon^2-k^2\pi^2}\right)=2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varepsilon^2}{k^2-\varepsilon^2},$$

což nám po vydělení identity členem $2\varepsilon^2$ dá

$$\frac{1-\pi\varepsilon\cot\pi\varepsilon}{2\varepsilon^2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\pi^2}{k^2\pi^2-\pi^2\varepsilon^2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2-\varepsilon^2}.$$

Limitou $\varepsilon\to 0$ dostáváme

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1-\pi\varepsilon\cot\pi\varepsilon}{2\varepsilon^2}.$$

Pokud bychom však chtěli být naprosto korektní, tak bychom museli zdůvodnit i tento limitní přechod. Ten je oprávněný právě tehdy, když řada konverguje tzv. *stejnoměrně*, tj. rychlost její konvergence nezávisí na argumentu, zde na $\varepsilon$.

Touto sérií kroků se nám jinak povedlo zredukovat náš problém na „pouhý“ výpočet limity, ve které se vyskytují nám známé elementární funkce a kde se nevyskytuje funkce psí. Způsoby, kterými lze takovou limitu vypočítat se různí, my si nyní ukážeme dva.

## 3.2 Výpočet limity pomocí Taylorovy řady

Již v první kapitole, při testování konvergence gamma funkce, jsme nastínili možnost nahrazení jistých elementárních transcendentních funkcí jakousi mocninnou řadou. Nyní tuto výhodnou vlastnost budeme potřebovat znovu. Zkusme tedy tentokrát alespoň trochu přiblížit, v čem takové nahrazení funkce řadou spočívá.

Mějme funkci $f : D_f \to \mathbb{R}$, kde $D_f \subseteq \mathbb{R}$. Nechť dále existuje bod $x \in D_f$ takový, že funkce $f$ má v tomto bodě derivace všech řádů. Takovou funkci lze rozvést do tzv. *Taylorovy řady*. Jedná se o zvláštní případ mocninné řady, a tedy umožňuje zapsat funkci prostřednictvím nekonečného součtu sčítanců, ve kterém se vyskytují pouze elementární algebraické operace. To může být mimo jiné užitečné při přibližných výpočtech funkčních hodnot. Lze dokázat, že

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k, \tag{1}$$

kde horní index $k$ u $f$ značí $k$-tou derivaci funkce $f$ v bodě $x_0$. Alespoň lehce naznačme kostru takového důkazu. Nejprve musíme dokázat, že je Taylorova řada konvergentní, tj. zjednodušeně řečeno se při postupném sčítání jednotlivých členů budeme blížit nějaké konečné hodnotě, kterou přesně dostaneme až po sečtení všech (nekonečně mnoha) členů této řady. Dále je zapotřebí určit k čemu tato řada konverguje. Pokud bychom si napsali pouze nějakých $n$ členů rozvoje (1), tak bychom dostali i nějaký zbytek, označme jej $R_n(x)$. Pak dokážeme, že je součet řady (1) roven $f(x)$ právě tehdy, když $R_n(x) \to 0$ pro $n \to \infty$. Potom už stačí dokázat, že je tato podmínka pro nějakou konkrétní funkci splněna a také že je obecně rozvoj (1) jediný rozvoj s takovými vlastnostmi, o čemž hovoří tzv. Peanova věta. Podrobný rozbor všech těchto kroků můžeme nalézt postupně v [1] a [5]. Nyní se z krátké teoretické odbočky vraťme zpět k našemu problému.

Odvodit Taylorovu řadu pro funkci kotangens je relativně náročné, zkusme si tedy nějakým způsobem vystačit pouze s řadami pro funkce sinus a kosinus, jejichž odvození problematické není. Taylorův rozvoj funkce sinus v bodě $x_0 = 0$ je

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

a funkce kosinus

$$\cos x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^{2k-2}}{(2k-2)!} = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots .$$

Je tedy

$$1 - \pi\varepsilon \cot \pi\varepsilon = 1 - \frac{\pi\varepsilon \cos \pi\varepsilon}{\sin \pi\varepsilon} = 1 - \frac{1 - \frac{\pi^2\varepsilon^2}{2!} + \frac{\pi^4\varepsilon^4}{4!} - \frac{\pi^6\varepsilon^6}{6!} + \dots}{1 - \frac{\pi^2\varepsilon^2}{3!} + \frac{\pi^4\varepsilon^4}{5!} - \frac{\pi^6\varepsilon^6}{7!} + \dots} =$$
$$\frac{\left(1 - \frac{\pi^2\varepsilon^2}{3!} + \frac{\pi^4\varepsilon^4}{5!} - \frac{\pi^6\varepsilon^6}{7!} + \dots\right) - \left(1 - \frac{\pi^2\varepsilon^2}{2!} + \frac{\pi^4\varepsilon^4}{4!} - \frac{\pi^6\varepsilon^6}{6!} + \dots\right)}{1 - \frac{\pi^2\varepsilon^2}{3!} + \frac{\pi^4\varepsilon^4}{5!} - \frac{\pi^6\varepsilon^6}{7!} + \dots},$$

odkud

$$\frac{1 - \pi\varepsilon \cot \pi\varepsilon}{2\varepsilon^2} = \frac{\left(\frac{1}{2\varepsilon^2} - \frac{\pi^2}{2\cdot 3!} + \frac{\pi^4\varepsilon^2}{2\cdot 5!} - \frac{\pi^6\varepsilon^4}{2\cdot 7!} + \dots\right) - \left(\frac{1}{2\varepsilon^2} - \frac{\pi^2}{2\cdot 2!} + \frac{\pi^4\varepsilon^2}{2\cdot 4!} - \frac{\pi^6\varepsilon^4}{2\cdot 6!} + \dots\right)}{1 - \frac{\pi^2\varepsilon^2}{3!} + \frac{\pi^4\varepsilon^4}{5!} - \frac{\pi^6\varepsilon^6}{7!} + \dots} =$$
$$\frac{\left(-\frac{\pi^2}{2\cdot 3!} + \frac{\pi^4\varepsilon^2}{2\cdot 5!} - \frac{\pi^6\varepsilon^4}{2\cdot 7!} + \dots\right) - \left(-\frac{\pi^2}{2\cdot 2!} + \frac{\pi^4\varepsilon^2}{2\cdot 4!} - \frac{\pi^6\varepsilon^4}{2\cdot 6!} + \dots\right)}{1 - \frac{\pi^2\varepsilon^2}{3!} + \frac{\pi^4\varepsilon^4}{5!} - \frac{\pi^6\varepsilon^6}{7!} + \dots},$$

a konečně

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1-\pi\varepsilon\cot\pi\varepsilon}{2\varepsilon^2}=-\frac{\pi^2}{12}+\frac{\pi^2}{4}=\frac{\pi^2}{6},$$

což je tedy hodnota součtu řady $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$.

### 3.3 Výpočet limity pomocí l'Hospitalova pravidla

Na první pohled se může zdát poněkud překvapivé, že by naši limitu mohlo jít spočítat i přes l'Hospitalovo pravidlo, avšak skutečně to jde. Nejprve však musíme ověřit, zdali jej můžeme použít:

$$\frac{1-\pi\varepsilon\cot\pi\varepsilon}{2\varepsilon^2}=\frac{\sin\pi\varepsilon-\pi\varepsilon\cos\pi\varepsilon}{2\varepsilon^2\sin\varepsilon},$$

kde jak po dosazení nuly do čitatele, tak po jejím dosazení do jmenovatele, dostaneme opět nulu, tj. naše limita je typu „$\frac{0}{0}$“, čímž je nutná podmínka pro použití l'Hospitalova pravidla splněna. Mohli bychom tedy postupně zkoušet l'Hospitalovo pravidlo aplikovat a vidět kam nás to dovede, jenomže bychom si takto pravděpodobně prošli velmi nehezkým a vskutku vyčerpávajícím derivováním. Začněme tedy šikovnou úpravou:

$$\frac{1-\pi\varepsilon\cot\pi\varepsilon}{2\varepsilon^2}=\frac{\varepsilon}{\sin\pi\varepsilon}\cdot\frac{\sin\pi\varepsilon-\pi\varepsilon\cos\pi\varepsilon}{2\varepsilon^3}.$$

Je dále známým faktem, že

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Na ověření toho, že uvedená skutečnost platí, nám postačí pouze věta o limitě sevřené funkce a trochu práce s jednotkovou kružnicí a obsahy trojúhelníků, kteréžto už se i nachází ve středoškolském aparátu. Dále tedy

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1-\pi\varepsilon\cot\pi\varepsilon}{2\varepsilon^2}&=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon}{\sin\pi\varepsilon}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\sin\pi\varepsilon-\pi\varepsilon\cos\pi\varepsilon}{2\varepsilon^3}=\frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\sin\pi\varepsilon-\pi\varepsilon\cos\pi\varepsilon}{2\varepsilon^3}=\\ &\frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\sin\pi\varepsilon-\pi\varepsilon\cos\pi\varepsilon}{2\varepsilon^3}\overset{l'\mathrm{H}}{=}\frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\pi^2\varepsilon\sin\pi\varepsilon}{6\varepsilon^2}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\pi\varepsilon\sin\pi\varepsilon}{6\varepsilon^2}=\\ &\frac{\pi}{6}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\sin\pi\varepsilon}{\varepsilon}=\frac{\pi}{6}\cdot\pi=\frac{\pi^2}{6},\end{aligned}$$

čímž je výpočet zakončen.

## 4 Bernoulliho čísla a obecný tvar pro výpočet hodnot zeta funkce v sudých přirozených číslech

### 4.1 Zavedení, generující formule a nahrazení funkce kotangens řadou

V minulé kapitole jsme úzce spolupracovali s Taylorovými řadami pro funkce sinus a kosinus. Zároveň jsme tehdy odmítali využít Taylorova rozvoje pro kotangens, neboť je jeho odvození, jak jsme zmiňovali, poněkud problematické. Poměr ceny a výkonu by byl velmi malý, uvážíme-li, že jsme měli prozatím „pouze“ sečíst řadu $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$. Nyní se bez tohoto však neobejdeme a ukážeme si, jak k Taylorově řadě pro funkci kotangens dospět. Ze všeho nejprve se podívejme na to, jak by mohla vypadat přibližně, tj. si napíšeme prvních několik členů rozvoje:

$$\cot x \approx \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} - \frac{2x^5}{945} - \frac{x^7}{4725} - \frac{2x^9}{93\,555} - \frac{1382x^{11}}{638\,512\,875} - \frac{4x^{13}}{18\,243\,225}.$$

Tyto členy můžeme obdržet tak, že bychom si vzali definici $\cot x = \cos x / \sin x$, jednoduše si funkce ve jmenovateli i čitateli nahradili jejími příslušnými Taylorovými řadami a posléze je spolu vydělili po vzoru dělení polynomu polynomem. Stejného výsledku bychom mohli dosáhnout i řadou dalších možná o něco elegantnějších metod, jako například porovnáváním koeficientů.

Už jen z přibližné podoby však vidíme, že určit obecný tvar tohoto rozvoje nebude nikterak lehký úkol a na první pohled to dokonce může i vypadat, že jeho koeficienty v sobě ani žádnou zákonitost neukrývají. To však není pravda, jejich složitá struktura je založena na jedné zajímavé posloupnosti čísel, kterou právě teď budeme zavádět.

Podle známé historky se v jedné hodině tehdy asi sedmiletý Carl Friedrich Gauss nemohl ve škole zabavit, tak mu bylo kantorem zadáno, aby nalezl součet prvních sto přirozených čísel. K jeho velkému překvapení tak Gauss učinil během pěti minut. Ten si totiž uvědomil jistou symetrii, že když sečte první a poslední a stejně tak druhé a předposlední číslo, atd., dostane pokaždé stejný výsledek. Toto může provést celkem padesátkrát, tedy kýžený součet je $50 \cdot 101 = 5050$. Toto vedlo k obecnému vzorci pro výpočet součtu jakýchkoliv $n$ prvních přirozených čísel, a sice

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n.$$

**Příklad 4.1.1.** Nyní zkusme tento problém zajímavým způsobem zobecnit. Co kdybychom dostali za úkol pro změnu sečíst druhé mocniny prvních $n$ přirozených čísel? Postupujme dále trochu nepřímo prostřednictvím provádění úprav v rámci součtu $\sum_{k=1}^{n} k^3$, přičemž budeme chtít, aby se nám kubické součty posléze vykrátily, tedy

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1 - (n+1)^3 + \sum_{k=1}^{n} (k+1)^3 = 1 - (n+1)^3 + \sum_{k=1}^{n} k^3 + 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1,$$

kde na levé i pravé straně dostáváme $\sum_{k=1}^{n} k^3$ přesně jak jsme potřebovali, což s použitím vzorce pro součet $\sum_{k=1}^{n} k$ dává

$$3\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1 - (n+1)^3 - \frac{3}{2}n(n+1) - n =$$

$$-1 + (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) - \left(\frac{3}{2}n^2 + \frac{3}{2}n\right) - n = n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n,$$

odkud konečně

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n.$$

Zajisté vnímáme, že sčítání $\sum_{k=1}^{n} k^q$ obecně, kde $q \in \mathbb{N}$, v sobě bude uchovávat jistou rekurenci, když jsme při polynomiálním vyjádření součtu s mocninou dvě museli použít podobného vyjádření pro součet s mocninou jedna. Zkusme pro ilustraci ještě zjistit kolik je $\sum_{k=1}^{n} k^3$. Máme

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = 1-(n+1)^4+\sum_{k=1}^{n}(k+1)^4 = 1-(n+1)^4+\sum_{k=1}^{n} k^4+4\sum_{k=1}^{n} k^3+6\sum_{k=1}^{n} k^2+4\sum_{k=1}^{n} k+\sum_{k=1}^{n} 1,$$

odkud

$$4\sum_{k=1}^{n} k^3 = -1 + (n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1) - (2n^3 + 3n^2 + n) - (2n^2 + 2n) - n = n^4 + 2n^3 + n^2,$$

a tedy

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2,$$

kde je tedy ten dříve zmíněný nulový lineární člen. Lze ověřit, že stejně tak tomu bude pro jakýkoliv lichý exponent při $k$. Obdobným postupem a trochou trpělivostí můžeme dospět včetně již odvozených i k následujícím vyjádřením:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k^1 &= \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n,\\
\sum_{k=1}^{n} k^2 &= \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n,\\
\sum_{k=1}^{n} k^3 &= \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2,\\
\sum_{k=1}^{n} k^4 &= \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n,\\
\sum_{k=1}^{n} k^5 &= \frac{1}{6}n^6 + \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 - \frac{1}{12}n^2,\\
\sum_{k=1}^{n} k^6 &= \frac{1}{7}n^7 + \frac{1}{2}n^6 + \frac{1}{2}n^5 - \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{42}n\\
\sum_{k=1}^{n} k^7 &= \frac{1}{8}n^8 + \frac{1}{2}n^7 + \frac{7}{12}n^6 - \frac{7}{24}n^4 + \frac{1}{12}n^2\\
\sum_{k=1}^{n} k^8 &= \frac{1}{9}n^9 + \frac{1}{2}n^8 + \frac{2}{3}n^7 - \frac{7}{15}n^5 + \frac{2}{9}n^3 - \frac{1}{30}n\\
\sum_{k=1}^{n} k^9 &= \frac{1}{10}n^{10} + \frac{1}{2}n^9 + \frac{3}{4}n^8 - \frac{7}{10}n^6 + \frac{1}{2}n^4 - \frac{3}{20}n^2\\
\sum_{k=1}^{n} k^{10} &= \frac{1}{11}n^{11} + \frac{1}{2}n^{10} + \frac{5}{6}n^9 - n^7 + n^5 - \frac{1}{2}n^3 + \frac{5}{66}n, \text{atd}\ldots
\end{aligned}$$

Koeficienty u lineárních členů se nazývají *Bernoulliho čísla*, která budeme dále značit $B_m$, kde $m \in \mathbb{N}$. U sudých exponentů se jedná o hodnoty $B_{2m}$ a u těch lichých o hodnoty $B_{2m+1} = 0$, kde se definuje $|B_1| = \frac{1}{2}$. Je někdy zvykem uvažovat jen absolutní hodnoty Bernoulliho čísel a stejně tak to budeme dělat i my, abychom se v pozdějších vyjádřeních nemuseli zabývat nějakým alternujícím operátorem $(-1)^k$.

**Příklad 4.1.2.** Nechť dále

$$S_m(n) = \sum_{k=1}^{n} k^m.$$

Jelikož jsme Bernoulliho čísla definovali jako lineární členy u těchto součtů, pak si všimněme, že zderivujeme-li celý tento polynom a dosadíme do něj nulu, pak se všechny členy vyruší a zůstane jen koeficient u právě toho lineárního, jinými slovy můžeme definici Bernoulliho čísel zapsat jako

$$B_m := S'_m(0).$$

Definujme dále funkci $S(t,n)$ předpisem

$$S(t,n) := \sum_{m=0}^{\infty} S_m(n) \frac{t^m}{m!}, \tag{1}$$

který nyní můžeme postupně upravovat jako:

$$S(t,n) = \sum_{m=0}^{\infty} S_m(n) \frac{t^m}{m!} = \sum_{m=0}^{\infty} \left( \sum_{k=1}^{n} k^m \right) \frac{t^m}{m!} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(kt)^m}{m!} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(kt)^m}{m!}.$$

Připomeňme nyní Maclaurinovu řadu funkce $\mathrm{e}^x$, která je

$$\mathrm{e}^x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!},$$

kde dosazením $x = kt$ podle (1) získáme

$$S(t,n) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{kt} = \sum_{k=1}^{n} \left(\mathrm{e}^t\right)^k,$$

kteroužto řadu můžeme jednoduše sečíst pomocí vzorce pro součet $n$ členů geometrické posloupnosti, tj.

$$S(t,n) = \mathrm{e}^t \frac{\mathrm{e}^{tn} - 1}{\mathrm{e}^t - 1} = \frac{\mathrm{e}^{(n+1)t} - \mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^t - 1}.$$

Generující formuli pro Bernoulliho čísla zřejmě obdržíme tak, že celý tento vztah parciálně zderivujeme podle $n$ a poté do výsledné funkce dosadíme $n = 0$.Je

$$\lim_{n \to 0} \frac{\partial}{\partial n} S(t,n) = \lim_{n \to 0} \sum_{m=0}^{\infty} S'_m(n) \frac{t^m}{m!} = \sum_{m=0}^{\infty} S'_m(0) \frac{t^m}{m!} = \sum_{m=0}^{\infty} B_m \frac{t^m}{m!}. \tag{2}$$

Kromě toho také platí

$$\lim_{n \to 0} \frac{\partial}{\partial n} S(t,n) = \lim_{n \to 0} \frac{\partial}{\partial n} \frac{\mathrm{e}^{(n+1)t} - \mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^t - 1} = \lim_{n \to 0} \frac{t\mathrm{e}^{(n+1)t}}{\mathrm{e}^t - 1} = \frac{t\mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^t - 1},$$

odkud podle (2) tedy

$$\frac{t\mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^t-1}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{B_m}{m!}t^m.$$

Této funkci se tedy říká *generující* a to v tom smyslu, že jsou Bernoulliho čísla až na zlomky $1/m!$ koeficienty jejího Maclaurinova rozvoje.

**Příklad 4.1.3.** Používání termínu Taylorova řada však není v případě funkce kotangens tak úplně vhodné. Z definice funkce kotangens plyne, že rozvíjet jej v bodě $x_0=0$ Taylorovou řadou nepřichází v úvahu, neboť $\sin 0=0$. Může nám však pomoci tzv. *Laurentova řada* (pro bližší informace, viz [7] a [8]) prostřednictvím které lze v bodě $x_0=0$ kotangens skutečně rozvést. Uvažujme funkci $x\cot x$, pro kterou platí

$$x\cot x=\frac{x\cos x}{x}=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots.$$

Tato funkce Taylorovu řadu očividně má. Dělme tento vztah $x$ a dostaneme, že

$$\cot x=\frac{a_0}{x}+a_1+a_2x+\dots,$$

což nám tedy umožňuje odvození Laurentovy řady pro cot. Při odvozování obecného tvaru příslušné řady budeme dále vycházet z generující formule pro Bernoulliho čísla odvozené v příkladu 4.1.2. Ta však vychází z rozvoje modifikované exponenciální funkce, tudíž usoudíme, že se nám nejspíše bude hodit vyjádření funkce $x\cot x$ v její exponenciální formě, kteréžto vychází z Eulerovy formule a je

$$x\cot x=\mathrm{i}x\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}.$$

Výraz napravo nyní postupně upravujme:

$$x\cot x=\mathrm{i}x\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}=\mathrm{i}x\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}\cdot\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}=\mathrm{i}x\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}}{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}-1}+\frac{\mathrm{i}x}{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}-1}+\mathrm{i}x-\mathrm{i}x=-\mathrm{i}x+\frac{2\mathrm{i}x\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}}{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}-1},$$

kde už nyní na funkci vpravo lze jednoduše aplikovat výsledek, ke kterému jsme dospěli v příkladu 4.1.2, čili

$$x\cot x=-\mathrm{i}x+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{B_m}{m!}(2\mathrm{i}x)^m=1+\sum_{m=2}^{\infty}\frac{B_m}{m!}(2\mathrm{i}x)^m.$$

Jelikož je funkce $x\cot x$ reálná funkce reálné proměnné, tak veškeré imaginární členy musí jít pryč. Jedná se o všechny členy, u kterých je $\mathrm{i}^{2m+1}$, což je také důvodem pro $B_{2m+1}=0$, $m\in\mathbb{N}$. Nakonec tedy je

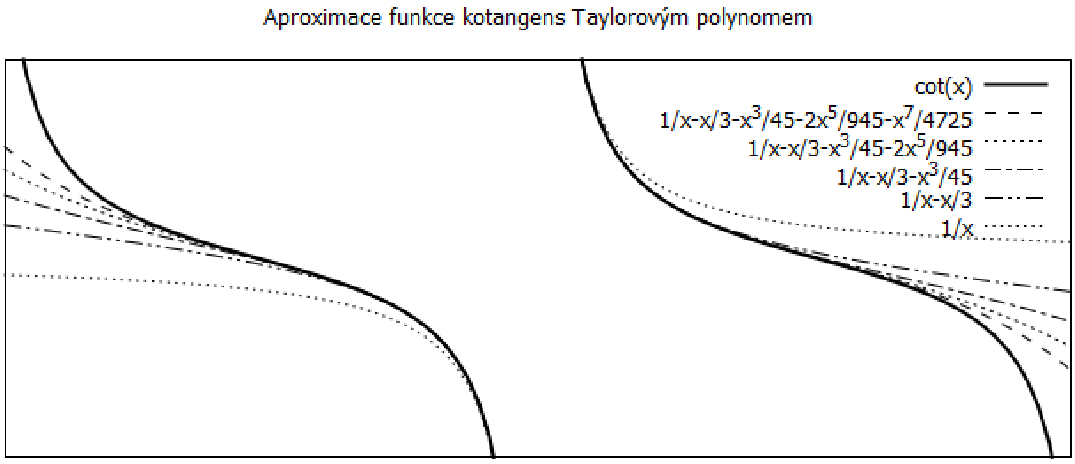
$$x\cot x=1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{B_{2m}(-4)^m}{(2m)!}x^{2m-1},$$

kde po vydělení $x$ a použití v příkladu 4.1.1 dohodnuté konvence spojené s terminologii Bernoulliho čísel konečně dostaneme

$$\cot x=\frac{1}{x}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{|B_{2m-2}|\,2^{2m-2}}{(2m-2)!}x^{2m-3}.$$

Správně bychom měli zjistit, zdali řada vůbec konverguje, jenže v námi stanoveném úkolu, tj. nalézt součet $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^{2m}$, tohoto nebude tak úplně zapotřebí, neboť nám tam, jak uvidíme později, půjde pouze o porovnávání koeficientů dvou řad. Platnost právě odvozeného vzorce je zaručena Taylorovou větou ([14]), nehledě na to, jestli pravá strana konverguje nebo ne.

Pro ilustraci se také můžeme podívat, jak postupná aproximace funkce kotangens polynomem vypadá:




## 4.2 Nalezení obecného vzorce pro $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^{2m}$

**Příklad 4.2.1.** V rámci dokazování $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2 = \pi^2/6$ ve třetí kapitole, jsme rovněž dospěli k tomuto zajímavému a možná překvapivému vztahu pro kotangens

$$\cot x = \frac{1}{x} + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{x^2 - k^2\pi^2} = \frac{1}{x} - 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{k^2\pi^2 - x^2},$$

který nyní budeme trochu upravovat. Na pravé straně v argumentu sumy vytkněme $1/k^2\pi^2$ a dostaneme

$$\cot x = \frac{1}{x} - 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{k^2\pi^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}}.$$

Za předpokladu, že je $x$ dostatečně malé si můžeme výraz $1/(1 - x^2/k^2\pi^2)$ dále zapsat jako geometrickou řadu:

$$\frac{1}{x} - 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{k^2\pi^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}} = \frac{1}{x} - 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{k^2\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)^{m-1} = \frac{1}{x} - 2\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^{2m-1}}{k^{2m}\pi^{2m}},$$

kde nyní dosazením $\pi x$ obdržíme

$$\cot \pi x = \frac{1}{\pi x} - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^{2m-1}}{k^{2m}},$$

tj.

$$1 - \pi x \cot \pi x = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^{2m}}{k^{2m}} = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2m}} \right) x^{2m}.$$

V příkladu 4.1.3 jsme zase pro funkci kotangens odvodili Laurentovu řadu, jejíž podobu rovněž připomeneme:

$$\cot x = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|B_{2m-2}|\, 2^{2m-2}}{(2m-2)!} x^{2m-3},$$

tedy

$$1 - \pi x \cot \pi x = 1 - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|B_{2m-2}|\, 2^{2m-2}}{(2m-2)!} \pi^{2m-2} x^{2m-2},$$

kde bude první člen (když $m = 1$) řady na pravé straně roven jedné, tudíž se nám tam tímto odečtou dvě jedničky a zbude

$$1 - \pi x \cot \pi x = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|B_{2m}|\, 2^{2m} \pi^{2m}}{(2m)!} x^{2m}.$$

Již z předcházejícího vyjádření funkce $1 - \pi x \cot \pi x$ coby nekonečné řady plyne rovnost

$$2 \sum_{m=1}^{\infty} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2m}} \right) x^{2m} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|B_{2m}|\, 2^{2m} \pi^{2m}}{(2m)!} x^{2m}.$$

U obou řad argument roste zcela identicky, tedy je více než zřejmé, že obě musejí mít stejné koeficienty, neboli že

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2m}} = \frac{|B_{2m}|\, 2^{2m-1} \pi^{2m}}{(2m)!},$$

čímž se nám povedlo nalézt obecné vyjádření pro výpočet součtu řady $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^{2m}$ pro jakékoliv přirozené číslo $m$.

# 5 Zajímavé výskyty odvozených hodnot zeta funkce

## 5.1 Jaká je pravděpodobnost, že dvě náhodně vybraná přirozená čísla jsou nesoudělná?

Nejprve ukažme, že pravděpodobnost, že prvočíslo $p$ dělí nějaké přirozené číslo $n$ je $1/p$. Platnost tohoto tvrzení se může zdát velmi intuitivní, například pro $p = 2$ to vidíme hned, neboť každé druhé číslo je sudé, a tedy dělitelné dvěma. Dejme tomu, že o dělitelnosti každého z přirozených čísel zatím obecně nemáme žádnou informaci, potom tedy ani nevíme zdali je 6 sudé, nicméně existuje padesátiprocentní šance, že opravdu ano. Tuto úvahu bychom mohli zobecnit na jakékoliv prvočíslo nebo i hned jakékoliv přirozené číslo. Pravděpodobnost, že číslo 5 dělí $n$ je $1/5$ neboť každé páté číslo v pořadí je dělitelné pěti. Důkaz samotného tvrzení není nijak daleko od intuice, je relativně jednoduchý a v následujícím odstavci si jej ukážeme:

Pokud $p$ dělí $n$, pak existuje přirozené $k$ takové, že $n = pk$. Prvních $n$ přirozených čísel si dále tedy můžeme rozdělit do $k$ skupin, kde se v každé skupině zřejmě nachází právě jedno přirozené číslo, které je $p$ dělitelné. Nyní dejme tomu, že $n$ dává po dělení $p$ zbytek $m$ ne nutně různý od nuly. Potom pro to stejné přirozené číslo $k$ platí $n - m = kp$, odkud $n = pk + m$. Pravděpodobnost, že $p$ dělí náhodně vybrané přirozené číslo $n$ je tedy $k/(pk + m)$, přičemž očividně $k/(pk + m) \to 1/p$ pro $k \to \infty$.

Důsledkem toho je pravděpodobnost, že $p$ dělí dvě náhodně vybraná přirozená čísla $m$ a $n$, rovna $1/p^2$. Pravděpodobnost, že je obě nedělí je tedy $1 - 1/p^2$ a pravděpodobnost $P$, že žádné ze všech prvočísel tato dvě čísla dohromady nedělí je rovna součinu

$$P = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^2}\right).$$

Uvědomme si, že pokud žádné prvočíslo nedělí zároveň $m$ i $n$, tak se jedná o tvrzení ekvivalentní faktu, že jsou tato dvě čísla nesoudělná. Uvažujme dále převrácenou hodnotu součinu $P$

$$\frac{1}{P} = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^2}},$$

kde výraz v argumentu si podobně jako při řešení problému v předchozí kapitole můžeme zapsat ve formě geometrické řady, tj.

$$\prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^2}} = \prod_p \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{p^2}\right)^{j-1} = \prod_p \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{p^{j-1}}\right)^2.$$

Všimněme si, že pokud na pravé straně provedeme celé to roznásobení se všemi postupně za $p$ dosazenými hodnotami, tak nakonec budeme muset podle základní věty aritmetiky, podle které lze každé přirozené číslo zapsat jako součin konečného počtu mocnin prvočísel, dostat součet čtverců převrácených hodnot všech přirozených čísel. Jedná se v podstatě o všechny možné kombinace hodnoty $1/p^2$. Nakonec tedy

$$\prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^2}} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2}.$$

Nalezení součtu řady na pravé straně je podstatou Basilejského problému, který jsme již vyřešili v kapitole číslo 3, odkud

$$\frac{1}{P} = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^2}} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Pravděpodobnost, že dvě námi náhodně vybraná přirozená čísla $m$ a $n$ jsou nesoudělná, je z tohoto poznatku rovna

$$P = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) = \frac{6}{\pi^2}.$$

Zajisté si všimneme, že by tuto úvahu mohlo jít zobecnit pro jakýkoliv počet přirozených čísel. Pravděpodobnost, že jsou tři náhodně vybraná čísla všechna spolu nesoudělná je zase $\left(\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^3\right)^{-1}$, atd.

## 5.2 Stefanův-Boltzmannův zákon

Následujících pár odstavců bude pouze takovou „perličkou“, neboť si zde budeme ukazovat odvození jednoho známého fyzikálního zákona, pro kterýžto účel musíme vyjít z poznatků, které stojí na stranách náročné teorie, jmenovitě se jedná o tzv. *Planckův vyzařovací zákon*. Cílem této malé kapitoly je pouze nastínit, na jakých zajímavých a možná nečekaných místech se mohou hodnoty $\zeta(2m)$ ještě vyskytovat. Odvodit Planckův zákon se vším všudy by mohl být námět na samostatnou práci, proto jen uveďme jeho znění a stručně vysvětleme, v čem spočívá.

Nejprve bychom měli alespoň krátce vysvětlit pojem *černé těleso*. Jedná se o ideální těleso, které pohlcuje veškeré záření dopadající na jeho povrch, nehledě na úhel dopadu, vlnovou délku a ani sílu nárazu. Takovéto těleso je ideálním zdrojem záření, neboť za dané teploty se jedná o těleso, z něhož vychází nejvíce záření. Od černého tělesa se tedy logicky ani žádné záření neodráží, tudíž se nám z pozice pozorovatele jeví jako dokonale černé.

Při teplotě $T$ vyzařuje černé těleso do okolí záření o všech různých vlnových délkách. Všechna tato vlnění mají různé intenzity.

Dále potřebujeme vědět co je to *spektrální hustota záření*. Ta popisuje množství energie, které při záření vydá černé těleso za aktuální (stále měnící se) frekvence. Planck dokázal, že spektrální hustota záření $R$ tělesa o termodynamické teplotě $T$ je dána vztahem

$$R(\omega, T) = \frac{2h\omega^3}{c^2} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h\omega}{k_B T}} - 1}, \tag{1}$$

kde $\omega$ je frekvence, $h$ je Planckova konstanta, $k_B$ je Boltzmannova konstanta a $c$ rychlost světla. Hodnota Planckovy konstanty je asi $h \approx 6{,}626 \cdot 10^{-34}$ J·s a hodnota Boltzmannovy konstanty je přibližně $k_B = 1{,}381 \cdot 10^{-23}$ J·K$^{-1}$.

Naším cílem bude z veličiny $R$ vyjádřit *intenzitu* $I$, kterážto je definována jako celkové množství energie vyzářené jednotkou plochy černého tělesa při všech možných vlnových délkách (frekvencích). Můžeme říci, že sepktrální hustota záření je změnou intenzity za frekvenci, tedy je derivací $I$ podle $\omega$. Abychom získali $I$, musíme tedy zintegrovat rovnici (1) s respektem k $\omega$. Pro každou hodnotu frekvence totiž existuje korespondující hodnota spektrální hustoty záření. To co potřebujeme je všechny tyto hodnoty sečíst. Zkusme si závislost $R$ na $\omega$ vykreslit do soustavy $Oxy$ ve formě grafu, kde na osu $x$ samozřejmě pokládáme hodnoty frekvence a na osu $y$ hodnoty spektrální hustoty záření.

Dále sečtením všech možných hodnot $R$ v podstatě spočteme obsah plochy, který nám graf této závislosti ohraničuje, neboť jsme si takto polorovinu $\mathbb{R}^+$ rozdělili na nekonečně mnoho nekonečně malých úseků (obdélníků). Tento krok není ničím jiným než integrováním podle Riemannovy definice integrálu ([13]). Co je hlavně důležité je, že jelikož také sčítáme naprosto všechny hodnoty spektrální hustoty záření (tj. za všech existujících frekvencí), pak dolní mez integrálu musí být 0 a ta horní $\infty$, odtud

$$I = \int_0^\infty R(\omega, T)\mathrm{d}\omega = \int_0^\infty \frac{2\pi h\omega^3}{c^2} \cdot \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{h\omega}{k_\mathrm{B}T}} - 1}\mathrm{d}\omega = \frac{2\pi h}{c^2} \int_0^\infty \frac{\omega^3}{\mathrm{e}^{\frac{h\omega}{k_\mathrm{B}T}} - 1}\mathrm{d}\omega. \tag{2}$$

Pokusme se nyní integrál na pravé straně vypočítat. Začněme tím, že zavedeme substituci

$$x = \frac{h\omega}{k_\mathrm{B}T},$$

odkud také

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\omega} = \frac{h}{k_\mathrm{B}T},$$

tj.

$$\mathrm{d}\omega = \frac{k_\mathrm{B}T}{h}\mathrm{d}x.$$

Horní i dolní mez nám zůstanou obě stejné. Dosazením všech těchto výsledků do (2) dostaneme

$$I = \frac{2\pi h}{c^2} \int_0^\infty \frac{\frac{x^3 k_\mathrm{B}^3 T^3}{h^3}}{\mathrm{e}^x - 1} \cdot \frac{k_\mathrm{B}T}{h}\mathrm{d}x = \frac{2\pi k_\mathrm{B}^4 T^4}{c^2 \pi h^3} \int_0^\infty \frac{x^3}{\mathrm{e}^x - 1}\mathrm{d}x. \tag{3}$$

Vypočítat tento integrál už bude podstatně více trikové. Svou podobou si přímo žádá o použití komplexní analýzy, ale to doufejme nebude nutné. Zkusme místo toho prozkoumat jiné možnodti. Opět budeme využívat geometrické řady. Zajisté máme

$$\frac{1}{\mathrm{e}^x - 1} = \frac{1}{\mathrm{e}^x - 1} \cdot \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-x}} = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1 - \mathrm{e}^{-x}} = \sum_{k=1}^\infty \mathrm{e}^{-kx},$$

potom

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{\mathrm{e}^x - 1}\mathrm{d}x = \int_0^\infty x^3 \sum_{k=1}^\infty \mathrm{e}^{-kx}\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^\infty \int_0^\infty x^3 \mathrm{e}^{-kx}\mathrm{d}x. \tag{4}$$

Pro výpočet tohoto integrálu nám postačí postupovat metodou *per partes*. Je

$$\int_0^x \mathrm{e}^{-kx}\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{e}^{-kx}}{k} + C \qquad \text{a} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^n = nx^{n-1},$$

tj.

$$\int\limits_0^\infty x^3 \mathrm{e}^{-kx} \mathrm{d}x = \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{x^3\mathrm{e}^{-kx}}{k}\right) - \lim_{x\to 0}\left(-\frac{x^3\mathrm{e}^{-kx}}{k}\right) + \int\limits_0^\infty \frac{3x^2\mathrm{e}^{-kx}}{k}\mathrm{d}x = \int\limits_0^\infty \frac{3x^2\mathrm{e}^{-kx}}{k}\mathrm{d}x =$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{3x^2\mathrm{e}^{-kx}}{k^2}\right) - \lim_{x\to 0}\left(-\frac{3x^2\mathrm{e}^{-kx}}{k^2}\right) + \int\limits_0^\infty \frac{6x\mathrm{e}^{-kx}}{k^2}\mathrm{d}x = \int\limits_0^\infty \frac{6x\mathrm{e}^{-kx}}{k^2}\mathrm{d}x =$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{6x\mathrm{e}^{-kx}}{k^3}\right) - \lim_{x\to 0}\left(-\frac{6x\mathrm{e}^{-kx}}{k^3}\right) + \int\limits_0^\infty \frac{6\mathrm{e}^{-kx}}{k^3}\mathrm{d}x = \int\limits_0^\infty \frac{6\mathrm{e}^{-kx}}{k^3}\mathrm{d}x =$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{6\mathrm{e}^{-kx}}{k^4}\right) - \lim_{x\to 0}\left(-\frac{6\mathrm{e}^{-kx}}{k^4}\right) = \frac{6}{k^4},$$

odkud tedy

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_0^\infty x^3\mathrm{e}^{-kx}\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{6}{k^4}.$$

Již dříve jsme dokázali, že platí

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2m}} = \frac{|B_{2m}|\,2^{2m-1}\pi^{2m}}{(2m)!},$$

kde dosazením $m = 2$ dostaneme uzavřený tvar pro součet $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^4$, a tedy

$$\int\limits_0^\infty \frac{x^3}{\mathrm{e}^x - 1}\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{6}{k^4} = \frac{\pi^4}{15},$$

což nám umožňuje podle (3) a (4) finálně vyjádřit intenzitu záření jako

$$I = \frac{2k_{\mathrm{B}}^4\pi^5}{15c^2h^3}T^4,$$

kde konstanta při $T^4$ se jinak nazývá *konstanta proporcionality* nebo také někdy i jednoduše *Stefanova-Boltzmannova konstanta* a obyčejně se značí $\sigma$. Vztah

$$I = \sigma T^4$$

je právě onen *Stefanův-Boltzmannův zákon* a jedná se o vztah, který jsme chtěli odvodit. Bohužel je nutno podotknout, že jsme se v těchto úvahách fyzikální stránkou problematiky moc nezabývali, s řadou hodnot jsme zde zacházeli pouze jako se „shlukem“ konstant a nepřiřazovali jsme jim vyšší význam, nicméně je možné přinejmenším přibližně ocenit, jaký úžasný a také mnohdy překvapivý přírodní výskyt mohou součty jako $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^{2m}$ mít. Není zapotřebí se zastavit tady. I v jiných vztazích ve fyzice se vyskytují hodnoty funkce zeta. Dalším z úžasných příkladů je tzv. *fotonový plyn*, kde se ve vzorci pro výpočet jeho počtu částic zase vyskytuje $\zeta(3)$.[2] Možná by se dal vymyslet fyzikální experiment, prostřednictvím kterého bychom byli schopni tuto hodnotu přibližně určit. Matematicky by to sice přínosné nebylo, ale lze považovat za relativně zajímavé, alespoň zamyslet se nad tím, že některé z hodnot zety mohou mít i úzkou souvislost s některými fyzikálními konstantami.

[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Photon_gas

# Závěr

Musíme zmínit, že existuje jeden další elementární důkaz, který nespoléhá na velmi pokročilou matematiku, jehož hlavním motivem je sevření částečného součtu $\sum_{k=1}^{n} 1/k^2$ mezi dva výrazy, kde každý z nich půjde k $\pi^2/6$ pro $n \to \infty$, přičemž finální řešení bude vyplývat z věty o limitě sevřené funkce. Opět bychom museli využít vyjádření kotangensu z Eulerovy formule a dále by se pro změnu mohla hodit například Moivreova věta. Problém s tímto postupem je ale ten, že by velmi pravděpodobně nešel žádnou elementární cestou zobecnit, aby nám poskytl řešení pro jakýkoliv součet $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^{2m}$, kde $m \in \mathbb{N}$. Jak jsme ale viděli v závěru kapitoly 4, tak v podstatě jen jednoduchou aplikací geometrické řady, lze k takovému vzorci dospět. Alespoň přibližnou představu o pár známých řešení Basilejského problému může poskytnout [15].

Nejsložitějším úkolem bylo zajisté dokázat platnost vzorce $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \pi \csc \pi x$. Jednalo se o část v práci s nejvyšším počtem aktualizací. Prvotní postup se zaměřoval na výpočet integrálu skrze relativně pokročilé metody komplexní analýzy, jako například *Residuová věta* nebo *ML-nerovnost*. I tento důkaz byl po dlouhou dobu stále upravován a doplňován, než byl dokončen.

Ale fakt, že je komplexní analýza učivo pozdějších ročníků vysoké školy, nám trochu kontrastoval s původním cílem práce, a sice vytvořit řešení Basilejského problému, které stojí na dobře vystavěné teorii, jež se snaží co nejvíce vyhnout používání silných a těžko dokazatelných tvrzení. Tato motivace vedla k jeho nahrazení současným důkazem, jehož vrcholem je povrchové využití kalkulu více proměnných a Fubiniho věty. Ona Fubiniho věta by zase měla jít dokázat jen pomocí základní Riemannovy definice integrálu.

Navíc způsob pomocí křivkových integrálů je relativně dobře znám a podobný důkaz může být nalezen i v [6]. Nový postup považuji za více originální a elegantní, přičemž jsem jej v žádné zkoumané literatuře ještě nenalezl.

V práci je možno pokračovat mnoha různými způsoby. Zatím jsme se po celou dobu zabývali výhradně sudými hodnotami zeta funkce. Okamžitě se tedy nabízí otázka, jak je to s těmi lichými. Je pravdou, že se o žádné konkrétní hodnotě $\zeta(2m+1)$ pro $m \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ přesně neví, zdali je iracionální, transcendentní a jestli ji lze vůbec v nějakém uzavřeném tvaru vyjádřit. Jen iracionalitu $\zeta(3)$ dokázal až roku 1978 matematik Roger Apéry, po kterém je tato také konstanta pojmenována. Zdali je číslo transcedentní nebo zdali jej lze vyjádřit ve výše zmíněném uzavřeném tvaru (a pokud ano, tak v jakém), se však ještě neví.

Dále bychom mohli upustit od přirozených čísel a podívat se na hodnoty funkce zeta v racionálních nebo ještě lépe v kladných reálných číslech. Lze ji také zobecnit na vůbec celou reálnou osu kromě čísla 1, kde bychom dostali harmonickou řadu. To je následováno zjištěním, že v každém sudém záporném celém čísle je hodnota zeta funkce rovna nule. Takovýmto bodům se říká triviální nulové body. Z toho přirozeně usoudíme, že existují i nějaké netriviální. O jejich rozložení hovoří Riemannova hypotéza, jeden z problému milénia, která tvrdí, že takovéto body leží na jedné přímce se společnou imaginární části 1/2, pro což však musíme zeta funkci ještě zobecnit do oboru čísel komplexních. Pokud by se hypotéza ukázala jako pravdivá, pak by to mělo na teorii čísel dalekosáhlý dopad, neboť například souvisí i s rozložením prvočísel a otázkou, zdali je mezi nimi nějaká pravidelnost (kvalitní populárně naučný materiál o Riemannově hypotéze a její souvislosti s prvočísly je [9]). Další zajímavou knihou, představující větší řadu známých ať už vyřešených, či nevyřešených problémů, je zajisté podklad [10]. Jedná se také o literaturu, ve které jsem poprvé identitu $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2 = \pi^2/6$ spatřil.

## Reference


[1] VESELÝ, Jiří. *Matematická analýza pro učitele I.* Vyd. 1. Praha: Matfyzpress, 1997. ISBN 80-85863-23-5.

[2] VESELÝ, Jiří. *Matematická analýza pro učitele II.* Vyd. 1. Praha: Matfyzpress, 1997. ISBN 80-85863-23-5.

[3] SANDIFER, Ed. Gamma the function. *How Euler Did It.* [online]. 26.4.2016 [cit. 2016-04-26]. Dostupné z:
http://eulerarchive.maa.org/hedi/HEDI-2007-09.pdf

[4] DAVIS, J. Philip. Leonhard Euler's Integral: A Historical Profile of the Gamma Function. *Mathematical Association of America.* [online]. 26.4.2016 [cit. 2016-04-26]. Dostupné z:
http://www.maa.org/sites/default/files/pdf/upload_library/22/Chauvenet/Davis.pdf

[5] DOŠLÁ, Zuzana a NOVÁK, Vítězslav. *Nekonečné řady.* 2. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2007. ISBN 978-80-210-4334-3.

[6] ČERNÝ, Ilja. *Základy analysy v komplexním oboru: Celostátní vysokoškolská učebnice.*ř Praha: Academia, 1967.

[7] BARTSCH, Hans-Jochen. *Matematické vzorce.* 1. vyd. Překlad Zdeněk Tichý. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1983.

[8] WILDE, Ivan Francis. *Lecture notes on complex analysis.* London: Imperial College Press, c2006. ISBN 1860946429.

[9] DERBYSHIRE, John. *Posedlost prvočísly.* Vyd. 1. Praha: Academia, 2007. Galileo. ISBN 978-80-200-1479-5.

[10] ACHESON, D. J. *1089 a další parádní čísla*: [matematická dobrodružství]. Praha: Dokořán, 2006. ISBN 80-7363-025-7.

[11] Weierstrassova faktorizační formule. *Wikipedia.* [online]. 26.4.2016 [cit. 2016-04-26]. Dostupné z:
https://en.wikipedia.org/wiki/Weierstrass_factorization_theorem

[12] Hölderova nerovnost. *WolframMathWorld.* [online]. 29.4.2016 [cit. 2016-04-29]. Dostupné z:
http://mathworld.wolfram.com/HoeldersInequalities.html

[13] Riemannův integrál. *WolframMathWorld.* [online]. 29.4.2016 [cit. 2016-04-29]. Dostupné z:
http://mathworld.wolfram.com/RiemannIntegral.html

[14] Taylorova věta. *WolframMathWorld*. [online]. 29.4.2016 [cit. 2016-04-29]. Dostupné z: http://mathworld.wolfram.com/TaylorsTheorem.html

[15] Basilejský problém. *Wikipedia*. [online]. 26.4.2016 [cit. 2016-04-26]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Basel_problem

# Rejstřík