STŘEDOŠKOLSKÁ ODBORNÁ ČINNOST

Obor SOČ: 01. Matematika a statistika

Geometrie čtyřúhelníka

Geometry of the quadrilateral

Autor: Le Anh Dung

Škola: Gymnázium, Tachov
Pionýrská 1370

Konzultant: Mgr. Michal Rolínek, IST Austria

Tachov 2014

Prohlašuji, že jsem svou práci vypracoval samostatně, použil jsem pouze podklady (literaturu, SW atd.) citované v práci a uvedené v přiloženém seznamu a postup při zpracování práce je v souladu se zákonem č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon) v platném znění.

V Tachově dne 28. dubna 2014 ....

Poděkování
Rád bych poděkoval Michalu Rolínkovi za jeho nesmírnou ochotu, trpělivost a cenné nápady při vzniku této práce.

Abstrakt

Tato práce je určena pro řešitele matematické olympiády. Seznámí čtenáře s třemi rozdílnými metodami řešení olympiádních úloh, které se v běžném středoškolském učivu neobjevují. Navzdory tomu jsou k pochopení celé práce potřebné pouze středoškolské poznatky jako obvodové úhly, úsekové úhly, podobné trojúhelníky, atd.

V práci je u každé metody uvedena základní teorie a navíc způsoby, jak se mohou dané metody v úlohách uplatnit. Ve třech sekcích jsou vzorové příklady pro ilustraci. Na úplném konci práce je úloha, která je podstatně těžší než předchozí příklady a vyžaduje kombinaci všech tří „zbraní“. Jedná se o zajímavý výsledek z moderní geometrie čtyřúhelníka, které nemělo dosud elementární důkaz.

Abstract

This work is written for participants of mathematical olympiad. It acquaints the readers with three different techniques in olympiad problem-solving which are not common in the high school curriculum. Despite that only high school knowledge (for example angle at circumference, central angle, angle between a tangent and a chord, similar triangles, etc.) is necessary in order to comprehend the whole work.

In this work basic theory is presented for every technique and on top of that ways to apply these methods are shown. There are illustrative model exercises in three sections. In the final section we deal with a significantly more difficult problem than the previous exercises which demands combination of all three "weapons". It is a very interesting result from modern quadrilateral geometry, which did not have any elementary proof until now.

Klíčová slova: čtyřúhelník; spirální podobnost; mocnost bodu; Newtonova přímka; kruhová inverze; Miquelův bod; Miquelova věta

Keywords: quadrilateral; spiral similarity; power of a point; Newton line; inversion; Miquel point; Miquel theorem

Obsah

Úvod

Tato práce se zabývá olympiádní matematikou, konkrétně spirální podobností, mocností bodu ke kružnici a kruhovou inverzí, které nacházejí uplatnění v rekreační olympiádní matematice. Mým cílem je ukázat, jak lze v úlohách rozpoznat vhodnost jejich použití. Snažil jsem se dodržet matematickou korektnost, a proto jsem použil orientované úhly, neboť složitější úlohy mohou generovat velké množství geometrických konfigurací závislých na vzájemných polohách zadaných bodů, což dokážou orientované úhly oproti klasickým úhlům vyšetřit najednou. Dále nové pojmy a značení jsou vždy před použitím definovány.

V první kapitole se seznámíme se spirální podobností, která bývá školními osnovami, navzdory své užitečnosti, často opomíjena. Lze ji chápat jako jakési zobecnění skoro všech podobných zobrazení, se kterými se běžně setkáváme ve středoškolském učivu. Libovolné zobrazení, které je složené ze středové souměrnosti, rotace a stejnolehlosti, lze totiž vyjádřit jediným zobrazením, a to právě spirální podobností. Spirální podobnost lze pak najít téměř všude, protože stačí uvažovat jakékoliv dva souhlasně orientované podobné objekty (např. dvě libovolné úsečky, přímky, nebo souhlasně podobné trojúhelníky). Ne vždy nám však tato metoda cestu k cíli usnadní.

Mocnost bodu ke kružnici nám zase pomáhá pracovat s délkami úseků sečen kružnic. Jedná se o snadno dokazatelné tvrzení ze středoškolského učiva a její užití je velmi jednoduché. Objasníme si také pojem chordála, jenž otvírá zcela nový pohled na úlohy, u nichž jde o to dokázat, že nějaké dvě přímky mají společný bod.

Kruhová inverze je zobrazení, které je na první pohled velmi nezvyklé, i poněkud „divoké“. Navzdory nepřirozené definici má velmi pěkné vlastnosti a dává nový náhled do geometrických problémů. Osvojení této techniky bývá velmi obtížné a vyžaduje představivost a geometrickou intuici ke správnému použití.

Seznam symboliky a zkratek

$\triangle$	trojúhelník
IMO	Mezinárodní matematická olympiáda
ISL	IMO Shortlist
$\sphericalangle$	úhel
$\sim$	být podobný
(ABC)	kružnice opsaná trojúhelníku ABC
$\sphericalangle(p, q)$	orientovaný úhel v kladném směru mezi přímkami p a q
$(S, \overrightarrow{\omega}, k)$	spirální podobnost se středem S, orientovaným úhlem $\overrightarrow{\omega}$ a koeficientem k
(S, r)	kruhová inverze se středem S a poloměrem r
$p(A, k)$	mocnost bodu A ke kružnici k

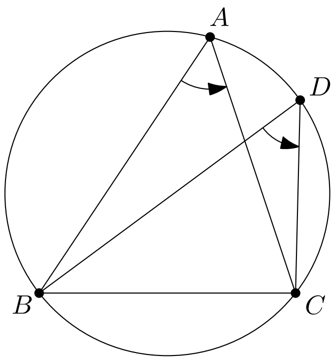
1 Orientované úhly

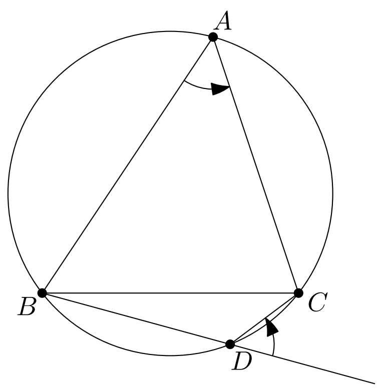
Definice 1.1. Orientovaný úhel $\sphericalangle(AB, CD)$ značí úhel mezi počátečním ramenem AB a koncovým ramenem CD v kladném směru.

Poznámka. Orientované úhly mají výhodu oproti klasickým úhlům v tom, že zahrnují všechny možné konfigurace, které jsou závislé na vzájemné poloze bodů v rovině. Například chceme-li dokázat, že bod D leží na kružnici opsané trojúhelníku ABC, pak musíme rozebírat dva případy:

(i) A, D leží na stejném oblouku BC, pak musíme dokázat, že $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle BDC|$

(ii) A, D leží na různých obloucích BC, pak musíme dokázat, že $|\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle BDC| = 180°$





S použitím orientovaných úhlů stačí dokázat, že $\sphericalangle(AB, AC) = \sphericalangle(DB, DC)$.

Tvrzení 1.2. Nechť p, q, r jsou přímky v jedné rovině. Pro orientované úhly platí:

(i) $\sphericalangle(p, p) = 0°$

(ii) $\sphericalangle(p, q) = -\sphericalangle(q, p)$

(iii) $\sphericalangle(p, q) = \sphericalangle(p, r) + \sphericalangle(r, q)$

(iv) $\sphericalangle(p, q) = 180° + \sphericalangle(p, q)$

Důsledek 1.3 (Součet úhlů v trojúhelníku)**.** Nechť A, B, C jsou tři různé body v rovině. Platí:

$$\sphericalangle(AB, AC) + \sphericalangle(CA, CB) + \sphericalangle(BC, BA) = 0°$$

Tvrzení 1.4 (Obvodový úhel)**.** Leží-li čtyři body A, B, C, D na jedné kružnici, pak platí: $\sphericalangle(CA, CB) = \sphericalangle(DA, DB)$

Tvrzení 1.5 (Obvodový a středový úhel)**.** Body A, B, C leží na kružnici se středem O, pak platí:

$$2\sphericalangle(CA, CB) = \sphericalangle(OA, OB)$$

Tvrzení 1.6 (Věta u-u)**.** Jsou dány dva trojúhelníky $\triangle ABC$ a $\triangle A'B'C'$ v rovině, pak platí:

(i) $\triangle ABC$ a $\triangle A'B'C'$ jsou si podobné a souhlasně orientované právě tehdy, když:

$$\begin{aligned}\sphericalangle(AB, AC) &= \sphericalangle(A'B', A'C')\\ \sphericalangle(BC, BA) &= \sphericalangle(B'C', B'A')\end{aligned}$$

(ii) $\triangle ABC$ a $\triangle A'B'C'$ jsou si podobné a nesouhlasně orientované právě tehdy, když:

$$\begin{aligned}\sphericalangle(AB, AC) &= -\sphericalangle(A'B', A'C')\\ \sphericalangle(BC, BA) &= -\sphericalangle(B'C', B'A')\end{aligned}$$

2 Spirální podobnost

2.1 Definice

Definice 2.1. Spirální podobnost je složení otočení a stejnolehlosti podle téhož středu. Je určena středem spirální podobnosti S, orientovaným úhlem otočení $\overrightarrow{\omega}$ (proti směru hodinových ručiček) a koeficientem stejnolehlosti $k > 0$. Značíme ji $(S, \overrightarrow{\omega}, k)$.

Poznámka. Složení otočení a stejnolehlosti je komutativní, tzn. výsledek nezáleží na pořadí těchto dvou zobrazení.

Tvrzení 2.2 (Speciální případy)**.** Spirální podobnost $(S, \overrightarrow{\omega}, k)$ se při speciálních hodnotách $\overrightarrow{\omega}, k$ redukuje následovně:

(i) Pro $\overrightarrow{\omega} = 0$ dostáváme stejnolehlost se středem S a koeficientem k.

(ii) Pro $\overrightarrow{\omega} = 180$ dostáváme stejnolehlost se středem S a koeficientem $-k$.

(iii) Pro $k = 1$ dostáváme otočení kolem S o úhel $\overrightarrow{\omega}$.

(iv) Pro $k = 1$ a $\overrightarrow{\omega} = 180$ dostáváme středovou souměrnost se středem S.

Poznámka. Žádná kombinace $S, \overrightarrow{\omega}, k$ nám nedá posunutí nebo nepřímé zobrazení.

Tvrzení 2.3 (Základní vlastnosti)**.** Pro spirální podobnost platí:

(i) Je to podobné zobrazení, tzn. obrazem útvaru je jemu podobný útvar.

(ii) Úhel mezi přímkou a jeho obrazem je úhel otočení.

(iii) Poměr délky obrazu k úsečce je roven koeficientu stejnolehlosti.

Důkaz. (i) Spirální podobnost je podobné zobrazení, protože otočení a stejnolehlost jsou podobná zobrazení.

(ii) Ve stejnolehlosti se přímka zobrazí na rovnoběžnou přímkou, a proto úhel mezi vzorem a obrazem záleží pouze na úhlu otočení.

(iii) Otočení zachovává délku úseček, a proto poměr délky mezi vzorem a obrazem záleží pouze na koeficientu stejnolehlosti.

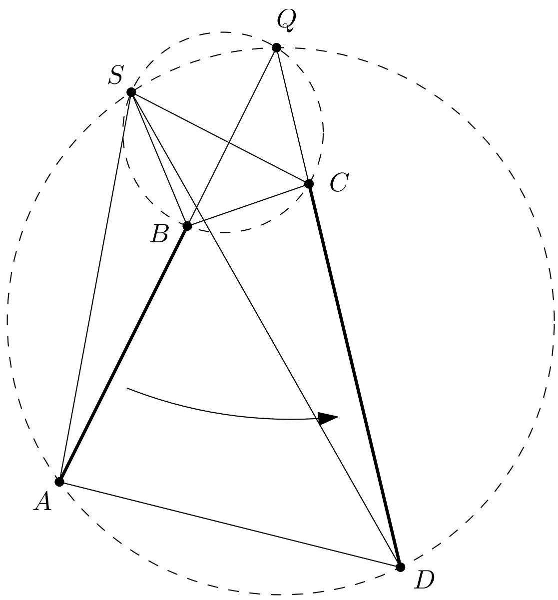
□

2.2 Existence a konstrukce

Lemma 2.4. V rovině jsou dány čtyři různé body A, B, C, D takové, že čtyřúhelník $ABCD$ není lichoběžník. Pak existuje právě jedna spirální podobnost, která převádí A na D a B na C.

Důkaz. Nechť $Q = AB \cap DC$, $S = (QAD) \cap (QBC)$ a $S \neq Q$. Čtyřúhelníky $QSAD$ a $QSBC$ jsou tětivové, a proto:

$$\begin{aligned} \sphericalangle(SA, SD) = \sphericalangle(QA, QD) = \sphericalangle(QB, QC) = \sphericalangle(SB, SC) \\ \sphericalangle(DS, DA) = \sphericalangle(QS, QA) = \sphericalangle(QS, QB) = \sphericalangle(CS, CB) \end{aligned}$$

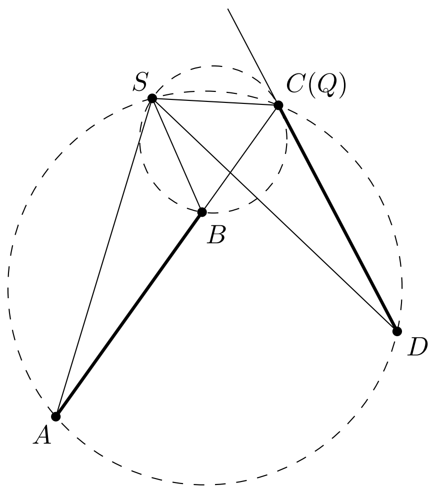


Z těchto vztahů plyne podobnost trojúhelníků $\triangle SDA$ a $\triangle SCB$, a proto $|SD|/|SA| = |SC|/|SB|$. Spirální podobnost $(S, \sphericalangle(SA, SD), |SD|/|SA|)$ zřejmě splňuje podmínku v zadání.

K důkazu jednoznačnosti předpokládejme, že existují dvě spirální podobnosti se středy S a S', které zobrazují A na D a B na C. V obou spirálních podobnostech se přímka AB a úsečka AB zobrazí na přímku DC, resp. úsečku DC, a proto úhel otočení a koeficient stejnolehlosti jsou $\sphericalangle(QA, QD)$, resp. $|BC|/|DA|$, tudíž $\triangle ASD \sim \triangle AS'D$ a navíc S a S' musí ležet na stejné polorovině oddělené přímkou AD, protože úhel $\sphericalangle(QA, QD)$ je orientovaný, z čehož plyne, že $S \equiv S'$. □

Poznámka. V případě rovnoběžníku $ABCD$ bychom potřebovali posunutí, které spirální podobnost neposkytuje.

Tvrzení 2.5 (Speciální případ)**.** Pokud Q a C splývají neboli přímky AB a CD se protínají v C, pak bod S, pro který platí $S = (ADC) \cap k, S \neq C$, kde k je kružnicí obsahující tětivu BC a tečnu DC, je střed spirální podobnosti, která převádí $A \to D, B \to C$.

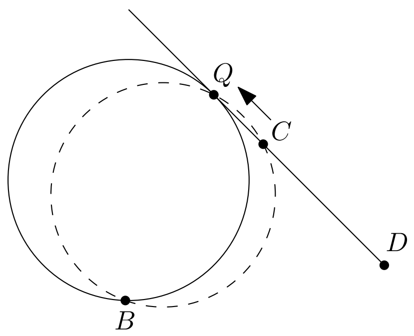


Důkaz. Abychom dokázali existenci kýžené spirální podobnosti, stačí ukázat, že $\triangle SDA \sim \triangle SBC$. Tato skutečnost snadno plyne z následujících rovností úhlů:

$$\sphericalangle(DS, DA) = \sphericalangle(CS, CB), \sphericalangle(AD, AS) = \sphericalangle(BC, BS)$$

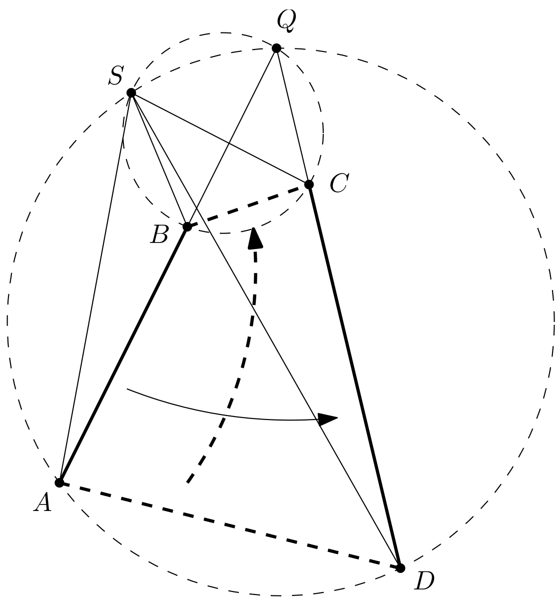
První vztah vychází z tětivového čtyřúhelníka $ASQD$ a druhý z úsekového úhlu sevřeného tětivou SC a tětivou CD, který se rovná obvodovému úhlu $\sphericalangle(BC, BS)$. □

Poznámka. Při zkoumání speciálního případu je intuitivní zabývat se výše definovanou kružnicí k, protože pokud v obrázku pohybujeme bodem C podél přímky QD směrem k Q, pak se přímka QD limitně přiblíží k tečně kružnice (QBC).



2.3 Dualita spirální podobnosti

Lemma 2.6. Nechť spirální podobnost se středem S převádí $A \to D$ a $B \to C$, pak spirální podobnost, která převádí $A \to B$ a $D \to C$, má též střed v S.



Důkaz. Střed S převádí $A \to D$ a $B \to C$, a proto $S \in (ADQ) \cap (BCQ)$. Využijeme obvodové úhly v těchto čtyřúhelnících:

$$\sphericalangle(AB, AS) = \sphericalangle(AQ, AS) = \sphericalangle(DQ, DS) = \sphericalangle(DC, DS)$$

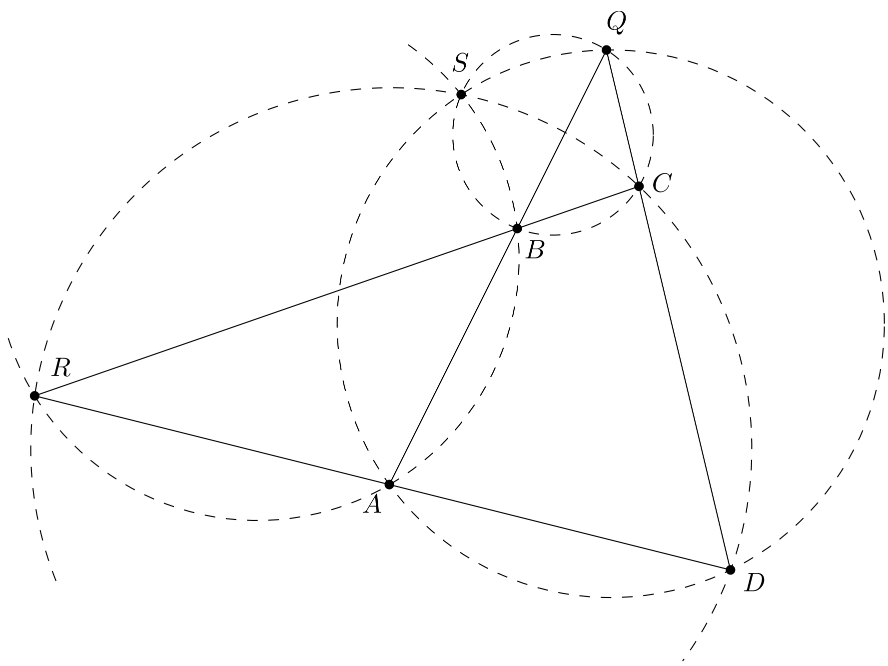
Dále platí také:

$$\begin{aligned}\sphericalangle(SA,SD)&=\sphericalangle(SB,SC)\\ \sphericalangle(SA,SD)-\sphericalangle(SB,SD)&=\sphericalangle(SB,SC)-\sphericalangle(SB,SD)\\ \sphericalangle(SA,SB)&=\sphericalangle(SD,SC)\end{aligned}$$

Z čehož plyne, že $\triangle SAB \sim \triangle SDC$, a proto bod S je středem spirální podobnosti $(S, \sphericalangle(SA,SB), |SA|/|SB|)$ zobrazující A na B a D na C. □

Poznámka. Tyto dvě spirální podobnosti mají sice stejný střed, ale úhel otočení a koeficient se můžou lišit.

Věta 2.7. [Miquelova věta] Je dán čtyřúhelník $ABCD$ s různoběžnými protějšími stranami. Průsečík přímek AB a CD označme Q a průsečík přímek AD a BC označme R. Platí, že kružnice $(BCQ), (ADQ), (ABR), (CDR)$ procházejí jedním bodem.



Důkaz. Druhý průsečík kružnic $(BCQ), (ADQ)$ je středem spirální podobnosti převádějící úsečku AD na BC. Druhý průsečík kružnic (ABR) a (CDR) je středem spirální podobnosti převádějící AB na DC. Díky dualitě jsou dvě zmíněné spirální podobnosti identické, a proto jejich středy splývají (tento bod nazýváme Miquelův bod). □

Pro čtyři body A, B, C, D v obecné poloze existuje celkem 6 spirálních podobností, které posílají 2 body na zbývající dva. Kvůli dualitě spirální podobnosti existují 3 Miquelovy body v jednom čtyřúhelníku.

Definice 2.8. Označme Miquelovy body M_P, M_Q, M_R, kde:

(i) M_P je průsečíkem kružnic $(ADQ), (BCQ), (ABR), (CDR)$

(ii) M_Q je průsečíkem kružnic $(ADP), (BCP), (BDR), (ACR)$

(iii) M_R je průsečíkem kružnic $(ABP), (CDP), (ACQ), (BDQ)$

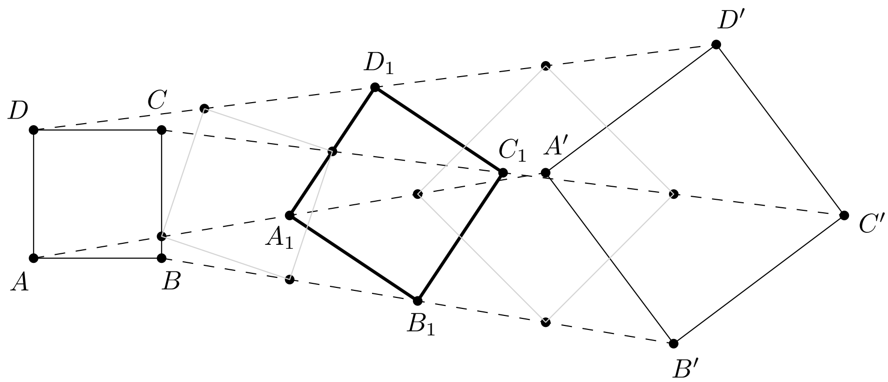
Poznámka.

Bod	Střed zobrazující	a (zároveň)
M_p	$\overline{AB} \mapsto \overline{DC}$	$\overline{AD} \mapsto \overline{BC}$
M_q	$\overline{AC} \mapsto \overline{DB}$	$\overline{AD} \mapsto \overline{CB}$
M_r	$\overline{AC} \mapsto \overline{BD}$	$\overline{AB} \mapsto \overline{CD}$

2.4 Jak spirální podobnost použít?

Příklad 1. Jsou dány dva čtverce $ABCD$ a $A'B'C'D'$ (vrcholy jsou označeny proti směru hodinových ručiček). Bod A_1 je střed úsečky AA' a B_1, C_1, D_1 jsou definovány podobně. Ukažte, že $A_1B_1C_1D_1$ je čtverec.

Než si ukážeme formální řešení příkladu, zamysleme se, co vlastně říká. Mějme v rovině dva podobné a souhlasně orientované útvary (v našem případě jsou to čtverce). Je zřejmé, že existuje spirální podobnost převádějící jeden útvar na druhý. Spojme jejich odpovídající si body úsečkami. Představme si spirální podobnost jako spojité klouzání po těchto úsečkách neboli pokud každý bod necháme klouzat konstantní rychlostí tak, aby po určitém čase dospěly všechny body z prvního útvaru do druhého, pak během klouzání útvar vždy zachovává tvar. Úloha chce po nás dokázat tvrzení ve chvíli, kdy uklouzaly body přesně půlku své dráhy. Tvrzení stále platí, pokud nahradíme středy, body s poměrem 1 : 1 na úsečkách, jakýmkoliv jiným poměrem.



Důkaz. Označme S střed spirální podobnosti zobrazující AB na $A'B'$. Obraz čtverce $ABCD$ v této podobnosti bude zřejmě čtverec $A'B'C'D'$. Zaměřme se na trojúhelník ASA' s těžnicí SA_1. Označme $\sphericalangle(SA, SA_1) = \phi$ a $|SA_1| : |SA| = k$.

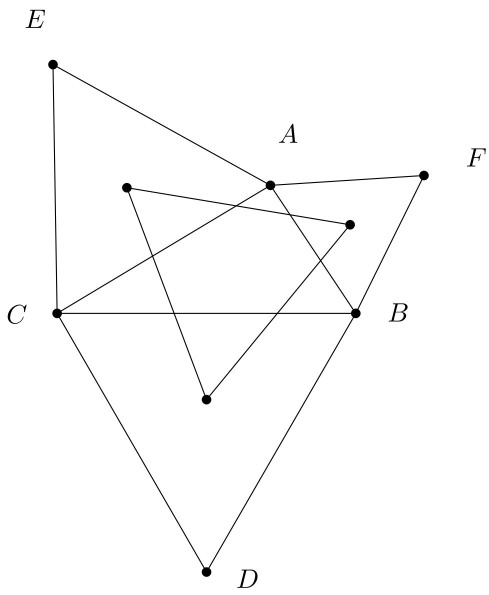
Bod A_1 je obrazem bodu A ve spirální podobnosti (S, ϕ, k). Jelikož trojúhelníky ASA_1, BSB_1, CSC_1 a DSD_1 jsou všechny podobné (jsou určené parametry spirální podobnosti zobrazující $ABCD$ na $A'B'C'D'$), zobrazí (S, ϕ, k) zároveň B na B_1, C na C_1 a D na D_1. Čtyřúhelník $A_1B_1C_1D_1$ je obrazem čtverce $ABCD$ ve spirální podobnosti (S, ϕ, k), a proto je také čtvercem.

□

Věta 2.9. Můžeme zobecnit úvahu o „spojité" spirální podobnosti na více než dva podobné útvary. Uvažujme n podobných útvarů $A_1, A_2, ..., A_n$ se stejnou orientací na rovině, těžiště n-úhelníků, které jsou tvořeny příslušnými body na každém útvaru, tvoří útvar podobný původním A_i.

Důkaz. Použijeme indukci na počet útvarů. Základní krok $n = 2$ byl ukázán výše. Předpokládejme, že tvrzení platí pro n, pak naším cílem bude ukázat, že tvrzení také platí pro $n + 1$. Máme $n + 1$ podobných útvarů $A_1, A_2, ..., A_{n+1}$. Vezmeme prvních n z nich a nahradíme je útvarem B vytvořeným zmíněnými těžišti. Podle našeho předpokladu útvar B je podobný útvaru A_{n+1}. Těžiště celého systému se nezmění, pokud nahradíme nějaké body jejich těžištěm, a proto útvar tvořený zmíněnými těžišti u $A_1, A_2, ..., A_n$ je stejný jako u B a A_{n+1}, což je základní krok $n = 2$. □

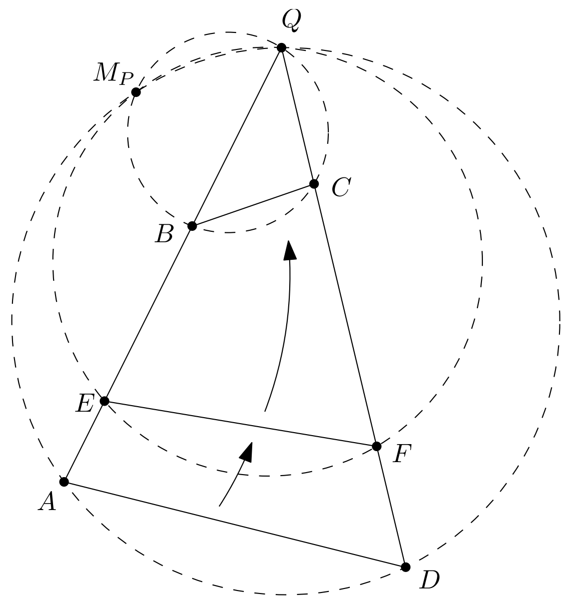
Příklad 2 (Napoleonův bod)**.** V rovině je dán trojúhelník ABC. Nad stranami AB, BC, CD sestrojíme rovnostranné trojúhelníky vně trojúhelníka ABC, pak těžiště těchto trojúhelníků tvoří rovnostranný trojúhelník.



Důkaz. Označme body jako v obrázku a uvažujme tři rovnostranné trojúhelníky BCD, AEC, FAB. Podle Věty 2.9 těžiště trojúhelníků BAF, CEA, DCB tvoří rovnostranný trojúhelník. □

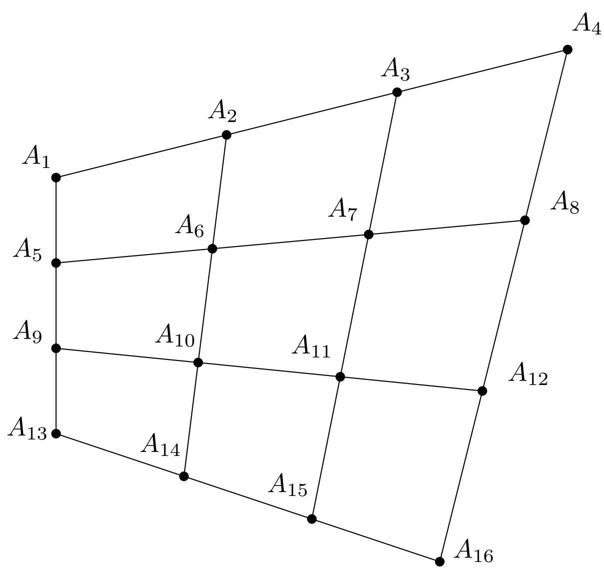
Příklad 3. Je dán čtyřúhelník $ABCD$ a Q je průsečík přímek AB a CD. Body E, F leží postupně na stranách AB, resp. CD tak, aby platilo $|AE|/|EB| = |DF|/|FC|$. Ukažte, že kružnice $(ADQ), (BCQ), (EFQ)$ prochází jedním bodem různým od Q.

Důkaz. Nechť M_P je druhý průsečík kružnic (ADQ) a (BCQ). Naším cílem je dokázat, že M_P také leží na (EFQ). Bod M_P je středem spirální podobnosti převádějící úsečku AD na BC, a proto si můžeme představit tento proces jako klouzání bodů A, D směrem k B, resp. C na úsečce AB, resp. DC. Je zřejmé, že A, D narazí na E, resp. F ve stejnou chvíli díky podmínce $|AE|/|EB| = |DF|/|FC|$, a proto bod M_P je také střed spirální podobnosti převádějící AD na EF, což implikuje, že M_P je druhý průsečík kružnic $(ADQ), (EFQ)$, a důkaz je hotov. □



Mnohdy je dobré využít podobnost dvou objektů a uvažovat spirální podobnost, která převádí tyto objekty na sebe. V následujícím příkladu úsečky, které jsou rozděleny na třetiny, jsou si podobné.

Příklad 4. Na každé straně čtyřúhelníka zvolíme dva body tak, aby rozdělily tu stranu na tři stejné části, a dvojice protilehlých bodů spojíme tak, aby se spojnice nekřížily. Původní čtyřúhelník se tak rozdělí na devět menších čtyřúhelníků. Jaký je poměr obsahu mezi prostředním nově vzniklým čtyřúhelníkem a původním čtyřúhelníkem?



Důkaz. Označme body $A_1, A_2, ..., A_{16}$ podle obrázku. Strany jsou rozdělené na stejné části a u dvou protilehlých stran příslušné body jsou dokonce předem spojeny, což nám napovídá, že je výhodné využít spirální podobnost na tyto dvojice stran a nechat body „klouzat“ na úsečkách. Např. uvažujme „klouzání“ strany A_1A_4 směrem k $A_{13}A_{16}$. V první třetině cesty body A_1, A_4 se zastaví v A_5, resp. A_8 a v druhé třetině v A_9, resp. $A12$. V tomto „klouzání" body A_2, A_3 se pohybují na úsečkách A_2A_14, resp. A_3A_{11} a postupně se zastaví v první třetině v A_6, resp. A_7, v druhé třetině A_{10}, resp. A_{11}. Dvojice bodů A_6, A_7 a A_{10}, A_{11} tedy rozdělují úsečku A_5A_8, resp. A_9A_{12} na třetiny. Analogicky i dvojice bodů A_6, A_{10} a A_7, A_{11} také rozdělují úsečku A_2A_{14}, resp. A_3A_{15} na třetiny.

Úsečky A_2A_{10} a A_5A_7 se navzájem půlí, a proto $A_2A_5A_{10}A_7$ je rovnoběžník, z čehož plyne, že $|A_7A_{10}| = |A_2A_5|$ a $A_7A_10 \parallel A_2A_5$. Dále je zřejmé, že bod A_1 je střed stejnolehlosti s koeficientem 3 zobrazující bod A_2 na A_4 a bod A_5 na A_{13}, a proto platí, že $|A_2A_5| = \frac{1}{3}|A_4A_{13}|$ a $A_2A_5 \parallel A_4A_{13}$. Celkově tedy dostaneme

$$|A_7A_{10}| = \tfrac{1}{3}|A_4A_{13}| \text{ a } A_7A_{10} \parallel A_4A_{13}$$

Analogicky můžeme také dokázat, že

$$|A_6A_{11}| = \tfrac{1}{3}|A_1A_{16}| \text{ a } A_6A_{11} \parallel A_1A_{16}$$

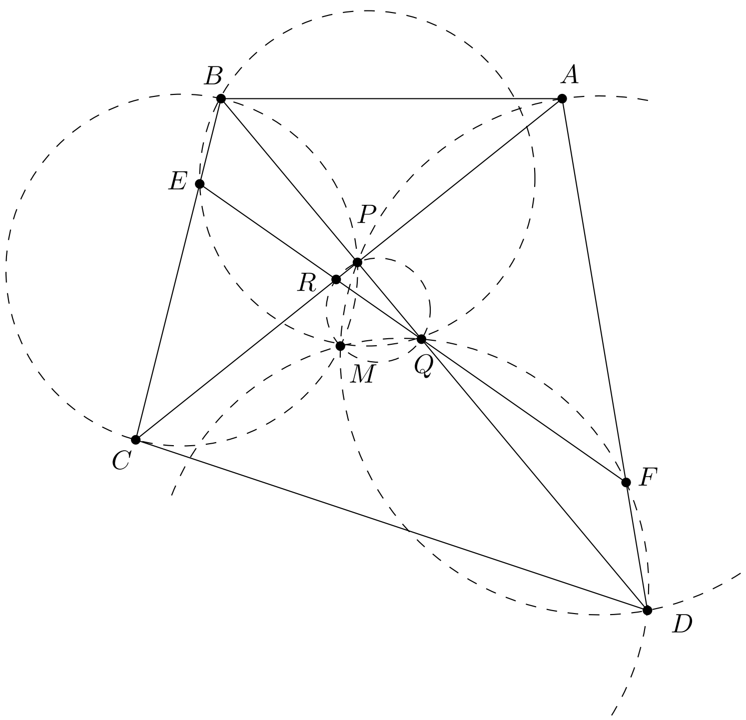
Nechť ϕ je úhel mezi přímkami A_6A_{11} a A_7A_{10}, pak ϕ je také úhel mezi přímkami A_1A_{16} a A_4A_{13}. Obsah čtyřúhelníka $A_1A_4A_{16}A_{13}$ je tedy:

$$\tfrac{1}{2}|A_1A_{16}| \cdot |A_4A_{13}| \sin\phi = \tfrac{9}{2}|A_6A_{11}| \cdot |A_7A_{10}| \sin\phi$$

což je přesně devítinásobek obsahu čtyřúhelníka $A_6A_7A_{11}A_{10}$. □

Příklad 5. Je dán konvexní čtyřúhelník $ABCD$ se stejně dlouhými a různoběžnými stranami BC and AD. Nechť bod E leží uvnitř strany BC a bod F uvnitř strany AD, přičemž $|BE| = |DF|$. Přímky AC a BD se protínají v bodě P, přímky BD a EF v bodě Q, přímky EF a AC v bodě R. Uvažujme všechny trojúhelníky PQR určené měnícími se body E a F. Ukažte, že kružnice opsané těmto trojúhelníkům mají společný bod různý od P.

(IMO 2005)



Důkaz. Tato úloha doslova nabízí spirální podobnost S převádějící stranu BC na stranu DA. Nechť M je středem spirální podobnosti S, pak M leží na kružnicích (ADP) a (BCP). Díky tomu, že $|BC| = |DA|$ a $|BE| = |DF|$, se bod E zobrazí ve spirální podobnosti S na bod D. Spirální podobnost S tedy zobrazí úsečku BE na DF a CE na AF, z čehož vyplývá, že bod M také leží na kružnicích (BEQ) a (CER).

Nyní dokážeme, že bod M je hledaný společný bod kružnic zmíněných v zadání. Stačí k tomu ukázat, že čtyřúhelník $PQMR$ je tětivový neboli $\sphericalangle(MQ, MR) = \sphericalangle(PQ, PR) = \sphericalangle(PB, PC)$. Tuto skutečnost snadno dokážeme s použitím tětivových čtyřúhelníků $BQME$ a $CMRE$.

$$\begin{aligned}\sphericalangle(MQ, MR) &= \sphericalangle(MQ, ME) - \sphericalangle(MP, ME) = \\ &= \sphericalangle(BQ, BE) - \sphericalangle(CP, CE) = \sphericalangle(PB, PC).\end{aligned}$$

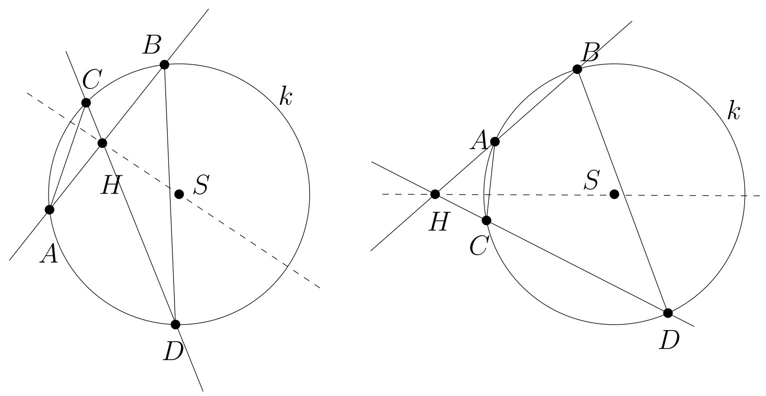
□

3 Mocnost bodu ke kružnici

3.1 Definice

Lemma 3.1. Je dána kružnice k se středem S a poloměrem r a bod H neležící na S. Přímka procházející bodem H protíná kružnici k v bodech A a B a druhá procházející bodem H v bodech C a D. Pak:

$$|HA||HB| = |HC||HD|$$



Důkaz. Musíme vyšetřit dva případy, které záleží na vzájemné poloze bodu P vůči kružnici k (bod P leží uvnitř nebo vně). V obou případech čtyři body A, B, C, D leží na jedné kružnici, a proto dostaneme následující rovnosti úhlů.

$$\sphericalangle(CA, CH) = \sphericalangle(BH, BD),\ \sphericalangle(AH, AC) = \sphericalangle(DB, DH),$$

což implikuje $\triangle HCA \sim \triangle HBD$, a proto:

$$|HC|/|HA| = |HB|/|HD| \text{ neboli } |HA||HB| = |HC||HD|.$$

Hodnota $|HA||HB|$ tedy nezáleží na výběru přímky p.

□

Abychom mohli přesněji rozlišit vzájemnou polohu bodu H vůči kružnici k, je vhodné zavést orientované úsečky. To znamená, že pro kolineární body H, A, B výraz $HA \cdot HB$ získá kladnou hodnotu, pokud HA a HB mají stejný směr neboli H leží mimo kružnici (pravý obrázek) a zápornou hodnotu, pokud HA a HB mají opačný směr neboli H leží uvnitř kružnice (levý obrázek). Volbou přímky spojující H a S můžeme jednoduše vypočítat tuto hodnotu:

$$|HA||HB| = (|HS| - r)(|HS| + r) = |HS|^2 - r^2.$$

Důsledek 3.2. Hodnota $|HS|^2 - r^2$ z předchozího lemmatu je nazývána mocnost bodu ke kružnici. Pro bod H a kružnici k označme ji $P(H, k)$. Ve speciálním případu, kdy H leží vně kružnice k a HC je tečnou, dostaneme:

$$|HA| \cdot |HB| = |HC|^2$$

Důkaz. Velikost úsekového úhlu $\sphericalangle HCA$ se rovná velikosti obvodového úhlu $\sphericalangle HBC$, z čehož plyne, že $\triangle HCA \sim \triangle HBC$. Dostaneme tedy:

$$|HC|/|HB| = |HA|/|HC| \Leftrightarrow |HA| \cdot |HB| = |HC|^2$$

□

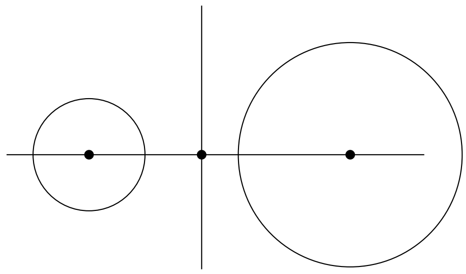
Lemma 3.3. [Opačná implikace k mocnosti bodu] Nechť A, B, C, D jsou čtyři různé body a P je průsečík přímek AB a CD. Předpokládejme, že P buď leží na obou úsečkách AB a CD, nebo P neleží na žádné. Jestliže $|PA||PB| = |PC||PD|$, pak čtyři body A, B, C, D leží na jedné kružnici.

Důkaz. Výraz $|PA||PB| = |PC||PD|$ je ekvivalentní s $|PA|/|PD| = |PC|/|PB|$. V obou konfiguracích popsaných ve znění lemmatu máme, že $\sphericalangle(PA, PD) = \sphericalangle(PB, PC)$, z čehož vyplývá, že $\triangle APD$ a $\triangle CPB$ jsou si podobné. Platí tedy $\sphericalangle(AD, AP) = \sphericalangle(CP, CB) = \sphericalangle(CD, CB)$ a v obou případech to implikuje, že čtyři body A, B, C, D leží na jedné kružnici. □

3.2 Chordála

Definice 3.4. Jsou dány dvě kružnice k_1, k_2. Množina bodů, jejichž mocnosti ke kružnicím k_1, k_2 jsou stejné, se nazývá chordála.

Lemma 3.5. Chordála dvou nesoustředných kružnic je přímka kolmá na spojnici jejich středů.



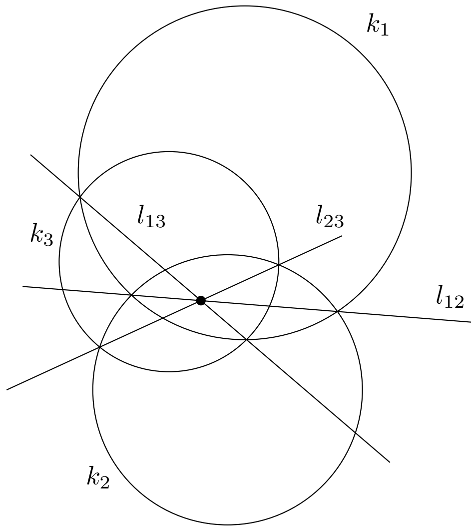
Důkaz. Nechť r_1, r_2 jsou poloměry kružnic a $(a_1, b_1), (a_2, b_2)$ jsou souřadnice středů kružnic, pak bod (x, y) leží na jejich chordále právě tehdy, když:

$$(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 - r_1^2 = (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 - r_2^2$$
$$(2a_1 - 2a_2)x + (2b_1 - 2b_2)y = r_2^2 + a_1^2 + b_1^2 - r_1^2 - a_2^2 - b_2^2,$$

Nesoustřednost kružnic nám zaručuje, že oba koeficienty $2a_1 - 2a_2, 2b_1 - 2b_2$ nejsou současně nulové, a proto jsme dostali rovnici přímky. Navíc pokud bod leží na chordále, pak zřejmě jeho obraz v osové souměrnosti podle spojnice středů kružnic také leží na chordále. Chordála je tedy osově souměrná podle spojnice středů kružnic, a tedy kolmá na tuto přímku. □

Důsledek 3.6. Dvě kružnice v rovině se protínají ve dvou bodech A, B, pak jejich chordála je přímka AB, protože mocnosti bodů A, B k oběma kružnicím jsou nulové.

Lemma 3.7. Jsou dány tři kružnice, žádné dvě nejsou soustředné, pak jejich chordály procházejí jedním bodem nebo jsou navzájem rovnoběžné.

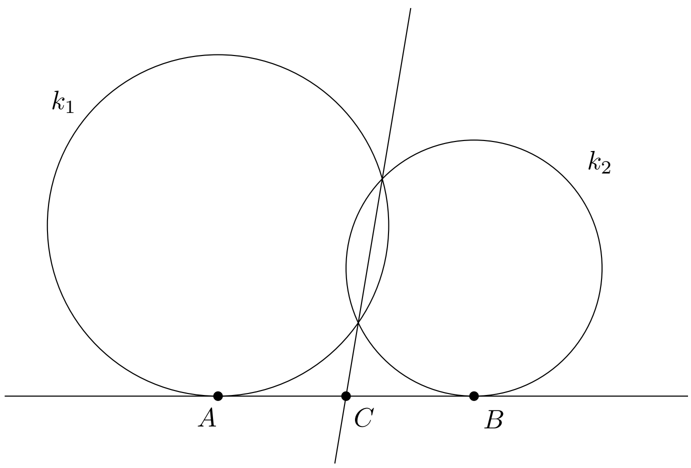


Důkaz. Označíme kružnice k_1, k_2, k_3 a l_{ij} chordálu kružnic k_i a k_j. Předpokládejme, že všechny tři nejsou rovnoběžné, pak BÚNO l_{12} a l_{13} se protínají v X. Bod X leží na l_{12}, a proto má stejnou mocnost ke kružnicím k_1 a k_2. Bod X leží na l_{13}, a proto má stejnou mocnost ke kružnicím k_1 a k_3. Tudíž bod X má stejnou mocnost ke všem kružnicím, a proto musí také ležet na l_{23}. □

3.3 Jak mocnost bodu použít?

Použití důsledku 3.2 je častý způsob, jak použít zadanou tečnu v zadání nebo dokázat, zdali nějaká přímka je tečnou ke kružnici.

Příklad 6. Nechť k_1 a k_2 jsou dvě kružnice, které se protínají ve dvou bodech. Jejich vnější společná tečna se dotýká kružnice k_1 v A a kružnice k_2 v B. Ukažte, že prodloužená společná tětiva kružnic k_1 a k_2 půlí úsečku AB.

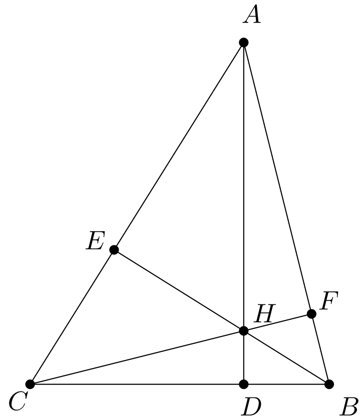


Důkaz. Nechť C je průsečík prodloužené společné tětivy s úsečkou AB. Prodloužená tětiva je chordála dvou kružnic k_1, k_2, a proto $p(C, k_1) = p(C, k_2)$. Pomocí důsledku 3.2 dostaneme tedy $|CA|^2 = |CB|^2 \Rightarrow |CA| = |CB|$. □

Tvrzení 3.1 a 3.3 nám pomáhají použít tětivové čtyřúhelníky v zadání nebo dokázat, zdali nějaký čtyřúhelník je tětivový. Tento přístup je výhodný v konfiguracích, kde musíme pracovat s délkami úseček.

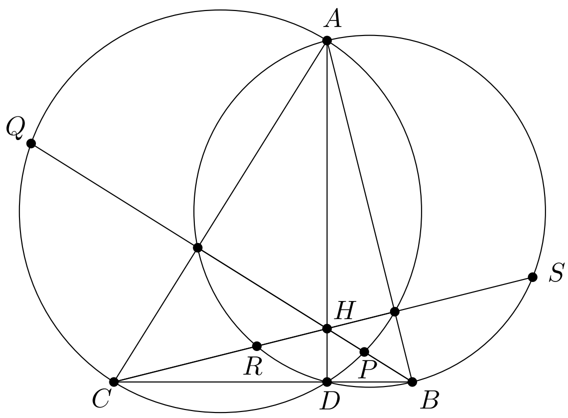
Příklad 7. V trojúhelníku ABC jsou D, E, F paty kolmic z ortocentra H na strany BC, CA, resp. AB, pak:

$$|HA||HD| = |HB||HE| = |HC||HF|.$$



Důkaz. Platí, že $\sphericalangle(FC, FB) = 90° = \sphericalangle(EC, EB)$, a proto E, F leží na kružnici s průměrem BC. Mocnost bodu H k této kružnici je $|HB||HE|$ a $|HC||HF|$. Díky Lemmatu 3.1 tyto hodnoty musí být stejné tedy $|HB||HE| = |HC||HF|$. Analogicky můžeme dokázat, že $|HB||HE| = |HA||HD|$. □

Příklad 8. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC a H je jeho ortocentrum. Přímka BH protíná kružnici nad průměrem AC ve dvou bodech P a Q. Přímka CH protíná kružnici nad průměrem AB ve dvou bodech R a S. Dokažte, že 4 body P, Q, R, S leží na jedné kružnici.

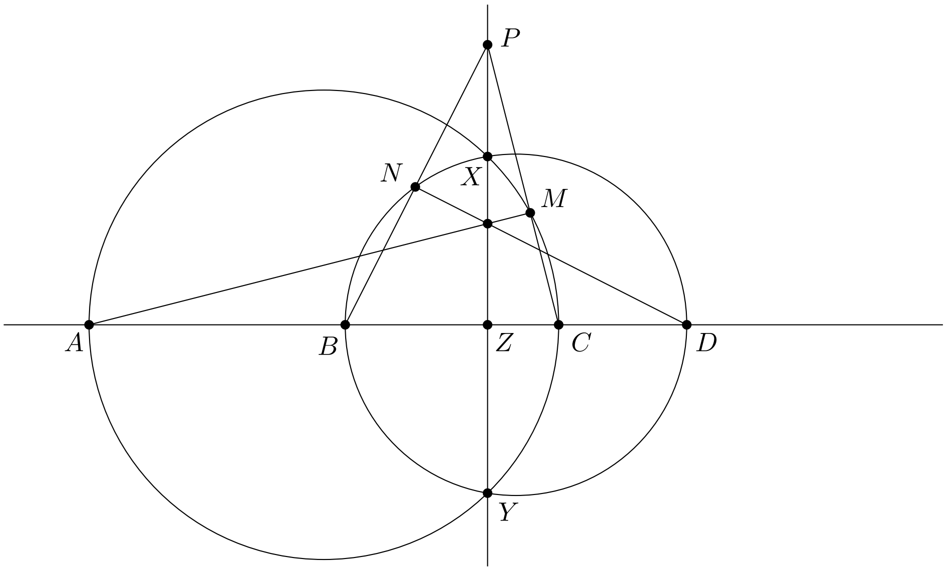


Důkaz. Nechť D je pata výšky z vrcholu A na stranu BC. Je zřejmé, že bod H leží na přímce AD. Uvažujeme-li mocnost bodu H ke kružnici nad průměrem AC, dostaneme $|HP||HQ| = |HA||HD|$. Obdobně můžeme také ukázat, že $|HR||HS| = |HA||HD|$, z čehož plyne, že $|HR||HS| = |HP||HQ|$, a proto čtyři body P, Q, R, S leží na jedné kružnici. □

Poznámka. Chceme-li dokázat, že tři přímky procházejí jedním bodem, můžeme použít tvrzení 3.7 o chordálách. Jeho použití spočívá v nalezení tří kružnic, pro něž každá přímka reprezentuje chordálu jedné dvojice kružnic.

Příklad 9. Na přímce jsou v pořadí 4 body A, B, C, D. Kružnice nad průměry AC, BD se protínají v X a Y. Bod Z je průsečík přímek XY a BC. Nechť P je bod na přímce XY, který je různý od Z. Přímka CP protíná kružnici nad průměrem AC v bodech C a M. Přímka BP protíná kružnici nad průměrem BD v bodech B a N. Dokažte, že přímky AM, DN, XY procházejí jedním bodem.

(ISL 1995)



Důkaz. Přímka XY je chordálou kružnic nad průměry AC a BD a bod P na ní leží, a proto mocnosti bodu P k těmto kružnicím jsou stejné. Dostaneme tedy $|PN||PB| = |PM||PC|$, a proto podle 3.3 čtyřúhelník $MNBC$ je tětivový. Dále platí, že:

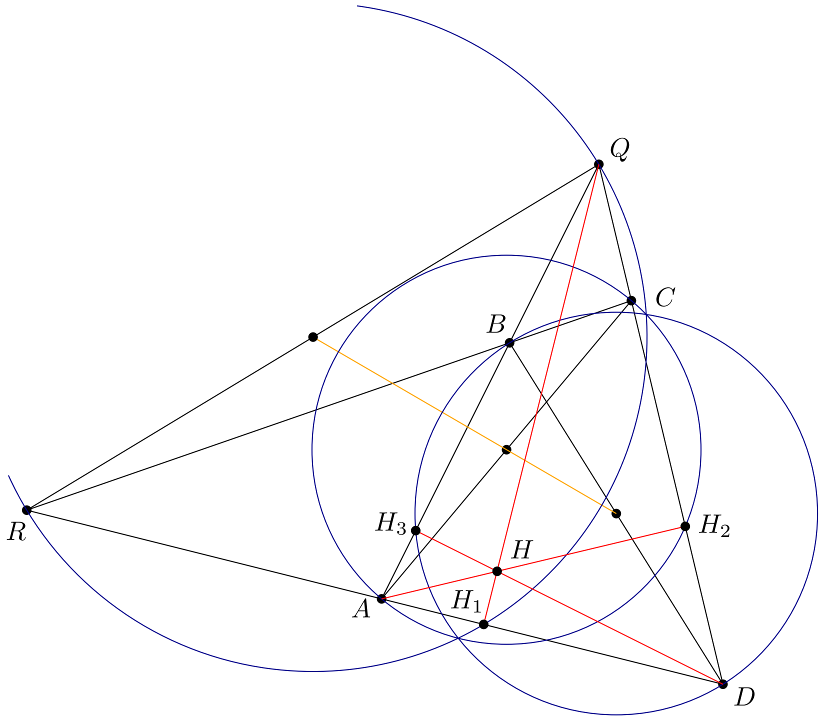
$$\sphericalangle(DA, DM) = 90^\circ - \sphericalangle(CM, CA) = 90^\circ - \sphericalangle(NM, NB) = \sphericalangle(ND, NM)$$

Z toho vyplývá, že čtyřúhelník $MNAD$ je tětivový. Nyní si uvědomíme, že přímka XY je chordálou kružnic nad průměry AC a BD, přímka DN je chordálou kružnice nad průměrem BD a kružnice $(MNAD)$, přímka AM je chordálou kružnice nad průměrem AC a kružnice $(MNAD)$. Tyto tři přímky musí procházet jedním bodem podle 3.7. □

Tvrzení 3.8. [Newton-Gaussova přímka] Středy úseček BD, AC, QR leží na jedné přímce (viz [6]).

Důkaz. Nechť k_1, k_2, k_3 jsou kružnice s průměry AC, BD, resp. QR a H je ortocentrum trojúhelníka QAD. H_1, H_2, H_3 jsou paty kolmic z H na strany AB, BQ, resp. QA. Je zřejmé, že $H_1 \in k_1, H_2 \in k_2, H_3 \in k_3$ a díky Příkladu 7 dostaneme:

$$|HH_1||HA| = |HH_2||HB| = |HH_3||HC|$$



Bod H má tedy stejnou mocnost ke všem třem kružnicím k_1, k_2, k_3. Stejný výsledek platí i pro ortocentrum H' trojúhelníka QBC. Každá dvojice ze tří kružnic k_1, k_2, k_3 má chordálu HH', a proto jejich středy leží na téže přímce kolmé na HH'.

□

Poznámka. Analogicky platí, že i následující trojice bodů jsou také kolineární: středy úseček AB, CD, PR a středy úseček AD, BC, PQ. K zapamatování, středy kterých úseček leží na jedné přímce, stačí si vzít jednu stranu trojúhelníka PQR, např. QR, a všimnout si, že třetí bod je průsečík přímek BD a AC, a proto jedna trojice se skládá z AC, BD, QR.

4 Inverze

4.1 Definice a vlastnosti

Definice 4.1. Rovinu rozšíříme o nevlastní bod nekonečno ∞, kterým prochází všechny přímky.

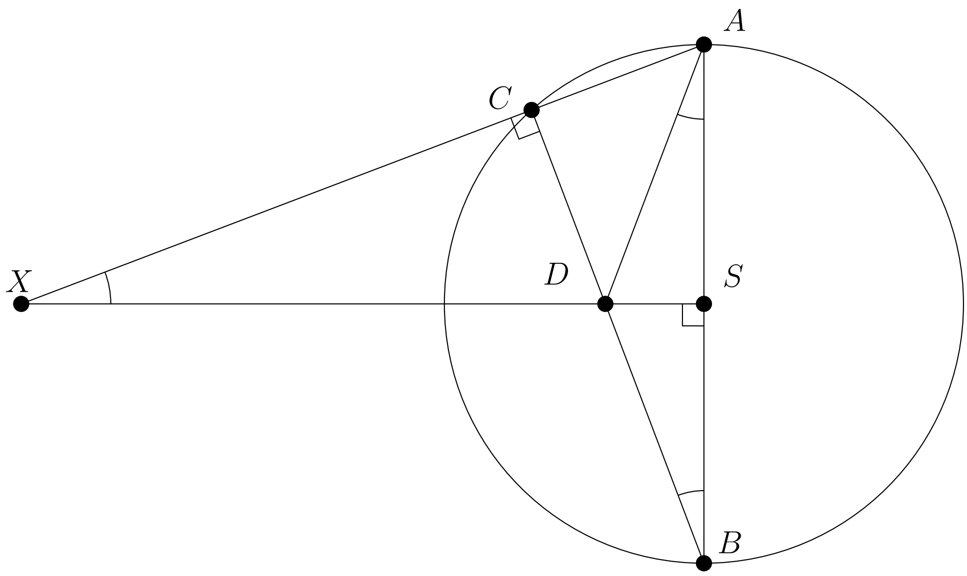
Definice 4.2. Inverze je geometrické zobrazení definované kružnicí k se středem S a poloměrem r (označme ji (S, r) nebo inverze podle k), které posílá bod A do A' podle následujících pravidel:

(i) pokud $A = S$, pak $A' = \infty$.

(ii) pokud $A = \infty$, pak $A' = S$.

(iii) jinak A' je bod na polopřímce SA, pro který platí $|SA||SA'| = r^2$

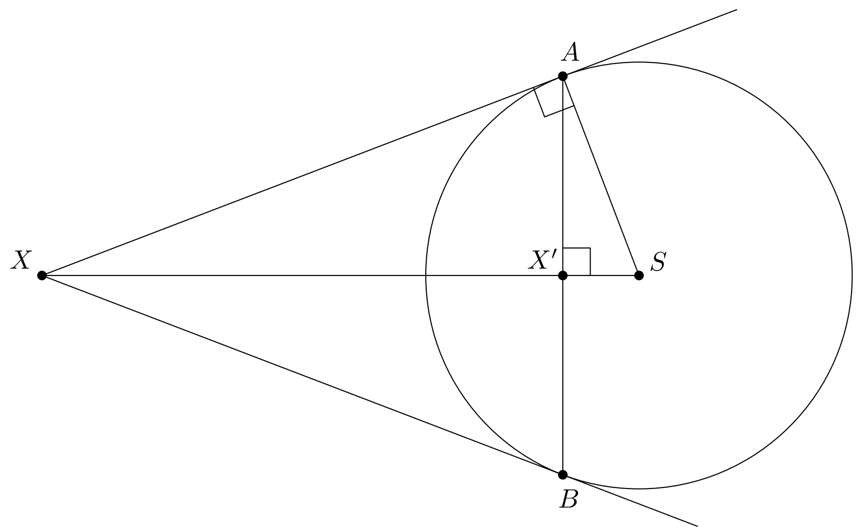
Lemma 4.3 (Geometrická konstrukce)**.** Je dána kružnice k se středem S. Abychom zkonstruovali obraz bodu X v inverzi podle kružnice k, nejprve nakreslíme průměr AB v kružnici k, který je kolmý na XS. Bod C je druhý průsečík přímek AX a kružnice k. Bod D, průsečík přímek BC a SX, je obraz bodu X.



Důkaz. V trojúhelníku ABD výška a těžnice z vrcholu D splývají, a proto trojúhelník ABD je rovnoramenný se základnou AB. Čtyřúhelník $XCSB$ je tětivový, protože $\sphericalangle(CX, CB) = 90° = \sphericalangle(SX, SB)$, a proto $\sphericalangle(XD, XC) = \sphericalangle(BS, BD) = \sphericalangle(AD, AS)$. Tato rovnost úhlů implikuje podobnost dvou trojúhelníků $\triangle SAX$ a $\triangle SX'A$, z čehož plyne, že $|SX'|/|SA| = |SA|/|SX| \Rightarrow |SX||SX'| = |SA|^2$.

Důkaz pořád funguje, pokud bod X leží uvnitř kružnice k. Stačí nahradit bod X bodem X' a naopak v obrázku a důkazu. $\square$

Tvrzení 4.4. Je dána kružnice k se středem S a bod X leží vně kružnice k. Tečny bodu X ke kružnici k se této kružnice dotýkají v bodech A, B. Platí, že průsečík dvou úseček AB a SX je obraz bodu X v inverzi podle k.



Důkaz. Nechť X' je průsečík úseček AB a SX. Body A, B jsou zřejmě symetrické podle přímky SX, a proto $AB \perp SX$. Spolu se skutečností, že $\sphericalangle(AX, AS) = 90°$, můžeme prohlásit, že $\triangle XAS \sim \triangle AX'S$. Dostaneme tedy vztah:

$$|SA|/|SX| = |SX'|/|SA| \Rightarrow |SX||SX'| = |SA|^2$$

Bod X' je opravdu obrazem bodu X v inverzi podle kružnice k.

□

Tvrzení 4.5 (Základní vlastnosti)**.** Následující tvrzení platí pro inverzi (S, r):

(i) Kruhová inverze je prosté zobrazení.

(ii) Dvojnásobné použití (S, r) vede k identitě.

(iii) Bod je samodružný (zobrazí se na sebe) právě tehdy, když leží na kružnici k.

(iv) Bod uvnitř k je zobrazen na bod vně k a naopak.

Lemma 4.6. Obrazy bodů X, Y v inverzi (S, r) jsou X', resp. Y', pak:

(i) $|\sphericalangle SXY| = |\sphericalangle SY'X'|$ a X, Y, X', Y' leží na jedné kružnici

(ii) $|X'Y'| = |XY|\dfrac{r^2}{|SX||SY|}$

Důkaz. (i) $|SX||SX'| = r^2 = |SY||SY'|$, a proto podle Lemmatu 3.3 to implikuje skutečnost, že X, X', Y, Y' leží na jedné kružnici. Nyní máme dva případy podle vzájemné polohy bodů X, X', Y, Y'

(ii) Podle části (i) platí následující vztahy

$$\sphericalangle(XY, XS) = \sphericalangle(Y'S, Y'X') \text{ a } \sphericalangle(YS, YX) = \sphericalangle(X'Y', X'S)$$

z čehož plyne podobnost trojúhelníků SXY a $SX'Y'$, a proto:

$$|XY| = |X'Y'|\frac{|SX|}{|SY'|} \Rightarrow |X'Y'| = |XY|\frac{r^2}{|SX||SY|}$$

□

Věta 4.7. Doteď jsme jenom ukázali, jak inverze funguje na jeden bod. Nyní budeme prozkoumat, jak se v tomto zobrazení budou chovat přímky a kružnice. Uvažujme inverzi (S, r):

(i) pokud S leží na kružnici c se středem O, pak obraz kružnice c je přímka kolmá na OS.

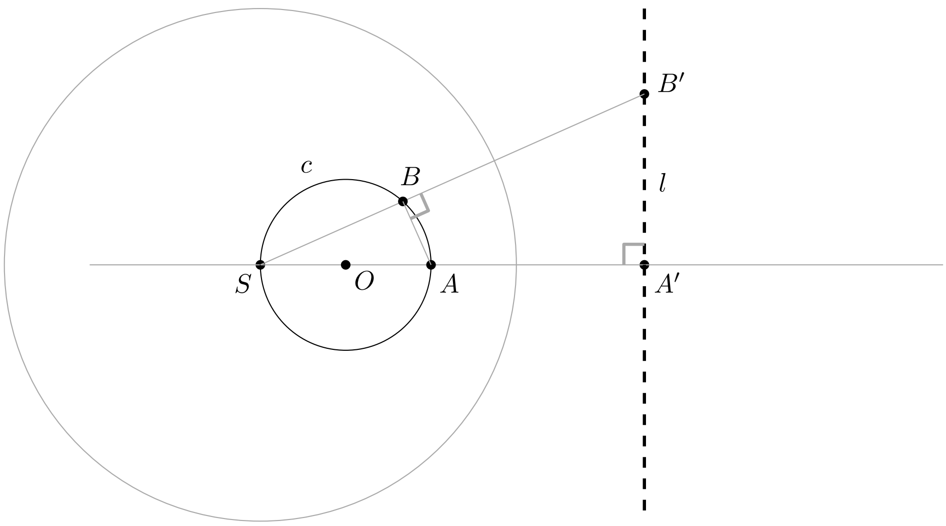
(ii) pokud l je přímka, která neprochází bodem S, pak obraz přímky l je kružnice, pro kterou platí, že l je kolmá na spojnici bodu S se středem té kružnici.

(iii) pokud c je kružnice neprocházející bodem S, pak obraz kružnice c je kružnice se středem ležícím na spojnici bodu S a středu kružnice c.

(iv) pokud l je přímka procházející bodem S, pak obraz přímky l je tatáž přímka.

Důkaz. (i) Nechť SA je průměr kružnice c a bod A' je obrazem bodu A v kruhové inverzi (S, r). Dále označme l přímku procházející bodem A a kolmou na SA. Dokážeme, že l je obraz kružnice c.

Bod S se zobrazí na ∞, která podle definice leží na l. Mějme libovolný bod

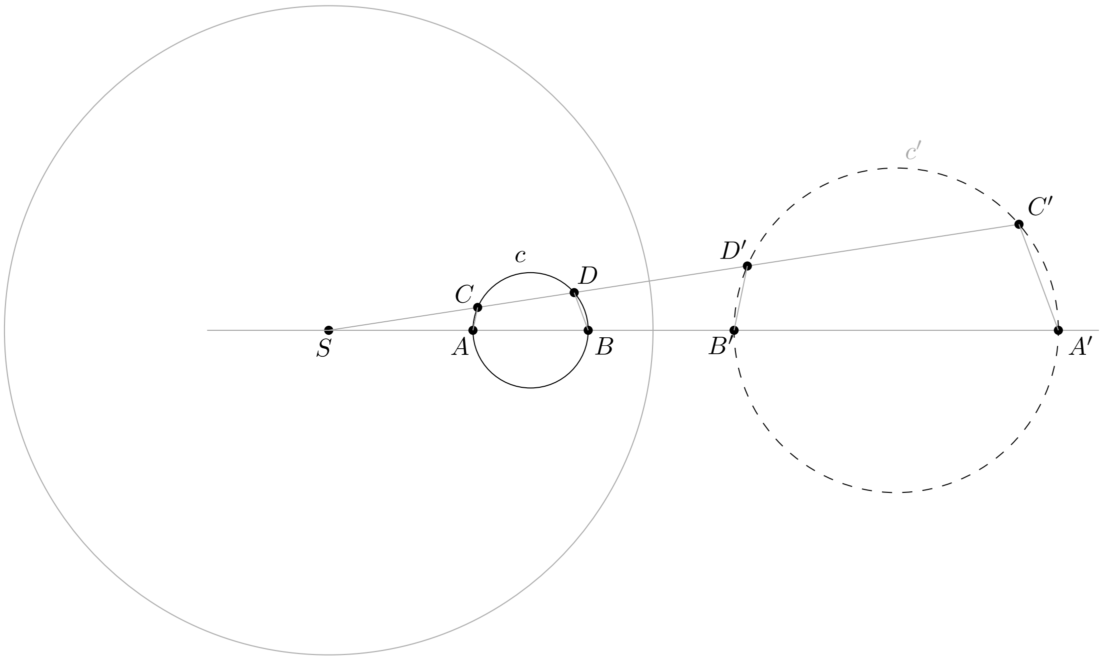


B na kružnici c a B' je průsečíkem přímek l a SB. SA je průměr kružnice c, a proto $\sphericalangle(BA, BB') = 90° = \sphericalangle(A'A, A'B')$, tzn. čtyřúhelník $AA'B'B$ je tětivový (jeho kružnice opsaná je Thaletova kružnice nad průměrem AB'). Podle Lemmatu 3.1 platí $r^2 = |SA||SA'| = |SB||SB'|$, a proto B' je obrazem bodu B v kruhové inverzi (S, r). Nyní zbývá ještě dokázat, že kružnice c se zobrazí na celou přímku l. Pro každý bod C' na přímce l stačí brát C jako druhý průsečík přímky SC' a kružnice c a výše uvedeným způsobem snadno dokážeme, že C' je skutečně obrazem bodu C v kruhové inverzi (S, r).

(ii) Můžeme použít obrázek z části (i) a důkaz je také velmi podobný. Bod A' leží na přímce l tak, že $SA' \perp l$ a bod A je obrazem bodu A' v kruhové inverzi (S, r). Dokážeme, že kružnice c nad průměrem SA je obraz přímky l. Pro každý bod B' na přímce l najdeme bod B, který je průsečíkem přímky SB' a kružnice c $(B \neq S)$). Díky tomu, že $\sphericalangle(BA, BB') = 90° = \sphericalangle(A'A, A'B')$, platí, že čtyřúhelník $AB'BA'$ je tětivový, a proto podle Lemmatu 3.1 platí, že $r^2 = |SA||SA'| = |SB||SB'|$, a proto B je obrazem bodu B' v kruhové inverzi (S, r). Nyní zbývá ještě dokázat, že přímka l se zobrazí na celou kružnici c. Pro každý bod C na kružnici c stačí vzít C' jako průsečík přímky SC a přímky l a výše uvedeným způsobem snadno dokážeme, že C je skutečně obrazem bodu C' v kruhové inverzi (S, r).

(iii) Nechť A, B jsou takové body na kružnici c, že S leží na přímce AB, úsečka AB je průměr kružnice c a A', B' jsou postupně jejich obrazy v kruhové inverzi (S, r). Dokážeme, že obraz kružnice c je Thaletova kružnice c' nad průměrem $A'B'$.

Podle vlastnosti kruhové inverze platí:



$$|SA||SA'| = |SB||SB'| \Rightarrow |SA|/|SB'| = |SB|/|SA'|$$

Tzn. existuje stejnolehlost Z se středem S a koeficientem $|SB'|/|SA|$, která posílá A, B postupně na B', resp. A', z čehož vyplývá, že také posílá kružnici nad průměrem AB neboli c na kružnici nad průměrem $A'B'$, tedy kružnici c'. Pro libovolný bod C na kružnici c označme D druhý průsečík přímky SC s kružnicí C. Stejnolehlost Z posílá body C, D na průsečíky přímky SC s kružnicí c'. Nechť D', C' jsou postupně obrazy bodů C, D ve stejnolehlosti Z. Podle vlastnosti stejnolehlosti platí, že $CA \parallel D'B'$, a proto:

$$\sphericalangle(AB, AC) = \sphericalangle(B'A', B'D') = \sphericalangle(C'A', C'D') = \sphericalangle(C'A', C'C)$$

Z toho vyplývá, že $CAA'C'$ je tětivový čtyřúhelník, a proto podle Lemmatu 3.1 platí: $|SC||SC'| = |SA||SA'| = r^2$. Obraz bodu C v kruhové inverzi (S, r) je tedy C', bod kružnice c'. Analogicky můžeme také dokázat, že čtyřúhelník $DBB'D'$ je tětivový čtyřúhelník, a z toho obraz bodu D v kruhové inverzi (S, r) je D'.

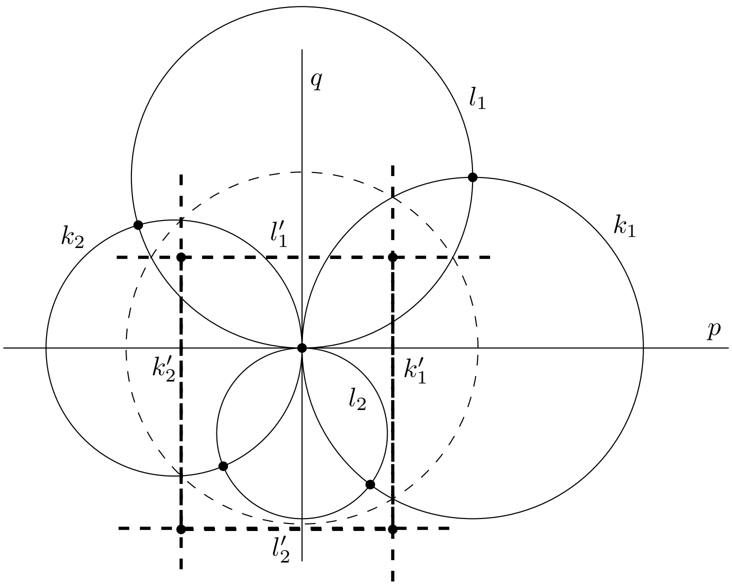
(iv) Nechť A je libovolný bod přímky l, pak je zřejmé, že obraz bodu A leží na přímce l. Zbývá nám ještě dokázat, že přímka l se zobrazí na celou přímku l neboli pro každý bod B' existuje bod B takový, že B' je obraz bodu B. Stačí si vzít B jako obraz bodu B' a víme, že dvojité použití kruhové inverze je identita, a proto B' je obrazem bodu B.

$\square$

4.2 Jak inverzi použít

Kruhová inverze se uplatňuje v olympiádní geometrii. Po kruhové inverzi budeme místo zadané úlohy řešit jiné ekvivalentní tvrzení v novém jiném obrázku. Mnohdy se stane, že tvrzení, které musíme dokazovat v novém obrázku, je podstatně snazší než odpovídající tvrzení v původním obrázku. Užitečný atribut kruhové inverze je možnost převedení kružnic na přímky, se kterými se lépe pracuje, a tím se konfigurace zjednoduší. Většinou se provede kruhová inverze podle „přetíženého“ bodu, kterým prochází nejvíc kružnic a přímek.

Příklad 10. Kolmé přímky p, q se protínají v bodě S. Kružnice k_1, k_2 se středy na přímce p, které mají vnější dotyk v S, protínají kružnice l_1, l_2 se středy na přímce q mající rovněž vnější dotyk v S podruhé ve čtyřech různých bodech. Ukažte, že tyto čtyři body leží na jedné kružnici.



Důkaz. Zinvertujme celý obrázek podle kružnice i se středem S a libovolným poloměrem. Tvrzení bude dokázáno, pokud se nám podaří ukázat, že obrazy zmíněných čtyř průsečíků leží na kružnici neprocházející bodem S, protože původní čtyři druhé průsečíky budou muset ležet na obrazu této kružnice v inverzi podle i, což je (jak již víme) rovněž kružnice.

Přímky p, q se v inverzi podle i zobrazí samy na sebe. Kružnice k_1, k_2 procházejí středem inverze, takže se zobrazí na nějaké přímky k'_1, k'_2.

Jelikož mají k_1 a k_2 jediný společný bod (totiž S), musí mít jejich obrazy také jediný společný bod, a to obraz bodu S, tj. nevlastní bod ∞. Přímky k'_1 a k'_2 tedy budou rovnoběžné. Navíc ze symetrie obě budou kolmé na p.

Obdobně se kružnice l_1, l_2 zobrazí na přímky l'_1, l'_2 kolmé na q. Obrazy zmíněných čtyř druhých průsečíků jsou proto vrcholy obdélníka.

Jelikož vrcholy obdélníka leží na jedné kružnici a tato kružnice neprochází bodem S, leží na kružnici i obrazy těchto vrcholů v inverzi podle i, což jsou přesně původní čtyři průsečíky. □

Poznámka. V úlohách, které překypují kružnicemi, volíme za střed inverze bod, jímž prochází hodně kružnic či přímek (tzv. „přetížený bod“). Po inverzi pak dostaneme podstatně jednodušší obrázek, v němž již bývá snadné ekvivalent dokazovaného tvrzení dokázat. Na poloměru inverzní kružnice přitom zpravidla vůbec nezáleží.

Příklad 11. Kružnice k_1 a k_3, stejně jako k_2 a k_4, mají vnější dotyk v P. Označme druhé průsečíky $k_1 \cap k_2 = A$, $k_2 \cap k_3 = B$, $k_3 \cap k_4 = C$ a $k_4 \cap k_1 = D$. Dokažte, že:

$$\frac{|AB||BC|}{|AD||DC|} = \frac{|PB|^2}{|PD|^2}$$

(ISL 2003)

Důkaz. Zinvertujeme celý obrázek podle kružnice i se středem P a libovolným poloměrem r. Všechny čtyři kružnice k_1, k_2, k_3, k_4 procházejí bodem P, a proto se zobrazí na přímky k_1', resp. k_2', k_3', k_4'.

Jelikož mají k_1 a k_3 jediný společný bod (totiž P), musí mít jejich obrazy také jediný společný bod, a to obraz bodu P, tj. nevlastní bod ∞. Přímky k_1' a k_3' tedy budou rovnoběžné. Obdobně se kružnice k_2, k_4 zobrazí na rovnoběžné přímky k_2', k_4'.

Bod A je průsečíkem kružnic k_1, k_2, a proto jeho obraz, bod A', bude průsečíkem přímek k_1' a k_2'. Analogicky dostaneme, že $k_2' \cap k_3' = B'$, $k_3' \cap k_4' = C'$ a $k_4' \cap k_1' = D'$. Čtyřúhelník $A'B'C'D'$ je tedy rovnoběžník, a proto platí $|A'B'| = |C'D'|$ a $|B'C'| = |D'A|$.

Nyní do nového obrázku převedeme vztah, který chceme dokázat. Na to použijeme Lemma 4.6:

$$\frac{|AB||BC|}{|AD||DC|} = \frac{|A'B'|\frac{r^2}{|PA'||PB'|}|B'C'|\frac{r^2}{|PB'||PC'|}}{|A'D'|\frac{r^2}{|PA'||PD'|}|D'C'|\frac{r^2}{|PD'||PC'|}} = \frac{|PD'|^2}{|PB'|^2}$$

$$\frac{|PB|^2}{|PD|^2} = \frac{r^4/|PB'|^2}{r^4/|PD'|^2} = \frac{|PD'|^2}{|PB'|^2}$$

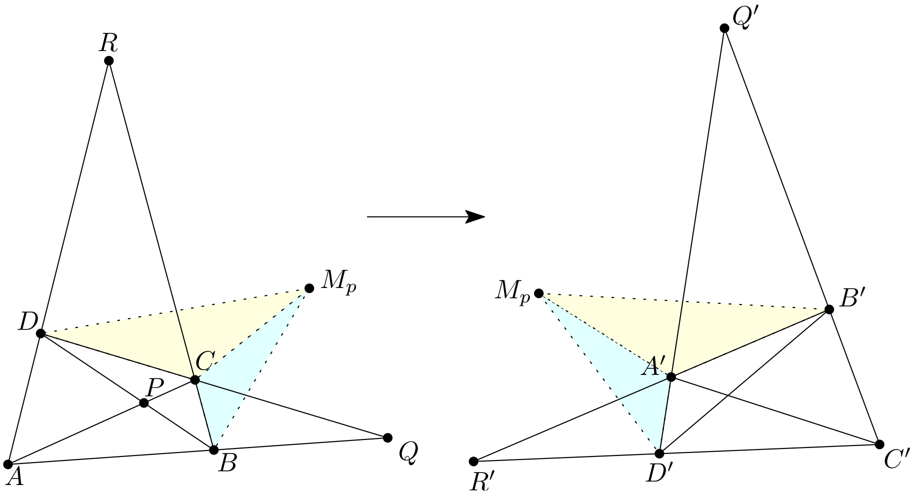
což zřejmě platí a důkaz je hotov. □

4.3 Kruhová inverze a Miquelovy body

Tvrzení 4.8. Pokud $A'B'C'D'$ je obrazem $ABCD$ v kruhové inverzi podle kružnice se středem M_p (M_q, M_r, resp.), pak je $ABCD$ nepřímo podobný $C'D'A'B'$ ($B'A'D'C'$, resp. $D'C'B'A'$).

Důkaz. Z definice Miquelova bodu a inverze dostaneme $\triangle M_pBC \sim \triangle M_pAD \sim \triangle M_pD'A'$, kde první podobnost je přímá a druhá je nepřímá . Analogicky platí také $\triangle M_pDC \sim \triangle M_pAB \sim \triangle M_pB'A'$, což implikuje nepřímou podobnost čtyřúhelníků M_pDCB a $M_pB'A'D'$, z čehož plyne nepřímá podobnost $\triangle DCB$ and $\triangle B'A'D'$. Ve stejném duchu zjistíme, že $\triangle ABD \sim \triangle C'D'B'$ (nepřímo), a dostaneme kýženou podobnost čtyřúhelníků. Důkaz je pro M_q a M_r analogický. □

Lze vidět, že Miquelovy body se dají dobře kombinovat s kruhovou inverzí, protože zachovávají tvar čtyřúhelníka. Nyní se podíváme na to, jak se zobrazí některé další body čtyřúhelníka.



(i) Bod R: kružnice $(ABR), (CDR), (BCQ), (ADQ)$, jež procházejí bodem M_P, se zobrazí postupně na přímky $A'B', C'D'$, a proto bod R' bude průsečíkem přímek $A'B'$ a $C'D'$. Analogicky můžeme ukázat, že Q je průsečík přímek $B'C'$ a $A'D'$.

(ii) Bod M_P: trojice kolineárních bodů $(C, B, R), (A, D, R)$ se zobrazí na kružnice $(B'C'R'M_P), (A'D'R'M_P)$, což znamená, že P-Miquelův bod čtyřúhelníka $ABCD$ zůstane P'-Miquelovým bodem i v čtyřúhelníku $A'B'C'D'$.

(iii) Bod M_R: tento bod leží na kružnicích $(BDQ), (ACQ)$, které neobsahují bod M_P, a proto po inverzi M_R zůstane průsečíkem kružnic $(B'D'Q'), (A'C'Q')$. Obdobně můžeme také ukázat, že M_Q je průsečíkem kružnic $(A'C'R'), (R'B'D')$.

5 Hlavní úloha

V této části budeme zkoumat Euler-Ponceletův bod, průsečík Fuerbachových kružnic trojúhelníků ABC, BCD, CDA, DAB. Euler-Ponceletův bod leží zároveň na „pedální kružnici“ (volně přeloženo z anglického termínu „pedal circle“ [7]) bodu A vzhledem k trojúhelníku BCD, „pedální kružnici“ bodu B vzhledem k trojúhelníku ACD, apod. Více o Eulerově-Ponceletově bodu můžete nalézt zde [8].

Definice 5.1. Fuerbachova kružnice trojúhelníka ABC je kružnice opsaná středům stran.

Tvrzení 5.2. Je dán čtyřúhelník $ABCD$ s různoběžnými stranami. Body P, Q, R jsou průsečíky dvojic přímek (AC, BD), (AB, CD), resp. (AD, BC). Euler-Ponceletův bod leží na (PQR).

Tvrzení 5.3. Věta 5.2 je silným zobecněním oslavovaného výsledku od Emelyanova a Emelanovové (viz [9]).

Tvrzení 5.4 (Emelyanov, Emelyanova)**.** Bod I je střed kružnice vepsané trojúhelníka ABC. Nechť $AI \cap BC = P$, $BI \cap CA = Q$, $CI \cap AB = R$, pak Fuerbachův bod F_e (bod dotyku kružnice vepsané a Fuerbachovy kružnice, viz [10]) leží na (PQR).

Důkaz. Pokud uvažujeme kompletní čtyřúhelník $ABCI$ (viz [11]), pak Eulerův-Ponceletův bod leží na kružnici vepsané (pedální kružnici bodu I ku $\triangle ABC$) a Fuerbachově kružnici trojúhelníka ABC, a proto tento bod splývá s jejich bodem dotyku neboli Fuerbachovým bodem. Z Tvrzení 5.2 plyne kýžený výsledek. □

Než se pustíme do důkazu Věty 5.2, zavedeme označení a prostředky, které budeme v této sekci používat.

(i) E, F, G, H, I, J jsou středy úseček CD, AB, AD, BC, AC, BD resp.

(ii) U, V, W jsou středy úseček QR, PR, PQ resp.

(iii) Miquelův bod M_P leží podle Věty 2.7 na kružnicích $(ABR), (CDR), (ADQ)$, (BCQ) a podle Příkladu 3 na kružnicích $(HGR), (EFQ)$

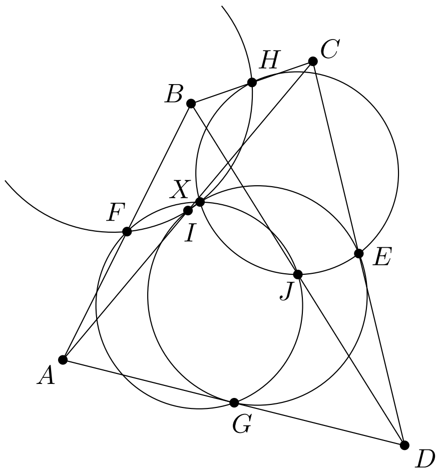
(iv) Miquelův bod M_Q leží podle Věty 2.7 na kružnicích $(ADP), (BCP), (BDR)$, (ACR) a podle Příkladu 3 na kružnicích $(HGR), (IJP)$

(v) Miquelův bod M_R leží podle Věty 2.7 na kružnicích $(ABP), (CDP), (ACQ)$, (BDQ) a podle Příkladu 3 na kružnicích $(IJP), (EFQ)$

Lemma 5.5. Je dán trojúhelník ABC. A', B', C' jsou středy stran BC, CA, AB, pak $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Důkaz. Střední příčka je rovnoběžná s odpovídající stranou, a proto $A'B'||AB$ a $A'C'||AC$. Čtyřúhelník $AB'A'C'$ je tedy rovnoběžník, a proto $\sphericalangle(AB, AC) = \sphericalangle(A'B', A'C')$. Analogicky můžeme dokázat rovnost dalších úhlů a snadno dojdeme ke kýženému výsledku. □

Tvrzení 5.6. Fuerbachovy kružnice trojúhelníků ABD, ABC, BCD, ACD mají společný bod. Označme ho X.



Důkaz. Definujme X průsečík kružnic (IFH) a (GJF). Naším cílem, je dokázat, že X také leží na (JEH) a (IEG).

Abychom dokázali, že X leží na (JEH), stačí ukázat, že $\sphericalangle(XH, XJ) = \sphericalangle(EH, EJ)$ nebo ekvivalentně $\sphericalangle(XH, XJ) = \sphericalangle(BJ, BH)$ podle Lemmatu 5.5. Navíc $FIXH$ a $GJXF$ jsou tětivové, a proto:

$$\sphericalangle(XH, XF) = \sphericalangle(IH, IF) = \sphericalangle(BF, BH)$$
$$\sphericalangle(XF, XJ) = \sphericalangle(GF, GJ) = \sphericalangle(BJ, BF)$$

Použitím dvou výše uvedených vztahů můžeme snadno vypočítat:

$$\begin{aligned}\sphericalangle(XH, XJ) &= \sphericalangle(XH, XF) + \sphericalangle(XF, XJ)\\ &= \sphericalangle(BF, BH) + \sphericalangle(BJ, BF)\\ &= \sphericalangle(BJ, BH)\end{aligned}$$

Analogicky můžeme také ukázat, že X leží na (IEG) □

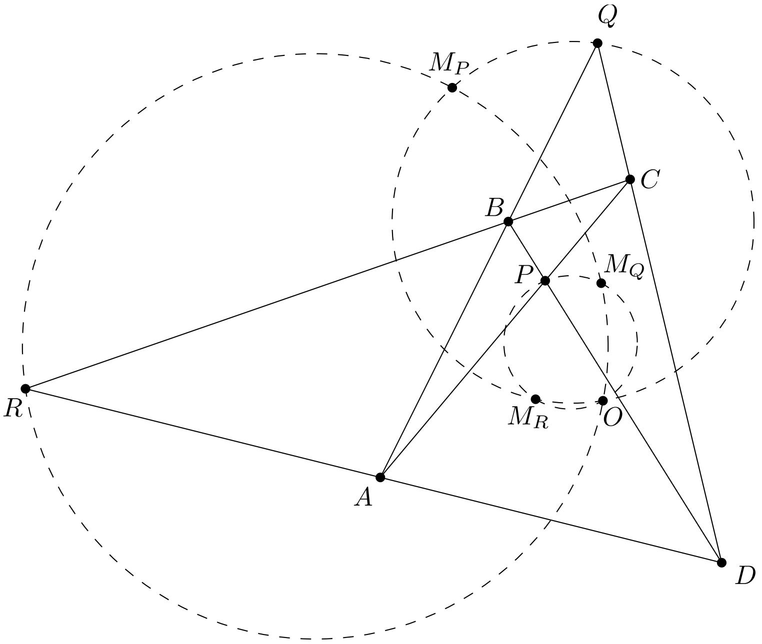
Tvrzení 5.7. $(PM_QM_R), (QM_PM_R), (RM_PM_Q)$ procházejí jedním bodem.

Důkaz. Nejprve nechť O je průsečík kružnic (QM_PM_R) a (RM_PM_Q). Naším cílem je dokázat, že O také leží na (PM_QM_R). Stačí dokázat, že $\sphericalangle(PM_R, PM_Q) = \sphericalangle(OM_R, OM_Q)$. Budeme pracovat s kružnicemi obsahujícími M_P, M_Q, M_R. Víme také, že M_R leží na (ACQ) a M_P leží na (ADQ):

$$\begin{aligned}\sphericalangle(OM_P, OM_R) &= \sphericalangle(QM_P, QM_R) = \sphericalangle(QM_P, QA) + \sphericalangle(QA, QM_R) =\\ &= \sphericalangle(DM_P, DA) + \sphericalangle(CA, CM_R)\end{aligned}$$

Platí také, že M_Q leží na (BDR) a M_P leží na (BCR):

$$\begin{aligned}\sphericalangle(OM_Q, OM_P) &= \sphericalangle(RM_Q, RM_P) = \sphericalangle(RM_Q, RC) + \sphericalangle(RC, RM_P) =\\ &= \sphericalangle(AM_Q, AC) + \sphericalangle(DC, DM_P)\end{aligned}$$



Teď jsme schopni vypočítat $\sphericalangle(OM_Q, OM_R)$ podle úhlů u vrcholů trojúhelníka ACD, protože to je součet:

$$\begin{aligned}\sphericalangle(OM_Q, OM_R) &= \sphericalangle(OM_Q, OM_P) + \sphericalangle(OM_P, OM_R) = \\ &= \sphericalangle(AM_Q, AC) + \sphericalangle(DC, DM_P) + \sphericalangle(DM_P, DA) + \sphericalangle(CA, CM_R) = \\ &= \sphericalangle(DC, DA) + \sphericalangle(AM_Q, AC) + \sphericalangle(CA, CM_R) = \\ &= \sphericalangle(AM_Q, AD) + \sphericalangle(CD, CM_R)\end{aligned}$$

Další krok je vyjádřit $\sphericalangle(PM_Q, PM_R)$ pomocí úhlů u vrcholů trojúhelníka ACD. Zde použijeme tětivové čtyřúhelníky ADM_QP a BCM_RP.

$$\begin{aligned}\sphericalangle(PM_Q, PM_R) &= \sphericalangle(PM_Q, PD) + \sphericalangle(PD, PM_R) \\ &= \sphericalangle(AM_Q, AD) + \sphericalangle(CD, CM_R).\end{aligned}$$

□

Poznámka. Dostaneme tak 3 šestice koncyklických bodů (P, M_R, M_Q, I, J, O), (Q, M_P, M_R, E, F, O),(R, M_P, M_Q, G, H, O).

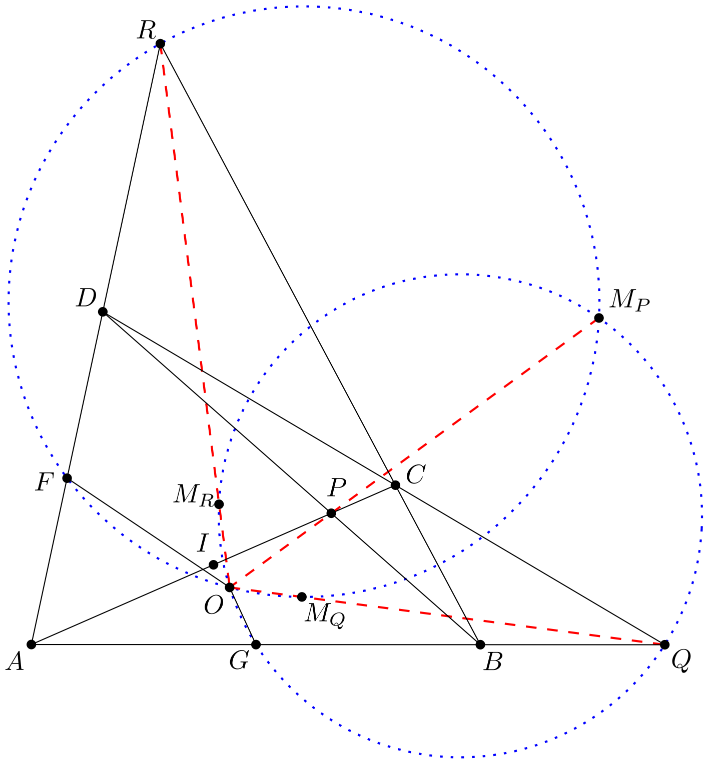
Tvrzení 5.8. Úsečky EF, GH, IJ sdílejí střed. Označme ho T.

Důkaz. Úsečky EG, FH jsou střední příčky trojúhelníků (ACD) a ABC oproti straně AC, a proto $|EG| = |AC|/2 = |FH|$ a $EG \parallel AC \parallel FH$, z čehož plyne, že $GEHF$ je rovnoběžník, což implikuje, že EF a GH se půlí. Analogicky stejný výsledek platí pro úsečky EF a IJ a důkaz je tedy hotový. □

Tvrzení 5.9. Bod O leží na kružnicích $(GJE), (GIF), (HFJ), (HIE)$.

Důkaz. Díky symetrii stačí dokázat tvrzení pro jednu kružnici, např. (FIG). S použitím středních příček v trojúhelnících ACD a ABC dostaneme

$$\angle(IG, IF) = \angle(CD, CB).$$



Bod O také leží na kružnicích (RM_PG) a (QM_PF) podle 5.7.

$$\begin{aligned}\angle(OG, OF) &= \angle(OG, OM_P) + \angle(OM_P, OF)\\ &= \angle(RG, RM_P) + \angle(QM_P, QF)\\ &= \angle(RD, RM_P) + \angle(QM_P, QB)\\ &= \angle(CD, CM_p) + \angle(CM_p, CB) = \angle(CD, CB).\end{aligned}$$

Z toho vyplývá, že bod O opravdu leží na kružnici (FIG).

Poznámka. Uvažujme středovou souměrnost podle středu T. Podle tvrzení 5.8 víme, že T je společný střed úseček EF, GH, IJ, a proto obrazy bodů E, F, G, H, I, J jsou postupně F, resp. E, H, G, J, I. Kružnice $(GJE), (GIF), (HFJ), (HIE)$, které mají společní bod O, se tedy zobrazí na $(HIF), (HJE), (GEI), (GJF)$, které mají podle tvrzení 5.6 společný bod X. Je tedy zřejmé, že T je středem úsečky OX.

□

Tvrzení 5.10. Bod O leží na třech přímkách PM_P, QM_Q, RM_R.

Důkaz. Uvažujme inverzi podle středu M_P s libovolným poloměrem, použijeme konfiguraci z Lemmatu 4.8 a navíc se podíváme na obrazy stran, úhlopříček čtyřúhelníka $ABCD$ a kružnic procházejících bodem M_P. Podle vlastnosti kruhové inverze popíšeme obrazy následujících bodů:

Z vlastnosti kruhové inverze plyne neorientovaná podobnost trojúhelníků $\triangle M_PM_RR \sim \triangle M_PQ'M'_Q$.

Podle Lemmatu 4.8 čtyřúhelníky $ABCD$ a $C'D'A'B'$ jsou si podobné. V této podobnosti máme „související“ dvojice bodů $(M_P, M'_P), (Q, R'), (M_Q, M'_R)$, což znamená, že platí neorientovaná podobnost $\triangle M_PRM_R \sim \triangle M'_PR'M'_R$, a proto celkově dostaneme orientovanou podobnost $\triangle M_PM_RR \sim \triangle M_PQM_Q$.

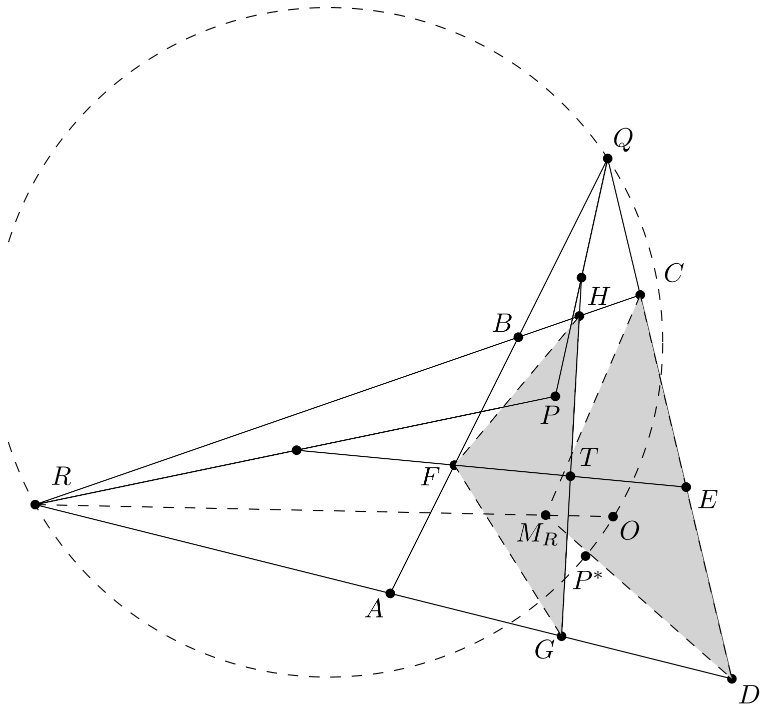
Existuje tedy spirální podobnost se středem M_P, která posílá M_R na Q a R na M_Q. Nechť O' je průsečík přímek QM_Q a RM_R, pak podle Věty 2.7 střed zmíněné spirální podobnosti neboli bod M_P leží na dvou kružnicích $(O'QM_R)$ a $(O'RM'_Q)$. Ekvivalentně O' leží na kružnicích (M_PQM_R) a (M_PRM_Q), z čehož plyne podle Tvrzení 5.7 $O \equiv O'$, a tedy bod O leží na dvou přímkách QM_Q a RM_R. Analogicky pomocí kruhových inverzí podle M_Q a M_R můžeme také dokázat, že O také leží na QM_Q a RM_R.

□

Definice 5.11. P^*, Q^*, R^* jsou postupně obrazy bodů P, Q, R ve středové souměrnosti podle bodu T.

Tvrzení 5.12. Následující čtveřice bodů jsou koncyclické:

$$(P^*, Q, R, O), (P, Q^*, R, O), (P, Q, R^*, O).$$



Důkaz. Dokážeme tvrzení pro kružnici (P^*, Q, R, O). Důkaz pro zbývající kružnice bude vypadat obdobně.

Aby 4 body P^*, Q, R, O ležely na jedné kružnici, musí platit, že $\sphericalangle(OQ, OR) = \sphericalangle(P^*Q, P^*R)$.

Podle Věty 3.8 je přímka EF Newtonova přímka procházející středem úsečky PR. Přímka EF také prochází bodem T, a proto EF je střední příčkou v $\triangle RPP^*$, která je rovnoběžná se stranou RP^*. Obdobně můžeme také dokázat, že přímka GH je střední příčkou v $\triangle QPP^*$, která je rovnoběžná se stranou QP^*. Úhel $\sphericalangle(P^*Q, P^*R)$ sevřený přímkami QP^* a RP^* má stejnou velikost jako úhel $\sphericalangle(TH, TF)$ sevřený přímkami HG a EF.

Podle tvrzení 5.10 bod O leží na přímce RM_R, a proto platí, že:

$$\sphericalangle(OQ,OR)=\sphericalangle(OQ,OM_R)=\sphericalangle(EQ,EM_R)=\sphericalangle(EC,EM_R)$$

Stačí tedy dokázat, že $\sphericalangle(EC,EM_R)=\sphericalangle(TH,TF)$. Tuto rovnost úhlů získáme z podobnosti $\triangle CM_RD \sim \triangle HFG$, protože zmíněný vztah obsahuje přesně dva odpovídající úhly u paty těžnice v těchto trojúhelnících (v $\triangle CM_RD$ těžnice M_RE a v trojúhelníku $\triangle HFG$ těžnice FT).

Úsečky FH a FG jsou postupně střední příčky v $\triangle ABC$ a $\triangle ABD$. Platí tedy $FH \parallel AC$ a $FG \parallel BD$. Dále si všimneme, že podle vlastností Miquelových bodů čtyřúhelník CPM_RD je tětivový, z čehož plyne:

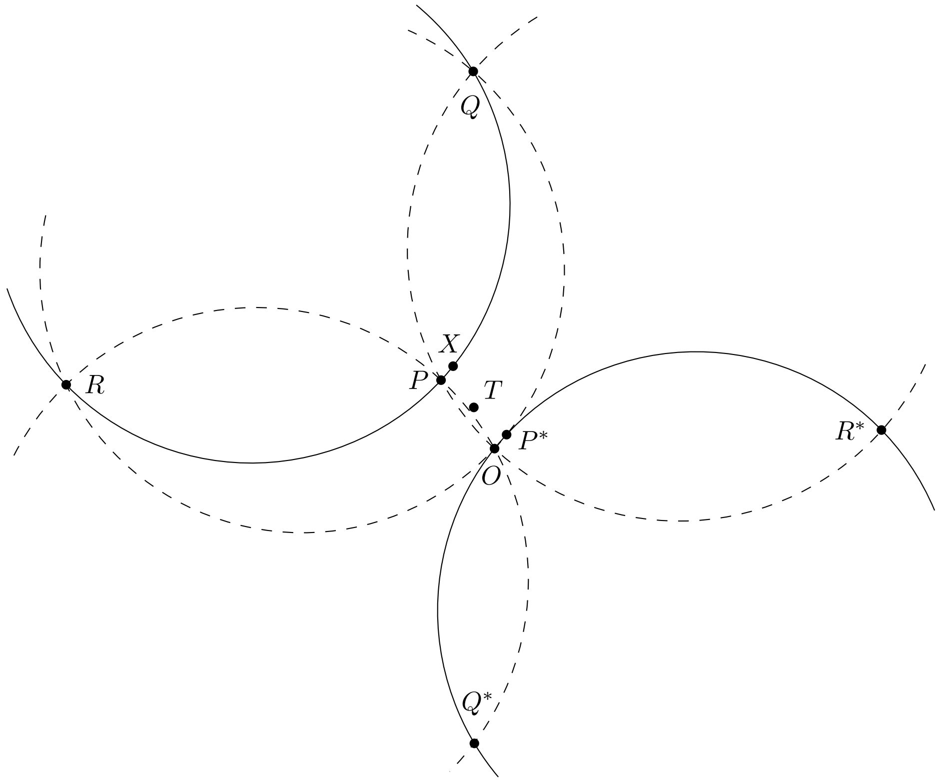
$$\sphericalangle(M_RD,M_RC)=\sphericalangle(PD,PC)=\sphericalangle(FG,FH)$$

Dokázali jsme rovnost jedné dvojice úhlů v $\triangle CM_RD$ a $\triangle HFG$. Nyní se podíváme na poměr stran, které svírají tyto úhly. Bod M_R je střed spirální podobnosti, která posílá trojúhelník M_RAC na M_RBD, a proto platí:

$$\frac{|M_RC|}{|M_RD|}=\frac{|AC|}{|BD|}=\frac{2|FH|}{2|FG|}=\frac{|FH|}{|FG|}$$

Trojúhelníky CM_RD a HFG jsou si skutečně podobné a důkaz je hotov. □

Tvrzení 5.13 (Hlavní úloha)**.** Bod X leží na kružnici (PQR).



Důkaz. Nyní budeme pracovat pouze s body O,T,P,Q,R,P^*,Q^*,R^*. Víme, že bod O leží na kružnicích $(P^*,Q,R,O),(P,Q^*,R,O),(P,Q,R^*,O)$ a T je střed úseček EF,HG,IJ. Uvažujme středovou souměrnost podle středu T a dostaneme:

$$\sphericalangle(P^*Q^*,P^*R^*)=\sphericalangle(PQ,PR) \text{ a } \sphericalangle(PQ^*,PR^*)=\sphericalangle(P^*Q,P^*R)$$

Dále použijeme obvodové úhly na kružnicích:

$$\begin{aligned}
\sphericalangle(OQ^*, OR^*) &= \sphericalangle(OQ^*, OR) + \sphericalangle(OR, OQ) + \sphericalangle(OQ, OR^*) = \\
&= \sphericalangle(PQ^*, PR) + \sphericalangle(P^*R, P^*Q) + \sphericalangle(PQ, PR^*) = \\
&= \sphericalangle(PQ^*, PR) + \sphericalangle(PR^*, PQ^*) + \sphericalangle(PQ, PR^*) = \\
&= \sphericalangle(PQ, PR) = \sphericalangle(P^*Q^*, P^*R^*)
\end{aligned}$$

Z toho plyne, že O také leží na kružnici $(P^*Q^*R^*)$ a po středové souměrnosti podle středu T bod X (podle tvrzení bod X je obraz bodu O) leží na kružnici (PQR). $\square$

Použitá literatura a zdroje

[1] Miroslav Olšák: *Orientované úhlení*
http://mks.mff.cuni.cz/library/OrientovaneUhleniMO/OrientovaneUhleniMO.pdf

[2] Josef Tkadlec a Miroslav Olšák: *Geometrická zobrazení, seriál matematického korespondenčního semináře v Praze*
http://mks.mff.cuni.cz/common/show.php?title=Geometrick%26aacute%3B+zobrazen%26iacute%3B&file=archive/31/9

[3] Yufei Zhao: *Power of a point, UK Trinity Training 2011 (Mint group)*
http://yufeizhao.com/olympiad/power_of_a_point.pdf

[4] František Konopecký: *Spirální podobnost*
http://mks.mff.cuni.cz/common/show.php?title=Spir%26aacute%3Bln%26iacute%3B+podobnost&file=library/Spiralni_podobnost_FK/Spiralni_podobnost_FK

[5] Josef Tkadlec: *Kruhová inverze*
http://mks.mff.cuni.cz/common/show.php?title=Kruhov%26aacute%3B+inverze&file=library/KruhovaInverzePT/KruhovaInverzePT

[6] Catalin Barbu and Ion Patrascu: *Some Properties of the Newton-Gauss Line*
http://forumgeom.fau.edu/FG2012volume12/FG201212.pdf

[7] http://mathworld.wolfram.com/PedalCircle.html

[8] D. Grinberg, Poncelet points and antigonal conjugates, Mathlinks,
http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?t=109112.

[9] L. A. Emelyanov and T. L. Emelyanova, A Note on the Feuerbach Point, *Forum Geom.*, 1 (2001) 121–124.

[10] http://mathworld.wolfram.com/FeuerbachPoint.html

[11] http://mathworld.wolfram.com/CompleteQuadrilateral.html