

# STŘEDOŠKOLSKÁ ODBORNÁ ČINNOST

## ROVINNÉ GRAFY

Mark Karpilovskij

Brno 2013



# STŘEDOŠKOLSKÁ ODBORNÁ ČINNOST

Obor SOČ: 01 Matematika a statistika

## ROVINNÉ GRAFY

PLANAR GRAPHS

Autor: Mark Karpilovskij  
Škola: Gymnázium, Brno, tř. Kpt. Jaroše 14  
Konzultant: Mgr. Aleš Kobza, Ph.D.

Brno 2013



Na tomto místě bych rád poděkoval svému vedoucímu za odpovědný přístup a cenné připomínky k práci, dále Donaldu E. Knuthovi za tvorbu open-source sázečního systému  $\text{\TeX}$ , pomocí něž byla tato práce vytvořena, a Marku Hohenwarterovi za tvorbu matematického softwaru GeoGebra.



Prohlašuji, že jsem předloženou práci vypracoval samostatně s použitím zdrojů v ní uvedených.

V Brně dne

.....





## **Abstract**

This paper aims to serve as an introducing text or an alternative source of basic information for graph theory students or people otherwise interested in graph theory. The first two chapters of the paper provide a wide theoretical introduction and demonstrate basic approaches to graph theory through sample problems with solutions. The third chapter contains a gentle introduction to several important topology concepts, which are used in the last chapter, where the planar graphs are introduced and basic results in this area are summarised.

## **Abstrakt**

Tato práce má za cíl sloužit jako úvodní text nebo jako alternativní zdroj informací pro studenty nebo zájemce o teorii grafů. První dvě kapitoly práce poskytují široký teoretický úvod do teorie grafů a demonstrují základní přístupy na řešených ukázkových příkladech. Třetí kapitola obsahuje jemný úvod do několika důležitých topologických konceptů, které jsou využity v poslední kapitole, kde zavádíme rovinné grafy a shrnujeme základní výsledky v této oblasti.

# Obsah

<b>1 Úvod do teorie grafů</b>	<b>9</b>
1.1 Graf, speciální případy grafů . . . . .	10
1.2 Podgrafy, souvislost . . . . .	12
1.3 Stupeň vrcholu . . . . .	13
1.4 Stromy . . . . .	15
1.5 Bipartitní grafy . . . . .	16
<b>2 Grafová <math>k</math>-souvislost</b>	<b>18</b>
2.1 Operace na grafu . . . . .	18
2.2 Bloky . . . . .	19
2.3 $k$ -souvislé grafy . . . . .	21
<b>3 Vybrané partie z topologie</b>	<b>25</b>
3.1 Kompaktní množiny . . . . .	25
3.2 Oblouková souvislost . . . . .	28
<b>4 Rovinné grafy</b>	<b>29</b>
4.1 Rovinný graf a topologie roviny . . . . .	30
4.2 Počet hran rovinného grafu . . . . .	35
4.3 Kuratowského věta a Fáryho věta . . . . .	37
<b>5 Závěr</b>	<b>41</b>
<b>Literatura</b>	<b>42</b>

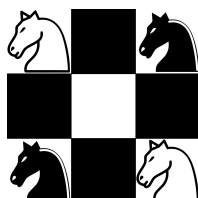
# Kapitola 1

## Úvod do teorie grafů

Teorie grafů je jedním z nejmladších a nejrychleji se rozvíjejících oborů dnešní matematiky s řadou aplikací v jiných oborech, zejména v informatice. Vznikla díky pozorování, že řada problémů se dá elegantně řešit, pokud je reprezentujeme jako schémata bodů a spojnic mezi některými dvojicemi, kde body představují objekty či stavy nějakého procesu a spojnice nám ukazují, mezi kterými stavy lze přecházet, resp. které dva objekty jsou spolu v určité námi zvolené relaci. Může to být schéma vlakových zastávek a tratí, skupiny lidí a vztahů mezi nimi či hierarchie firmy nebo rodiny. Přesně takové schéma se nazývá *grafem*, jednotlivé body jsou *vrcholy* a spojnicím mezi nimi se říká *hrany*.

Než si pojem grafu zavedeme formálně, demonstrováme krátce užitečnost přístupu popsaného výše na jednoduchém příkladu.

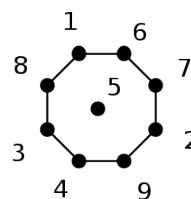
**Příklad.** Mějme 4 jezdce na šachovnici 3x3 jako na obrázku. Je možné nějakým sledem tahů dosáhnout toho, aby oba bílí jezdci byli ve vrchních dvou rozích a oba černí v dolních?



**Řešení.** Intuice a několik neúspěšných pokusů nám napovídá, že to nejspíše možné není. Zjistujeme ale, že zkoušení všech možností nikam nevede a nedaří se ani najít vhodnou pravidelnost, která by jejich počet zmenšila. Podívejme se na úlohu z jiného úhlu. Očíslujme po řádcích pole šachovnice 1-9 (viz obrázek) a sestrojme graf, kde vrcholy budou políčka šachovnice a hrany povedou mezi těmi políčky, která jsou od sebe na jeden tah šachovým jezdcem.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Obrázek 1.1: Očíslování políček



Obrázek 1.2: Sestavený graf

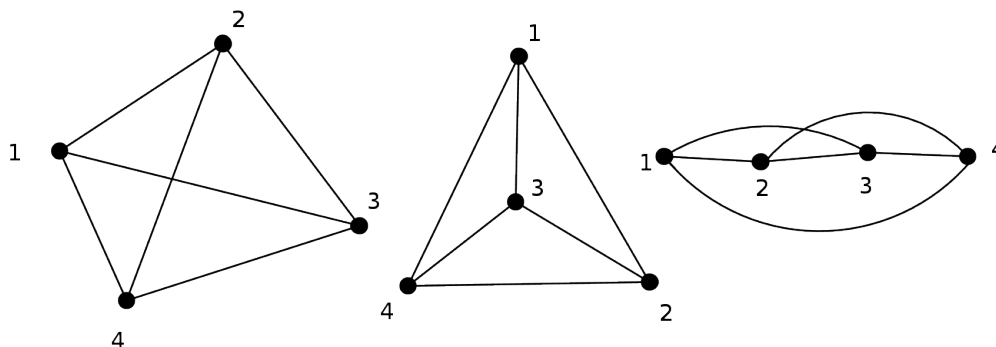
Vidíme nyní, že čtyři jezdci, na začátku na pozicích 3, 7 (černí) a 1, 9 (bílé), se pohybují po obvodu jakési kružnice, přičemž nikdy nemohou přejít přes sebe, vyměnit si místa, protože by se museli v jedné chvíli ocitnout v jednom vrcholu. Jsou-li tedy jezdci nyní po obvodu střídavě bílý - černý, zůstane tato vlastnost zachována po libovolné posloupnosti tahů. Pozice, kterou po nás vyžaduje úloha, však tuto vlastnost nemá (to si čtenář může sám vyzkoušet), proto jí nikdy nedosáhneme. ♣

## 1.1 Graf, speciální případy grafů

**Definice 1.1.1.** *Konečným neorientovaným grafem*  $G$  (dále jen grafem) nazveme uspořádanou dvojici  $(V, E)$ , kde  $V$  je neprázdná konečná množina a  $E \subseteq \binom{V}{2}$  je množina dvouprvkových podmnožin množiny  $V$ . Prvky množiny  $V$  budeme nazývat *vrcholy* a prvky množiny  $E$  *hrany*.

Množiny vrcholů a hran daného grafu  $G$  budeme značit  $V(G)$  a  $E(G)$ . Počty vrcholů a hran budeme většinou značit  $n = |V(G)|$  a  $m = |E(G)|$ , navíc velikost množiny  $V(G)$  budeme nazývat *řád* grafu  $G$ . Vrcholy grafu budeme typicky značit  $u, v, w$ , obdobně hrany budeme často značit  $e, f$ . Dále tomu, že prvek  $\{u, v\}$  leží v  $E$  budeme říkat, že z  $u$  do  $v$  *vede hrana* nebo že vrchol  $u$  *sousedí* s vrcholem  $v$ , a hranu mezi vrcholy  $u$  a  $v$  budeme zapisovat zkráceně  $uv$ .

Jak jsme viděli v úvodním příkladu, grafy pro přehlednost zakresluje do roviny - vrcholy jako puntíky, hrany jako čáry mezi nimi. Hrany se smí křížit, ale nesmí procházet jinými vrcholy grafu než svými konci. Důležité je si uvědomit, že graf je jednoznačně dán už svou množinou vrcholů a hran a nakreslit jej lze více rovnocennými způsoby. Následující obrázek ukazuje několik stejných, ale různě nakreslených grafů s  $V = \{1, 2, 3, 4\}$  a  $E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}$ .



Různá nakreslení téhož grafu

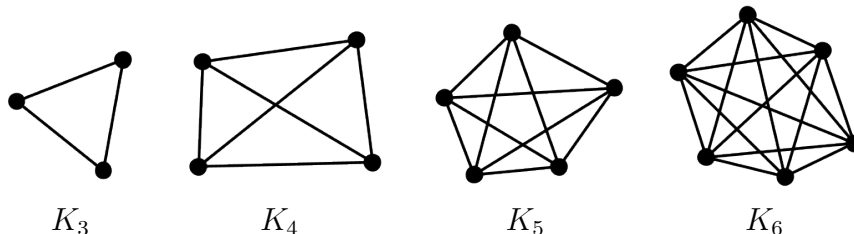
Dva grafy také intuitivně považujeme za stejné, pokud je lze stejně nakreslit, ale liší se v množinách vrcholů. Tuto představu formalizuje následující definice.

**Definice 1.1.2.** Dva grafy  $G$  a  $H$  nazveme *isomorfní*, pokud existuje bijektivní zobrazení  $\psi : V(G) \rightarrow V(H)$  takové, že  $\psi(u)\psi(v) \in E(H)$  právě tehdy, když  $uv \in E(G)$ . Isomorfismus grafů  $G, H$  se neřídka značí  $G = H$ .

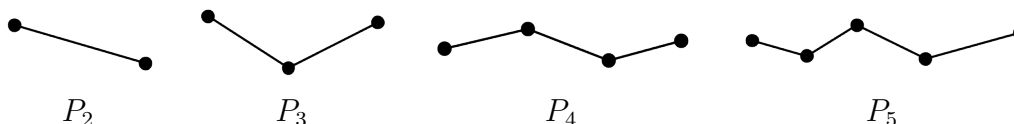
Pro několik speciálních případů grafů, které budeme často používat, si zavedeme standardní názvy a značení.

### Definice 1.1.3. Důležité grafy.

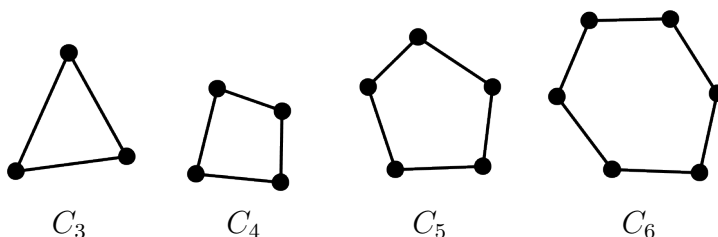
- *Úplný graf*  $K_n$  (pro  $n \geq 1$ ) je graf s  $V = \{1, 2, \dots, n\}$  a  $E = \binom{V}{2}$



- *Cesta*  $P_n$  je graf s  $V = \{0, 1, \dots, n\}$  a  $E = \{\{i-1, i\}, i = 1, 2, \dots, n\}$  a říkáme, že je to *cesta délky n*.

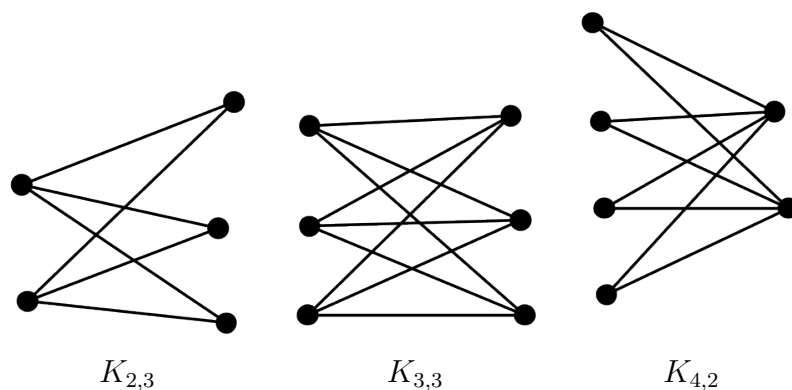


- *Cyklus* nebo *kružnice*  $C_n$  je graf s  $V = \{1, 2, \dots, n\}$  a  $E = \{\{i, i+1\}, i = 1, 2, \dots, n-1\} \cup \{\{1, n\}\}$  a říkáme, že je to *cyklus délky n*.



Všimněme si, že  $C_3 = K_3$ . Kružnici délky 3 (resp. úplnému grafu na třech vrcholech) říkáme *trojúhelník*.

- *Úplný bipartitní graf*  $K_{n,m}$  je graf s  $V = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \cup \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$  a  $E = \{\{a_i, b_j\}, i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m\}$ .



Obecněji se o bipartitních grafech zmíníme později.

Již nyní máme dostatek teorie, abychom se pokusili pomocí grafu řešit úlohy. V následující úloze uvidíme využití teorie grafů k důkazu jednoduché kombinatorické identity.

**Příklad.** Dokažte, že pro libovolná přirozená  $n, m$  platí

$$\binom{n+m}{2} = \binom{n}{2} + nm + \binom{m}{2}.$$

**Řešení.** Uvažme úplný graf  $K_{n+m}$  a obarvěme  $n$  jeho vrcholů na černo a  $m$  na bílo a počítáme dvěma způsoby jeho hrany. Každé dva z  $n+m$  vrcholů jsou spojeny hranou, takže hran je  $\binom{n+m}{2}$ . Nyní spočítejme počet hran po částech: hran vedoucích mezi dvěma černými vrcholy, kterých je  $n$ , je  $\binom{n}{2}$ , obdobně hran vedoucích mezi dvěma bílými vrcholy je  $\binom{m}{2}$ . Zbývá započítat hrany, vedoucí mezi bílým a černým vrcholem. Bílý vrchol vybereme  $m$  způsoby a černý  $n$  způsoby, takže máme  $nm$  takových hran. V součtu máme přesně  $\binom{n}{2} + nm + \binom{m}{2}$ , což jsme chtěli dokázat. ♣

## 1.2 Podgrafy, souvislost

Významné grafy zmíněné výše se mohou vyskytovat i v obecných grafech jako jejich části. Z tohoto důvodu zavádíme pojem *podgraf*.

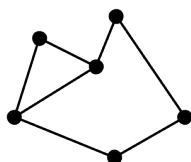
**Definice 1.2.1.** Nechť  $H$  a  $G$  jsou grafy. Graf  $H$  nazveme *podgrafem* grafu  $G$ , pokud platí, že  $V(H) \subseteq V(G)$  a  $E(H) \subseteq E(G)$  a značíme  $H \subseteq G$ . Pokud navíc pro každé dva vrcholy  $u, v$  pro které platí  $u, v \in V(H)$  a  $uv \in E(G)$ , platí i  $uv \in E(H)$ , nazveme podgraf  $H$  *indukovaným* podgrafem na množině vrcholů  $V(H)$ .

Indukovaný podgraf je pro nás zajímavý tím, že je jednoznačně určen svou množinou vrcholů a ze všech podgrafů na stejné množině vrcholů obsahuje maximální počet hran.

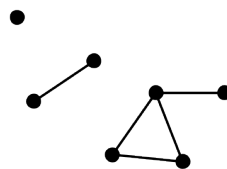
Zdaleka nejčastěji nás jako podgrafy daného grafu budou zajímat cesty a kružnice. V kapitole o rovinných grafech nás budou jako podgrafy zajímat také grafy  $K_{3,3}$  a  $K_5$  a grafy jim příbuzné.

Pokud v daném grafu  $G$  existuje cesta  $P \subseteq G$ , která začíná ve vrcholu  $u$  a končí ve vrcholu  $v$ , budeme říkat, že v grafu  $G$  *vede cesta* z vrcholu  $u$  do vrcholu  $v$ .

**Definice 1.2.2.** Graf  $G$  nazveme *souvislým*, pokud mezi každými dvěma různými vrcholy  $u, v \in V(G)$  vede nějaká cesta. Jinak jej nazveme *nesouvislým*. Maximální souvislé podgrafy  $G$  (tedy takové, že nejsou obsaženy jako vlastní podmnožiny v jiném souvislém podgrafu) nazveme *komponentami souvislosti* grafu  $G$ .



Souvislý graf



Graf se třemi komponentami souvislosti

Rozdělení grafu na komponenty souvislosti je velmi přirozené rozdělení na části, z nichž každou lze většinou uvažovat zvlášť, protože se navzájem v podstatě neovlivňují. V rámci jedné komponenty nás může dále zajímat vzájemná vzdálenost dvou vrcholů.

**Definice 1.2.3.** Mějme souvislý graf  $G$  a jeho dva vrcholy  $u, v$ . Vzdálenost  $d(u, v)$  těchto vrcholů definujeme následovně:

- $d(u, v) = 0$ , pokud  $u = v$
- jinak je  $d(u, v)$  rovna délce *nejkratší cesty*  $P \subseteq G$ , která vede z  $u$  do  $v$ .

Na závěr této sekce si uveďme úlohu, která demonstruje zajímavý jednoduchý výsledek o souvislých grafech a její velmi elegantní řešení využívá i vzdálenosti vrcholů. K tomu je ještě potřeba dodat, že *odebráním* vrcholu  $v$  z grafu  $G$  rozumíme odebrání tohoto vrcholu a všech hran z něj vedoucích, takže vzniká graf  $G'$ , který má  $V(G') = V(G) \setminus \{v\}$  a  $E(G') = \{e \in E(G), v \notin e\}$ . Této a dalším operacím na grafu se budeme více věnovat ve druhé kapitole.

**Příklad.** Je dán souvislý graf  $G$  o aspoň dvou vrcholech. Dokažte, že v něm existuje vrchol, jehož odstraněním vznikne graf  $G'$ , který bude rovněž souvislý.

**Řešení.** Uvažme libovolný vrchol  $u$ . Dále uvažme vrchol  $v$ , který má od  $u$  v  $G$  *největší* vzdálenost. Ukážeme, že tento vrchol můžeme odstranit, aniž bychom porušili souvislost. K tomu stačí ukázat, že bude existovat cesta z  $u$  do všech ostatních vrcholů. Před odstraněním  $v$  cesty z  $u$  do všech vrcholů pochopitelně existují ze zadání. Předpokládejme, že odstraněním  $v$  jsme vytvořili vrchol  $w$ , do něžž nevede z  $u$  cesta. Pak musel  $v$  ležet na cestě mezi  $u$  a  $w$ , takže platí  $d(u, w) > d(u, v)$ , což je spor s volbou vrcholu  $v$ , takže takový vrchol  $w$  neexistuje a jsme hotovi. ♣

## 1.3 Stupeň vrcholu

Velmi důležitou veličinou, kterou můžeme v grafu uvažovat, je počet hran, vycházejících z daného vrcholu.

**Definice 1.3.1.** Mějme graf  $G$  a jeho vrchol  $v$ . Počet hran, vycházejících z vrcholu  $v$  nazýváme *stupněm* vrcholu  $v$  a značíme  $\deg_G(v)$  nebo jen  $\deg(v)$ . Graf, ve kterém má každý vrchol stupeň  $k$ , nazveme  $k$ -regulární.

**Příklad.** Ukažte, že v každém  $k$ -regulárním grafu existuje kružnice délky alespoň  $k + 1$ .

**Řešení.** Tuto úlohu vyřešíme algoritmickou úvahou. Uvažme  $k$ -regulární graf a obarveme všechny jeho vrcholy na bílo. Nyní začneme v jednom vrcholu, který obarvíme na černo, a postupíme po hraně vedoucí z tohoto vrcholu na vrchol, který je ještě bílý, načež postup opakujeme, dokud se neocitneme ve vrcholu, ze kterého už vedou hrany jen do černě obarvených vrcholů. Uvážíme-li vrcholy v tom pořadí, v jakém je navštívujeme, dostáváme cestu. Díky tomu, že každý vrchol má stupeň aspoň  $k$ , bude tato cesta mít na konci délku alespoň  $k$  - alespoň  $k$ -krát musíme být schopni narazit na ještě nepřebarvený vrchol. Když už jsme ve vrcholu, z něžž vedou hrany pouze do přebarvených vrcholů, jsou to vlastně

hrany vedoucí z konce postavené cesty do nějakého jejího jiného vrcholu - každá taková hrana spolu s odpovídajícím úsekem cesty nám vytváří v grafu cyklus. Graf je  $k$ -regulární, takže těchto cyklů je  $k - 1$  (nepočítáme hranu, po které jsme přišli) a každý má různou délku, přičemž minimální délka je 3, takže aspoň jeden z těchto cyklů musí mít délku alespoň  $k + 1$ . ♣

**Věta 1.3.2.** *V libovolném grafu  $G$  platí  $\sum_{v \in V(G)} \deg_G(v) = 2m$ , kde  $m = |E(G)|$ .*

**Důkaz.** Všimneme si, že když sečítáme stupně všech vrcholů, započítáme v tomto součtu právě dvakrát každou hranu grafu - jednou za každý její koncový vrchol. Z takového pozorování už přímo plyne dokazované tvrzení. ♣

Ke stupni vrcholu se váže jednoduché, avšak zajímavé tvrzení, které získalo svůj název díky úlohám, kde grafy aplikujeme na přátelské večírky - vrcholy jsou lidé a hrany vedou mezi vrcholy, pokud si daní lidé potřásli navzájem rukou.

**Věta 1.3.3.** (*Handshaking lemma*)

*V libovolném grafu je vždy sudý počet vrcholů s lichým stupněm.*

**Důkaz.** Předpokládejme, že je v grafu lichý počet vrcholů s lichým stupněm, součet stupňů všech vrcholů je pak zřejmě taktéž liché číslo. Ve větě 1.1.3 jsme si ale ukázali, že součet stupňů všech vrcholů v grafu je dvojnásobek počtu hran, tedy sudé číslo, čímž máme spor a handshaking lemma platí. ♣

Krásnou aplikaci handshaking lemmatu nalezneme v následující ukázkové úloze.

**Příklad.** V království je jedno hlavní město, 2012 normálních měst a jeden zapadákov. Z hlavního města vede silnice do 21 normálních měst, z každého normálního města vede do ostatních měst 20 silnic a ze zapadákova vede právě jedna silnice do některého normálního města. Dokažte, že z hlavního města se lze po silnicích dopravit do zapadákova.

**Řešení.** Máme zadaný graf o 2014 vrcholech. Uvažme samostatně jeho komponentu souvislosti, ve které leží hlavní město - stačí nám ukázat, že v této komponentě leží i zapadákov a jsme hotovi. Předpokládejme pro spor, že zapadákov v této komponentě neleží, tudíž v ní jsou obsažena pouze normální města, která mají všechna stupeň 20, a hlavní město, které má stupeň 21. To je zřejmě spor s handshaking lemmatem - takový graf by obsahoval jeden vrchol lichého stupně. To znamená, že zapadákov v této komponentě být obsažen musí a jsme hotovi. ♣

Na poslední úloze této sekce si nyní demonstrujeme, že v teorii grafů se dají výhodně aplikovat standardní důkazové metody a leckdy můžeme dostat pozoruhodný výsledek i bez velkého množství složité teorie.

**Příklad.** Žirafy se rozhodly, že se rozdělí do dvou politických seskupení. Každá žirafa má mezi ostatními žirafami nejvýše tři nepřátele, přičemž nepřátelství je symetrické. Dokažte, že lze vždy žirafy rozdělit na dvě skupiny tak, že každá žirafa je ve skupině s nejvýše jedním svým nepřitelem.

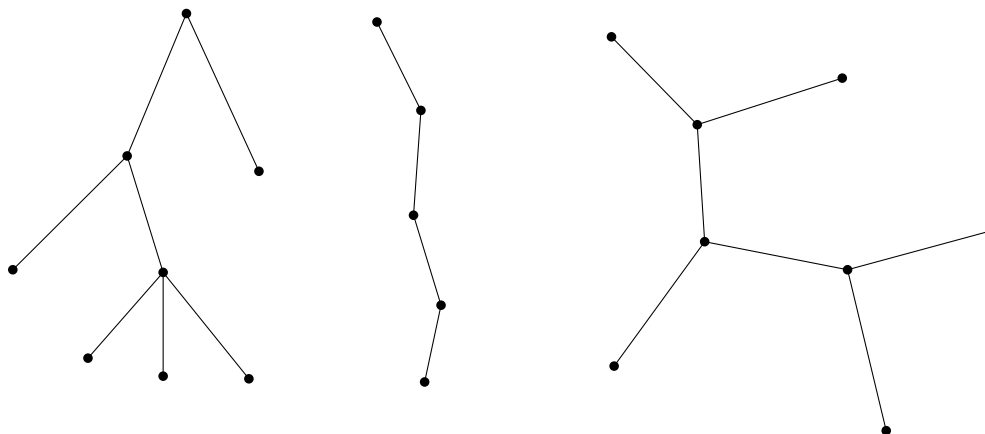


**Řešení.** Tuto úlohu vyřešíme pomocí metody extrému. Máme zadaný graf, ve kterém má každý vrchol stupeň nejvýše 3. Uvažme jeho rozdělení na dvě skupiny takové, že počet hran, které vedou mezi vrcholy z různých skupin, je maximální. O takovém rozdělení, které evidentně existuje, nyní ukážeme, že splňuje zadanou podmínku. Předpokládejme pro spor, že v takovém rozdělení existuje žirafa, která je ve skupině s alespoň dvěma svými nepřáteli. V tom případě ve druhé skupině je nejvýše jeden její nepřítel, takže když ji přemístíme do druhé skupiny, zvýšíme počet hran, vedoucích mezi vrcholy z různých skupin alespoň o jedna, což je spor s volbou rozdělení. ♣

## 1.4 Stromy

Stromy jsou jednoduchou, ale velmi důležitou a velmi zajímavou třídou grafů s rozsáhlými aplikacemi v informatice. Následující definice se nejčastěji používá k zavedení stromu, následně si však uvedeme i několik ekvivalentních tvrzení.

**Definice 1.4.1.** Graf  $G$  je *strom*, pokud je souvislý a neobsahuje cykly.



*Některé stromy*

Všimněme si, že každá cesta je stromem. I řada reálných používaných struktur má stromový charakter - rodokmeny, hierarchie zaměstnanců firmy, složek v počítači či webových stránek.

**Věta 1.4.2.** *Nechť  $G$  je graf. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

- (a)  $G$  je strom.
- (b)  $G$  je souvislý a má právě  $n - 1$  hran.
- (c) Mezi každými dvěma vrcholy  $G$  vede právě jedna cesta.

**Důkaz.** Nejprve ukážeme, že (a) je ekvivalentní s (c).

„ $\Rightarrow$ “: Pokud  $G$  je strom, je z definice souvislý, takže mezi každými dvěma vrcholy vede alespoň jedna cesta. Kdyby mezi nějakými dvěma vrcholy vedla více než jedna cesta, snadno bychom v  $G$  našli kružnici, takže může vést mezi každými dvěma vrcholy nejvýše jedna

cesta, což dohromady s prvním výsledkem dává platnost (c).

„ $\Leftarrow$ “: Vede-li mezi každými dvěma vrcholy  $G$  právě jedna cesta, je zřejmě souvislý. Absenci cyklů ukážeme sporem podobně jako v první implikaci.

Nyní ukážeme, že v každém stromu o aspoň dvou vrcholech existuje vrchol stupně 1. Začneme v libovolném vrcholu  $u$  a od něj stavme cestu. Nikdy nemůžeme přijít do vrcholu, ve kterém jsme už byli, protože pak bychom našli cyklus, ale nemůžeme pokračovat do nekonečna, takže jednou přijdeme do vrcholu, ze kterého už nemůžeme dál, což je náš hledaný vrchol stupně 1.

Nyní indukci na počtu vrcholů ukážeme, že (b) plyne z (a). Pokud má  $G$  jeden vrchol, je to zřejmé, pojďme na indukční krok. Jak jsme ukázali výše,  $G$  má vrchol stupně 1. Pokud tento vrchol i s hranou z něj vedoucí odstraníme, dostaneme nutně opět strom, protože jsme neporušili souvislost ani absenci cyklů. Tento nový graf má ale  $n - 1$  vrcholů, takže z indukčního předpokladu má  $n - 2$  hran. Když nyní přidáme zpátky ubraný vrchol, dostáváme, že  $G$  má při  $n$  vrcholech  $n - 1$  hrana a důkaz je kompletní.

Nyní ukážeme, že i (a) plyne z (b). Nechť  $G$  je souvislý graf s  $n - 1$  hranami. Také on musí obsahovat vrchol stupně 1, protože kdyby každý vrchol  $G$  měl stupeň alespoň 2, měl by  $G$  z věty 1.3.2 aspoň  $n$  hran. Obdobně jako výše nyní indukci na počtu vrcholů ukážeme, že  $G$  neobsahuje cykly. Příklad  $|V(G)| = 1$  je opět zřejmý. Má-li  $G$   $n$  vrcholů, můžeme opět odstranit vrchol stupně 1, čímž dostaneme souvislý graf o  $n - 1$  vrcholech a  $n - 2$  hranách, který z indukčního předpokladu neobsahuje kružnice. Zpětným přidáním vrcholu ovšem nemůžeme vytvořit cyklus, protože každý vrchol v cyklu musí mít stupeň aspoň 2, takže je důkaz hotov. ♣

Vrcholům stupně 1 ve stromu říkáme *listy*. Povšimněme si, že z metody důkazu výše plyne velmi důležité pozorování, že každý strom umíme sestavit z grafu o jednom vrcholu postupným připojováním listů.

## 1.5 Bipartitní grafy

Graf  $G$  nazveme *vrcholově  $k$ -obarvitelným*, pokud lze obarvit jeho vrcholy  $k$  různými barvami tak, aby žádné dva vrcholy spojené hranou neměly stejnou barvu. Obarvení zcela obecného zadaného grafu optimálním počtem barev je velmi obtížný problém. Můžeme si však například všimnout, že každý strom je 2-obarvitelný - v předchozí sekci jsme ukázali, že každý strom lze sestavit postupným přidáváním vrcholů stupně 1, takže stačí začít s vrcholem jedné barvy a každý přidávaný obarvit opačnou barvou než ten, ke kterému jej připojujeme.

Vrcholově 2-obarvitelné grafy nazýváme *bipartitní*. Následuje ekvivalentní definice.

**Definice 1.5.1.** Graf  $G$  nazveme *bipartitním*, pokud existuje rozdělení jeho vrcholů do dvou disjunktních množin  $A, B$  tak, že každá hrana  $G$  vede z nějakého vrcholu  $A$  do nějakého vrcholu  $B$ .

Ukazuje se, že bipartitní grafy lze velmi elegantně rozeznat.

**Věta 1.5.2.** Graf  $G$  je bipartitní právě tehdy, když neobsahuje žádnou kružnici liché délky.

**Důkaz.** Ukázat, že  $G$  neobsahuje kružnici liché délky, pokud je bipartitní, je snadné: kružnice liché délky není 2-obarvitelná sama o sobě, takže nemůže být podgrafem 2-obarvitelného grafu.

Ukážeme nyní, že pokud  $G$  neobsahuje žádnou kružnici liché délky, už je nutně bipartitní. Zřejmě můžeme navíc předpokládat, že  $G$  je navíc souvislý, rozšíření na nesouvislé grafy je triviální. Obarvíme vrcholy  $G$  dvěma barvami, řekněme bílou a černou. Bez újmy na obecnosti obarvíme vrchol  $v$  načerno. Dále všechny vrcholy, se kterými sousedí hranami, obarvíme nabílo. Sousedy těchto čerstvě obarvených vrcholů, kteří ještě nebyli obarveni, obarvíme opět načerno a tak dále. Protože  $G$  je souvislý, obarvíme takto všechny vrcholy grafu jednoznačně černě nebo bíle. Platí, že v  $i$ -tém kroku jsme obarvovali vrcholy ve vzdálenosti  $i$  od  $v$ . To znamená, že vrcholy, jejichž vzdálenost od  $v$  je lichá, jsou všechny obarveny černě a vrcholy, jejichž vzdálenost od  $v$  je sudá, jsou všechny obarveny bíle.

Nyní ukážeme, že v takto obarveném grafu nejsou dva vrcholy stejné barvy spojené hranou. Předpokládejme pro spor, že taková dvojice vrcholů  $x, y$  existuje (pak v ní určitě není obsažen  $v$ ) a uvažme nejkratší cesty z obou těchto vrcholů do  $v$ . Délky těchto cest mají, jak jsme si ukázali výše, stejnou paritu, neboť  $x, y$  mají stejnou barvu. Když po uvažovaných cestách půjdeme od  $x$  i  $y$  směrem k  $v$ , dříve nebo později narazíme na první vrchol  $z$ , který mají tyto cesty společný (nejpozději  $v$ ). Snadno odůvodníme, že od vrcholu  $z$  už pak zbývá  $x$  i  $y$  stejný kus k  $v$ , neboť jinak by to nebyly nejkratší cesty. To znamená, že vzdálenosti  $x$  a  $y$  od  $z$  mají stejně jako vzdálenosti  $x$  a  $y$  od  $v$  stejnou paritu, tudíž součet těchto vzdáleností je sudý. Jenže tím pádem cesty z  $x$  do  $z$  a z  $y$  do  $z$  tvoří spolu s hranou  $xy$  kružnici v  $G$ , která má lichou délku, což je chtěný spor. ♣

Poznatky o bipartitních grafech využijeme v následující úloze.

**Příklad.** Na plese se sešlo 20 dívek a 20 chlapců. Ukázalo se, že každá dívka zná právě dva chlapce a každý chlapec zná právě dvě dívky. Ukažte, že je lze všechny rozdělit do 20 párů tak, že chlapec a dívka v každém páru se znají.

**Řešení.** Máme zadaný 2-regulární bipartitní graf a máme v něm nalézt tzv. *perfektní párování*. Zatímco obecně je to netriviální problém, podmínka 2-regularity nám práci zjednodušuje. Když uvážíme jednu komponentu souvislosti 2-regulárního grafu, není těžké si rozmyslet, že to musí být kružnice - stačí začít v nějakém vrcholu a stavět z něj cestu, první hranu vybereme ze dvou a pak už je vždy další hrana dána jednoznačně. Tato cesta musí jednou skončit, protože má graf konečně mnoho vrcholů, nicméně skončit může pouze ve vrcholu, ze kterého už nevede nenavštívená hrana, což bude pouze ten první. Zadaný graf je tedy sjednocení kružnic. Navíc z věty výše máme, že jsou tyto kružnice navíc všechny sudé délky. S těmito pozorováními už snadno chtěné párování sestojíme, stačí z každé kružnice vzít každou druhou hranu, čímž určitě použijeme v nějakém páru každý vrchol. ♣

# Kapitola 2

## Grafová $k$ -souvislost

V předešlé kapitole jsme se krátce zabývali souvislostí grafů. V této kapitole pojem souvislosti zobecníme a představíme některé koncepty, které později využijeme, až se budeme věnovat rovinným grafům.

### 2.1 Operace na grafu

Aby se nám s grafy lépe pracovalo, definujeme na nich některé vhodné operace. Nechť  $u, v$  jsou dva vrcholy grafu  $G$  takové, že  $uv \notin E(G)$ . Pak *přidání hrany*  $e = uv$  značíme  $G \cup e$  a platí

$$G \cup e = (V(G), E(G) \cup \{e\}).$$

Dále nechť  $e \in E(G)$ . Pak *odstranění hrany*  $e$  značíme  $G \setminus e$  a platí

$$G \setminus e = (V(G), E(G) \setminus \{e\}).$$

Operace s hranami jsme definovali snadno, protože neměly vliv na množinu vrcholů. Když však chceme odebrat vrchol, musíme s ním odebrat i hrany, které z něj vedou. *Odebrání vrcholu*  $v$  značíme  $G \setminus v$  a platí

$$G \setminus v = (V(G) \setminus \{v\}, \{e \in E(G), v \notin e\}).$$

Obdobně definujeme odebrání celé množiny vrcholů. Pokud  $S \subseteq V(G)$  a  $G \setminus S$  má více komponent souvislosti než  $G$ , řekneme navíc, že  $S$  *rozděluje*  $G$ .

Podstatné pro nás budou ještě dvě významné grafové operace, a sice dělení hrany a kontrakce hrany.

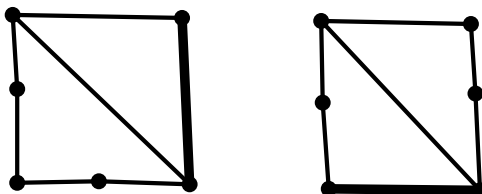
**Definice 2.1.1.** *Dělení hrany*  $e = u_1u_2 \in E(G)$  rozumíme její nahrazení cestou délky 2, tzn. přidáme do grafu nový vrchol  $v$ , který spojíme s vrcholy  $u_1, u_2$  a původní hranu  $u_1u_2$  odstraníme. Značíme

$$G \% e = (V(G) \cup \{v\}, E(G) \cup \{u_1v, u_2v\} \setminus \{e\}).$$

Graf  $H$  nazveme *dělením grafu*  $G$ , pokud je isomorfní grafu  $G'$ , který vznikl z  $G$  konečným počtem operací dělení. Je důležité nahlédnout, že to lze ekvivaletně formulovat tak, že graf

$G'$  vznikl z  $G$  nahrazením některých hran cestami, které mají pouze své konce společné s  $G$ .

Dva grafy  $G, H$  nazveme *homeomorfní*, pokud existuje třetí graf  $K$ , který je zároveň dělením  $G$  i dělením  $H$ . Následující obrázek ukazuje příklad dvojice grafů, z nichž žádný není dělením druhého, ale jsou homeomorfní. Silně zvýrazněné jsou hrany, které je třeba vydělit, abychom dostali z obou grafů ten samý.

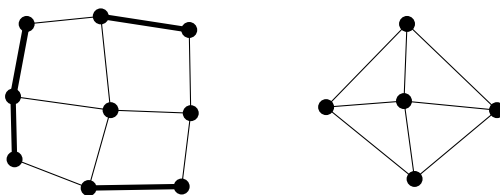


**Definice 2.1.2.** *Kontrakcí* hrany  $e = uv \in E(G)$  rozumíme operaci  $G/e$ , která hranu  $e$  odstraní a vrcholy  $u, v$  sloučí do jednoho vrcholu, např.  $u$ , ze kterého tedy povedou všechny hrany do ostatních vrcholů, které vedly z  $u$  nebo z  $v$ .

Vidíme ovšem, že takto definovaná operace nemusí vytvořit graf tak, jak jsme si jej zavedli. Zejména pokud hrana  $e$  ležela v cyklu délky 3, po její kontrakci nám vzniká dvojice vrcholů, která je spojena více než jednou hranou, tudíž vzniká tzv. multigraf, který odporuje naší definici grafu, kde  $E(G)$  je množina. Z tohoto důvodu si zavedeme ještě *zobecněnou kontrakci* hrany  $G//e$ , která navíc ještě nahradí všechny vzniklé multihrany jednoduchými hranami. Platí tedy

$$G//e = (V(G) \setminus \{v\}, \{e \in E(G), v \notin e\} \cup \{uv_1, vv_1 \in E(G)\}).$$

Příklad zobecněné kontrakce několika hran grafu vidíme na obrázku níže. Nalevo je graf před kontrakcí, zvýrazněné jsou hrany, které budou kontrahovány, napravo je graf po kontrakci.



## 2.2 Bloky

**Definice 2.2.1.** Nechť  $G$  je graf. Pak na množině hran  $E(G)$  definujeme relaci  $\sim$  následovně:  $e_1 \sim e_2$ , pokud  $e_1 = e_2$  nebo  $G$  obsahuje nějakou kružnici  $C$ , na které leží hrany  $e_1, e_2$ .

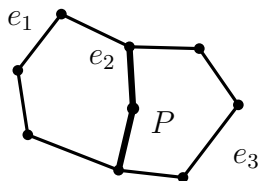
Podstatné pro nás bude pozorování, že tato relace je ekvivalencí.

**Tvrzení 2.2.2.** *Relace  $\sim$  je ekvivalence.*

**Důkaz.** Reflexivita a symetrie jsou zřejmé z definice. Je tedy potřeba ještě ukázat, že je  $\sim$  tranzitivní, tj. pro každou trojici hran  $e_1, e_2, e_3 \in E(G)$  platí

$$e_1 \sim e_2 \wedge e_2 \sim e_3 \Rightarrow e_1 \sim e_3.$$

Pokud  $e_1 = e_2$ ,  $e_2 = e_3$  nebo všechny tři hrany leží na jedné kružnici, je to triviální, uvažujme tedy, že hrany jsou po dvou různé a hrany  $e_1, e_2$  leží na společné kružnici  $C_1$  a hrany  $e_2, e_3$  leží na společné kružnici  $C_2$  různé od  $C_1$ . Kružnice  $C_1, C_2$  mají určitě průnik, a to nějakou cestu  $P$ , na které leží hrana  $e_2$ .



Obrázek 2.1: K důkazu ekvivalence  $\sim$

Když uvážíme graf, vzniklý sjednocením  $C_1 \cup C_2$  a odebereme z něj cestu  $P$  až na její koncové vrcholy, dostaneme kružnici  $C_3$ , na které leží hrany  $e_1$  i  $e_3$ , což je to, co jsme chtěli ukázat. ♣

V daném grafu  $G$  nám třída ekvivalence této relace spolu s koncovými vrcholy hran v ní ležících vytvoří podgraf  $B$ , který nazveme *blok*. Pokud navíc řekneme, že i vrcholy stupně 0 v  $G$  jsou bloky, je každý graf sjednocením svých bloků. Hranu, která není v relaci  $\sim$  s žádnou jinou, nazveme *most*, dále vrchol, který leží ve více než jednom bloku, nazveme *artikulace*.

Následující tvrzení shrne podstatné poznatky o blocích, které v další sekci naleznou silné uplatnění.

**Tvrzení 2.2.3.** *Nechť  $G$  je graf.*

- Hrana  $e \in E(G)$  je most právě tehdy, když její konce leží v různých komponentách grafu  $G \setminus e$ .*
- Vrchol  $v \in V(G)$  je artikulace právě tehdy, když  $G \setminus v$  má více komponent než  $G$ .*
- Nechť  $u, v$  jsou vrcholy v bloku  $B \subseteq G$ , který má aspoň dvě hrany. Pak  $B$  obsahuje cyklus, na kterém leží  $u$  i  $v$ .*
- Dva bloky  $G$  mají společný nejvýše jeden vrchol (artikulaci).*
- Nechť  $B_1, B_2, \dots, B_k$  ( $k \geq 3$ ) jsou různé bloky  $G$  takové, že bloky  $B_i$  a  $B_{i+1}$  pro  $i = 1, 2, \dots, k-1$  mají společný vrchol a všechny tyto průniky jsou po dvou různé. Pak  $B_1 \cap B_k = \emptyset$ .*

- Důkaz.** (a) O obou stranách této ekvivalence snadno ukážeme, že jsou ekvivalentní s tvrzením, že mezi koncovými vrcholy  $e$  vede právě jedna cesta.
- (b) Nechť  $B_1, B_2$  jsou bloky, jejichž společným vrcholem je  $v$ . Nechť hrana  $uv$  leží v  $B_1$  a hrana  $vw$  leží v  $B_2$ . Opět z definice bloků snadno ukážeme, že obě strany dokazované ekvivalence jsou ekvivalentní s tvrzením, že mezi  $u$  a  $w$  vede právě jedna cesta.
- (c) Pokud  $uv \in E(G)$ , pak je v tomto bloku ještě nějaká jiná hrana, se kterou musí  $uv$  ležet na nějaké kružnici v  $B$ . Pokud  $uv \notin E(G)$ , pak  $u$  i  $v$  jsou nutně koncové vrcholy nějakých dvou různých hran v  $B$ , které už spolu musí opět ležet na nějaké kružnici v  $B$ .
- (d) Předpokládejme pro spor, že dva bloky  $B_1, B_2$  mají společné dva různé vrcholy  $u, v$  (tím pádem oba bloky mají aspoň tři vrcholy a aspoň dvě hrany). Podle (c) je v bloku  $B_i$  kružnice  $C_i$ , která obsahuje vrcholy  $u, v$  pro  $i = 1, 2$ . Z částí kružnice  $C_1$  a kružnice  $C_2$  snadno poskládáme kružnici, která obsahuje hrany obou bloků, což je spor.
- (e) Zřejmě existuje cesta přes bloky  $B_2, \dots, B_{k-1}$  z artikulace  $B_1 \cap B_2$  do artikulace  $B_{k-1} \cap B_k$ . Předpokládejme pro spor  $B_1 \cap B_k = v$ . Pak buď  $v = B_1 \cap B_2$  nebo existuje cesta z  $v$  do artikulace  $B_1 \cap B_2$ , která je celá v  $B_1$ . Také existuje cesta v bloku  $B_k$  mezi  $v$  a  $B_{k-1} \cap B_k$ . Tím jsme našli kružnici, na které leží hrany všech bloků, což je spor. ♣

## 2.3 $k$ -souvislé grafy

**Definice 2.3.1.** Souvislý graf  $G$  je  $k$ -souvislý, pokud má alespoň  $k + 1$  vrcholů a graf vzniklý odstraněním libovolné množiny nejvýše  $k - 1$  vrcholů a hran z nich vedoucích je souvislý.

Zdaleka nejzajímavějšími pro praktické využití jsou 2-souvislé grafy, tedy takové, které zůstávají souvislé po odstranění libovolného jednoho vrcholu.

Tyto grafy můžeme velmi elegantně charakterizovat díky poznatkům o blocích, které jsme si zavedli výše.

**Věta 2.3.2.** *Nechť  $G$  je souvislý graf s aspoň třemi vrcholy. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

- (a)  $G$  je 2-souvislý
- (b)  $G$  nemá žádné artikulace
- (c) Každé dva vrcholy  $G$  leží na nějakém společném cyklu.
- (d) Každé dvě hrany  $G$  leží na nějakém společném cyklu.
- (e)  $G$  má právě jeden blok.

**Důkaz.** Z definice bloků a tvrzení 2.2.3 platí  $(b) \Leftrightarrow (c) \Leftrightarrow (d) \Leftrightarrow (e)$ , takže stačí ukázat, že 2-souvislost grafu je ekvivalentní s libovolným  $z$  dalších bodů.

Dokážeme, že  $(a) \Leftrightarrow (b)$ :

„ $\Rightarrow$ “: Nechť  $G$  je 2-souvislý. To znamená, že  $G \setminus v$  je souvislý pro libovolný vrchol  $v$  grafu  $G$ , což podle bodu  $(b)$  tvrzení 2.2.3 znamená, že  $v$  není artikulace.

„ $\Leftarrow$ “: Nechť  $G$  nemá artikulace. Pak podle bodu  $(b)$  tvrzení 2.2.3 má  $G \setminus v$  stejně komponent jako  $G$ , tedy jednu, takže odstraněním libovolného vrcholu zůstává  $G$  souvislý, je tedy 2-souvislý. ♣

Všimněme si, že to znamená, že rozklad grafu na bloky je téměř totéž, co jeho rozklad na jeho maximální 2-souvislé podgrafy (tj. takové, které nejsou podgrafy jiného 2-souvislého podgrafu), rozdíl nastává pouze pro bloky o jednom nebo dvou vrcholech.

V první kapitole jsme ukázali, že každý strom umíme získat postupným přilepováním listů ke zbytku grafu. Ukazuje se, že podobnou operaci umíme najít i pro sestrojování 2-souvislých grafů.

Každý cyklus je 2-souvislý. Když k 2-souvislému grafu přilepíme tzv. „ucho“, tzn. připojíme k němu cestu, která má pouze koncové vrcholy společné s původním grafem, dostaneme opět 2-souvislý graf. Ukážeme, že takovouto operací dostaneme každý 2-souvislý graf z cyklu délky aspoň 3.

**Věta 2.3.3.** *Každý 2-souvislý graf lze sestrojit z cyklu délky aspoň 3 postupným připojováním cest, které mají pouze koncové vrcholy společné s aktuálním grafem.*

**Důkaz.** Nechť  $G$  je 2-souvislý graf a  $H$  nějaký cyklus v něm. Pokud  $G = H$ , není co řešit, takže předpokládejme  $G \neq H$ . Protože  $G$  je souvislý, existuje hrana  $uv \in E(G) \setminus E(H)$  taková, že  $u \in V(H)$ , neboli hrana, přes kterou je  $H$  napojen ke zbytku grafu.  $G$  je navíc 2-souvislý, takže graf  $G \setminus u$  je souvislý. Zvolme nejkratší cestu  $Q$ , která spojuje  $v$  s nějakým vrcholem  $z \in V(H) \setminus \{u\}$ . Když teď uvážíme cestu  $P$ , která vznikne spojením  $Q$  s hranou  $uv$ , je zřejmé, že tato cesta má pouze své vrcholy společné s  $H$ . Připojíme tuto cestu k  $H$  a celý postup opakujeme. Je zřejmé, že buď jednou nastane chtěná rovnost  $G = H$  nebo najdeme další cestu uvedeným postupem. ♣

Uvedený postup konstrukce 2-souvislého grafu se dá s výhodou využít při dokazování matematickou indukcí.

**Příklad.** Nechť  $G$  je graf o  $n$  vrcholech. Dokažte, že následující dvě podmínky jsou ekvivalentní:

- $G$  je 2-souvislý
- Existuje uspořádání jeho vrcholů  $v_1, v_2, \dots, v_n$  takové, že  $v_1v_n \in E(G)$  a každý z vrcholů  $v_i, i = 2, 3, \dots, n-1$  je spojen hranou s nějakým vrcholem nalevo od něj a s nějakým vrcholem napravo od něj.

**Řešení.** „ $\Leftarrow$ “: Předpokládejme, že popsané uspořádání vrcholů existuje a předpokládejme pro spor, že  $G$  není 2-souvislý. Dva různé vrcholy, které spolu neleží v bloku, nejsou spojeny hranou, takže  $v_1$  a  $v_n$  leží v jednom bloku  $B_1 \subset G$ . Vezměme nyní libovolný vrchol  $v_i$ , který leží v bloku  $B_2$  a není artikulací mezi bloky  $B_1, B_2$  a nechť  $v$  je artikulace mezi těmito bloky.



Když budeme z  $v_i$  postupovat po hranách vlevo v uspořádání, nutně se dostaneme až do  $v_1$ , obdobně napravo se dostaneme až do  $v_n$ . Do těchto vrcholů se ale z  $v_i$  můžeme dostat jen přes artikulaci  $v$ , která tím pádem musí ležet jak napravo, tak nalevo od  $v_i$ , což je spor. „ $\Rightarrow$ “: Předpokládejme, že  $G$  je 2-souvislý. Dokážeme indukcí vzhledem k  $|E(G)|$ , že existuje popsané uspořádání a navíc libovolné dva vrcholy mohou hrát roli  $v_1, v_n$ . Pro libovolný cyklus a tedy i pro  $K_3$ , nejmenší 2-souvislý graf, je to triviální. Pokud  $G$  není cyklus, pak z předchozí věty vznikl z nějakého grafu  $G'$  přidáním cesty. Z indukčního předpokladu má  $G'$  popsané uspořádání, načež stačí vrcholy odebrané cesty přidat do uspořádání mezi její koncové vrcholy, čímž završíme indukční krok. ♣

Díky tomu, že každé dva bloky mají společný nejvýše jeden vrchol, můžeme relativně snadno svázat vztahem počet vrcholů grafu, počet bloků a počet vrcholů ve všech blocích. To nám ukáže následující věta, kterou využijeme později ve čtvrté kapitole.

**Věta 2.3.4.** *Nechť  $G$  je souvislý graf na  $n$  vrcholech sestávající z  $k$  bloků  $B_1, B_2, \dots, B_k$ . Pak*

$$\sum_{i=1}^k |V(B_i)| = n + k - 1.$$

**Důkaz.** Budeme postupovat indukcí vzhledem k  $k$ . Příklad  $k = 1$  je ověřitelný triviálně, pojďme na indukční krok. Ukažme, že v  $G$  najdeme blok, který má pouze jednu artikulaci: Vezměme libovolný blok a postupujme od něj vždy přes artikulaci do sousedního bloku. Nikdy nemůžeme dojít do bloku, kde jsme už byli, protože bychom tím našli kružnici, která by nám více bloků spojila do jednoho (viz bod (e) tvrzení 2.2.3), takže jednou se musíme dostat do bloku, ze kterého už se dál nedostaneme (nelze pokračovat donekonečna, protože bloků je konečně mnoho), a to je náš hledaný blok. Označme počet vrcholů v tomto bloku  $p$ . Tento blok z grafu až na artikulaci odstraníme a dostáváme graf o  $k - 1$  krocích, na který aplikujeme indukční předpoklad, takže součet vrcholů ve všech blocích v novém grafu je

$$(n - p + 1) + k - 1 - 1 = n - p + k - 1.$$

Když nyní přidáme odstraněný blok zpět, přidali jsme blok o  $p$  vrcholech, takže zvýšíme předchozí součet o  $p$ , čímž jsme hotovi. ♣

Ani 3-souvislé grafy nezůstávají bez pozornosti. Ukážeme si zde nicméně pouze jedno velice podstatné lemma, jehož důsledkem je mimo jiné podobná charakterizace 3-souvislých grafů, jaké jsme dosáhli pro 2-souvislé grafy a stromy - definujeme operaci, pomocí níž bude možné každý 3-souvislý graf zkonstruovat z nejmenšího 3-souvislého grafu  $K_4$ .

**Lemma 2.3.5.** *Nechť  $G$  je 3-souvislý graf s aspoň 5 vrcholy. Pak v něm existuje hrana  $e$  taková, že graf  $G//e$  je 3-souvislý.*

**Důkaz.** Důkaz povedeme sporem. Předpokládejme, že pro každou hranu  $e = xy$  grafu  $G$  je graf  $G//e$  nejvýše 2-souvislý. Tento graf má aspoň 4 vrcholy, takže v něm existuje dvouprvková množina vrcholů, jejíž odstranění jej rozdělí na více komponent. To zejména znamená, že jeden z těchto vrcholů musí být ten, který vznikne sloučením  $x$  a  $y$ , protože jinak by původní graf  $G$  nebyl 3-souvislý. To dále znamená, že množina vrcholů  $\{x, y, z\}$  pro nějaký vrchol  $z$  z  $G$  rozděluje  $G$ .

Učinné jednoduché, ale důležité pozorování - je-li  $\{x, y, z\}$  rozdělující množinou grafu  $G$ , musí každý z vrcholů  $x, y, z$  sousedit s každou komponentou  $G \setminus \{x, y, z\}$ , protože jinak bychom uměli nějakou komponentu oddělit odstraněním méně než tří vrcholů, takže by  $G$  nebyl 3-souvislý.

Zvolme nyní  $e$  a  $z$  tak, aby největší komponenta  $H$  grafu  $G \setminus \{x, y, z\}$  měla největší možnou velikost (co do počtu vrcholů). Nechť  $H'$  je libovolná jiná komponenta a  $u$  je její vrchol sousedící s vrcholem  $z$ . Z úvodního předpokladu je i graf  $G//zu$  nejvýše 2-souvislý, takže podle stejné úvahy jako předtím existuje vrchol  $v$  takový, že  $\{z, u, v\}$  rozděluje  $G$ .

Nyní uvažme indukovaný podgraf grafu  $G$  na vrcholech  $(V(H) \cup \{x, y\}) \setminus \{v\}$ . Ukážeme, že je vždy souvislý. Pokud  $x = v$  nebo  $y = v$ , je to snadné: podgraf na  $V(H)$  je souvislý určitě, protože tvoří komponentu  $G \setminus \{x, y, z\}$  a podle pozorování, které jsme učinili výše, je k této komponentě připojen i zbylý z vrcholů  $x, y$ , který není  $v$ . Dále tedy předpokládejme, že  $v \in V(H)$ .

Pokud by řečený indukovaný podgraf nebyl souvislý, ale sestával by z více komponent, je zřejmé, že vrcholy  $x, y$  by byly společně v jedné, neboť jsou spojeny hranou, tudíž by tento podgraf měl komponentu souvislosti, která neobsahuje vrchol  $x$  ani  $y$ . Jenže graf  $H$  byl sestaven tak, že byl ke zbytku grafu  $G$  připojen pouze přes vrcholy  $x, y, z$ , takže tato jeho část by byla připojena ke zbytku grafu pouze vrcholem  $v$  a případně ještě vrcholem  $z$ , takže by dvouprvková množina  $\{v, z\}$  rozdělovala  $G$ , což je ve sporu s tím, že graf  $G$  je 3-souvislý.

Dokázali jsme, že uvažovaný indukovaný podgraf  $G$  je souvislý a navíc vzhledem k jeho volbě neobsahuje žádný z vrcholů  $z, u, v$ , takže je podgrafem nějaké souvislé komponenty  $H''$  grafu  $G \setminus \{z, u, v, \}$ . Jenže tím pádem zřejmě  $|V(H'')| > |V(H)|$ , protože onen indukovaný podgraf jsme zvolili tak, že má o aspoň jeden vrchol více, než je  $|V(H)|$ . Uvedená nerovnost je ale ve sporu se zvolenou maximalitou velikosti množiny  $V(H)$ , čímž je důkaz dokončen. ♣

# Kapitola 3

## Vybrané partie z topologie

V této kapitole se seznámíme s některými pojmy z topologie a analýzy. Mnohé z nich jsou zajímavé i samy o sobě, celkově se však jedná zejména o výběr informací, které využijeme ve čtvrté kapitole.

### 3.1 Kompaktní množiny

**Definice 3.1.1.** *Metrickým prostorem* nazveme uspořádanou dvojici  $(M, d)$  kde  $M$  je množina a  $d$  je metrika na  $M$ . *Metrikou* rozumíme funkci  $M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ , která splňuje následující podmínky:

$\forall x, y, z \in M$ :

- $d(x, y) \geq 0$
- $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- $d(x, y) = d(y, x)$
- $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$  (trojúhelníková nerovnost)

Všimněme si, že metrika není nic jiného, než popis, jak chápeme v daném metrickém prostoru vzdálenosti. V tomto textu se nadále budeme zabývat metrickým prostorem  $(\mathbb{R}^2, |\cdot|)$ , neboli euklidovskou rovinou, kde vzdálenost mezi body pro nás bude taková, na jakou jsme zvyklí - délka úsečky, která je spojuje. Následující pojmy si ovšem zavedeme trochu obecněji v  $\mathbb{R}^n$ .

**Definice 3.1.2.** Nechť je dán bod  $x \in \mathbb{R}^n$  a reálné číslo  $\varepsilon > 0$ . *Otevřeným diskem*  $D(x, \varepsilon)$  nazveme množinu bodů v  $\mathbb{R}^n$ , které jsou od  $x$  vzdáleny méně než  $\varepsilon$ . Obdobně *zavřeným diskem* budeme rozumět množinu bodů, které jsou od  $x$  vzdáleny nejvýše  $\varepsilon$ .

Takto definovanému disku se také někdy říká *okolí* bodu.

**Definice 3.1.3.** Množinu  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  nazveme *otevřenou*, pokud pro libovolný bod  $x \in M$  existuje reálné číslo  $\varepsilon > 0$  takové, že otevřený disk  $D(x, \varepsilon) \subseteq M$ .

Neformálně lze tuto definici formulovat tak, že v otevřené množině s každým bodem leží v té množině i nějaké jeho okolí. *Uzavřenou* množinu můžeme snadno dodefinovat jako doplněk nějaké otevřené množiny do  $\mathbb{R}^n$ . Další možnost, jak definovat uzavřenou množinu, je uvážit konvergující posloupnosti bodů v té množině. Pak platí, že množina je uzavřená, pokud s každou takovou posloupností leží v množině i její limita. Tím se zde ale více zabývat nebudeme.

**Definice 3.1.4.** Nechť  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  a  $A$  je indexovací množina. Pak systém otevřených množin  $\{G_a\}_{a \in A}$  nazveme *otevřeným pokrytím* množiny  $E$ , pokud  $E \subseteq \bigcup_{a \in A} G_a$ .

**Definice 3.1.5.** Nechť  $K \subseteq \mathbb{R}^n$ . Množinu  $K$  nazveme *kompaktní*, pokud z **každého** jejího otevřeného pokrytí umíme vybrat konečné podpokrytí (tj. vybrat konečně mnoho množin z daného pokrytí, které budou dohromady rovněž tvořit pokrytí  $K$ ).

**Příklad.** Uvažme např. metrický prostor  $(\mathbb{R}, |x - y|)$ , tedy prostor na reálných číslech, kde metrikou je absolutní hodnota rozdílu dvou čísel. Ukažte, že množina  $A = [0, \infty)$  není kompaktní.

**Řešení.** Uvažme otevřené pokrytí  $\{(-1, n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  množiny  $A$ . Když vezmeme libovolnou konečnou podmnožinu  $\{(-1, a_1), (-1, a_2), \dots, (-1, a_k)\}$ , určitě existuje  $n^*$  takové, že pro všechna  $i$  od 1 do  $k$  platí  $a_i < n^*$ , takže prvek  $n^*$  touto podmnožinou pokrytý nebude, tudíž  $A$  není kompaktní. ♣

**Definice 3.1.6.** Nechť  $E \subseteq \mathbb{R}^n$ . Množinu  $E$  nazveme *omezenou*, pokud existuje  $x \in \mathbb{R}^n$  a  $\varepsilon > 0$  tak, že  $E \subseteq D(x, \varepsilon)$ .

Následující věta dává v prostorech  $\mathbb{R}^n$  do souvislosti některé výše řečené vlastnosti množin.

**Věta 3.1.7. (Heine-Borel)**

*Nechť  $S \subseteq \mathbb{R}^n$ . Pak následující dvě podmínky jsou ekvivalentní:*

- $S$  je uzavřená a omezená
- $S$  je kompaktní

Důkaz této věty v jejím plném znění pro další účely nepotřebujeme, proto jej nebudeme uvádět. Dokážeme si ale její slabší variantu v prostoru  $\mathbb{R}$  - že uzavřený interval  $[0, 1]$  je kompaktní. K tomu budeme nejprve potřebovat jedno pomocné tvrzení.

**Lemma 3.1.8. (Cantorova věta o vnořených intervalech)**

*Nechť  $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$  je vnořená posloupnost uzavřených a omezených intervalů (tzn.  $[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \dots$ ). Pak průnik  $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$  je neprázdný. Navíc, pokud délka intervalů konverguje k nule, má tento průnik právě jeden prvek.*

**Důkaz.** Z předpokladů věty je zřejmé posoupanost  $\{a_n\}$  neklesající a posloupnost  $\{b_n\}$  nerostoucí, navíc  $a_n \leq b_n$  pro všechna  $n$ . Z poslední řečené podmínky plyne, že supremum  $s$  množiny  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ , které zřejmě existuje, splňuje nerovnosti  $s \leq b_n$  pro všechna  $n$ , takže

platí také  $s \leq i$ , kde  $i$  je infimum množiny  $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ . Vzhledem k tomu, že  $a_n \leq s \leq i \leq b_n$ , platí  $[s, i] \subseteq [a_n, b_n]$  pro všechna  $n$ , takže platí i

$$[s, i] \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n],$$

takže tento průnik je zejména neprázdný. Pokud délka  $[a_n, b_n]$  jde k nule, tak nastává rovnost  $s = i$  a průnik má právě tento jeden prvek. ♣

Nyní už se můžeme pustit do důkazu výše zmíněného tvrzení.

**Věta 3.1.9.** *Uzavřený a omezený interval  $[0, 1]$  je kompaktní.*

**Důkaz.** Necht'  $\vartheta$  je nějaké otevřené pokrytí intervalu  $[0, 1]$ . Předpokládejme pro spor, že  $[0, 1]$  není kompaktní. Pak zřejmě aspoň jeden z intervalů  $[0, \frac{1}{2}]$ ,  $[\frac{1}{2}, 1]$  není pokryt konečným počtem intervalů z  $\vartheta$ , označme jej  $[a_1, b_1]$ . Stejnou úvahu aplikujeme znovu na interval  $[a_1, b_1]$  - jedna z jeho polovin délky  $\frac{1}{4}$  opět nemá konečné pokrytí v  $\vartheta$ . Takto můžeme postupovat induktivně a dostat posloupnost nekonečně mnoha vnořených intervalů  $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ , z nichž žádný nemá konečné pokrytí intervaly z  $\vartheta$ . Navíc, z konstrukce této posloupnosti zřejmě platí

$$b_n - a_n = \frac{1}{2^n},$$

takže délka intervalů jde v nekonečnu k nule a tudíž podle lemmatu 3.1.8 má  $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$  právě jeden prvek  $p$ . Protože však  $p \in [0, 1]$ , existuje nějaký otevřený interval  $O \in \vartheta$  takový, že  $p \in O$ . Díky tomu, že je otevřený, existuje  $\varepsilon > 0$  takové, že

$$(p - \varepsilon, p + \varepsilon) \subseteq O.$$

Určitě nyní umíme zvolit dostatečně velké  $n$  takové, že

$$\frac{1}{2^n} < \varepsilon.$$

Pak z toho, že  $p \in [a_n, b_n]$  plyne také  $[a_n, b_n] \subseteq (p - \varepsilon, p + \varepsilon)$ , takže i

$$[a_n, b_n] \subseteq O.$$

To znamená, že jsme jedním intervalem z  $\vartheta$  pokryli interval  $[a_n, b_n]$ , který byl zvolen tak, že jej nelze pokrýt konečně mnoha intervaly z  $\vartheta$ , tudíž máme kýžený spor a jsme hotovi - ukázali jsme, že interval  $[0, 1]$  je kompaktní. ♣

Na závěr uvedme ještě jedno tvrzení z této oblasti, které využijeme, až budeme hovořit o kreslení grafů do roviny.

**Věta 3.1.10.** *Obraz  $f(A)$  kompaktní množiny  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  ve spojitém a prostém zobrazení  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  je kompaktní.*

**Důkaz.** Nechť  $I$  je indexovací množina a nechť  $\{S_\alpha\}_{\alpha \in I}$  je libovolné otevřené pokrytí  $f(A)$ . Zřejmě platí

$$A = f^{-1}(f(A)) \subseteq f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha \in I} S_\alpha\right) \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} f^{-1}(S_\alpha).$$

Díky spojitosti  $f$  je každá z množin  $f^{-1}(S_\alpha)$  otevřená, takže jejich sjednocení tvoří otevřené pokrytí  $A$ .  $A$  je kompaktní, takže existuje přirozené  $n$  takové, že

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^n f^{-1}(S_{\alpha_i})$$

pro nějaká  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in I$ . Z toho můžeme dále nahlédnout, že

$$f(A) \subseteq f\left(\bigcup_{i=1}^n f^{-1}(S_{\alpha_i})\right) \subseteq f\left(f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^n S_{\alpha_i}\right)\right) = \bigcup_{i=1}^n S_{\alpha_i},$$

takže jsme vybrali  $n$  množin z otevřeného pokrytí  $f(A)$  a ukázali jsme, že tvoří rovněž pokrytí, důkaz je kompletní. ♣

Toto tvrzení lze dokázat i pro zobrazení mezi dvěma obecnými topologickými prostory, z čehož plyne řada zajímavých důsledků, například to, že můžeme i v podivném a komplikovaném prostoru získat kompaktní množinu, stačí jen sestrojít zobrazení z jednoduššího prostoru. Zajímavá je i samotná technika tohoto důkazu - vytáhli jsme množinu z jednoho prostoru do druhého, ve kterém jsme o ní věděli více, upravili jsme ji a poslali zpátky.

## 3.2 Oblouková souvislost

V této sekci krátce představíme několik pojmů z topologie roviny.

**Definice 3.2.1.** *Obloukem* v rovině budeme rozumět spojitý a prostý obraz intervalu  $[0, 1]$  v zobrazení  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Pokud je zobrazení  $f$  prosté až na rovnost  $f(0) = f(1)$ , nazveme takový obraz *topologickou kružnicí* nebo jen *kružnicí* v rovině. Množinu  $M \subseteq \mathbb{R}^2$  nazveme *obloukově souvislou*, pokud pro každé dva body  $x, y \in M$  existuje oblouk s krajními body  $x, y$ , který je celý v  $M$ . Množina  $A \subseteq M$  *rozděluje* množinu  $M$ , pokud  $M$  je obloukově souvislá a  $M \setminus A$  není obloukově souvislá.

Následující definice formalizuje naši intuitivní představu, jak například kružnice dělí rovinu na dvě části. U běžné kružnice, na kterou jsme zvyklí z planimetrie, je to zřejmé. Ukazuje se však, že dokázat totéž pro topologickou kružnici je výrazně obtížnější.

**Definice 3.2.2.** *Komponentou obloukové souvislosti* množiny  $M \subseteq \mathbb{R}^2$  nazveme maximální obloukově souvislou množinu  $A \subseteq M$  (tj. takovou, že neexistuje žádná obloukově souvislá množina  $P \subseteq M$  taková, že by  $A \subset P$ ). *Stěnou* množiny  $M$  nazveme komponentu obloukové souvislosti  $\mathbb{R}^2 \setminus M$  (tj. napřed stěnou kružnice je její vnitřek a vnějšek). *Vnější stěnou* nazveme stěnu, která není omezená, *vnitřní stěnou* nazveme stěnu, která je omezená.

Speciálním a jednodušším případem oblouku pro nás bude tzv. *lomenice*. To pro nás bude lomená čára v  $\mathbb{R}^2$ , která sama sebe nikde neprotíná. *Lomenicovou kružnicí* nazveme lomenici, jejíž krajní body splývají v jeden.

# Kapitola 4

## Rovinné grafy

Vzhledem k tomu, že nejpřirozenějším znázorněním grafu je právě schéma v rovině, průkopníci teorie grafů se začali velmi brzo zajímat o grafy, které lze v rovině nakreslit bez křížení hran. Jednou z prvních matematických inspirací byla úloha o třech studnách a třech domech: v rovině stojí tři studny a tři domky a úkolem je každý dům spojit potrubím s každou ze studen, aniž by se některá dvě potrubí křížila. V terminologii teorie grafů to znamená nakreslit graf  $K_{3,3}$  v rovině bez křížení hran. V této kapitole mimo jiné zjistíme, že nerovinnost grafu  $K_{3,3}$  má čistě kombinatorickou podstatu.

Než se dostaneme ke kreslení grafů do roviny, zamysleme se nad tím, jak bychom je kreslili bez křížení hran do prostorů o vyšších dimenzích. Není těžké si rozmyslet, jak nakreslit libovolný graf do prostoru dimenze 3, aby každá hrana byl oblouk - stačí například umístit všechny vrcholy na přímku, přes kterou proložíme za každou hranu různou rovinu, ve které danou hranu nakreslíme. Nicméně v první úloze kapitoly si ukážeme silnější výsledek.

**Příklad.** Dokažte, že libovolný graf  $G$  zvládneme nakreslit do euklidovského prostoru dimenze 3 tak, že každý vrchol je jiný bod, každá hrana je úsečka a hrany se nepotkávají jinde než ve vrcholech.

**Řešení.** Řešení povedeme ve dvou částech. Nejprve si rozmysleme postačující podmínku pro umístění vrcholů do prostoru. Pokud se dvě úsečky protínají v jednom bodě, leží jejich čtyři koncové body v jedné rovině. Pokud tedy vrcholy umístíme do prostoru tak, že žádné čtyři vrcholy neleží v jedné rovině, žádné dvě hrany se nám nebudou protínat v jednom bodě. Ještě se však může stát, že mají dvě úsečky společných více bodů. To může nastat jen tehdy, kdy je skupina více než dvou bodů kolineární. Máme tedy dvě podmínky pro umístění vrcholů do roviny - žádné tři nesmí ležet na jedné přímce a žádné čtyři v jedné rovině.

Ve druhé části řešení nyní ukážeme, že těmto podmínkám vyhoví rozmístění všech  $n$  vrcholů grafu na  $n$  bodů křivky  $\{[x, x^2, x^3], x \in \mathbb{R}^+\}$ . Zvolme na řečené křivce libovolné čtyři body

$$A = [a, a^2, a^3],$$

$$B = [b, b^2, b^3],$$

$$C = [c, c^2, c^3],$$

$$D = [d, d^2, d^3],$$

takové, že  $0 < a < b < c < d$ . K tomu, abychom ukázali, že pro tuto čtveřici jsou splněny výše požadované podmínky, stačí ukázat, že vektory  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$ ,  $\overrightarrow{AD}$  generují prostor dimenze 3. To dokážeme standardně úpravou matice těchto vektorů.

$$\begin{pmatrix} \overrightarrow{AD} \\ \overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{AB} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d-a & d^2-a^2 & d^3-a^3 \\ c-a & c^2-a^2 & c^3-a^3 \\ b-a & b^2-a^2 & b^3-a^3 \end{pmatrix}$$

Druhý řádek nyní nahradíme vektorem  $(c-a)\overrightarrow{AD} - (d-a)\overrightarrow{AC}$  a obdobně třetí řádek nahradíme vektorem  $(b-a)\overrightarrow{AD} - (d-a)\overrightarrow{AB}$  a dostáváme matici

$$\begin{pmatrix} d-a & d^2-a^2 & d^3-a^3 \\ 0 & (c-a)(d^2-a^2) - (d-a)(c^2-a^2) & (c-a)(d^3-a^3) - (d-a)(c^3-a^3) \\ 0 & (b-a)(d^2-a^2) - (d-a)(b^2-a^2) & (b-a)(d^3-a^3) - (d-a)(b^3-a^3) \end{pmatrix},$$

což po snadných úpravách, které přenecháme čtenáři dává

$$\begin{pmatrix} d-a & d^2-a^2 & d^3-a^3 \\ 0 & (c-a)(d-a)(d-c) & (c-a)(d-a)(d-c)(a+c+d) \\ 0 & (b-a)(d-a)(d-b) & (b-a)(d-a)(d-b)(a+b+d) \end{pmatrix},$$

z čehož po zkrácení konstanty ve druhém a třetím řádku snadno dostáváme schodovitý tvar

$$\begin{pmatrix} d-a & d^2-a^2 & d^3-a^3 \\ 0 & 1 & a+c+d \\ 0 & 0 & c-b \end{pmatrix},$$

čímž je hotová druhá část důkazu a tím i celé cvičení. ♣

## 4.1 Rovinný graf a topologie roviny

Začněme tím, že formalizujeme rovinné nakreslení grafu.

**Definice 4.1.1.** Graf  $G$  nazveme *rovinným*, pokud existuje jeho reprezentace  $\Gamma$  v rovině taková, že každý vrchol je jiný bod roviny, každá hrana je oblouk a hrany se nepotkávají jinde než ve vrcholech.

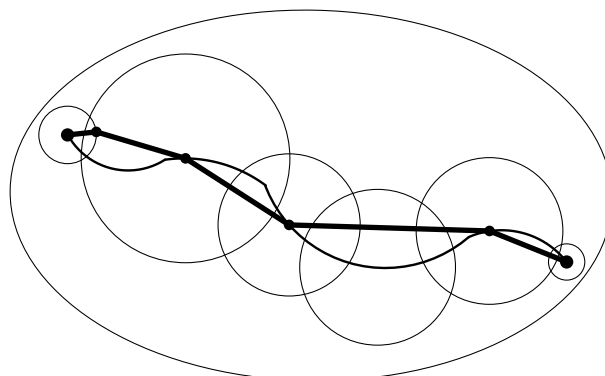
Oblouky však mohou být velmi složité, proto se bez nich budeme snažit obejít. Prozatím se je pokusíme nahradit lomenicemi.

**Lemma 4.1.2.** V otevřené, obloukově souvislé množině  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  existuje pro libovolné dva body  $a, b \in \Omega$  lomenice, která je spojuje a je celá v  $\Omega$ .

**Důkaz.** Pro každý bod  $z \in \Omega$  existuje  $\varepsilon > 0$  takové, že disk  $D_z = D(z, \varepsilon)$  je celý v  $\Omega$ . Nechť  $a, b$  jsou libovolné dva body z  $\Omega$  a nechť  $A$  je oblouk, který je spojuje. Uvažme pokrytí  $\{D_z | z \in A\}$  oblouku  $A$ . Oblouk  $A$  je spojitým zobrazením intervalu  $[0, 1]$ , který



je z věty 3.1.9 kompaktní, takže díky větě 3.1.10 je i  $A$  kompaktní v  $\Omega$ . Můžeme tedy uvážit konečné podpokrytí  $\{D_{z_1}, D_{z_2}, \dots, D_{z_k}\}$  původního pokrytí, v jehož sjednocení už hledanou lomenici snadno sestrojíme. Myšlenka důkazu je znázorněna v obrázku níže, tučně je zvýrazněna výsledná lomenice. ♣



*K důkazu lemmatu 4.1.2*

Ukázali jsme tedy, že každá komponenta obloukové souvislosti je i „lomenicově souvislá“. Teď už není obtížné ukázat, že i každý rovinný graf umíme překreslit tak, aby jeho hrany byly lomenicemi.

**Věta 4.1.3.** *Nechť  $G$  je rovinný graf. Pak existuje jeho reprezentace v rovině, ve které je každá hrana lomenicí.*

**Důkaz.** Nechť  $\Gamma$  je reprezentace grafu  $G$  v rovině pomocí oblouků. Pro každý vrchol  $v \in V(\Gamma)$  zvolíme  $\varepsilon > 0$  takové, že uzavřený disk  $D_v(v, \varepsilon)$  protíná pouze hrany vycházející z  $v$  a navíc pro libovolné dva vrcholy  $u, v \in V(\Gamma)$  platí  $D_u \cap D_v = \emptyset$  (snadno si rozmyslíme, že takové  $\varepsilon$  vždy umíme najít). Pro libovolnou hranu  $uv \in E(\Gamma)$  nyní uvážíme oblouk  $A_{uv}$ , který má pouze krajní body společné s  $D_u \cup D_v$ . Zřejmě můžeme tyto krajní body s vrcholy  $u, v$  spojit úsečkou v odpovídajícím disku  $D_u$  či  $D_v$ . Oblouky  $A_{uv}$  nyní zvládneme díky lemmatu 4.1.2 překreslit jako lomenice, protože díky volbě disků  $D_v, v \in V(\Gamma)$  snadno najdeme pokrytí oblouku  $A_{uv}$  disky obdobně jako v předchozím důkaze, které nebudou protínat žádné jiné hrany. ♣

Máme-li v rovině obyčejnou kružnici, jakou známe z planimetrie, je evidentní, že její doplněk do roviny má právě dvě komponenty obloukové souvislosti. Na pohled se to zdá zřejmé i pro topologickou kružnici, důkaz je ale složitý, neboť topologická kružnice může nabývat velmi komplikovaných tvarů. Nicméně důkaz existuje a tento poznatek se nazývá *Jordanovou větou o kružnici*. Nám bude stačit její jednodušší varianta pro lomenicovou kružnici.

**Věta 4.1.4.** *(Jordanova věta o kružnici)*

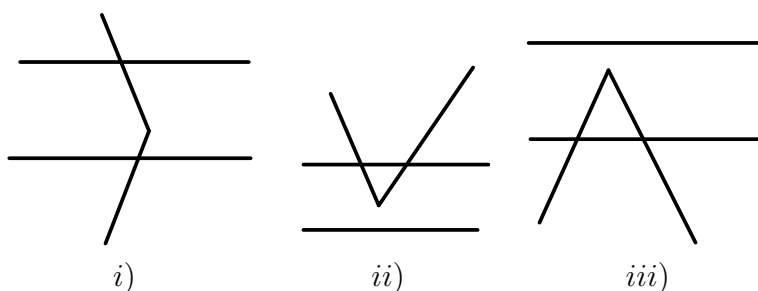
*Nechť  $C \subset \mathbb{R}^2$  je lomenicová kružnice. Pak množina  $\mathbb{R}^2 \setminus C$  sestává z právě dvou obloukově souvislých komponent a  $C$  tvoří hranici obou.*

**Důkaz.** Důkaz povedeme ve dvou částech. Nejprve ukážeme, že  $\mathbb{R}^2 \setminus C$  má aspoň dvě obloukově souvislé komponenty. Nechť  $P_1, P_2, \dots, P_n$  jsou úsečky, ze kterých sestává  $C$  a

bez újmy na obecnosti nechť žádná z nich není vodorovná (to lze, protože konečně mnoho úseček má konečně mnoho směrů).

Pro každý bod  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus C$  nyní definujeme číslo  $\omega(x)$  následovně: uvažme vodorovnou polopřímku z bodu  $x$  směrem doprava. Pak  $\omega(x)$  je počet všech úseček  $P_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) takových, že je řečená polopřímka protíná kdekoli kromě koncového bodu dané úsečky s vyšší  $y$ -souřadnicí. Číslo  $\bar{\omega}(x)$  pak definujeme jako zbytek po vydělení  $\omega(x)$  dvěma.

Uvažme nyní dva body  $a, b \in \mathbb{R}^2 \setminus C$ , které jsou spojeny úsečkou, která je také celá v  $\mathbb{R}^2 \setminus C$ , tedy neprotíná  $C$ . Ukážeme, že  $\bar{\omega}(a) = \bar{\omega}(b)$ . Pokud je úsečka  $ab$  rovnoběžná s vodorovným směrem, pak je to zřejmé - polopřímky z bodů  $a, b$  pak protínají přesně ty samé úsečky. Předpokládejme tedy bez újmy na obecnosti, že  $a$  má menší  $y$ -souřadnici než  $b$ . Díky předpokladu, že úsečka není protínána  $C$ , může se při posunu bodu  $x = a$  po úsečce  $ab$  do  $b$  stát s  $\omega(x)$  jen několik věcí - buď polopřímka opustí jednu úsečku a bude protínat novou, nebo opustí ostrý vrchol nebo jej protne. Tyto situace jsou ilustrovány v následujícím obrázku.



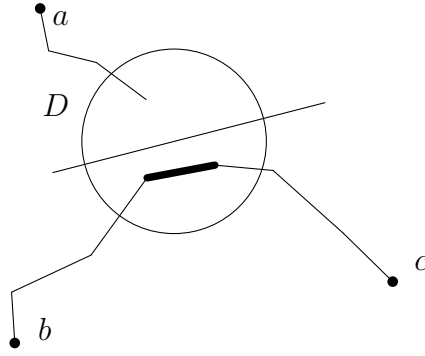
Snadno ověříme, že při všech těchto změnách se  $\omega(x)$  buď nezmění, nebo se změní o 2, takže parita se nezmění, což jsme chtěli ukázat. Snadno tedy nahlédneme, že pro body na libovolné úsečce, která je celá v  $\mathbb{R}^2 \setminus C$ , je  $\bar{\omega}(x)$  konstantní, z čehož také plyne, že je konstantní na libovolné lomenici v  $\mathbb{R}^2 \setminus C$  (hodnota se přenese přes krajní body úseček). To díky lemmatu 4.1.2 nakonec znamená, že  $\bar{\omega}(x)$  je konstantní na obloukově souvislých komponentách  $\mathbb{R}^2 \setminus C$ , což je velice příhodné. Když se nyní podíváme na dva body  $x, y$  velice blízko úsečky  $P_i$ , které jsou na jejích opačných stranách, je zřejmé, že se  $\omega(x)$  a  $\omega(y)$  liší o 1, takže tyto body musí ležet v různých obloukově souvislých komponentách  $\mathbb{R}^2 \setminus C$ , tudíž jsou aspoň dvě a jsme hotovi s první částí důkaz.

Ve druhé části důkazu ukážeme, že jsou ty komponenty nejvýše dvě. Uvažme disk  $D$ , jehož střed bude ležet na některé úsečce  $P_i$  a jehož průnik s  $C$  bude pouze část této úsečky. Zvolme v  $\mathbb{R}^2 \setminus C$  tři body  $a, b, c$  a sestrojme lomenice, které budou začínat v těchto bodech a končit uvnitř  $D$  (to jistě zvládneme, stačí se napřed přiblížit k  $C$  a poté jít po jejím obvodu dokud nenarazíme na  $D$ ).

Z Dirichletova principu je zřejmé, že dva z těchto bodů budeme umět uvnitř  $D$  spojit lomenicí, čímž získáme lomenici spojující dva z bodů  $a, b, c$ . To znamená, že libovolná trojice bodů se nachází v nejvýše dvou obloukově souvislých komponentách, takže jsou opravdu nutně nejvýše dvě a důkaz je kompletní. ♣

Z Jordanovy věty odvodíme ještě dva důsledky, týkající se chování lomenic v rovině, načež se již budeme věnovat grafům.

**Lemma 4.1.5.** *Nechť  $C$  je lomenicová kružnice v rovině a  $P$  je lomenice, která spojuje dva různé body  $p, q \in C$  a navíc  $P \cap C = \{p, q\}$ . Nechť dále  $C_1, C_2$  jsou dva úseky  $C$  vedoucí mezi body  $p, q$ . Pak  $C \cup P$  má právě tři stěny s hranicemi  $C, P \cup C_1, P \cup C_2$ .*



*K druhé části důkazu Jordanovy věty*

**Důkaz.** Z Jordanovy věty víme, že každá z kružnic  $C$ ,  $P \cup C_1$ ,  $P \cup C_2$  má právě dvě stěny, jednu omezenou a jednu neomezenou. Dále platí

$$(P \cup C_1) \cup (P \cup C_2) = C \cup P,$$

neboli

$$(\mathbb{R}^2 \setminus (P \cup C_1)) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus (P \cup C_2)) = \mathbb{R}^2 \setminus (C \cup P),$$

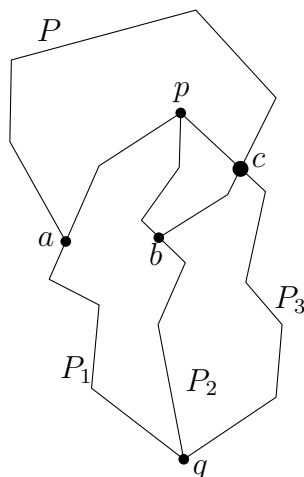
takže každá stěna  $C \cup P$  je průnikem nějaké stěny  $P \cup C_1$  a nějaké stěny  $P \cup C_2$ . Díky tomu, že  $P \cup C_1$  i  $P \cup C_2$  mají právě dvě stěny, stačí prozkoumat čtyři možnosti průniků.

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že  $P \setminus \{p, q\}$  leží v omezené stěně  $C$ . Nechť  $I_1$  resp.  $I_2$  je omezená stěna a  $E_1$  resp.  $E_2$  je neomezená stěna kružnice  $P \cup C_1$  resp.  $P \cup C_2$  a nechť  $E$  je neomezená stěna  $C$ . Díky předpokladu, že  $P$  leží v omezené stěně  $C$  je  $E$  jedinou neomezenou komponentou obloukové souvislosti na pravé straně výše uvedené rovnosti, takže platí nutně  $E = E_1 \cap E_2$  a  $E$  je tudíž stěnou  $C \cup P$ .

Dále úsek  $C_1 \setminus \{p, q\}$  leží v  $E_2$ , a protože tento úsek není na hranici  $C_2 \cup P$ , určitě i nějaké malé okolí nějakého bodu na tomto úseku leží v  $E_2$ , z čehož plyne, že celé  $I_1 \subseteq E_2$ , tudíž  $I_1 \cap E_2 = I_1$  a  $I_1$  je tím pádem další stěnou  $C \cup P$ . Zcela analogicky ukážeme, že  $I_2 \cap E_1 = I_2$ . Poslední průnik, který zbývá uvažovat, je  $I_1 \cap I_2$ . Snadno ale ukážeme, že tento průnik je prázdný, neboť  $I_1 \subseteq E_2$ ,  $I_2 \subseteq E_1$  a  $E_1 \cap E_2 = E$ . Probrali jsme všechny možnosti, takže jsme našli všechny stěny, přičemž jejich hranice jsou zřejmě  $C$ ,  $P \cup C_1$ ,  $P \cup C_2$ . ♣

**Lemma 4.1.6.** *Nechť  $p, q$  jsou dva různé body v rovině a jsou spojeny třemi lomenicemi  $P_1, P_2, P_3$ , které jsou až na okrajové body po dvou disjunktní. Dále mějme body  $a \in P_1 \setminus \{p, q\}$  a  $b \in P_2 \setminus \{p, q\}$ , mezi nimiž povedeme lomenici  $P$ , která celá až na body  $a, b$  leží ve stejné stěně kružnice  $P_1 \cup P_2$  jako  $P_3$ . Pak  $(P_3 \setminus \{p, q\}) \cap (P \setminus \{a, b\}) \neq \emptyset$ .*

**Důkaz.** Zvolíme  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$  takové, že  $D(a, \varepsilon_1) \cap P_3 = \emptyset$  a  $D(b, \varepsilon_2) \cap P_3 = \emptyset$  a mějme body  $a_1 \in D(a, \varepsilon_1) \cap P$  a  $b_1 \in D(b, \varepsilon_2) \cap P$ . Podle předchozího lemmatu má  $P_1 \cup P_2 \cup P_3$  právě tři stěny, přičemž vzhledem k volbě bodů  $a_1, b_1$  zřejmě  $a_1$  leží ve stěně s hranicí  $P_1 \cup P_3$  a  $b_1$  ve stěně s hranicí  $P_2 \cup P_3$ . Část lomenice  $P$  body  $a_1$  a  $b_1$  spojuje, nicméně tyto body

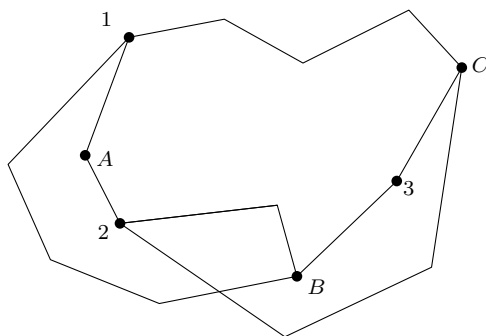


*K lemmatu 4.1.6*

leží v různých stěnách  $P_1 \cup P_2 \cup P_3$ , takže  $P$  musí aspoň jednou přejít mezi stěnami, tedy protnout nějakou hranici. Vzhledem k volbě  $P$  ale může protnout pouze  $P_3 \setminus \{p, q\}$ , což je průnik, jehož existenci jsme chtěli dokázat. ♣

**Příklad.** Na základě předchozích dvou lemmat dokažte, že graf  $K_{3,3}$  není rovinný.

**Řešení.** Předpokládejme, že je  $K_{3,3}$  rovinný. Budeme jej kreslit do roviny postupně. Označme vrcholy jedné partice 1, 2, 3 a druhé partice  $A, B, C$ . Vrcholy 1,  $A$ , 2,  $B$ , 3,  $C$  leží v  $K_{3,3}$  v tomto pořadí na kružnici délky 6, kterou nakreslíme jako první a označíme  $C$ . Tím máme nakreslených 6 hran a zbývají hrany  $(1, B)$ ,  $(2, C)$  a  $(3, A)$ . Z Jordanovy věty o kružnici máme, že  $C$  má dvě stěny, takže z Dirichletova principu některé dvě nenakreslené hrany musí být nakresleny do jedné stěny, nechtě jsou to bez újmy na obecnosti hrany  $(1, B)$ ,  $(2, C)$ . Nakreslíme napřed hranu  $(1, B)$ . Mezi body 1 a  $B$  nyní vedou tři lomenice - dvě části kružnice a nově přikreslená hrana. Hrana  $(2, C)$  má ležet ve stejné stěně  $C$  jako  $(1, B)$  a spojuje bod na jednom úseku  $C$  z 1 do  $B$  s bodem na druhém úseku  $C$  z 1 do  $B$ . Z lemmatu 4.1.6 tím pádem musí protínat vnitřek hrany  $(1, B)$ , což je spor s předpokládanou rovinností, takže  $K_{3,3}$  rovinný být nemůže. ♣



Tento první důkaz nerovinnosti  $K_{3,3}$  je čistě topologický. Důkaz kombinatorický, zmíněný na začátku kapitoly, bude využívat poznatků následující sekce.

## 4.2 Počet hran rovinného grafu

Jedním z velice silných výsledků teorie grafů je tzv. Eulerova formule, která dává do souvislosti počet vrcholů (nadále budeme značit  $n$ ), hran (budeme značit  $m$ ) a stěn (budeme značit  $f$ ) rovinného grafu. Konkrétně se ukazuje, že počet stěn nezávisí na způsobu nakreslení a platí  $n - m + f = 2$ . Tuto formuli si zatím dokážeme pouze 2-souvislé rovinné grafy, ale spolu s ní ještě ukážeme důležitou vlastnost rovinného nakreslení 2-souvislého grafu.

**Věta 4.2.1.** *Nechť  $\Gamma$  je 2-souvislý graf v rovině, jehož hrany jsou lomenice. Pak má  $\Gamma$  právě  $m - n + 2$  stěn a hranicí každé stěny je nějaký cyklus v  $\Gamma$ .*

**Důkaz.** Budeme postupovat indukcí vzhledem k počtu cyklů v  $\Gamma$ . Pokud je pouze jeden, pak vzhledem k podmínce 2-souvislosti je celý  $\Gamma$  cyklem a jsme hotovi podle věty 4.1.4. Předpokládejme tedy, že věta platí, pokud je v grafu nejvýše  $k-1$  cyklů a nechť  $\Gamma$  obsahuje  $k$  cyklů. Věta 2.3.3 nám zajišťuje, že v  $\Gamma$  existuje cesta  $P$  délky  $p$  taková, že jejím odstraněním (až na koncové vrcholy) dostáváme opět 2-souvislý graf  $\Gamma'$ , který má navíc evidentně méně cyklů než  $\Gamma$ , takže na něj platí indukční hypotéza. Graf  $\Gamma'$  má tedy

$$m - p - (n - p + 1) + 2 = m - n + 1$$

stěn a každá z nich je ohraničená cyklem v  $\Gamma'$ . Když nyní připojíme zpět cestu  $P$ , je zřejmé, že leží uvnitř nějaké stěny  $\Gamma'$ , takže její koncové body leží na nějakém cyklu  $C$  v  $\Gamma'$ , který je hranicí oné stěny. Odsud už z lemmatu 4.1.5 nahlédneme, že přidání cesty  $P$  nám rozdělí danou stěnu na dvě stěny, které obě budou ohraničeny  $P$  a odpovídající částí  $C$ . Počet stěn se zvýšil na  $m - n + 2$ , což je přesně to, co jsme chtěli. ♣

Z povahy rovinných grafů se lze domnívat, že nemohou mít příliš mnoho hran - když jich přidáme moc, nějaké dvě už se budou křížit. Běžný graf může mít řádově až  $n^2$  hran, pro rovinné grafy však nyní ukážeme, že mohou mít hran pouze lineárně mnoho v závislosti na počtu vrcholů.

*Triangulací* nazveme rovinný graf, ve kterém je každá stěna ohraničena cyklem délky 3. Obdobně definujeme i *kvadriangulaci* pro cykly délky 4.

**Věta 4.2.2.** *Nechť  $G$  je rovinný graf s aspoň třemi vrcholy. Pak má nejvýše  $3n - 6$  hran, přičemž rovnost nastává právě tehdy, když  $G$  je triangulace. Pokud navíc neobsahuje žádný cyklus délky 3, má nejvýše  $2n - 4$  hran, s rovností pokud  $G$  je kvadriangulace.*

**Důkaz.** Nejprve nechť  $G$  je 2-souvislý. Podle 4.2.1 je každá jeho stěna ohraničena cyklem, kterých je celkově  $f$ . Uvažme součet délek všech těchto cyklů. Každý z nich má délku aspoň 3, takže je tento součet aspoň  $3f$ , jedna hrana ale leží v právě dvou takových cyklech, takže je tento součet právě  $2m$ , tudíž

$$3f \leq 2m$$

a dosadíme-li  $f = m - n + 2$ , dostáváme

$$3m - 3n + 6 \leq 2m,$$

$$m \leq 3n - 6$$

s rovností, právě když každý započtený cyklus měl délku 3, tedy pokud  $G$  je byla triangulace. Zcela obdobně se ukáže omezení  $2n - 4$  pro grafy bez trojúhelníků.

Dále nechť  $G$  není 2-souvislý, nýbrž je souvislý a se skládá z  $k$  bloků  $B_1, \dots, B_k$ . Blok o  $p$  vrcholech má vždy určitě nejvýše  $3p - 5$  hran - buď má aspoň 3 vrcholy a pak jich má nejvýše  $3p - 6$  nebo má 2 vrcholy a pak platí trochu slabší nerovnost. Počet všech hran tedy lze odhadnout následovně:

$$m \leq \sum_{i=1}^k (3|V(B_i)| - 5) = 3 \sum_{i=1}^k |V(B_i)| - 5k.$$

Součet vrcholů ve všech blocích je ale podle věty 2.3.4 z kapitoly o  $k$ -souvislých grafech roven  $n + k - 1$ , takže můžeme odhad přepsat jako

$$m \leq 3n - 2k - 3$$

a protože  $k$  je aspoň 2, dostáváme ostrou nerovnost  $m < 3n - 6$  a jsme hotovi. ♣

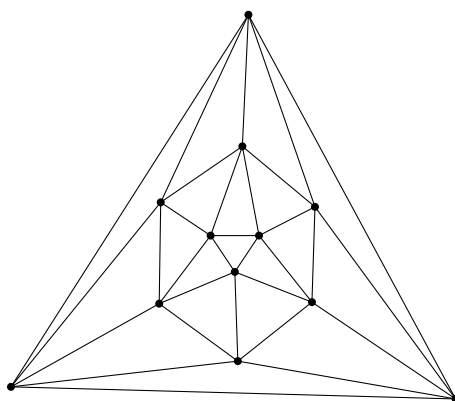
**Příklad.** Dokažte, že v každém rovinném grafu je vrchol stupně nejvýše 5. Zvládnete uvést příklad 5-regulárního rovinného grafu? Kolik má nejméně vrcholů?

**Řešení.** První otázka plyne hned z odhadu na počet hran rovinného grafu. Uvažme součet stupňů v grafu - ten, jak víme z první kapitoly, je dvojnásobkem počtu hran, v rovinném grafu je tedy nejvýše  $6n - 12$ . Kdyby každý vrchol rovinného grafu měl stupeň aspoň 6, byl by jejich součet  $6n > 6n - 12$ , což je spor. Tudíž musí vždy existovat vrchol stupně nejvýše 5. V 5-regulárním grafu je součet stupňů  $5n$ . Pro zvětšující  $n$  se rozdíl mezi  $5n$  a  $6n - 12$  zvětšuje, tudíž nejmenší počet vrcholů má 5-regulární rovinný graf když

$$5n = 6n - 12,$$

$$n = 12.$$

Máme tedy graf o 12 vrcholech a maximálním počtu hran, aby ještě mohl být rovinný, jedná se tedy o triangulaci. Příkladem takového grafu je například vhodný průmět pravidelného dvacetistěnu do roviny - každá jeho stěna je trojúhelník, v každém vrcholů se setkává 5 stěn a má 12 vrcholů. Jeho ruční sestavení se nejlépe dělá od vnější stěny: ♣



*Průmět ikosaedru do roviny*

### 4.3 Kuratowského věta a Fáryho věta

Jedním z nejdůležitějších tvrzení, dokázaných v oblasti rovinných grafů, je Kuratowského věta, která nám dává ekvivalentní podmínku, pomocí níž jsme schopni rovinné grafy rozeznat, aniž bychom se je museli snažit nakreslit do roviny.

**Věta 4.3.1.** (*Kuratowski*)

*Nechť  $G$  je graf. Pak  $G$  je rovinný právě tehdy, když neobsahuje dělení grafu  $K_{3,3}$  nebo  $K_5$  jako podgraf.*

Dělení grafů  $K_{3,3}$  a  $K_5$  nazvěme *zakázané podgrafy*. Důkaz této věty provedeme v několika částech.

**Věta 4.3.2.** *Pokud je graf  $G$  rovinný, neobsahuje dělení grafu  $K_{3,3}$  ani  $K_5$ .*

**Důkaz.** Díky výsledkům předchozí sekce je tento důkaz jednoduchý, neboť se ukazuje, že grafy  $K_{3,3}$  a  $K_5$  mají zkrátka příliš mnoho hran na to, aby mohly být rovinné.  $K_{3,3}$  je bipartitní, takže neobsahuje trojúhelníky, podle věty 4.2.2 může mít nejvýše  $2 \cdot 6 - 4 = 8$  hran, ale má 9. Stejná úvaha funguje i pro  $K_5$ , který může mít nejvýše  $3 \cdot 5 - 6 = 9$  hran, takže mu také jedna přebývá. Nyní stačí nahlédnout, že pokud je graf nerovinný, je nerovinné i jeho dělení - v libovolném nakreslení původního grafu se kříží nějaké dvě hrany, takže v nakreslení dělení se musí zkřížit dvě cesty, které ale nemohou mít společný vrchol, takže se musí křížit některé dvě jejich hrany. ♣

Jednodušší implikaci máme za sebou, zbývá ukázat opačnou. Důkaz opačné implikace provedeme ve dvou částech a souběžně s Kuratowského větou tím ukážeme ještě jedno velice silné tvrzení.

*Konvexním nakreslením* rovinného grafu nazvěme nakreslení, ve kterém je každá hrana reprezentována úsečkou, každá vnitřní stěna je ohraničena konvexním mnohoúhelníkem a vnější stěna je doplňkem konvexní množiny v rovině.

**Věta 4.3.3.** *Nechť  $G$  je 3-souvislý graf, který neobsahuje dělení  $K_{3,3}$  ani  $K_5$  jako podgraf. Pak  $G$  má konvexní nakreslení v rovině.*

**Důkaz.** Důkaz provedeme indukcí vzhledem k počtu vrcholů  $G$ . Je-li  $|V(G)|$  4 nebo 5, snadno tvrzení ověříme, takže můžeme předpokládat  $|V(G)| \geq 6$  a jít na indukční krok.

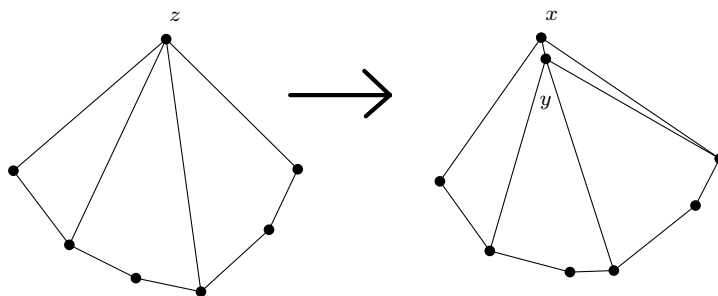
Připomeňme si větu 2.3.5 ze druhé kapitoly, která nám zajišťuje, že v  $G$  existuje hrana  $xy$ , jejíž zobečněním kontrakcí dostaneme opět 3-souvislý graf  $G'$ , který má o jeden vrchol méně. Označme  $z$  vrchol, který vznikne spojením  $x$  a  $y$ .

Kdyby  $G'$  obsahoval dělení  $K_{3,3}$  nebo  $K_5$ , snadno bychom takový podgraf našli i v  $G$ , což je v rozporu s předpoklady, takže  $G'$  zakázaný podgraf neobsahuje. Z indukčního předpokladu tudíž má  $G'$  konvexní nakreslení v rovině.

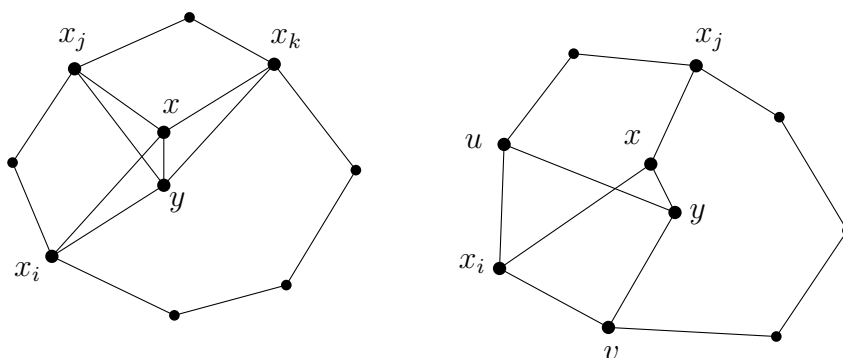
$G'$  je 3-souvislý, takže  $G' \setminus z$  je určitě 2-souvislý. Podle věty 4.2.1 leží tedy bod  $z$  v nějaké stěně grafu  $G' \setminus z$ , která je ohraničena cyklem  $C \subseteq G' \setminus z$ . Díky indukčnímu předpokladu jsou tedy všichni sousedé  $z$  (a tedy i sousedé  $x$  a  $y$ ) vrcholy na  $C$ .

Nechť  $x_1, x_2, \dots, x_n$  jsou sousedé  $x$  na  $C$  v tomto pořadí. Dále nechť  $P_i$  pro  $i = 1, 2, \dots, n - 1$  je úsek  $C$  od  $x_i$  po  $x_{i+1}$ , který neobsahuje jiné sousedy  $x$  a nechť  $P_n$  je obdobný úsek od  $x_k$  po  $x_1$ .

Nyní budeme zkoumat sousedy  $y$ . Pokud by všichni leželi na jedné společné cestě  $P_i$ , snadno sestrojíme konvexní nakreslení  $G$  tak, že  $x$  nakreslíme na místě  $z$  a  $y$  nakreslíme jako bod dostatečně blízko  $z$ . Tuto konstrukci, ve které využíváme konvexnosti z indukčního předpokladu, vidíme na obrázku.



Předpokládejme nyní pro spor, že sousedé  $y$  leží na více úsecích  $P_i$ . Nejprve rozebereme případ, kdy mají  $x$  a  $y$  více než dva společné sousedy - řekněme  $x_i, x_j, x_k$ . Oba vrcholy  $x, y$  jsou tedy spojeny se třemi stejnými vrcholy hranou a každá dvojice z trojice  $x_i, x_j, x_k$  je navzájem spojena jiným úsekem  $C$  - našli jsme dělení grafu  $K_5$ ! Pokud mají  $x$  a  $y$  méně než tři společné sousedy, pak musí mít  $y$  dva sousedy  $u, v$ , kteří leží v různých úsecích  $P_i$ . Tedy existují indexy  $i, j$  tak, že vrcholy  $x_i, u, x_j, v$  leží na  $C$  v tomto pořadí. Odsud už nahlédneme, že vrcholy  $x, y, x_i, u, x_j, v$  nám vytvoří dělení  $K_{3,3}$  ( $x, u, v$  tvoří jednu množinu a  $y, x_i, x_j$  druhou) a důkaz je kompletní. ♣



Dělení  $K_5$  a  $K_{3,3}$  k důkazu věty 4.3.3

Následující lemma nám umožní rozšířit platnost druhé implikace Kuratowského věty na všechny případy. V dělení grafu  $K_{3,3}$  označme jako *hlavní vrcholy* šestici vrcholů, které mají stupeň 3. Obdobně v dělení grafu  $K_5$  označme jako *hlavní vrcholy* pěťici vrcholů, které mají stupeň 4. Snadno se ověří, že v každém dělení  $K_{3,3}$  vedou mezi každými dvěma hlavními vrcholy 3 navzájem disjunktní cesty (až na koncové vrcholy). Pro  $K_5$  jsou takové cesty dokonce 4.

**Lemma 4.3.4.** *Nechť  $G$  je graf na aspoň 4 vrcholech neobsahující dělení  $K_{3,3}$  ani  $K_5$  jako podgraf, ale spojení libovolných dvou nesousedících vrcholů hranou už takové dělení vytvoří. Pak  $G$  je 3-souvislý.*



**Důkaz.** Nejprve ukážeme, že  $G$  je 2-souvislý. Předpokládejme pro spor, že vrchol  $v$  je artikulací  $G$  a nechtě  $z_1, z_2$  jsou sousedé  $v$  ležící v různých blocích  $B_1, B_2$ . Přidáme do  $G$  hranu  $z_1z_2$  čímž podle předpokladů vytvoříme zakázaný podgraf.

Jak jsme si řekli výše, mezi dvěma hlavními vrcholy zakázaného podgrafu vedou aspoň tři cesty, takže všechny hlavní vrcholy musí ležet v jednom bloku, neboť vrcholy v různých blocích teď můžeme spojit nejvýše dvěma disjunktními cestami.

Bez újmy na obecnosti nechtě hlavní vrcholy vytvořeného dělení leží v  $B_2$ . Hrana  $z_1z_2$  musí být pochopitelně v tomto dělení obsažena, takže musí ležet na cestě mezi některými dvěma hlavními vrcholy. Hranou  $z_1z_2$  se tato cesta dostane do  $B_1$ , takže se musí dostat zpět do  $B_2$  přes vrchol  $v$ , takže na cestě mezi dvěma hlavními vrcholy vytvořeného dělení bez újmy na obecnosti leží úsek  $z_2z_1v$ . Odsud je ale vidět, že tento úsek lze nahradit hranou  $vz_2$ , jejíž existenci jsme předpokládali, takže dostaneme zakázaný podgraf, který byl obsažen v  $G$  před přidáním hrany, což je spor, tudíž  $G$  je 2-souvislý.

Dále budeme postupovat indukcí vzhledem k  $|V(G)|$ . Pro 4 nebo 5 vrcholů tvrzení opět snadno ověříme, takže přejdeme k indukčnímu kroku. Pro spor s dokazovaným tvrzením předpokládejme, že množina vrcholů  $\{x, y\}$  rozděluje  $G$  na více komponent.

Nejprve nechtě  $x$  a  $y$  nejsou spojené hranou. Platí  $G = G_1 \cup G_2$ , kde  $G_1$  a  $G_2$  mají společné pouze vrcholy  $x, y$  a jsou oba souvislé. Když nyní přidáme do  $G$  hranu  $xy$ , vytvoříme tím zakázaný podgraf. Mezi vrcholem z  $G_1$  a vrcholem z  $G_2$  (kromě  $x$  a  $y$ ) můžeme vést ale nejvýše dvě navzájem disjunktní cesty, takže vzniklý zakázaný podgraf musí mít všechny hlavní vrcholy pouze v jednom z grafů  $G_1, G_2$ , bez újmy na obecnosti nechtě je to  $G_1$ . Graf  $G_2$  je souvislý, takže v něm existuje cesta z  $x$  do  $y$ . Touto cestou můžeme nahradit hranu  $xy$  ve vzniklém zakázaném podgrafu, čímž máme spor, protože by původní graf obsahoval zakázaný podgraf.

Dále nechtě  $x$  a  $y$  jsou spojené hranou, takže opět platí  $G = G_1 \cup G_2$ , kde grafy  $G_1$  a  $G_2$  mají společné pouze vrcholy  $x, y$  a hranu  $xy$ . Když nyní přidáme hranu do  $G_i$  ( $i = 1, 2$ ), vytvoříme tím zakázaný podgraf, který budeme umět určitě vybrat tak, aby celý ležel v  $G_i$ , neboť opět hlavní vrcholy musí všechny ležet v  $G_i$  a cestu ve druhém grafu můžeme nahradit hranou  $xy$ . To znamená, že graf  $G_i$  je buď  $K_3$ , pokud má kromě  $x, y$  jediný další vrchol, nebo splňuje všechny podmínky věty a je z indukčního předpokladu 3-souvislý. V každém případě ale  $G_i$  má podle věty 4.3.3 konvexní nakreslení v rovině.

Zvolme nyní v grafu  $G_1$  vrchol  $z_1$  a v grafu  $G_2$  vrchol  $z_2$  různé od  $x, y$ , vždy na kružnici, která tvoří hranici stěny grafu a na které leží  $x$  a  $y$ . Když přidáme do  $G$  hranu  $z_1z_2$ , vytvoříme zakázaný podgraf. Obdobně jako předtím snadno ukážeme, že kdyby opět všechny hlavní vrcholy ležely jen v jednom z  $G_i$ , sestrojili bychom zakázaný podgraf i bez přidání hrany, což by byl spor. Hlavní vrcholy dělení tedy musí být ležet v obou množinách  $V(G_i) \setminus \{x, y\}$ . Mezi  $G_1$  a  $G_2$  teď ale umíme vést nejvýše tři disjunktní cesty, takže zakázaným grafem, který nám vznikl, musí být  $K_{3,3}$  a navíc jediné rozložení, které přichází v úvahu, je bez újmy na obecnosti jeden vrchol v  $V(G_2) \setminus \{x, y\}$  a pět vrcholů v  $V(G_1)$ . Když však nyní přidáme do stěny, ohraničené kružnicí s vrcholy  $z_1, x, y$  nový vrchol  $v$ , vznikne nám určitě dělení  $K_{3,3}$  na vrcholech z  $V(G_1) \cup \{v\}$ , ale  $G_1$  zůstane rovinný vzhledem ke způsobu přidání  $v$ , což je chtěný spor. ♣

Graf popsany v lemmatu 4.3.4 je díky větě 4.3.3 rovinný a nazýváme jej *maximální rovinný*. Snadno ukážeme, že takový graf je triangulací: pokud by některá stěna byla

ohraničena cyklem délky větší než 3, uměli bychom přidat do tohoto cyklu třetivú aniž bychom porušili rovinnost, tedy aniž bychom vytvořili zakázaný podgraf.

Když nyní vezmeme libovolný graf neobsahující zakázaný podgraf, můžeme do něj přidávat hrany, dokud takové přidání nevytváří zakázaný podgraf. V ten moment dostáváme 3-souvislý graf, který už má konvexní nakreslení. Z tohoto nakreslení pak stačí odstranit přidané hrany a dostáváme nakreslení libovolného grafu neobsahujícího zakázaný podgraf v rovině, navíc takové, že hrany jsou úsečky. Tím je zcela dokázána Kuratowského věta a navíc jsme ukázali druhý podstatný výsledek - Fáryho větu.

**Věta 4.3.5.** (*Fáry*)

*Každý rovinný graf má nakreslení v rovině takové, že všechny hrany jsou úsečky.*

# Kapitola 5

## Závěr

Zcela topologicky korektní výstavba teorie rovinných grafů vyžaduje mnoho netriviálních matematických znalostí. Proto se nezdá při výkladu této problematiky mladším studentům sáhnout k prohlášení některých tvrzení za intuitivní nebo se tato tvrzení ponechat bez důkazu. Tento text docílil kompromisu - nahrazením obecných oblouků jednoduššími lomenými čarami při kreslení hran grafu vzniká teorie, kterou lze vystavět pomocí menšího množství poznatků, které jsou v práci všechny shromážděny a představeny tak, aby k pochopení veškerého obsahu stačily běžné středoškolské znalosti matematiky.

Řada řešených příkladů v úvodní kapitole se snaží zejména podnítit v čtenáři kombinatorické myšlení a srozumění s typickými metodami, kterými se v diskrétní matematice vedou důkazy. Důkazem splnění tohoto cíle nechť je kupříkladu kombinatorická identita

$$\binom{n}{2} + nm + \binom{m}{2} = \binom{n+m}{2},$$

objevená v průběhu zpracovávání práce a dokázaná v první podkapitole úvodní kapitoly. Čtenář, mající v oblibě kombinatoriku, si jistě povšimne prostoru pro zobecnění této rovnosti. Můžeme kupříkladu obarvovat vrcholy grafu  $K_{n+m}$  více než dvěma, řekněme  $k$  barvami, z čehož vyplyne identita

$$\sum_{i=1}^k \binom{n_i}{2} + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i}^k n_i n_j = \binom{\sum_{i=1}^k n_i}{2}.$$

Ponecháme-li barvy dvě, ale nahradíme hrany obecně  $k$ -prvkovými podmnožinami vrcholů, snadno odvodíme poměrně známou identitu

$$\sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{m}{k-i} = \binom{n+m}{k}.$$

# Literatura

- [1] MOHAR Bojan, THOMASSEN Carsten. *Graphs on Surfaces*. The John Hopkins University Press, 2001, ©2001 ISBN 0-8018-6689-8
- [2] MATOUŠEK Jiří, NEŠETŘIL Jaroslav. *Kapitoly z diskrétní matematiky*. 4. vyd. Karolinum, 2009, ©2009 ISBN 978-80-246-1740-4
- [3] DIESTEL Reinhard. *Graph Theory*. Electronic Edition 2005, ©Springer-Verlag Heidelberg
- [4] ГУРОВИЦ В. М., ХОВРИНА В. В. *Графы*. 1. vyd. Moskva: MCNMO, 2008, ©2009 ISBN 978-5-94057-468-2
- [5] WARREN Buck, algebras. *Continuous image of a compact set is compact*. Version 13 PlanetMath.org. Volně dostupné na <http://planetmath.org/ContinuousImageOfACompactSetIsCompact.html>.
- [6] ROYSTER David. *Introduction to topology*. ©2009 David Royster
- [7] КАНЕЛЬ-БЕЛОВ А. Я. КОВАЛЬДЖИ А. К. *Как решают нестандартные задачи*. 4. vyd. Moskva: MCNMO 2008, ©2004 ISBN 978-5-94057-331-9