

STŘEDOŠKOLSKÁ ODBORNÁ ČINNOST

Obor č. 1: Matematika a statistika

Pokrývání pomocí polyformů

Nicolas Bělohoubek
Jihočeský kraj

Tábor 2025

STŘEDOŠKOLSKÁ ODBORNÁ ČINNOST

Obor č. 1: Matematika a statistika

Pokrývání pomocí polyformů

Tiling with polyforms

Autoři: Nicolas Bělohoubek

Škola: Střední průmyslová škola strojní a stavební, Tábor,
Komenského 1670, 390 02 Tábor

Kraj: Jihočeský kraj

Konzultanti: Ing. Jiří Kroutil, Ph.D.

doc. RNDr. Antonín Slavík, Ph.D.

Tábor 2025

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou práci SOČ vypracoval/a samostatně a použil/a jsem pouze prameny a literaturu uvedené v seznamu bibliografických záznamů.

Prohlašuji, že tištěná verze a elektronická verze soutěžní práce SOČ jsou shodné.

Nemám závažný důvod proti zpřístupňování této práce v souladu se zákonem č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon) ve znění pozdějších předpisů.

V Táboře dne 1. 4. 2025 Nicolas Bělohoubek.

Poděkování

Chtěl bych poděkovat svému vedoucímu práce panu doktorovi Jiřímu Krutilovi za odborné vedení, za pomoc a za rady při zpracování této práce. Také bych chtěl poděkovat svému oponentovi panu docentu Antonínovi Slavíkovi za poskytnutí vyšších znalostí a za možnost spolupráce při psaní článku do The American Mathematical Monthly.

Anotace

Tato práce se věnuje problematice pokrývání pomocí polyformů, což je disciplína geometrické kombinatoriky. Práce zahrnuje teoretický úvod do tématu, slovník s formálními definicemi a sbírku řešených úloh, rozdělených na existenční, kvantitativní a obecné úlohy. Důraz je také kladen na praktické využití výpočetních nástrojů jako WolframAlpha, GeoGebra CAS a PolySolver pro řešení zadaných úloh. Cílem je poskytnout čtenářům přehled o základních metodách a aplikacích pokrývání polyformů v různých oblastech, včetně matematiky, architektury a přírodních věd. Práce zároveň slouží jako výukový materiál pro zájemce o kombinatoriku a rekreační matematiku.

Klíčová slova

pokrývání; polyformy; dláždění; prostor; rovina

Annotation

This thesis deals with the problem of tiling using polyforms, which is a discipline of geometric combinatorics. The thesis includes a theoretical introduction to the topic, a glossary with formal definitions, and a collection of solved problems, divided into existential, quantitative, and general problems. Emphasis is also placed on the practical use of computational tools such as WolframAlpha, GeoGebra CAS and PolySolver to solve the given problems. The goal is to provide readers with an overview of the basic methods and applications of covering polyforms in a variety of fields, including mathematics, architecture, and the natural sciences. The work also serves as a tutorial for those interested in combinatorics and recreational mathematics.

Keywords

tessellation; polyforms; tiling; space; plane

Obsah

1	Úvod.....	6
2	Slovník.....	9
3	Úlohy	12
3.1	Existenční úlohy	12
3.1.1	Šachovnice	12
3.1.2	Čtverce ve čtvercích.....	14
3.1.3	J-trihexy	16
3.1.4	Setiset.....	18
3.1.5	C-heptomino	20
3.2	Kvantitativní úlohy	22
3.2.1	Konkrétní úlohy	22
	Částečné pokrývání.....	22
	Monomino a domino.....	22
	Dvě dikrychle.....	24
	Úplné pokrývání	26
	Domina.....	26
	Dikrychlová věž.....	28
3.2.2	Obecné úlohy	33
	Horní mez	33
4	Videomateriály.....	35
5	Výsledky publikace z časopisu	36
6	Závěr	37
7	Seznam použitých informačních zdrojů	38
8	Seznam obrázků.....	40
	Příloha 1: L-Tetromino Tilings and Two-Color Integer Compositions.....	41

1 ÚVOD

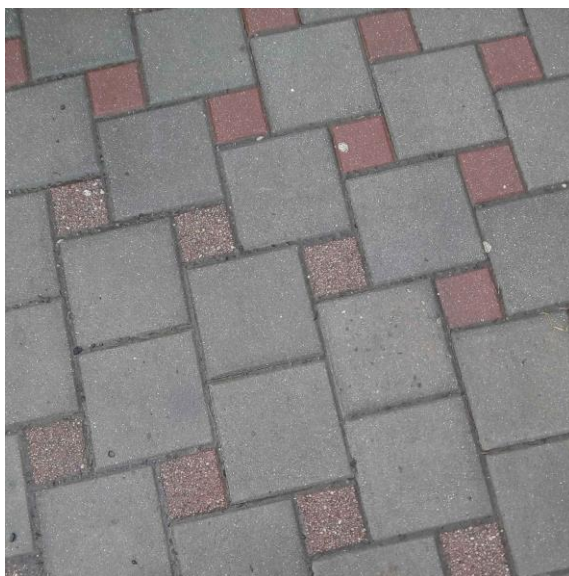
Problematika pokrývání je zajímavá kolaborace mezi rekreační matematikou (viz obr. 1) a profesionální matematikou. Často se s ní setkáváme již v dětství při hraní si se stavebnicí. Není ovšem pravdou, že se vyskytuje jenom v tomto případě. Příkladovou ukázkou mohou být návrhy chodníků, které se snaží najít právě to nejlepší pokrytí z vizuální hlediska. Ovšem nemusíme ani končit u architektury. Velký vliv pokrývání má i na výpočty entropie v modelech vesmíru ve fyzice.



Obrázek 1 – Příklad z rekreační matematiky, Soma kostka, hlavolam zkonstruovaný dánským fyzikem Pietem Heinem [1].

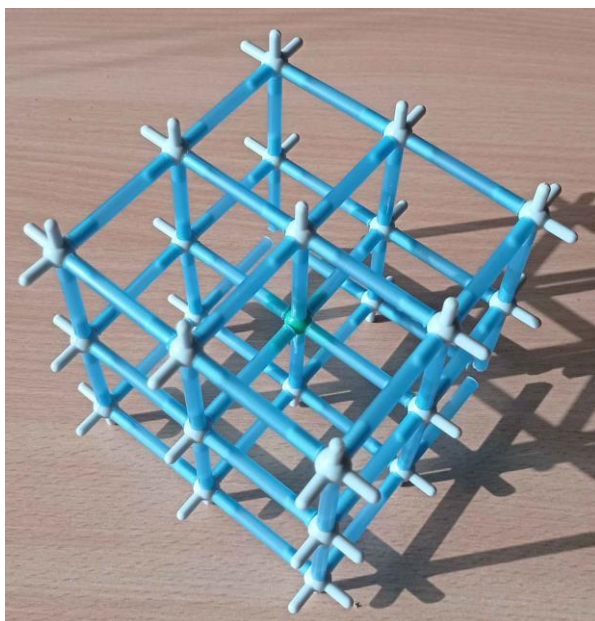
Zmiňme si jako první využití ve samotné matematice. Pokrývání často usnadňuje porozumění složitějších konceptů při studiu posloupností, jako je exponenciální růst, či rekurentní výrazy. Dále nás učí o možnosti řešit problém pomocí jiné formulace. Mimo jiné, neboť je to geometrická disciplína, tak pomáhá pochopit myšlení dřívějších matematiků, kteří řešili vše převážně pomocí geometrických důkazů.

Všimněme si dále jaký má důsledek na architekturu a stavebnictví. Díky pokrývání můžeme nejen tvořit chodníky (viz obr. 2) a pokládat lino na podlahu, ale i stavět cihlami zdi. Dále můžeme narazit na částečné pokrývání a to při rozvrhování ulic v obcích, či při umísťování nábytku v pokoji. Jedním z největších komplexů pokrývání může být panelový dům, kde samotné rozvržení bytů musí sedět se všemi předem určenými podmínkami.

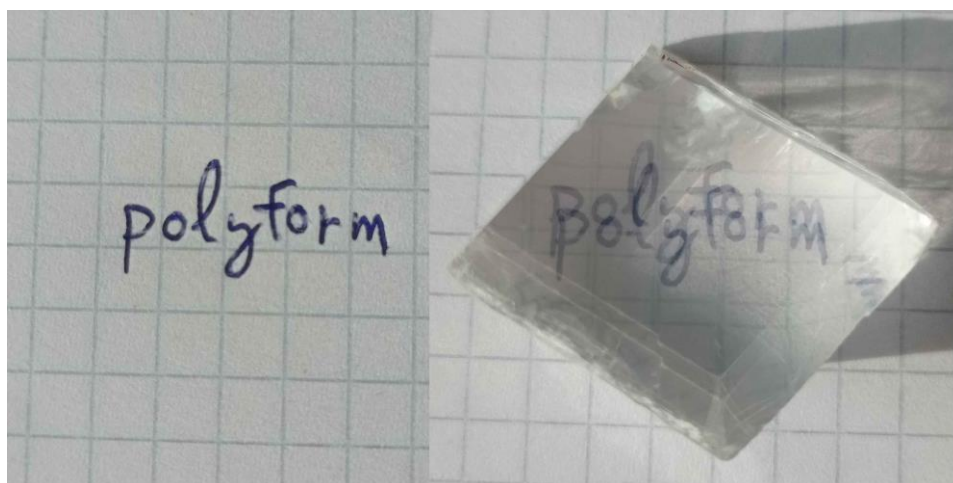


Obrázek 2 – Příklad chodníku, pythagorejské pokrývání [2] s účelnou chybou konstrukci.

Jako poslední využití, které si zmiňme, je v biologii a chemii, kde se často setkáváme s mikroskopickou strukturou. V biologii je to třeba buněčná struktura, která se liší podle typu buněk a vždy má podle pokrývání jiné vlastnosti, příkladem by tady mohli být svalové buňky a pokožkové buňky, svalové jsou protáhlého tvaru, kdežto pokožkové jsou spíše tvaru plochého. Na čemž lze vidět, že pokrývání má pak jiný vzory a jiné vlastnosti. V chemii s přesahem do fyziky je to zase krystalická struktura (viz obr. 3), která určuje, jakou tvrdost a průzračnost, jakou daná látka má. Dokonce některé materiály mají díky pokrývání jiné vlastnosti na základě, z jakého směru na ně působíme silou, či z jakého směru je pozorujeme (viz obr. 4).

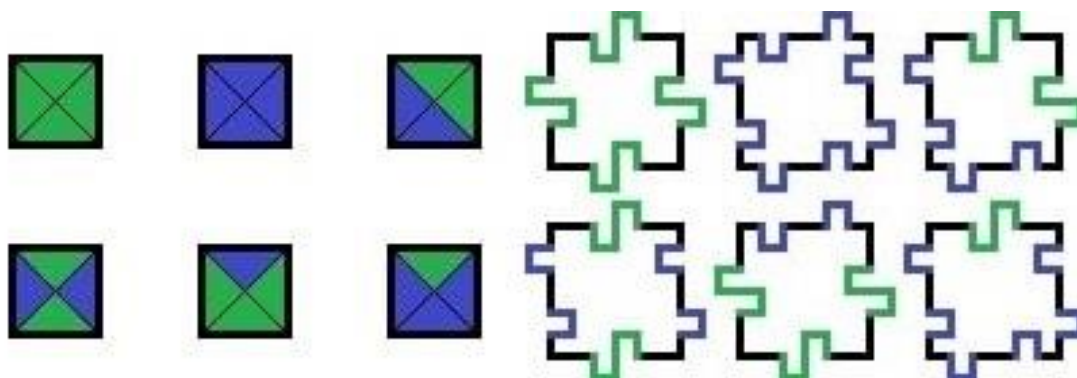


Obrázek 3 – Příklad krystalické struktury, model krychlové krystalické mřížky.



Obrázek 4 – Změna vlastností na základě pokrývání, islandský kalcit a jeho dvojlom.

Všechny tyto podseky pokrývání se dají zahrnout do podmíněného pokrývání. Kde nejen, že se snažíme najít řešení, které splňuje podmínky geometrické, ale i podmínky fyzické, či dokonce i jiné. Právě tyto negeometrické podmínky se velmi často dají převést do složitějších geometrických podmínek (viz obr. 5) a proto se budeme věnovat pouze geometrickým podmínkám pokrývání pomocí polyformů.



Obrázek 5 – Převod Wangových dlaždic na polyomina.

Často se stává, že pokrytí je tak složité, že snaha o to najít jednoduchý způsob řešení je zbytečná. V těchto případech používáme metodu „hrubé síly“, kdy systematicky procházíme všechna možná řešení. Někdy je ale takové řešení pro člověka časově náročné, proto používáme v takových případech počítače. Problém lze také zobecnit a vyřešit obecně, což nám může pomoci najít například horní nebo dolní hranici počtu možných pokrytí.

2 SLOVNÍK

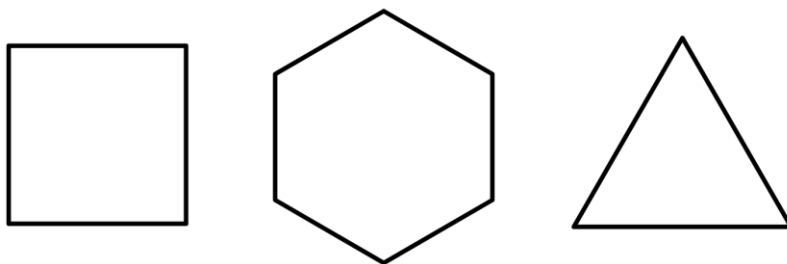
Monoform – geometrický obrazec o jakékoliv dimenzi, některé mají svůj název:

monomino – čtverec (mono + omino, odstraňuje se zdvojené o),

monohehex – pravidelný šestiúhelník (mono + hex),

moniamond – rovnostranný trojúhelník (mon + iamond),

monokrychle – krychle (mono + krychle).

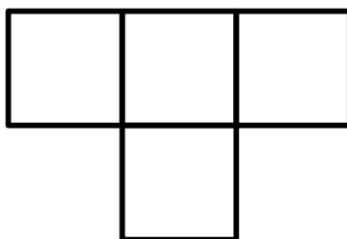


Obrázek 6 – Monomino, monohehex, moniamond.

Polyform [3] – sjednocení jednoho, či více nepřekrývajících se monoformů, množina všech polyformů daného monoformu nese název poly- + kořen monoformu, např. polyomino (dobré podotknout, že předpona poly- se nepoužívá jako označení mnoho, ale jako alespoň jeden, neboť v tomto případě pod pojmem polyform si můžeme představit i monoform), dělení na:

podle konečnosti:

konečné – sjednocení konečného množství monoformů, podle množství nahrazujeme předponu mon(o)- za řecké číselné předpony d(i)-, tr(i)-, tetr(a)-, pent(a)- etc., dále nazýváme jednotlivé polyomina podle písmen abecedy (viz obr. 7), podle každodenních objektů, či podle zvířat, která připomínají, názvy nejsou většinou standardizované,



Obrázek 7 – T-tetromino.

nekonečné – sjednocení nekonečného množství monoformů,



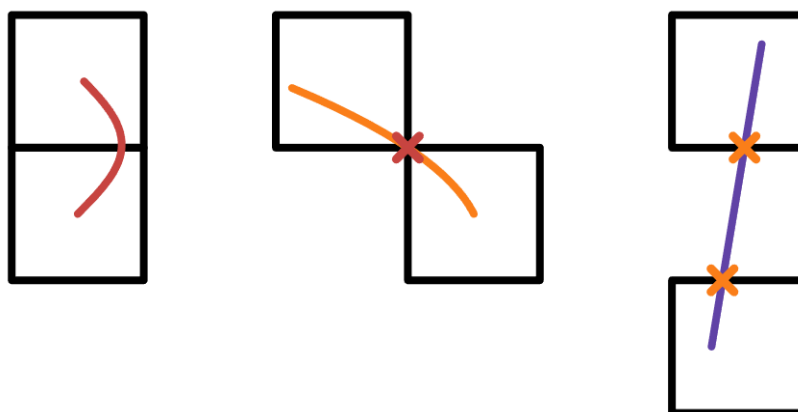
Obrázek 8 – Jednosměrné nekonečné polyomino, modré tečky naznačují pokračování ve vzorci.

podle souvislosti:

souvislé – pro každou dvojici bodů v polyformu platí, že existuje křivka, která by spojovala tyto body a neopouštěla daný polyform

striktně souvislé – pro každou dvojici bodů v polyformu bez jeho hranice platí, že existuje křivka, která by spojovala tyto body a neprotínala hranice daného polyformu, každý striktně souvislý polyform je i souvislý,

nesouvislé – pro aspoň jednu dvojici bodů v polyformu platí, že neexistuje křivka, která by spojovala tyto body a neopouštěla daný polyform,



Obrázek 9 – Souvislost.

Domino na levé straně je striktně souvislé, domino uprostřed je pouze souvislé, protože každá křivka dvou vybraných bodů překřičuje hranici, domino na pravé straně je nesouvislé, protože každá křivka vybraných bodů opouští polyform (viz obr. 9).

podle povolených transformací [4]:

volné – lze je otáčet a zrcadlit,

jednostranné – lze je pouze otáčet,

fixní – nelze je otáčet ani zrcadlit.

Transformace polyformů – používáme při řešení úloh, některé se mohou vyskytovat jako upřesnění zadání, jiné jako modifikace polyformů, dělíme na:

zrcadlení – překlopení přes zvolenou osu, či rovinu,

otáčení – kolem bodu, či osy,

zvětšení – vepsáním daného množství monoformů do předchozích monoformů, pokud je to možné, (např. polyhexy nelze zvětšovat)

spojení – sjednocení alespoň 2 dotýkajících polyformů,

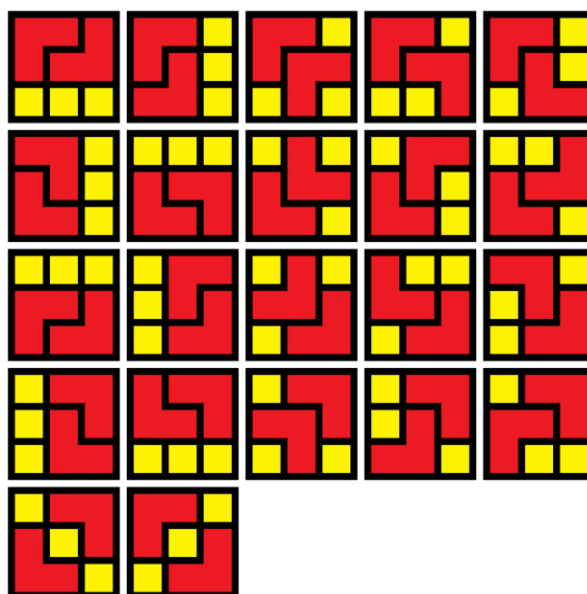
odstranění – vyjmutí jiné polyformu z hlavního polyformu.

Pokrývání – pokrytí pokrývaného polyformu pokrývajících polyformy, kde pokrývajících polyformy se nepřekrývají, často se pokrývaný neoznačuje jako polyform, ale jako deska, dělení na:

podle úplnosti:

úplné – pokrývaný polyform je zcela pokrýt,

částečné – pokrývaný je polyform je z části pokrýt.



Obrázek 10 – A348134(3).¹

Například ke každému částečnému pokrývání lze najít úplné pokrývání, v tomto případě 3x3 čtverec lze pomocí 2 L-tetromin částečně pokrýt, ale také lze pomocí 2 L-tetromin a 3 monomin pokrýt úplně (viz obr. 10).

¹ Značení A + „číslo“ odkazuje na posloupnost na On-line Encyklopedii Celočíselných Posloupností. (OEIS) [5]

3 ÚLOHY

Ne vždy existuje k úlohám obecný postup, jak je řešit, ale úlohy se dají rozdělit do několika kategorií. Každou z nich si uvedeme a ukážeme si u ní řešení a důkaz. Základní dělení, které se nám nabízí je podle typu řešení:

I. řešením je pravdivostí hodnota,

II. řešením je kvantita, kvantitativní úlohy si dále rozdělíme podle konkrétnosti:

1. na úlohy konkrétní, které si rozdělíme podle úplnosti na úlohy:

a) částečného pokrývání,

b) úplného pokrývání,

2. na úlohy obecné.

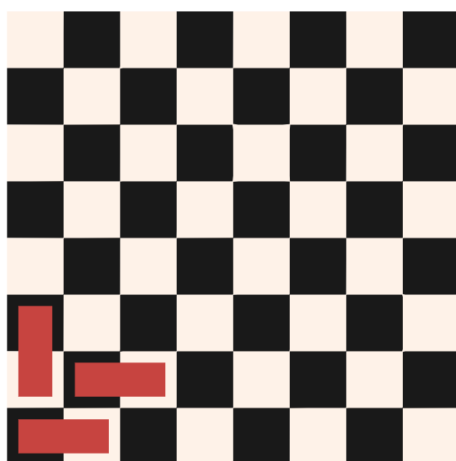
3.1 Existenční úlohy

Tyto úlohy se nás často ptají, zdali je vůbec možné najít pokrývání, které by daný pokrývaný polyform pokrylo.

3.1.1 Šachovnice

Zadání:

Představme si 8x8 šachovnici. Můžeme ji plně pokrýt pomocí 32 domin? Lze tu samou šachovnici pokrýt pomocí 31 domin s vynecháním dvou středově protilehlých rohů?²



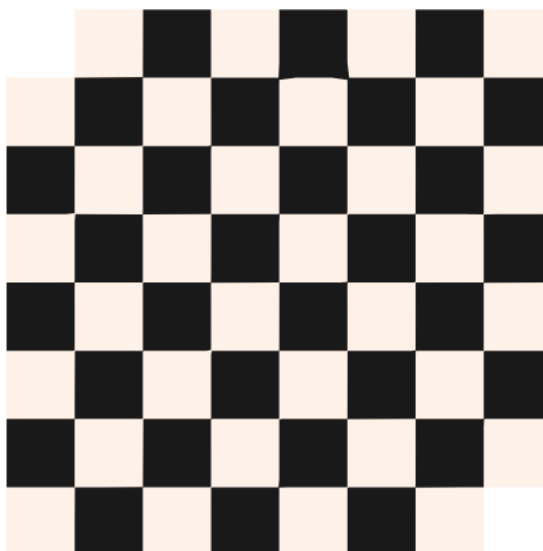
Obrázek 11 – Šachovnice s již třemi dominy.

² Viz kapitola Videomateriály video od Burkarda „Mathologer“ Polstera.

Řešení:

První otázka se jeví jako elementární, neboť šachovnici neboli čtvercové polyomino s 8 monominy na straně, můžeme rozdělit do sloupců a ty pokrýt se 4 dominy. Dále bychom se měli ujistit, zdali vůbec máme dostatečný počet domin. A tomu tak i je, protože 4 domina na 8 sloupců je 32 domin celkově. Kdežto na druhou stranu druhá otázka se jeví těžší. Dokonce víme, že celkové množství monomin v šachovnici je roven celkovému množství monomin napříč všemi dominami. Tyto poznatky ale neznamenají, že to nutně půjde.

Hlavním klíčem k pochopení této úlohy je si všimnout toho, že domino vždy překrývá jedno černé a jedno bílé políčko. Tomu tak je, protože vždy vedle černého políčka jsou jenom bílé a naopak, a protože domino je složeno právě ze dvou políček, monomin, která jsou vedle sebe. Dále si všimněme, že vždy, když odstraňujeme středově protilehlé rohy šachovnice, se jedná o rohy stejné barvy. To je pravda, protože pokaždé každá ortogonální cesta od jednoho rohu ke druhému projde přes lichý počet polí, z čehož vyplývá, že cesta přejde na opačnou barvu v sudém množství krát.



Obrázek 12 – Šachovnice bez středově protilehlých rohů.

Po spočtení množství monomin s černou nebo bílou barvou, vždy zjistíme, že jedna barva má vždy o 2 monomina méně než ta druhá. Každá kolekce domin vyžaduje stejný počet černých a bílých monomin. A tomu tak není, což implikuje, že v druhém případě nelze pokrýt celou šachovnici. Při nejlepším nám zbude jedno domino, které nepůjde nikam položit.

Nyní jsme si ukázali úlohu, kde řešíme jeden partikulární případ. Pojdme se podívat na úlohu, kde budeme řešit více různých případů najednou.

3.1.2 Čtverce ve čtvercích

Zadání:

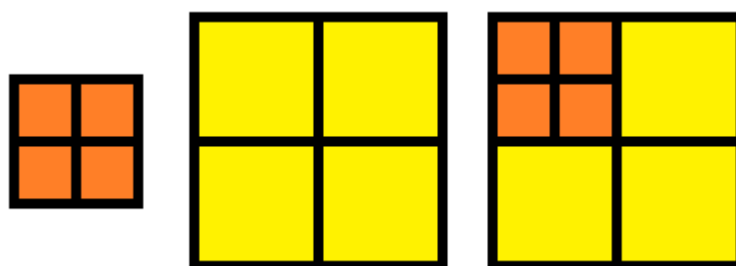
Pro která přirozená čísla n platí, že z n čtvercových polyomin (libovolně velkých) lze složit opět čtvercové polyomino?³

Pro znalce v oboru by tato úloha mohla evokovat problém, který nese název squaring the square. Čím se tato úloha liší je tím, že v tomto případě máme povoleno používat stejné čtverce na rozdíl od squaring the square, kde všechny čtverce musí mít rozdílné velikosti.

Řešení:

Všimněme si, že pracujeme pouze s čtvercovými polyominy, což v důsledku znamená, že pokaždé, když najdeme pokrývání, pak ho můžeme prakticky řečeno vložit do jiného pokrývání, neboť se ním dá nahradit jakýkoliv čtvercové polyomino. Musíme si však dát pozor, neboť pracujeme s polyominami, a ne se čtverci, tudíž bychom museli před tímto vkladem pokrývání příslušně zvětšit. Tento fakt však nemusíme uvažovat při řešení. Dále z povahy úlohy budeme o čtvercovém polyominu mluvit jako o čtverci. Abychom mohli začít, uvedeme si triviální řešení, kde pokrývání je složeno ze 4 čtverců.

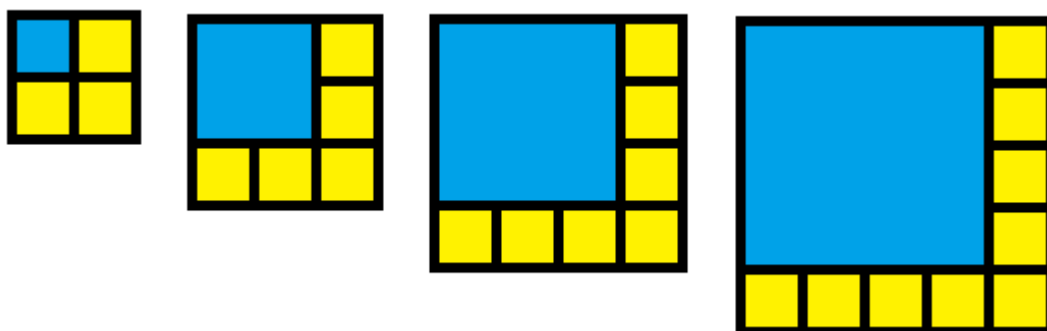
Pokud bychom vložili triviální pokrývání do jiného, pak bychom ubrali 1 čtverec a přidali 4 jiné. Přičemž tento poznatek nám říká, že pokud lze pokrýt čtverec pomocí k čtverců, pak lze pokrýt i pomocí $k + 3$ čtverců. Kdyby se nám v této fázi povedlo najít, že pro f , $f + 1$ a $f + 2$ počet čtverců je možné pokrýt jiný čtverec, pak to znamená, že pro každé $n \geq f$, je pokrývání možné.



Obrázek 13 – Vložení pokrývání do jiného pokrývání.

Ke čtverci postavme d čtverců na jednu jeho stranu a pak dalších d čtverců na druhou neprotilehlou stranu, doplníme čtverec do rohu a dostaneme, že pokud n je sudé číslo větší, nebo rovno 4, pak lze pokrývání nalézt (viz obr. 14). Pomocí pravidla $k + 3$, vytvoříme čtverec z 7 čtverců. Protože čtverec lze pokrýt pomocí 6, 7 a 8 čtverců, tak lze pokrýt z 6 a více čtverců.

³ Inspirováno videem od Toma Crawforda na YouTubovém kanále Numberphile. Viz kapitola Videomateriály.



Obrázek 14 – Čtverce pokryté sudým množstvím čtverců.

Ted' nám zbývá už jen vyřešit, zdali z 2, 3, nebo 5 čtverců, lze pokrýt čtverec. Tyto důkazy jsou těžší a nemají přímý spojitost s předchozím důkazem. Abychom mohli začít musíme si nejdříve říct jeden základní fakt, na kterém náš důkaz bude stát. Každý pokrývací čtverec má 0, 1 nebo 4 společné rohy s pokrývaným čtvercem. Pokud má 4 společné rohy, pak je s pokrývaným čtvercem identický a jedná se pouze o pokrývání, kde čtverec pokrývá jiný čtverec. Se znalostí tohoto faktu, můžeme v klidu říct, že pokud máme 2 nebo 3 čtverce tak je to nemožné. Protože máme víc rohů než čtverců

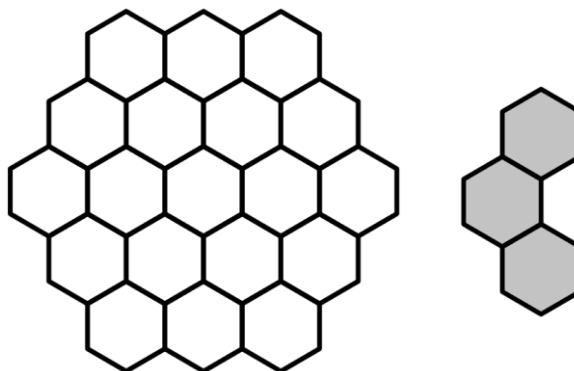
Pro 5 čtverců si budeme muset uvědomit další fakt. Žádný pokrývací čtverec se nedotýká dvou protějších stran pokrývaného čtverce s výjimkou identického čtverce, který nás ovšem v tomto případě nezajímá, neboť pak jsme nepoužili 5 čtverců. Z předchozího faktu vyplývá, že první 4 čtverce musí mít jeden roh pokrývaného čtverce. Z druhého faktu vyplývá, že tyto čtverce musí být veliké tak, aby pátý čtverec se nemusel dotýkat dvou protilehlých stěn. Což lze provést několika způsoby, ale v každém zbylý prostor není konvexní a čtverec konvexní je, tudíž pro 5 čtverců je to také nemožné.

Jako další si uvedeme úlohu, kde se ptáme na nemožná pole v částečném pokrývání. Tyto úlohy se zase trochu liší přístupem a více připomínají spíše potvrzení faktu než standardní důkaz.

3.1.3 J-trihexy

Zadání:

Šestiúhelníková plocha 3. řádu je teselována 6 J-trihexy (viz obr. 15) a 1 monohexem. Jaké jsou možné pozice monohexu?⁴

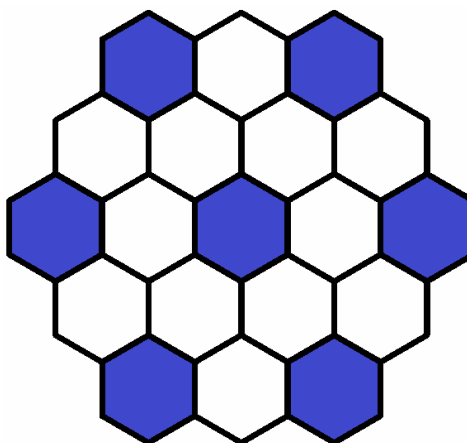


Obrázek 15 – Šestiúhelníková plocha 3. řádu⁵ a J-trihex.

Řešení:

Tato úloha může mít dva způsoby zadání. První je právě stylizováno do úplného pokrývání a druhé by bylo právě o částečném pokrývání. V druhém případě částečně pokrýváme šestiúhelníkovou plochu pomocí 6 J-trihexů.

Při řešení úlohy Šachovnice pro nás byly zásadní barvy jednotlivých monomin, které nás nakonec navedli k řešení. V našem případě však barevné monohexy nemáme. Obarvěme modře tedy šestiúhelníkovou plochu v rožních monohexech a uprostřed (viz obr. 16).



Obrázek 16 – Rohy a prostřední monohex vybarvený modře.

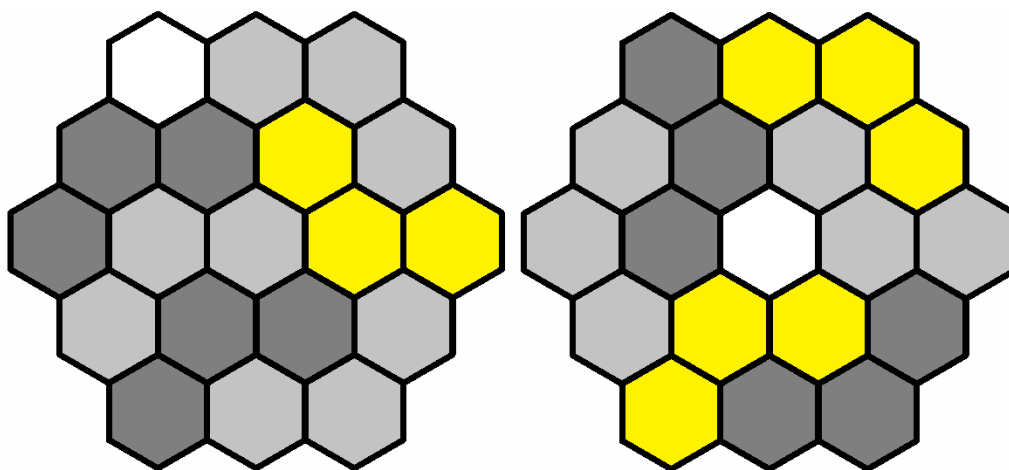
⁴ Jedná se o vlastní úlohu.

⁵ Vizualizace šestiúhelníkové plochy n-tého řádu můžete najít na A372855.

Všimněme si, že teď můžeme rozdělit položení dodatečného monohexu na dva případy. První případ je tehdy, kdy je dodatečný monohex na bílé barvě a druhý tehdy, kdy je dodatečný monohex na modré barvě. Podívejme se tedy na každý případ zvlášť.

Když je dodatečný monohex na bílé barvě, pak platí, že zbývajících počet modrých monohexů je 7. Další fakt, který použijeme, je takový, že každý J-trihex má vždy právě jeden, nebo žádný modrý monohex. Z čehož vyplývá, že každému modrému monohexu náleží právě jeden J-trihex, ale J-trihexů máme jen 6. Tudíž dodatečný monohex nemůže být na bílé barvě.

Pro druhý případ, kde dodatečný monohex je na modré barvě můžeme postupovat stejně, ale zjistíme, že počet J-trihexů je roven modrým monohexům. Můžeme tedy se pokusit položit dodatečný monohex na modrou barvu. Buďto jsme položili monomino do středu, nebo na roh. Všimněme si, že pokud existuje pokrývání, kde dodatečný monohex je v rohu, pak lze toto pokrývání otočit, tak aby monohex byl v jakémkoliv rohu. A tyto pokrývání doopravdy existují, jak pro dodatečný monohex ve středu, tak pro dodatečný monohex na rohu (viz obr. 17).



Obrázek 17 – Částečné pokrývání s chybějícím monohexem v rohu, nebo uprostřed.

3.1.4 Setiset

Zadání:

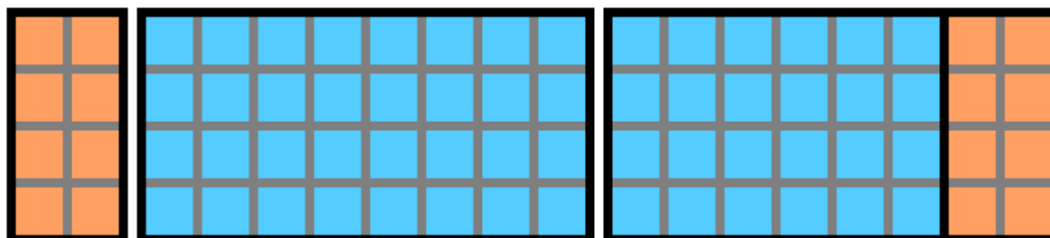
Existuje čtveřice rozdílných polyformů, pro kterou platí, že každý její polyform po dvojnásobném zvětšení lze pokrýt pomocí této čtveřice, kde zároveň platí, že každý polyform v každém pokrývání je použit právě jednou?⁶

Řešení:

Takových čtveřic, které splňují podmínky v zadání, existuje mnoha a nalezení takovéto čtveřice není ani těžké, pokud si dovolíme použít počítač a metodu hrubé síly. V tomto řešení si ukážeme, jak lze najít takovou čtveřici za pomoci převážně úvah.

Abychom mohli začít, potřebujeme najít polyform, který je schopen pokrýt svojí zvětšenou verzi. Vybízí se monomino, které je schopno pokrýt právě O-tetromino. My, ale zvolíme domino z důvodů, které se nám budou jevit jako benefiční později.

Dále toto domino zvětšíme a použijeme jako jeden polyform z naší čtveřice. Nyní se můžeme už snažit o částečné pokrývání. Naše 2×4 obdélníkové polyomino se dá umístit několika způsoby do 4×8 obdélníkového polyomina, ovšem my si zvolíme takové umístění, aby nám zbylo už pokrýt jen 4×6 obdélníkové polyomino (viz obr. 18).



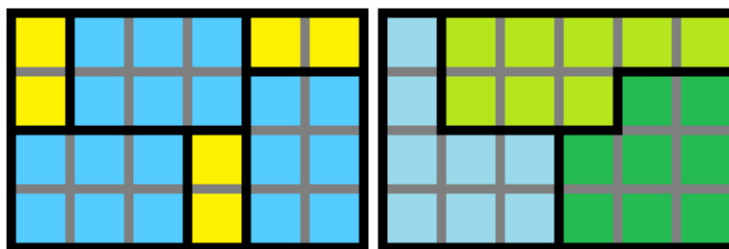
Obrázek 18 – 2×4 , 4×8 a 4×6 obdélníkové polyomino.

Když teď najdeme pokrývání pro 4×6 obdélníkové polyomino pomocí polyomin, která jsou odlišná a jsou spojením 2×3 obdélníkového polyomina a domina, pak jsem našli i naši hledanou čtveřici. Po odstranění zrcadlových kopií a 2×4 obdélníkového polyomina, které už ve čtveřici potenciálně je, lze z 2×3 obdélníkového polyomina a domina vytvořit několik různých polyomin. Abychom se vyhnuli výpisu a hledání, všech takových polyomin můžeme se pokusit o pokrývání 4×6 obdélníkového polyomina pomocí 3 domin a 3 2×3 obdélníkových polyomin. A potom až následně spojit jednotlivá polyomina v naše požadovaná, tak aby nebyla žádná stejná.

Celkový počet různých pokrývaní je 48 se symetrickými kopiemi. Některé jsou rovnou nesmyslné, protože třeba zabraňují všem dvojicím se alespoň spojit, jiné vypadají jako

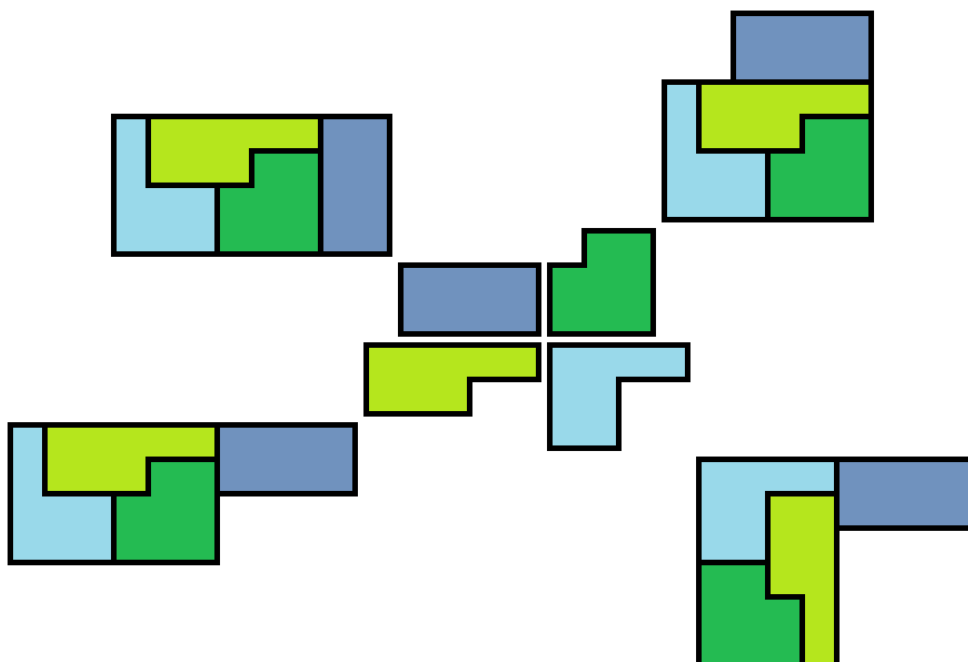
⁶ Úloha poprvé byla poprvé formulována C. Dudleyem Langfordem roku 1977.

potenciální řešení, ale mají duplikované polyformy. Avšak ve výsledku po odstranění symetrických řešení je jen 1 pokrývání, které půjde pospojovat, tak aby všechny podmínky byly platné.



Obrázek 19 – Spojení domin a 4x6 polyomin.

Pro nález už můžeme použít program jako například dobře optimalizovaný Polyform Puzzle Solver od Jaapa Scherphuise. Nyní stačí jen správně pospojit (viz obr. 19) dané polyformy.



Obrázek 20 – Vizualizace všech vzájemných pokrývaní.

Dodatek:

Tato čtveřice (viz obr. 20) zapadá do větší skupiny jménem setiset, kde se nemusí brát v potaz jenom čtveřice polyformů, ale i n-tice jakýchkoliv geometrických obrazců. Pro zájemce jsou na internetu dostupná i jiné setisety. [6]

V následující úloze si ukážeme jednu z možností, jak pracovat s nekonečnými pokrýváními.

3.1.5 C-heptomino

Zadání:

Rozhodněte zdali, lze pomocí C-heptomin (viz obr. 21) pokrýt všesměrné nekonečné polyomino neboli celou rovinu.⁷



Obrázek 21 – C-heptomino.

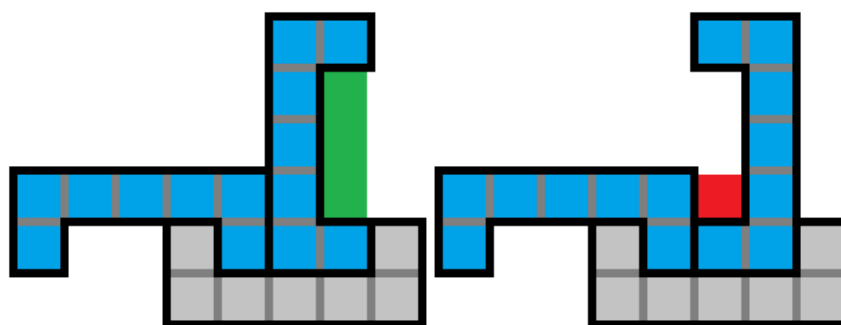
Řešení:

Z hlediska heptomin, toto je právě jedno z mála, pro které je těžké najít právě takové pokrývání. Tudíž se budeme snažit vyvrátit, že to lze. Protože pokrýváme nekonečné polyomino, nezbyvá nám moc jednoduchých způsobů, jak to vyvrátit. Jeden spíše neelegantní způsob může vyžadovat větvení úlohy, naštěstí jen do určité hloubky.

Začneme tím, že si uvědomíme, že naše polyomino má tvar C. Každé C-polyomino lze vyjádřit jako odstranění obdélníkového polyomina z jiného obdélníkového polyomina, kde zároveň záleží na umístění. V našem případě nás zajímá jenom jaké polyomina to jsou. Hlavní polyomino je 2×5 obdélníkové polyomino a druhé 1×3 obdélníkové polyomino neboli I-tromino. Právě toto I-tromino, když se nám nepovede vyplnit, tak nelze pokrýt celá rovina.

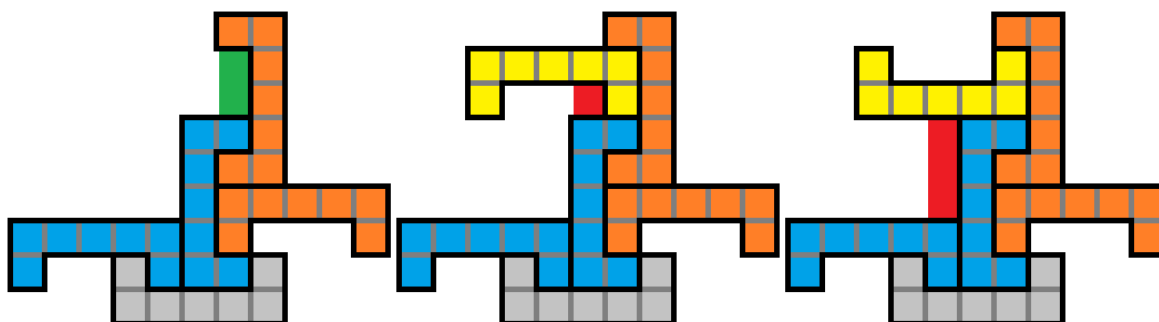
První C-heptomino lze umístit jakýmkoliv směrem. Další fakt, který se nám bude hodit, je, že právě rozměr 3 u I-tromina lze vyplnit vždy právě 2 C-heptominami, tudíž tyto dvě polyomina budou zabírat rozměry 1 a 2. Doplňme I-tromino tedy všemi způsoby (viz obr. 22). Po doplnění zjistíme, že jeho pokrytí lze provést pouze 2 způsoby. Ostatní způsoby jsou symetrické překlopením.

⁷ Jedná se o vlastní úlohu.



Obrázek 22 – Dva způsoby, jak vyplnit I-trominovou mezeru.

Po pohledu na tyto způsoby zjistíme, že jedno z nich má mezeru (vyznačenou červeně), kterou nelze vyplnit. Proto tímto způsobem nelze vyplnit mezeru v I-trominu. V druhém případě (na obrázku vlevo) jsme vytvořili novou I-trominovou mezeru (vyznačenou zeleně). Pokryjme jí stejným způsobem jako první mezeru. Přitom si všimněme, že se musíme rozhodnout jaké překlopení musí pokrývání nové mezery mít. Existují dva způsoby jen jeden je zde možný, neboť jinak překrýváme pokrývající heptomina mezi sebou. Po vyplnění této mezery nám vznikne nová dominová mezeru, též značená zeleně (viz obr. 23).



Obrázek 23 – Vlevo pokrytí I-tromina, uprostřed a vpravo pokrytí nového zeleného domina.

Jak lze z obrázku vidět tuto novou dominovou mezeru můžeme vyplnit dvěma způsoby, kde oba vytváří mezery (značené červeně), které nelze pokrýt. V prostředním obrazci vznikne monomino, které nelze vyplnit ze stejného důvodu, jako jsme mohli vyplnit první trominovou mezeru. V pravém obrazci je to sice I-trominová mezeru, ale nelze vyplnit, protože naše oba naše jediné způsoby vyplnění této mezery by překrývali jiné pokrývající C-heptomina. Z čehož následně vyplývá, že nelze pokrýt všesměrné nekonečné polyomino pomocí C-heptomin.

3.2 Kvantitativní úlohy

Cílem těchto úloh je spočítat množství pokrývání. Není pravda, že každé zadání úlohy může vést ke krátkému a stručnému výsledku a také je většinou na nás rozhodnout, jakým způsobem k výsledku dojdeme. Ať už ho celý spočítáme sami, nebo si necháme v nějaké části pomoc počítačem, můžeme nejdříve spočítat horní hranici.

3.2.1 Konkrétní úlohy

Konkrétní úloha se vykazuje tím, že chceme zjistit konkrétní kvantitu neboli počet, nikoliv mez. Setkáme se s výpočtem celkového množství pokrývání. Na základě dělení pokrývání na částečné a úplné dělíme i tyto úlohy.

Částečné pokrývání

Definice částečného pokrývání je v kapitole Slovník. Obecně platí, že tyto úlohy jsou snazší a málokdy se setkáváme s výrazy, které nejsou polynomické

Monomino a domino

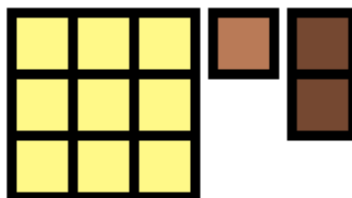
Zadání:

Máme obývací pokoj o rozměrech 3 m na 3 m. Koupili jsme si stůl a židli, kde židle vyžaduje prostor 1 m na 1 m. Z estetických důvodů vyžadujeme, aby stůl i židle byly zarovnány do čtvercové mřížky, kde nejmenší čtverec má rozměr 1 m. Ignorujeme výskyt dveří jiných nástěnných překážek. Určete počet možných položení stolu i židle, pokud musí být ortogonálně vedle sebe a pokud stůl má rozměry:

a) 1 m na 1 m,

b) 1 m na 2 m?⁸

Řešení:



Obrázek 24 – Převedení pokoje a nábytku na polyomina.

Nejprve vyřešme první případ. Všimněme si, že stůl a židle vedle sebe zabírají vždy 1 m na 2 m, či naopak 2 m na 1 m prostor, ale také si všimněme, že tento prostor se židlí

⁸ Jedná se o vlastní úlohu.

a stolem se dá pokrýt vždy dvěma způsoby. Jeden je ten, kdy stůl je napravo nebo nahoře podle orientace prostoru a druhý, kdy je stůl vlevo nebo dole. To znamená, že počet možných způsobů, jak položit tento nábytek bude roven dvojnásobku počtu částečného pokrývání domina na čtvercovém polyominu s 3 monominy na jedné straně.

$$R = 2 \cdot P,$$

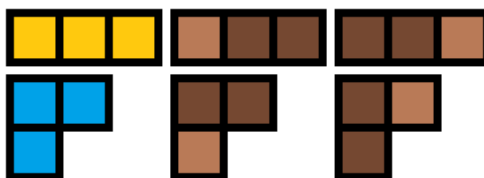
kde R je počet řešení pro položení nábytku a P je počet pokrývání.

Pro toto domino musíme rozhodnout 3 independentní vlastnosti, proto abychom přesně určili jeho polohu. A těmi jsou rotace (horizontální, vertikální), řádkové posunutí a sloupcové posunutí. V našem případě máme pokrývat čtvercové polyomino, z čehož vyplývá, že nám stačí spočítat jenom jedna rotace domina a druhá budeme mít stejné množství pokrývání. Pokud je domino horizontální, pak v našem případě počet řádkových posunutí domina je roven počtu řádků a počet sloupcových posunutí je roven počtu sloupců bez 1. To znamená, že v prvním případě je 24 různých možností, jak položit židli a stůl do daného pokoje.

$$P = 2 \cdot 3 \cdot 2 = 12,$$

2 rotace, 3 řádková posunutí, 2 sloupcová posunutí.

V druhém případě se podívejme na jak položit do pokoje delší stůl a stejnou židli. Zase si spojíme stůl se židlí do polyomina, tentokrát do tromina. Musíme si ale uvědomit, že v tomto případě jsou dva způsoby, jak k sobě dát domino a monomino a oba způsoby jsou možné. Buďto můžeme stůl a židli spojit do tvaru I-tromina, nebo L-tromina. U I-tromina máme dva způsoby, jak ho vyplnit pomocí monomina a domina, stejně tak u L-tromina (viz obr. 25).



Obrázek 25 – Spojení monomina a domina.

$$R_2 = 2P_L + 2P_I,$$

kde P_L je počet pokrývání s L-trominem

a kde P_I je počet pokrývání s I-trominem.

Stejným způsobem, jako ve prvním případě zjistíme počty rotací a posunutí v řádcích a sloupcích. V tomto případě L-tromino má 4 rotace, 2 řádkové posunutí a 2 sloupcové posunutí a I-tromino 2 rotace, 1 řádkové posunutí a 3 sloupcové posunutí.

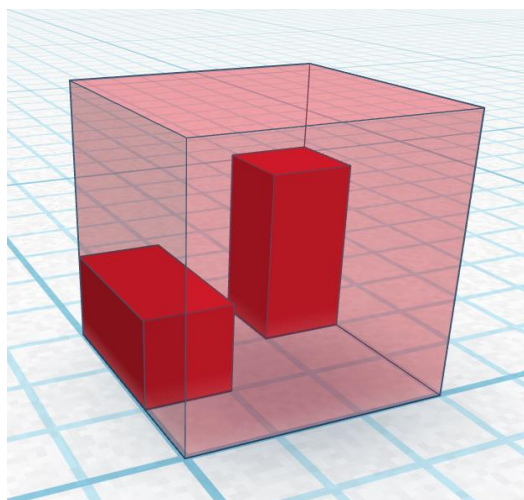
$$R_2 = 2(4 \cdot 2 \cdot 2) + 2(2 \cdot 1 \cdot 3) = 44,$$

neboli je 44 způsobů, jak položit delší stůl a židli do toho pokoje.

Dvě dikrychle

Zadání:

Zjistěte kolika způsoby lze částečně pokrýt krychlová polykrychle (tvořená z $n \geq 3$ monokrychlí), pomocí 2 dikrychlí (viz obr. 26)⁹



Obrázek 26 – Jedno z možných pokrývání v 3x3x3 polykrychli.

Řešení:

Tato úloha se dá řešit mnoha způsoby, jedním z nich je tento. Zakládá na tom, že spočítáme počet způsobů, jak částečně pokrýt naši polykrychli pomocí jen jedné dikrychle. Pak použijeme metodu, která bude zakládat na tom, že obě dikrychle podmínkově jsou independentní. To však není pravda a bude muset udělat exkluzi přidáných řešení, neboť dikrychle se nesmí překrývat.

Prvně tedy spočítáme kolika způsoby lze umístit jedna dikrychle. Rovnoměrně rozdělme si všechny tyto pokrývání podle toho, na jaké ose má dikrychle nejdelší rozměr. Máme 3 osy (x , y a z). Toto rozdělení si můžeme dovolit, protože pokrýváme krychlovou polykrychli dikrychlí, kde oba polyformy jsou zvláštní symetrické povahy. Zvolme si tedy jen osu y a zpětně vynásobme celkové množství 3.

$$J(n) = 3 \cdot S(n),$$

kde J je počet částečných pokrývání polykrychle dikrychlí

a kde S je počet takových, kde osa dikrychle je striktně zvolena.

⁹ Jedná se o vlastní úlohu.

Pro výpočet zjistíme, kolik má dikrychle posunů v každé ose. Počet posunů v dané ose je roven rozměru krychlové polykrychle bez rozměru dikrychle a 1 navíc vše v dané ose.

$$S(n) = (n - 1 + 1)(n - 1 + 1)(n - 2 + 1),$$

neboť rozměry dikrychle jsou 1, 1 a 2.

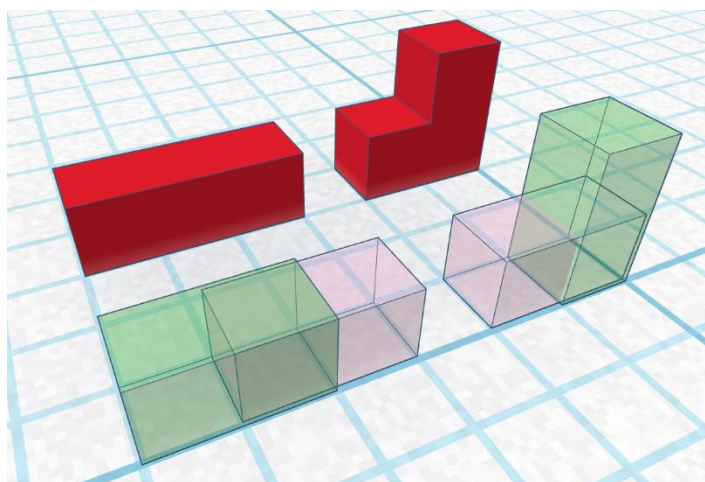
$$J(n) = 3n^2 (n - 1).$$

Ted' se přesuneme k fázi a uděláme inkluzi nových řešení a tu následně ji odečteme. Předpokládejme, že v pokrývání obě dikrychle jsou si v položení navzájem independentní kromě toho, že nezáleží, v jakém pořadí je umístíme a nejsou přímo na stejné pozici.

$$P(n) = \frac{1}{2} J(n)(J(n)-1) - I(n),$$

kde P je počet částečných pokrývání krychlové polykrychle pomocí 2 dikrychlí a kde I je počet inkluzí.

Abychom mohli spočítat počet inkluzí, musíme si uvědomit, co přesně se děje, když dikrychle si nejsou navzájem polohově independentní. V našem případě se dikrychle mohou překrývat. Tyto dikrychle můžeme z tohoto důvodu sjednotit v jinou polykrychli. Máme 2 případy 27 sjednocených polykrychlí a ty jsou I-trikrychle a L-trikrychle. Pro každou tuto polykrychli budeme muset zjistit počet pokrývání stejně jako u jedné dikrychle (viz obr. 27).



Obrázek 27 – Sjednocení dvou překrývajících se dikrychlí v trikrychli.

Pro I-trikrychli to bude obdobné jako u dikrychle, neboť se jedná také o kvádrovou polykrychli. Jediný rozdíl bude v rozměrech, tudíž budeme muset dosazovat největší rozměr jako 3 místo 2. Větší zádrhel se může zdát počet částečných pokrývání krychlové polykrychle pomocí L-trikrychlí. Ovšem ani to nemusíme složitě odvozovat, neboť L-trikrychli můžeme nahradit kvádrovou polykrychlí o rozměrech a 1, 2 a 2, která opisuje L-trikrychli. Právě v této polykrychli se dá L-trikrychle umístit 4 způsoby.

$$I(n) = 3((n-1+1)^2(n-3+1) + 4(n-1+1)(n-2+1)^2)$$

vše musíme násobit 3, neboť máme 3 osy,

u L-trikrychle máme 4 způsoby v kvádrové polykrychli.

$$I(n) = 15n^3 - 30n^2 + 12n.$$

$$P(n) = \frac{1}{2} 3n^2(n-1)(3n^2(n-1)-1) - (15n^3 - 30n^2 + 12n),$$

$$P(n) = 32n(3n^5 - 6n^4 + 3n^3 - 11n^2 + 21n - 8).$$

Pro zajímavost můžeme dosadit a zjistit, že počet částečných pokrývání 5x5x5 krychlové polykrychle pomocí 2 dikrychlí je roven 43665.

Úplné pokrývání

Úplná pokrývání a jejich kvantifikace mohou vést ke složitějším řešením. S každým monominem v pokrývajících polyformech se obtížnost zvětšuje.

Jako předposlední úlohy si uvedeme takové, kde budeme počítat množství úplných pokrývání. V těchto úlohách budeme používat znalosti z posloupností, přesněji z rekurentních výrazů. Budeme pracovat se soustavou rekurentních vzorců a také budeme převádět rekurentní výrazy na vzorce n-tého členu. To vše budeme dělat, protože v těchto úlohách se často vyplácí úlohu zobecnit. Dále si pak ukážeme, jak lze úlohy spočítat pomocí počítače.

Domina

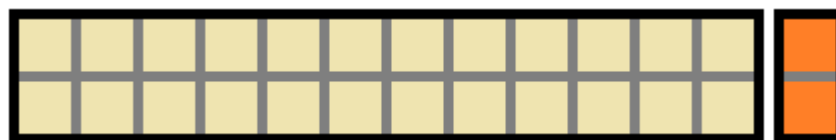
Zadání:

V Kocourkově se rozhodli postavit chodník o délce 24 m a šířce 3 m. Ke stavbě si pořídili dlaždice o rozměrech 1,5 m a 3 m. Momentálně se dohadují kolika způsoby lze chodník postavit, tak aby nezůstala žádná mezera, která by nebyla vydlážděna. Kolika způsoby lze tedy chodník postavit?¹⁰

Řešení:

Pro zjištění počtu dláždění chodníku, musíme nejprve převést úlohu do pokrývání pomocí polyformů. Všimněme si, že dlaždice je v poměru 1 ku 2, což my převedeme na 1x2 obdélníkové polyomino neboli domino a dlážděná plocha se pak musí vydělit stejným násobkem, kterým jsme z 1,5 ku 3 udělali 1 ku 2. Čímž vyjde, že pokrýváme 12x2 obdélníkové polyomino (viz obr. 28).

¹⁰ Inspirováno diplomovou prací Terezy Dvořákové ze strany 53 [7]



Obrázek 28 – Chodník a dlaždice, převedené na bezrozměrné polyomina.

Tento následující krok se pro začátečníky, může zdát nadbytečně komplikovaný, ale ve výsledku nám hodně zjednoduší práci. Definujme si $A(n)$ jako počet pokrývání $n \times 2$ obdélníkového polyomina pomocí domin. Naším cílem teď je zjistit hodnotu $A(12)$. Zkusme si spočítat $A(1)$ a $A(2)$ ručně. $A(1)$ je domino pomocí domina, to lze provést jen jedním způsobem. $A(2)$ je O-tetromino pomocí 2 domin, a to lze provést dvě způsoby (viz obr. 29).



Obrázek 29 – $A(1)$ (modré) a $A(2)$ (modré a oranžové).

Všimněme si, že modré $A(2)$ pokrývání se skládá z dvou $A(1)$ pokrývání vedle sebe. Všechny pokrývání se dají vytvořit právě skládáním modrého $A(1)$ pokrývání a oranžového $A(2)$ pokrývání, z čeho vyplývá:

$$A(n) = A(n - 1) + A(n - 2).$$

Rovnost platí na základě, že jsme položili právě jedno domino, nebo dvě domina za pokrývání o délce $n - 1$, nebo $n - 2$, čímž jsme z něj udělali pokrývání o délce n . Všechny pokrývání se dají vytvořit právě skládáním, protože neexistuje žádný jiný způsob, jak dát domina vedle sebe, než do těchto nerozložitelných pokrytí.

Po bližším zkoumání si můžeme všimnout, že $A(n)$ je Fibonacciho posloupnost. První dva členy posloupnosti víme a taky nám stačí jen dosadit a několikrát sečíst podle rekurentního vzorce. Po propočtech zjistíme, že $A(12) = 233$.

Dikrychlová věž

Zadání:

Kolika způsoby lze sestavit kvádrou polykrychli s výškou 10 a podstavou 2×2 pomocí dikrychlí?¹¹

Řešení:

Máme tedy několik způsobů, jak tyto posloupnosti vymyslet. My zvolíme takový, kde sjednotíme symetrické kopie, neboť kvádrou polykrychle má čtvercovou podstavu a má rotační a zrcadlové symetrie.

Zde bychom mohli postupovat stejně jako u předchozí úlohy zjištěním počtu nerozložitelných pokrývání a následným použitím vzorce. Kdybychom to tak udělali, zjistili bychom, že v tomto případě máme nekonečnou množinu nerozložitelných pokrývání. Tady bychom ji museli definovat a ověřit, že je jediná.

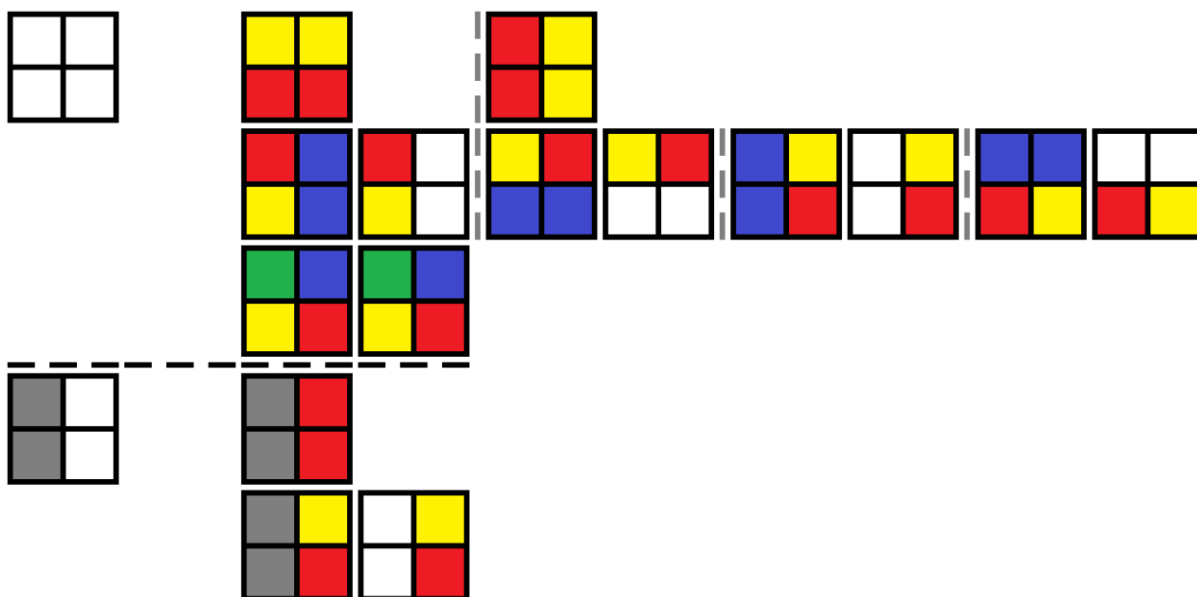
My ale zvolíme metodu pomocí odkazování. Vytvoříme si několik rekurentních soustav pro několik posloupností. Každá z těchto posloupností bude řešit stejné pokrývání, jediné, co se změní, je to že pokaždé do každé nejnižší 2×2 vrstvy již vyznačíme nějaké monokrychle. Tímto způsobem pak pokud umístíme dikrychle do kvádrou polykrychle může nadále odkazovat na pokrývání, kde jsou například 2 monokrychle zabrané.

Máme tedy několik způsobů, jak tyto posloupnosti vymyslet. My zvolíme takový, kde sjednotíme symetrické kopie, neboť kvádrou polykrychle má čtvercovou podstavu a má rotační a zrcadlové symetrie.

Dále si tedy definujeme posloupnost $B(n)$, kde jsou již odstraněné 2 monokrychle ve stejné výšce, které jsou vedle sebe. Všimněme si, že pokud se snažíme zůstat ve stejné výšce musíme je položit vedle sebe. Když by vedle sebe nebyli museli bychom vyplnit zbývající 2 monokrychle pomocí dvou dikrychlí, které by dali za vznik zase dvou nesousedících monokrychlových mezer. Tudíž bychom se nikdy nedostali k úplnému pokrývání.

Nyní musíme definovat jednotlivé vztahy mezi posloupnostmi $A(n)$ a $B(n)$. $A(n)$ má dva způsoby, jak může odkazovat na sebe. Buďto umístíme 2 dikrychle horizontálně, což lze provést 2 způsoby, nebo umístíme 4 dikrychle vertikálně, což lze provést jen 1 způsobem. Nebo může $A(n)$ odkazovat na $B(n)$ a to umístěním 1 dikrychle horizontálně a 2 dikrychlí vertikálně, což lze provést 4 způsoby. Pro $B(n)$ máme 1 způsob odkázat na sebe a to tak, že umístíme 2 dikrychle vertikálně. Nebo můžeme odkázat $B(n)$ na $A(n)$ a to také 1 způsobem. Umístěním 1 dikrychle horizontálně. Všechna umístování jsme se vždy snažili provést v co nejnižší vrstvě.

¹¹ Inspirováno článkem od Radovana Potučka. [8]



Obrázek 30 – Zákres všech odkazů.

Každý čtyřčtverec naznačuje výškovou úroveň ve kvádrové polykrychli. Čtyřčtverec, který malou mezerou sousedí na levé straně s jiným čtyřčtvercem, je ve stejné kvádrové krychli a je ve vrstvě nad levým čtyřčtvercem. Pokud odděluje čtyřčtverce šedá čárkovaná čára, jedná se o symetrické odkazování. Černá čárkovaná čára odděluje posloupnosti. Posloupnosti jsou vyznačené horním čtyřčtvercem, kde šedě vyznačené čtverce jsou monokrychle, které jsou pro 31 danou posloupnost umístěné. Dále jsou umístěny jednotlivé dikrychle podle předchozího popisu. Daná dikrychle je označena jednotnou barvou (viz obr. 30).

Teď když už máme obě posloupnosti plně definované zapíšeme jednotlivé vztahy. Musíme si dávat pozor nejen na jakou posloupnost odkazujeme, ale také na kolik vrstev jsme přitom už pokryli. Zapišme tedy podle zákresu vztah pro $A(n)$ a $B(n)$:

$$A(n) = 2A(n-1) + 4B(n-1) + A(n-2),$$

$$B(n) = A(n-1) + B(n-1).$$

Zde potřebujeme vyjádřit $A(n)$. Toho můžeme dosáhnout zase mnoha způsoby. Zvolme nejjednodušší a z hlediska matematických znalostí nejsnazší, a to pomocí dosazování. Z rovnice pro posloupnost $A(n)$, můžeme vyjádřit $B(n-1)$. Následně můžeme celou rovnost indexově posunout a obě rovnosti dosadit do rovnice pro $B(n)$.

$$B(n-1) = \frac{1}{4} (A(n) - 2A(n-1) - A(n-2)),$$

$$B(n) = \frac{1}{4} (A(n+1) - 2A(n) - A(n-1)),$$

indexové posunutí o +1.

$$\frac{1}{4} (A(n+1) - 2A(n) - A(n-1)) = A(n-1) + \frac{1}{4} (A(n) - 2A(n-1) - A(n-2)),$$

$$A(n) = 3A(n-1) + 3A(n-2) - A(n-3),$$

po algebraické úpravě a indexovém posunutí.

Po zjednodušení jsme dostali rekurentní vzorec pro pouhé $A(n)$. Protože máme nejzpatěčnější člen $A(n-3)$, tak musíme znát 3 předchozí stavy posloupnosti. $A(1)$ už víme ze zjišťování odkazu posloupností $A(n)$ a $B(n)$ že je 2. $A(2)$ bude buďto dvoje $A(1)$ na sobě. My víme, že pro $A(2)$ pokrýváme krychlovou polykrychli $2 \times 2 \times 2$. To znamená, že všechny kombinace na sobě, můžeme ještě otočit ve 3 osách. Celkový počet kombinací je 9, protože máme symetrické duplikáty, tudíž nikoliv 12. Mohli bychom učit $A(3)$, ale mnohem jednodušší je si všimnout kolik je $A(0)$. $A(0)$ je tehdy, když kvádrová polykrychle má výšku 0, což už není polyform, ale i přesto můžeme doručit logicky $A(0)$, neboť když nemám co pokrývat, tak to vždy mohu udělat jedním a též způsobem, nepokryji nic. $A(0)$ je tedy 1.

Dosadíme do vzorce a spočteme, že $A(10)$ se rovná 326041. Pro zájemce metody řešení pomocí nerozložitelných pokrývání se nabízí posloupnost A006253.¹²

¹² oeis.org/A006253

Dodatek:

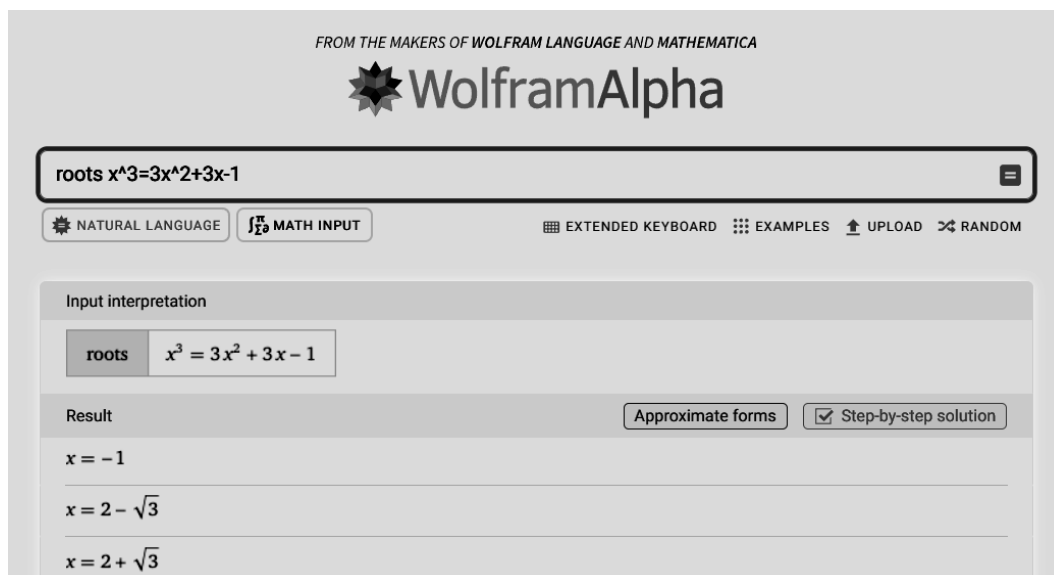
Abychom nemuseli počítat všechny předchozí členy posloupnosti, můžeme si odvodit vzorec pro n -tý člen. Nejprve si tedy vyjádříme charakteristický polynom z rekurentního vzorce.

$$A(n) = 3A(n-1) + 3A(n-2) - A(n-3),$$

$$x^3 = 3x^2 + 3x - 1,$$

kde kořeny této rovnice budou koeficienty růstu.

Pro nalezení použijeme WolframAlpha, neboť to urychlí výpočet. Tento způsob řešení se nám hodí, neboť existují polynomy 5. řádu, pro které neexistuje obecný vzorec pro jednotlivé kořeny. V našem případě se jedná o kubickou rovnost. Ta by se dala vyřešit i pomocí nejprve hledání celočíselných kořenů a následného dělení polynomů, nebo rovnou přes vzorec pro kubický polynom. Pro řešení pomocí WolframAlpha najdeme webovou stránku wolframalpha.com. Pro nalezení kořenů napíšeme “roots $x^3=3x^2+3x-1$ ” (viz obr. 31).



Obrázek 31 – Ukázka stránky WolframAlpha, dosazení polynomu za účelem získání kořenů.

V našem případě se doopravdy vyskytl celočíselný kořen, tudíž jsme mohli vyřešit rovnost i za pomoci dělení a následného použití vzorce pro kvadratickou rovnici. Teď když víme, jaké kořeny má charakteristická rovnice můžeme je dosadit do rovnice pro n -tý člen.

Tento způsob řešení funguje u každé rekurentní rovnice. Vždy nasčítáme všechny kořeny umocněné na n a vynásobené koeficienty. Dobré dále podotknout, že pokud mají dva, či více kořenů stejnou hodnotu, musíme je ještě násobit mocninou n . V našem případě nemáme žádné dva, či více stejných kořenů. Dále bychom potřebovali spočítat jednotlivé koeficienty. Nejjednodušší způsob, jak to udělat je pomocí dosazení prvních tří členů a následným vytvořením třech rovnic o třech neznámých.

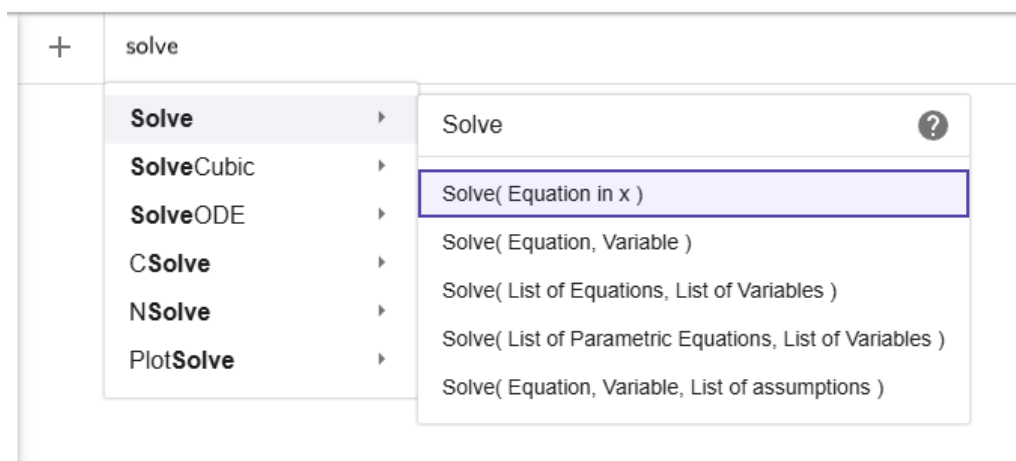
$$a(0) = 1 = q_1(x_1)^0 + q_2(x_2)^0 + q_3(x_3)^0,$$

$$a(1) = 2 = q_1(x_1)^1 + q_2(x_2)^1 + q_3(x_3)^1,$$

$$a(2) = 9 = q_1(x_1)^2 + q_2(x_2)^2 + q_3(x_3)^2.$$

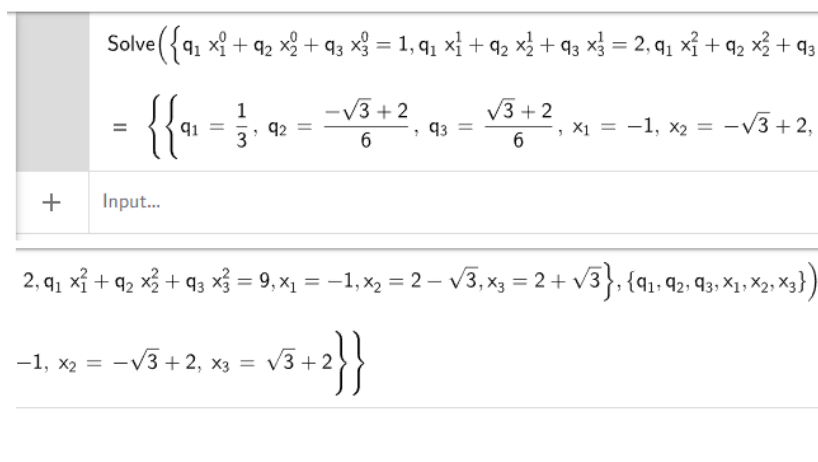
$$\begin{pmatrix} x_1^0 & x_2^0 & x_3^0 \\ x_1^1 & x_2^1 & x_3^1 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Tyto rovnice bychom mohli řešit pomocí převodu do matic a následných determinantů, či dokonce bychom je mohli zapsat do WolframAlpha, ale v obecných případech se setkáme s větším počtem rovnic, které WolframAlpha už nebudeme moct vzít kvůli znakovému limitu dotazu. Proto použijeme Geogebra CAS kalkulačku a příkaz “Solve”. Otevřme si tedy stránku [geogebra.org/cas](https://www.geogebra.org/cas) a do prvního řádku napíšeme solve (viz obr. 32).



Obrázek 32 – Geogebra CAS, příkaz solve.

Nyní zvolme “Solve(List of Equations, List of Variables)“. A přepíšme jednotlivé rovnosti ve složených závorkách do prvního vstupu. Rovnosti oddělujeme čárkou. A do druhého vstupu napíšme zase v složených závorkách jednotlivé neznámé, které také oddělíme čárkami. Připíšme i rovnosti pro x. Berme v potaz, že Geogebra CAS nemusí nutně chápat náš zápis, proto radši všude, kde to jde píše danou operaci, čímž myslím například násobící tečku (viz obr. 33).



Obrázek 33 – Geogebra CAS, jednotlivé rovnice.

Po stisknutí klávesy enter jsme dostali jednotlivé q . Teď je můžeme dosadit do zpět do našeho vzorce pro n -tý a máme hotovou úlohu

$$a(n) = \frac{1}{3} (-1)^n + \frac{1}{6} (2 - \sqrt{3}) (2 - \sqrt{3})^n + \frac{1}{6} (2 + \sqrt{3}) (2 + \sqrt{3})^n,$$

což se dá zjednodušit na:

$$a(n) = \frac{1}{6} (2 (-1)^n + (2 - \sqrt{3})^{n+1} + (2 + \sqrt{3})^{n+1}).$$

3.2.2 Obecné úlohy

Tyto úlohy nám slouží k lepšímu porozumění specifických znalostí pokrývání pomocí polyformů. Většinou při nich potřebujeme znalosti mimo samotné pokrývání.

Horní mez

Zadání:

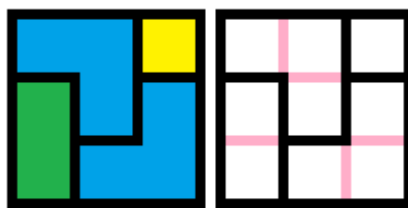
$A(m, n)$ je počet pokrývání $m \times n$ obdélníkového polyomina pomocí jakýchkoliv polyomin. Dokažte, že platí následující nerovnost:

$$A(m, n) \leq 4^{mn}.^{13}$$

Důkaz:

Nejprve si budeme potřebovat uvědomit, že každé pokrývání vznikne odstraněním některých hran z obdélníkové sítě (viz obr. 34). Tento fakt platí jen tímto směrem, neboť jsme schopni najít vymazání hran takové, které vytvoří polyomino, které má jednu hranu uvnitř sebe.

¹³ Jedná se o vlastní úlohu.

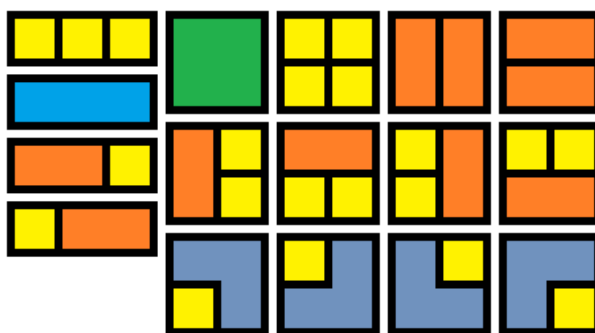


Obrázek 34 – Převodění pokrývání na odstranění hran ze sítě, růžově vymazané hrany.

Z předchozího odstavce tedy vyplývá, že počet způsobů, jak odstranit hrany v síti, je větší nebo roven počtu pokrývání $A(n)$. Pojdme tedy zjistit kolik je tedy způsobů odstranění. Zanedbáme krajní hrany, které víme, že pokrývání vždy má, pak víme, že počet hran v $m \times n$ obdélníkové síti je roven $m(n - 1) + (m - 1)n$, zjednodušeně $2mn - m - n$. Při odstranění se prakticky rozhodujeme mezi dvěma stavy hran, a to na vymazaná hrana, nebo nevymazaná. Což se dá implementovat jako počet variací s opakováním, kde je $2mn - m - n$ členu a 2 prvky. Tudíž počet možností, jak odstranit hrany je roven $2^{2mn - m - n}$, zjednodušeně $4^{mn/2^{m+n}}$. Pokud $A(m, n) \leq 4^{mn/2^{m+n}}$, pak platí i $A(m, n) \leq 4^{mn}$. Čímž jsme si dokázali naši nerovnost.

Dodatek:

Tímto důkazem jsme zjistili několik zajímavých faktů. První z nich může být, že počet pokrytí $m \times n$ obdélníkového polyomina je maximálně exponenciální, když měníme pouze jeden rozměr. Druhý z nich může být, že každým dalším přidaným monominem v obdélníkovém polyominu může maximálně zčtyřnásobit počet pokrývání (viz obr. 35).



Obrázek 35 – pokrývání I-tromina a O-tetromina.

Z obrázku lze vidět, že přidáním jednoho monomina k pokrývanému polyominu se počet pokrývání ztrojnásobil. Všimněte si, že nezáleží na tvaru pokrývaného obdélníkového polyomina.

Dalším způsobem, jak by se dala nerovnost vyvodit, je pomocí věty o čtyř barvách, která zde implikuje, že každý planární graf, lze vybarvit pomocí maximálně čtyř barev. Tudíž každé pokrývání půjde vybarvit pomocí maximálně čtyř barev, tak aby žádné dvě ortogonálně sousedující polyomina neměla stejnou barvu. Což zase evokuje variace s opakováním. Tentokrát to však je mn členů a 4 prvky. Z čehož vyplývá stejná nerovnost

4 VIDEOMATERIÁLY

Uvedme si jako dodatek doplňující studijní materiály ve formě videí na platformě YouTube v anglickém jazyce (viz obr. 35), které by se mohli hodit pro bližší porozumění.



Obrázek 36 – QR kód na YouTube playlist [9-16].

Playlist obsahuje 8 videí, která jsou seřazená podle délky trvání. Skládá se převážně z videí, která jsou natáčena hlavně rekreačními matematiky. Ne všechny videa řeší převážně pokrývání polyformů jako hlavní téma, ale všechny mají pokrývání, či polyformy jako motiv.

https://www.youtube.com/playlist?list=PLX-sBKOHcruRjdJafB678_Zu0Mg51QDA

Ve videích se můžeme dozvědět od původu pojmenování jednotlivých polyformů, které jako první zformuloval S. W. Golomb, až po kvantifikaci 2D pokrývání pomocí 3D pokrývání. Dále se zde vyskytuje video od Numberphile, jež pojednává o objevu prvního polyformu, jež je schopen pokrýt všesměrný polyform a to neperiodicky. V závěru nejdelší video pojednává o posunech domin a také o geniálním vzorci pro počet pokrytí $m \times n$ obdélníkového polyomina pomocí domin, jež objevil fyzik P. W. Kasteleyn.

5 VÝSLEDKY PUBLIKACE Z ČASOPISU

Jako další studijní materiál si uveďme článek, který byl mou spoluprací s docentem Antonínem Slavíkem a publikován v časopise American Mathematical Monthly. Hlavním cílem článku bylo potvrzení domněnky, jež jsem stanovil v roce 2022 na OEIS v posloupnosti A166482.¹⁴ Domněnka spočívala ve shodě dvou posloupností na základě dvou rozdílných definic.

$$A166482(n) = \sum C(n+k, 2k)F(2k+1), k=0 \text{ do } n,$$

kde F je Fibonacciho posloupnost a C je kombinační číslo.

Mnou nová navrhovaná definice spočítávala v počtu pokrývání $4n \times 4$ obdélníkového polyomina pomocí jednostranných L-tetromin. Domněnka byla úspěšně potvrzena.



Obrázek 37 – QR kód na předtisk článku.

Mimo to jsme během sepisování důkazu objevili několik dalších zajímavých způsobů interpretace problému. Mezi které patří například dvoubarevné celočíselné kompozice. Stanovili jsme otevřený problém, který je založen na objevu kombinatorické interpretace původní definice A166482.

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~slavik/papers/L-tetromino-tilings.pdf>

¹⁴ oeis.org/A166482

6 ZÁVĚR

Úvod byl napsán tak, aby čtenáři představil co nejširší spektrum využití tématu. Zároveň je zaměřen na čtenáře tak, aby ho motivoval k dalšímu zkoumání problematiky. Ve slovníku se nacházejí nejen informace nezbytné k pochopení základních axiomů pokrývání, ale také vlastnosti polyformů, které je vhodné znát při řešení úloh.

Pokud se přesuneme k samotným úlohám, můžeme si všimnout, že byly vybrány tak, aby byly co nejrozmanitější. Pro výuku by bylo vhodné mít k dispozici i další úlohy stejného typu, aby si čtenář mohl procvičovat své znalosti. Tento aspekt je v práci řešen použitím méně odborné slovní zásoby u jednodušších úloh, což by mělo vést k tomu, že čtenář bude schopen rozpoznat princip pokrývání i v reálných situacích kolem sebe. To mu pak umožní samostatně objevovat další úlohy stejného typu.

Dále se v textu vyskytují odkazy na jiné matematické obory. Nejčastěji se jedná o odkazy na posloupnosti, které se v této problematice nabízejí jako efektivní nástroj. Kromě toho lze nalézt také odkazy na teorii grafů, která s pokrýváním úzce souvisí. Pokud jde o použité nástroje, práce obsahuje také návody na využití volně dostupných programů. Konkrétně zde najdeme postup řešení soustavy rovnic pomocí GeoGebra CAS a návod na hledání kořenů složitějších polynomů pomocí online kalkulatoru WolframAlpha.

Dalším významným zdrojem informací je seznam anglicky namluvených videí. Tento seznam obsahuje osm videí, převážně z YouTube kanálu Numberphile. Každé video se nějakým způsobem vztahuje k tématu práce, například poskytuje historický kontext pokrývání pomocí polyformů.

Na tuto práci by bylo možné navázat dalším shromažďováním úloh. Zajímavou alternativou by mohlo být encyklopedické zpracování různých druhů polyformů a jejich základních vlastností.

7 SEZNAM POUŽITÝCH INFORMAČNÍCH ZDROJŮ

- [1] PEDERSEN, Ole Poul, BUNDGAARD, Thorleif (ed.). The birth of SOMA. Online. 10 March 2003. Dostupné z: <https://www.fam-bundgaard.dk/SOMA/NEWS/N030310.HTM>. [cit. 2025-01-09].
- [2] WIKIMEDIA COMMONS. Category:Pythagorean tiling. Online. 5 October 2024. Dostupné z: https://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Pythagorean_tiling. [cit. 2025-01-10].
- [3] WOLFGANG WEISSTEIN, Eric. Polyform. Online. Thursday January 9, 2025. Dostupné z: <https://mathworld.wolfram.com/Polyform.html>. [cit. 2025-01-10].
- [4] GOLOMB, Solomon. Polyominoes: Puzzles, Patterns, Problems, and Packings. 2nd ed. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1965. ISBN 978-0-691-02444-8.
- [5] SLOANE, Neil James Alexander. The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. Online. 1964, January 10 06:14 EST 2025. Dostupné z: <https://oeis.org/>. [cit. 2025-01-10].
- [6] SALLOWS, Lee. Self-Tiling Tile Sets. Online. 2012, 14-6-2020. Dostupné z: https://www.leesallows.com/index.php?page_menu=Self-Tiling%20Tile%20Sets. [cit. 2025-01-21].
- [7] DVOŘÁKOVÁ, Tereza. Kombinatorické úlohy o pokrývání. Diplomová práce, vedoucí doc. RNDr. Antonín Slavík, Ph.D. Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta, 2014. Dostupné také z: https://dspace.cuni.cz/bitstream/handle/20.500.11956/65880/DPTX_2012_1_11320_0_378314_0_128091.pdf?sequence=1&isAllowed=y.
- [8] POTŮČEK, Radovan. The Number of Fillings a $2 \times 2 \times n$ prism with $1 \times 1 \times 2$ prisms. Online. EQUATIONS. 2023, roč. 3, s. 104-114. ISSN 2732-9976. Dostupné z: <https://doi.org/10.37394/232021.2023.3.12>. [cit. 2025-01-21].
- [9] MACDONALD, Ayliean [@Ayliean]. Pentagons Tile and its Awesome. Online. 2021. Dostupné z: YouTube, <https://www.youtube.com/watch?v=e82H1RrjzAg>. [cit. 2025-01-21].
- [10] BELLOS, Alex, HARAN, Brady (ed.) [@Numberphile]. The Pentomino Puzzle (and Tetris) - Numberphile. Online. 2018. Dostupné z: YouTube, https://www.youtube.com/watch?v=wZ1E_CM7MqA. [cit. 2025-01-21].
- [11] MACLEAN, Sophie, HARAN, Brady (ed.) [@Numberphile]. Pentominoes and other Polyominoes - Numberphile. Online. 2024. Dostupné z: YouTube, <https://www.youtube.com/watch?v=ONdgXYEBihA>. [cit. 2025-01-21].

- [12] CRAWFORD, Tom, HARAN, Brady (ed.) [@Numberphile]. A Problem with Rectangles - Numberphile. Online. 2021. Dostupné z: YouTube, <https://www.youtube.com/watch?v=VZ25tZ9z6uI>. [cit. 2025-01-21].
- [13] MACDONALD, Ayliean, HARAN, Brady (ed.) [@Numberphile]. A New Tile in Newtype - Numberphile. Online. 2023. Dostupné z: YouTube, <https://www.youtube.com/watch?v=ArADlJx7SIU>. [cit. 2025-01-21].
- [14] PARKER, Matt [@Stand-up Maths]. How many 3D nets does a 4D hypercube have? Online. 2021. Dostupné z: YouTube, <https://www.youtube.com/watch?v=Yq3PLhlcQo>. [cit. 2025-01-21].
- [15] SANDERSON, Grant [@3Blue1Brown]. Why 4d geometry makes me sad. Online. 2024. Dostupné z: YouTube, <https://www.youtube.com/watch?v=piJkuavhV50>. [cit. 2025-01-21].
- [16] POLSTER, Burkard [@Mathologer]. The ARCTIC CIRCLE THEOREM or Why do physicists play dominoes? Online. 2020. Dostupné z: YouTube, <https://www.youtube.com/watch?v=Yy7Q8IWNfHM>. [cit. 2025-01-21].

8 SEZNAM OBRÁZKŮ

Obrázek 1 – Příklad z rekreační matematiky, Soma kostka, hlavolam zkonstruovaný dánským fyzikem Pietem Heinem [1].	6
Obrázek 2 – Příklad chodníku, pythagorejské pokrývání [2] s účelnou chybou konstrukci.	7
Obrázek 3 – Příklad krystalické struktury, model krychlové krystalické mřížky.	7
Obrázek 4 – Změna vlastností na základě pokrývání, islandský kalcit a jeho dvojlohm.	8
Obrázek 5 – Převod Wangových dlaždic na polyomina.	8
Obrázek 6 – Monomino, monohex, moniamond.	9
Obrázek 7 – T-tetromino.	9
Obrázek 8 – Jednosměrné nekonečné polyomino, modré tečky naznačují pokračování ve vzorci.	10
Obrázek 9 – Souvislost.	10
Obrázek 10 – A348134(3).	11
Obrázek 11 – Šachovnice s již třemi dominy.	12
Obrázek 12 – Šachovnice bez středově protilehlých rohů.	13
Obrázek 13 – Vložení pokrývání do jiného pokrývání.	14
Obrázek 14 – Čtverce pokryté sudým množstvím čtverců.	15
Obrázek 15 – Šestiúhelníková plocha 3. řádu a J-trihex.	16
Obrázek 16 – Rohy a prostřední monohex vybarvený modře.	16
Obrázek 17 – Částečné pokrývání s chybějícím monohexem v rohu, nebo uprostřed.	17
Obrázek 18 – 2x4, 4x8 a 4x6 obdélníkové polyomino.	18
Obrázek 19 – Spojení domin a 4x6 polyomin.	19
Obrázek 20 – Vizualizace všech vzájemných pokrývání.	19
Obrázek 21 – C-heptomino.	20
Obrázek 22 – Dva způsoby, jak vyplnit I-trominovou mezeru.	21
Obrázek 23 – Vlevo pokrytí I-tromina, uprostřed a vpravo pokrytí nového zeleného domina.	21
Obrázek 24 – Převedení pokoje a nábytku na polyomina.	22
Obrázek 25 – Spojení monomina a domina.	23
Obrázek 26 – Jedno z možných pokrývání v 3x3x3 polykrychli.	24
Obrázek 27 – Sjednocení dvou překrývajících se dikrychli v trikrychli.	25
Obrázek 28 – Chodník a dlaždice, převedené na bezrozměrné polyomina.	27
Obrázek 29 – A(1) (modré) a A(2) (modré a oranžové).	27
Obrázek 30 – Zákres všech odkazů.	29
Obrázek 31 – Ukázka stránky WolframAlpha, dosazení polynomu za účelem získání kořenů.	31
Obrázek 32 – Geogebra CAS, příkaz solve.	32
Obrázek 33 – Geogebra CAS, jednotlivé rovnice.	33
Obrázek 34 – Převedení pokrývání na odstranění hran ze sítě, růžově vymazané hrany.	34
Obrázek 35 – pokrývání I-tromina a O-tetromina.	34
Obrázek 36 – QR kód na YouTube playlist [9-16].	35
Obrázek 37 – QR kód na předtisk článku.	36

PŘÍLOHA 1: L-TETROMINO TILINGS AND TWO-COLOR INTEGER COMPOSITIONS

L-Tetromino Tilings and Two-Color Integer Compositions

Nicolas Břlohoubek and Antonín Slavík

Abstract. We find recurrent as well as explicit formulas for the number of tilings of a $2n \times 4$ rectangle using L-tetrominoes when only rotation of tiles is allowed. We show that the problem is equivalent to calculating the number of certain two-color integer compositions.

1. INTRODUCTION. Tiling problems fascinate amateur as well as professional mathematicians. Many of them are accessible to a wide audience and require only elementary mathematics; an excellent collection of such problems is available in the first chapter of Alexander Soifer’s book [1]. On the other hand, there are deep results involving nontrivial mathematics such as the celebrated Fisher–Kasteleyn–Temperley formula, which counts the number of tilings of a rectangle using dominoes [2, 3]. Two major recent breakthroughs in the area of tiling are David Smith’s discovery of an einstein (a shape that admits tilings of the plane, but only aperiodic ones, [4]), as well as Rachel Greenfeld’s and Terence Tao’s recent disproof of the periodic tiling conjecture (the discovery of a tile whose translations cover the Euclidean space, but only aperiodically [5]). A nice survey of tiling problems was provided by Federico Ardila and Richard P. Stanley [6]. It is also worth mentioning an excellent computer program for experimenting with tiling problems, the *PolySolver*, written by Jaap Scherphuis [7].

A common type of a tile is a polyomino, which is composed of unit squares. Tetrominoes consist of four unit squares (see Figure 1), and they are familiar to all Tetris players. Because of their shapes, they are known as the I-tetromino, L-tetromino, S-tetromino, T-tetromino, and O-tetromino.

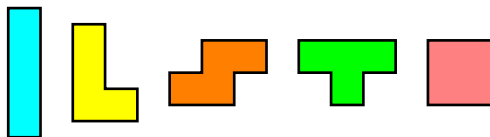


Figure 1. Five possible tetrominoes.

Which of these tetrominoes can be used to tile an $a \times b$ rectangle with integer sides? The following necessary and sufficient conditions are well known:

- An I-tetromino tiling exists if and only if at least one of a, b is divisible by 4 (see [1, Section 1.4]).
- An L-tetromino tiling exists if only if $a, b \geq 2$ and ab is divisible by 8 (see [8]).
- No rectangle can be tiled with S-tetrominoes (this is obvious; there are two ways of covering the upper left corner, both of which lead to a failure).
- A T-tetromino tiling exists if and only if both a and b are divisible by 4 (see [9]).
- An O-tetromino tiling exists if and only if both a and b are even (this is obvious).

Once we know a tiling exists, the next problem is to calculate the number of all possible tilings. In the present paper, we focus on tiling rectangles with L-tetrominoes. These are the only tetrominoes for which it makes sense to distinguish two versions of the tiling problem: either we permit the tiles to be rotated as well as reflected, or we allow only rotation (as in Tetris). In both cases, it is straightforward to calculate the number of all tilings if the length of the shorter side of the rectangle is 2 and the length of the longer one is divisible by 4. Hence, the smallest nontrivial counting problem for L-tetrominoes is that of a $2n \times 4$ rectangle. The case when both rotation and reflection are allowed was analyzed by Cristopher Moore in [10], and additional results are available in the OEIS [11], sequence A084480.

As far as we are aware, the second version when only rotation is allowed is new. In this case, there are only four positions of the L-tetromino that we need to consider; see Figure 2.

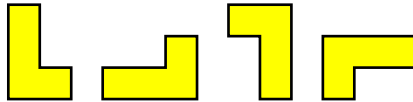


Figure 2. L-tetromino in four available positions.

For each $n \in \mathbb{N}_0$, denote by a_n the number of all tilings of a $2n \times 4$ rectangle with L-tetrominoes when only rotation is allowed. The first values are $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 5$, etc. It was conjectured by Nicolas Břelohoubek that the even-indexed terms of this sequence (i.e., the numbers of tilings for the $4n \times 4$ rectangles) correspond to the sequence A166482 in the OEIS. We will confirm this conjecture and calculate a_n for all $n \in \mathbb{N}_0$. We demonstrate several possible approaches for solving the problem, and reveal connections to other topics in discrete mathematics, namely two-color integer compositions and nondecreasing Dyck paths.

2. A SYSTEM OF RECURRENCES. Our first solution is similar to [12, Section 7.3, Example 3], which deals with domino tilings of an $n \times 3$ rectangle and involves a system of recurrence relations.

When tiling a $2n \times 4$ rectangle with the L-tetrominoes from Figure 2, the upper left corner can be covered using the first, third, or fourth tile. Each of the three choices inevitably leads to the placement of one or more additional tiles; see Figure 3.

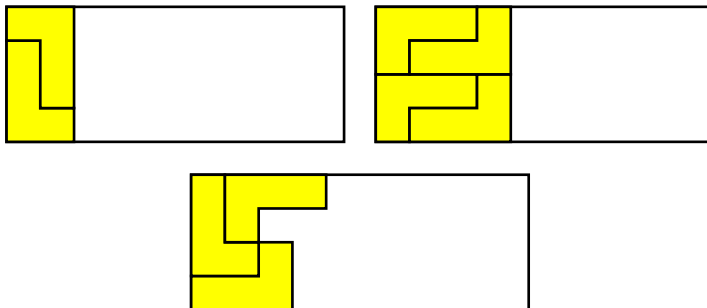


Figure 3. Covering the left end of a $2n \times 4$ rectangle.

In the first case, the remaining empty part is a $(2n - 2) \times 4$ rectangle, which can be tiled in a_{n-1} ways. What remains in the second case is a $(2n - 4) \times 4$ rectangle,



Figure 4. A non-rectangular shape to be tiled by L-tetrominoes.

which can be tiled in a_{n-2} ways. To determine the number of tilings in the third case, suppose that for each $n \in \mathbb{N}_0$, we are able to calculate the number of tilings of a figure obtained from the $2n \times 4$ rectangle by adjoining a vertical tetromino as in Figure 4.

Then the last case in Figure 3 corresponds to b_{n-2} tilings, and the previous analysis leads to the recurrence relation

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + b_{n-2}, \quad n \geq 2. \quad (1)$$

It remains to calculate b_n . Figure 5 shows that there are only two possibilities of tiling the left end of the shape from Figure 4.

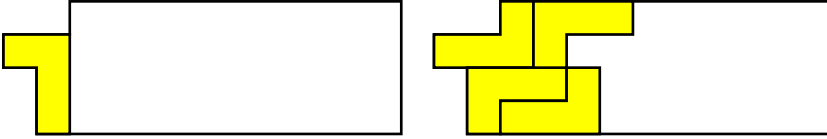


Figure 5. Tiling the non-rectangular shape.

Thus, we see that

$$b_n = a_n + b_{n-2}, \quad n \geq 2. \quad (2)$$

The system of recurrences (1) and (2) together with the initial values $a_0 = a_1 = 1$ and $b_0 = b_1 = 1$ uniquely determines a_n and b_n for all $n \in \mathbb{N}_0$.

In fact, it is possible to eliminate b_n , and obtain a recurrence relation involving only a_n . This is the content of the next theorem, which also provides an explicit formula for a_n .

Theorem 1. *For each $n \in \mathbb{N}_0$, let a_n be the number of tilings of a $2n \times 4$ rectangle using L-tetrominoes when only rotation of tiles is allowed. Then*

$$a_n = a_{n-1} + 3a_{n-2} - a_{n-3} - a_{n-4}, \quad n \geq 4. \quad (3)$$

Moreover, let $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$ be the golden ratio, and $\psi = 1 - \varphi = (1 - \sqrt{5})/2$. Then

$$a_n = \alpha_1 x_1^n + \alpha_2 x_2^n + \alpha_3 x_3^n + \alpha_4 x_4^n, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (4)$$

where

$$x_{1,2} = \frac{1}{4} \left(1 + \sqrt{5} \pm \sqrt{2(11 + \sqrt{5})} \right) = \frac{1}{2} (\varphi \pm \sqrt{\varphi + 5}), \quad (5)$$

$$x_{3,4} = \frac{1}{4} \left(1 - \sqrt{5} \pm \sqrt{2(11 - \sqrt{5})} \right) = \frac{1}{2} (\psi \pm \sqrt{\psi + 5}) \quad (6)$$

(with plus signs corresponding to x_1, x_3 and minus signs to x_2, x_4) and

$$\alpha_{1,2} = \frac{\varphi}{2\sqrt{5}} \left(1 \pm \frac{\varphi}{\sqrt{\varphi + 5}} \right), \quad \alpha_{3,4} = \frac{-\psi}{2\sqrt{5}} \left(1 \pm \frac{\psi}{\sqrt{\psi + 5}} \right) \quad (7)$$

(with plus signs corresponding to α_1, α_3 and minus signs to α_2, α_4).

Proof. Observe that (1) implies $b_{n-2} = a_n - a_{n-1} - a_{n-2}$, and substituting into the right-hand side of (2) yields $b_n = 2a_n - a_{n-1} - a_{n-2}$. Replacing n by $n - 2$ and substituting back to (1), we arrive at (3).

The characteristic polynomial of the recurrence (3) is

$$P(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 1 = (x^2 - \varphi x - 1)(x^2 - \psi x - 1). \quad (8)$$

To verify the second equality, it is helpful to note that $\varphi\psi = -1$ and $\varphi + \psi = 1$, since φ and ψ are the roots of the polynomial $x^2 - x - 1$.

The subsequent calculations are somewhat tedious, and it is best to use a symbolic computation program such as *Wolfram Mathematica*: One finds that the roots of P are given by (5) and (6). Thus, an explicit formula for the sequence $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ has the form (4), where $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ can be determined from the initial values $a_0, \dots, a_3$; the results are given in (7). ■

Among the four values in (5) and (6), the number with the largest absolute value is x_1 . Thus, for large n , the number of tilings a_n behaves as

$$\alpha_1 x_1^n \approx 0.589363 \cdot 2.09529^n.$$

Here is an interesting curiosity related to the golden ratio: Using the fact that the dominating term on the right-hand side of (4) is $\alpha_1 x_1^n$, one can prove that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_{n-1}}{a_n} = x_1 - \frac{1}{x_1} = \varphi.$$

Table 1 shows the exact values of a_n up to $n = 10$.

Table 1. Number of tilings of a $2n \times 4$ rectangle (A131322 in the OEIS).

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_n	1	1	3	5	12	23	51	103	221	456	965

An OEIS search reveals that these values agree with the sequence A131322. To check that the two sequences indeed coincide for all n , one can use the recurrence (3) and the initial values to obtain the generating function

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \frac{1 - z^2}{z^4 + z^3 - 3z^2 - z + 1}, \quad (9)$$

which agrees with the generating function from the OEIS. A different proof that $(a_n)_{n=0}^\infty$ coincides with A131322 will be sketched in Section 6.

If we look only at the even-indexed terms $a_0, a_2, a_4, \dots$, we obtain the generating function

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} (\sqrt{z})^{2n} = \frac{A(\sqrt{z}) + A(-\sqrt{z})}{2} = \frac{-z^3 + 4z^2 - 4z + 1}{z^4 - 7z^3 + 13z^2 - 7z + 1},$$

which coincides with the generating function of the sequence A166482 from the OEIS. Hence, we have confirmed the conjecture by Nicolas Břelohoubek that the number of tilings in the $4n \times 4$ case indeed corresponds to this sequence. We provide yet another derivation of this fact, which does not involve generating functions. Instead, we show that the numbers e_n , which correspond to the even-indexed terms a_{2n} , satisfy the same recurrence relation as the sequence A166482.

Theorem 2. *For each $n \in \mathbb{N}_0$, let e_n be the number of tilings of a $4n \times 4$ rectangle using L-tetrominoes when only rotation of tiles is allowed. Then*

$$e_n = 7e_{n-1} - 13e_{n-2} + 7e_{n-3} - e_{n-4}, \quad n \geq 4. \quad (10)$$

Proof. Because of (4), we have

$$e_n = a_{2n} = \alpha_1 x_1^{2n} + \alpha_2 x_2^{2n} + \alpha_3 x_3^{2n} + \alpha_4 x_4^{2n}, \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (11)$$

This means that the sequence $(e_n)_{n=0}^\infty$ satisfies a linear recurrence relation, whose characteristic polynomial Q has roots $x_1^2, \dots, x_4^2$, i.e., the squares of the roots of the polynomial P given by (8). As explained in [13], we can obtain Q by taking $P(x)P(-x)$ and replacing x^2 by y ; this gives

$$Q(y) = y^4 - 7y^3 + 13y^2 - 7y + 1.$$

Hence, the sequence $(e_n)_{n=0}^\infty$ indeed satisfies (10). ■

3. A SINGLE RECURRENCE. It is possible to gain an additional insight into the structure of all L-tetromino tilings by returning to the analysis in Figure 3. If we begin as in the third case, what are the possible continuations? Two of them are shown in Figure 6. In general, the shaded group of four L-tetrominoes arranged into two mutually shifted 4×2 rectangles can be repeated as many times as we wish. If we take $k \in \mathbb{N}_0$ copies of this group instead of one, we fill a $4(k+1) \times 4$ rectangle.

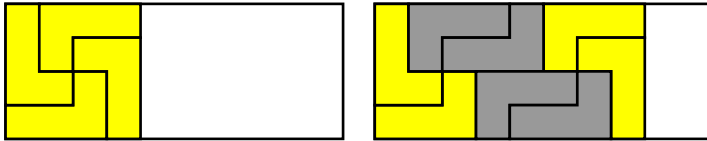


Figure 6. Filling $4(k+1) \times 4$ rectangles with $k \in \mathbb{N}_0$.

We also observe that, as soon as we insert at least one such group, we can continue only by inserting another group, or by placing two L-tetrominoes as in the right part of Figure 6, thereby leaving an unfilled rectangular part.

Taking into account these results as well as the first two cases from Figure 3, we obtain the recurrence

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + \sum_{k \geq 0} a_{n-2(k+1)}, \quad n \geq 2,$$

where the sum is over all $k \geq 0$ such that $n - 2(k + 1) \geq 0$. We perform the change of variables $l = k + 1$, where $l \geq 1$ is such that $l \leq \lfloor n/2 \rfloor$, and record the result in the following theorem.

Theorem 3. *For each $n \in \mathbb{N}_0$, let a_n be the number of tilings of a $2n \times 4$ rectangle using L-tetrominoes when only rotation of tiles is allowed. Then*

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + \sum_{l=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} a_{n-2l}, \quad n \geq 2. \quad (12)$$

This is another recurrence relation which, together with the initial values $a_0 = a_1 = 1$, uniquely determines a_n for all $n \in \mathbb{N}_0$. Although it seems more complicated than the earlier recurrence (3), it has a clear combinatorial meaning. It corresponds to the fact that all L-tetromino tilings are constructed from rectangular building blocks, namely the 2×4 and 4×4 blocks from Figure 3, and $4(k + 1) \times 4$ blocks (with arbitrary $k \in \mathbb{N}_0$) from Figure 6. Hence, we have a block of width 2, two types of blocks of width 4, and additional blocks of widths 8, 12, 16, etc.

Note that (12) can be obtained in a purely algebraic way from (1) by repeated application of (2). Conversely, we can recover the earlier recurrence (3) from (12) as follows: Replacing n by $n - 2$ yields

$$a_{n-2} = a_{n-3} + a_{n-4} + \sum_{l=1}^{\lfloor n/2 \rfloor - 1} a_{n-2(l+1)}, \quad n \geq 4, \quad (13)$$

and subtracting this from (12) leads to

$$a_n - a_{n-2} = a_{n-1} + 2a_{n-2} - a_{n-3} - a_{n-4}, \quad n \geq 4,$$

which is equivalent to (3).

4. TILINGS AS COMPOSITIONS. A consequence of the analysis carried out in the previous section is that the tiling problem is equivalent to counting all ways of writing the number $2n$ (the width of the whole rectangle) as the sum of the numbers 2, 4, 8, 12, 16, ... (the widths of the building blocks), when we have two kinds of 4's. In other words, the number of tilings equals the number of compositions of $2n$ involving the terms 2, 4, 8, 12, 16, ..., where 4 has two possible colors. Dividing all numbers by 2, we obtain the following result.

Theorem 4. *For each $n \in \mathbb{N}_0$, the number of tilings of a $2n \times 4$ rectangle using L-tetrominoes when only rotation of tiles is allowed coincides with the number of compositions of n involving 1, 2, 4, 6, 8, ..., where 2 has two possible colors.*

Clearly, the number of such compositions satisfies the recurrence (12), and therefore also (3). But compositions are an old mathematical topic, so there must be other ways of counting them. A basic result says that the number of monochromatic compositions

of a number n involving k summands is $\binom{n-1}{k-1}$. What about color compositions? Perhaps the most elegant method of counting them is based on generating functions [14, Section 3.5]:

Suppose that each summand of value $i \in \mathbb{N}$ can have $c_i \in \mathbb{N}_0$ possible colors, and consider the generating function $C(z) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i z^i$. If t_n denotes the number of color compositions of a number $n \in \mathbb{N}_0$ (where $t_0 = 1$), then $t_n = \sum_{k=1}^n c_k t_{n-k}$ for all $n \in \mathbb{N}$. Therefore, the generating function $T(z) = \sum_{n=0}^{\infty} t_n z^n$ satisfies $T(z) = 1 + C(z)T(z)$, i.e.,

$$T(z) = \frac{1}{1 - C(z)}.$$

The compositions we are interested in correspond to $c_2 = 2$, $c_n = 1$ for all $n \in \{1, 4, 6, \dots\}$, and $c_n = 0$ for all $n \in \{3, 5, \dots\}$, which leads to

$$C(z) = z + 2z^2 + z^4 + z^6 + \dots = z + z^2 + \frac{z^2}{1 - z^2}.$$

Consequently,

$$T(z) = \frac{1}{1 - z - z^2 - \frac{z^2}{1 - z^2}} = \frac{1 - z^2}{z^4 + z^3 - 3z^2 - z + 1},$$

which agrees with the previously derived generating function (9). So, this method gives a quick check of our earlier results, but we did not learn anything new.

Let us try a different way of calculating a_n , i.e., the number of compositions of n involving the summands 1, 2, 4, 6, ..., where 2 has two possible colors. The sum of all even summands in such a composition is $2j$, where $j \in \{0, \dots, \lfloor n/2 \rfloor\}$, and the remaining summands are $n - 2j$ ones. Denote by $c_{j,k}$ the number of compositions of $2j$ involving exactly k even summands, where 2 has two colors. For each such composition, we can insert the $n - 2j$ ones into $k + 1$ available positions (some of them might be chosen repeatedly), which can be done in $\binom{n - 2j + k}{k}$ ways. This leads to the formula

$$a_n = \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \sum_{k=0}^j \binom{n - 2j + k}{k} c_{j,k}, \quad (14)$$

where we assume that $c_{0,0} = 1$ and $c_{j,0} = 0$ for all positive j . How do we calculate the remaining values of $c_{j,k}$? Dividing all summands in a composition of $2j$ by two, we see that $c_{j,k}$ also equals the number of compositions of j involving exactly k numbers having values 1, 2, 3, ..., where 1 has two colors, say red and blue.

Assume there are i red ones; eliminating all of them, we get a monochromatic composition of $j - i$ involving $k - i$ positive integers. One can easily reverse this process: Begin with a monochromatic composition of $j - i$ consisting of $k - i$ summands; there are $\binom{j-i-1}{k-i-1}$ possibilities. Next, insert i red ones into $k - i + 1$ possible places (some of them might be chosen repeatedly); this can be done in $\binom{k}{i}$ ways. Summing over all possible i , we get

$$c_{j,k} = \sum_{i=0}^k \binom{j-i-1}{k-i-1} \binom{k}{i} = \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} \binom{j-k+l-1}{l-1}, \quad (15)$$

Table 2. The values $c_{j,k}$, $0 \leq k \leq j$

$j \setminus k$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	0	2					
2	0	1	4				
3	0	1	4	8			
4	0	1	5	12	16		
5	0	1	6	18	32	32	
6	0	1	7	25	56	80	64

where the second equality follows from the change of variables $l = k - i$.

There is yet another way of calculating $c_{j,k}$: Each k -term composition of j containing l red or blue ones can be obtained from a $(k - l)$ -term monochromatic composition of $j - l$ involving only the numbers $2, 3, \dots$. It suffices to insert l red or blue ones into $k - l + 1$ available positions (possibly with repetition), which can be done in $\binom{k}{l} 2^l$ ways. The number of $(k - l)$ -term monochromatic compositions of $j - l$ involving $2, 3, \dots$ is the same as the number of $(k - l)$ -term monochromatic compositions of $(j - l) - (k - l) = j - k$ involving $1, 2, \dots$, which is given by $\binom{j-k-1}{k-l-1}$. Summing over all possible l , we get

$$c_{j,k} = \sum_{l=2k-j}^k 2^l \binom{k}{l} \binom{j-k-1}{k-l-1} = \sum_{i=k}^j 2^{2k-i} \binom{k}{i-k} \binom{j-k-1}{j-i}, \quad (16)$$

where the second equality follows from the change of variables $i = 2k - l$.

Substituting (15) or (16) into (14), we obtain the following result.

Theorem 5. For each $n \in \mathbb{N}_0$, let a_n be the number of tilings of a $2n \times 4$ rectangle using L -tetrominoes when only rotation of tiles is allowed. Then

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \sum_{k=0}^j \binom{n-2j+k}{k} \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} \binom{j-k+l-1}{l-1} \\ &= \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \sum_{k=0}^j \binom{n-2j+k}{k} \sum_{i=k}^j 2^{2k-i} \binom{k}{i-k} \binom{j-k-1}{j-i}. \end{aligned}$$

Thus, we have discovered two additional formulas for calculating the number of compositions or tilings.

The numbers $c_{j,k}$ we have introduced along the way are of independent interest. Table 2 shows their values for small i and j . They coincide with the numbers $T(j+1, k+1)$ listed in the OEIS item A121462 (which contains the formula (15) with j, k replaced by $j+1, k+1$). According to the OEIS, the numbers $T(j, k)$ count nondecreasing Dyck paths of semilength j , having pyramid weight k . The meaning of these terms is as follows: A Dyck path of semilength n is a lattice path from $(0, 0)$ to $(2n, 0)$ consisting of n northeast steps $(1, 1)$ and n southeast steps $(1, -1)$ that never goes below the horizontal axis. Such a path is called nondecreasing if the altitudes of its valleys never decrease. A pyramid of weight k within a Dyck path is a sequence of k northeast steps followed by k southeast steps; it is maximal if it is not contained in

a larger pyramid. Finally, the pyramid weight of the whole path is the sum of weights of its maximal pyramids. For more information on non-decreasing Dyck paths, see [15, 16, 17], and the references therein.

Since $c_{j,k} = T(j+1, k+1)$, it follows that the number of nondecreasing Dyck paths of semilength $j+1$, having pyramid weight $k+1$, equals the number of compositions of j involving exactly k numbers having values $1, 2, 3, \dots$, where 1 has two colors. We have also proved that the number of such Dyck paths can be calculated using the formula (16).

5. MORE ON TWO-COLOR COMPOSITIONS. Let us mention two simple problems involving two-color compositions, which are closely related to the previous exposition. Both of them are probably known, although we were unable to find a reference for the first one.

The numbers $c_{j,k}$ from the previous section count the compositions of a number j involving exactly k summands having values $1, 2, 3, \dots$, where 1 has two colors. What happens if we relax the condition on the number of terms?

Problem 6. What is the number of all compositions of a number $j \in \mathbb{N}_0$ involving summands of values $1, 2, 3, \dots$, where 1 has two colors?

The answer is provided by the row sums of Table 2:

$$1, 2, 5, 13, 34, 89, 233, \dots$$

These are the odd-indexed Fibonacci numbers (see A001519 in the OEIS). Here is a quick proof of this fact: Denote by k_j the number of compositions of j where 1 has two colors. We have the recurrence

$$k_j = 2k_{j-1} + k_{j-2} + \dots + k_0, \quad j \geq 1$$

(where we let $k_0 = 1$). Replacing j by $j-1$, we get

$$k_{j-1} = 2k_{j-2} + k_{j-3} + \dots + k_0, \quad j \geq 2.$$

Subtracting this identity from the previous one gives

$$k_j = 3k_{j-1} - k_{j-2}, \quad j \geq 2.$$

One can check that the Fibonacci numbers F_{2j+1} satisfy the same recurrence (this is also mentioned in the OEIS), and $k_0 = 1 = F_1$, $k_1 = 2 = F_3$. Thus, $k_j = F_{2j+1}$ for all $j \in \mathbb{N}_0$.

Here is a natural modification of the previous problem.

Problem 7. What is the number of compositions of a number $j \in \mathbb{N}_0$ involving only odd summands, where 1 has two colors?

Denoting the solution by l_j , we have the recurrence

$$l_j = 2l_{j-1} + l_{j-3} + l_{j-5} + \dots, \quad j \geq 1.$$

Replacing j by $j-2$ and subtracting the result from the previous identity, we obtain

$$l_j = 2l_{j-1} + l_{j-2} - l_{j-3}, \quad j \geq 3.$$

The first few terms of the sequence $(l_j)_{j=0}^\infty$ are

$$1, 2, 4, 9, 20, 45, 101, \dots$$

The sequence coincides with A052534 in the OEIS, which also mentions its meaning in terms of color compositions.

6. OPEN PROBLEMS. Here are two open problems for the readers.

Problem 8. We know that the sequence $(a_n)_{n=0}^\infty$ coincides with the OEIS entry A131322. According to the OEIS, the terms of this sequence can be also calculated using the formula

$$a_n = \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-j}{j} F_{n-2j+1}. \quad (17)$$

Is there a combinatorial proof of the formula (17) based on tilings or two-color compositions? Note that one can verify (17) algebraically: To evaluate the right-hand side, we rewrite F_{n-2j+1} using Binet's formula, which yields

$$F_{n-2j+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{n-2j+1} - \psi^{n-2j+1}),$$

and then apply the identity

$$\sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-j}{j} \beta^{n-2j} = \frac{1}{\sqrt{\beta^2 + 4}} \left(\left(\frac{\beta + \sqrt{\beta^2 + 4}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{\beta - \sqrt{\beta^2 + 4}}{2} \right)^{n+1} \right),$$

which holds for every $\beta \in \mathbb{R}$ (see formulas (2.7) and (1.3) in [18]). After some manipulations, one finds that the result coincides with the explicit formula for a_n given in (4).

Problem 9. We have shown that the number of nondecreasing Dyck paths of semi-length $j + 1$, having pyramid weight $k + 1$, equals the number of compositions of j involving exactly k numbers having values $1, 2, 3, \dots$, where 1 has two colors. Is there a bijective proof of this fact?

Throughout the paper, we have provided links to several sequences in the OEIS. Readers interested in tiling problems involving L-tetrominoes might enjoy exploring additional sequences listed in Table 3.

Table 3. Additional sequences in the OEIS involving L-tetrominoes.

A084481	fault-free tilings of a $4 \times 2n$ rectangle with L-tetrominoes
A174248	tilings of a $4 \times n$ rectangle with tetrominoes of any shape
A226322	tilings of a $4 \times n$ rectangle using L- and O-tetrominoes
A232497	tilings of a $4 \times n$ rectangle using L- and S-tetrominoes
A232757	tilings of a $3 \times 4n$ rectangle with $3n$ tetrominoes of any shape
A233191	tilings of a $4 \times n$ rectangle using L- and T-tetrominoes
A233266	tilings of a $4 \times n$ rectangle using L-, T-, and S-tetrominoes
A242636	tilings of a $4 \times n$ rectangle using L-, S-, and O-tetrominoes

ACKNOWLEDGMENT. We are grateful to the referees and the editorial board for their excellent feedback that helped to improve the manuscript.

REFERENCES

1. Soifer A. Geometric etudes in combinatorial mathematics. 2nd edition. New York (NY): Springer; 2010.
2. Fisher M, Temperley H. Dimer problem in statistical mechanics—an exact result. *Phil. Mag.* 1961;6:1061–1063.
3. Kasteleyn P. The statistics of dimers on a lattice I. The number of dimer arrangements on a quadratic lattice. *Physica* 1961;27:1209–1225.
4. Smith D, Myers JS, Kaplan CS, Goodman-Strauss C. An aperiodic monotile. *Comb. Theory* 2024;4:article no. 6.
5. Greenfeld R, Tao T. A counterexample to the periodic tiling conjecture. *Ann. of Math. (2)* 2024;200:301–363.
6. Ardila F, Stanley RP. Tilings. *Math. Intelligencer* 2010;32:32–43.
7. PolySolver [Internet]. Available from: <https://www.jaapsch.net/puzzles/polysolver.htm>
8. Golomb SW, Klarner DA. Problem E1543: Covering a rectangle with L-tetrominoes. *Amer. Math. Monthly* 1963;70:760–761.
9. Walkup DW. Covering a rectangle with T-tetrominoes. *Amer. Math. Monthly* 1965;72:986–988.
10. Moore C. Some polyomino tilings of the plane [Internet]. Available from: <https://arxiv.org/abs/math/9905012>
11. The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences [Internet]. Available from: <https://oeis.org/>
12. Graham RL, Knuth DE, Patashnik O. Concrete mathematics. Reading (MA): Addison-Wesley Publishing Company; 1994.
13. Cuoco A. Raising the roots. *Math. Mag.* 1999;72:377–383.
14. Heubach S, Mansour T. Combinatorics of compositions and words. Boca Raton (FL): CRC Press; 2009.
15. Czabarka É, Flórez R, Junes L. Some enumerations on non-decreasing Dyck paths. *Electron. J. Combin.* 2015;22:article no. 1.3.
16. Czabarka É, Flórez R, Junes L, Ramírez JL. Enumerations of peaks and valleys on non-decreasing Dyck paths. *Discrete Math.* 2018;341:2789–2807.
17. Flórez R, Junes L, Ramírez JL. Enumerating several aspects of non-decreasing Dyck paths. *Discrete Math.* 2019;342:3079–3097.
18. Sun ZH. Expansions and identities concerning Lucas sequences. *Fibonacci Quart.* 2006;44:145–153.

NICOLAS BĚLOHOUBEK is finishing high school in Tábor, specializing himself in programming and computing technology. This article was written during his internship at Charles University in Prague. His pursuits are heuristic algorithms, recursive programming, recreational mathematics, cryptography in geocaching, logic puzzles, and mathematical poetry. He often shares the results of his mathematical explorations in the Online Encyclopedia of Integer Sequences.

*Střední průmyslová škola strojní a stavební, Tábor,
Komenského 1670, 390 02 Tábor, Czech Republic
anasia7@seznam.cz*

ANTONÍN SLAVÍK is associate professor at Charles University in Prague. His primary interests are in differential and difference equations, integration theory, computer programming, discrete mathematics, and history of various mathematical disciplines. He enjoyed supervising the internship of Nicolas Bělohoubek, which resulted in the current paper.

*Charles University, Faculty of Mathematics and Physics,
Sokolovská 83, 186 75 Praha 8, Czech Republic
slavik@karlin.mff.cuni.cz*