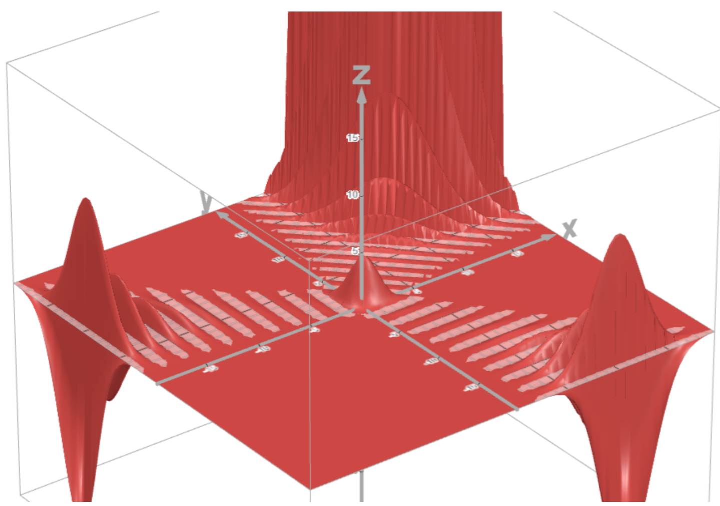
STŘEDOŠKOLSKÁ ODBORNÁ ČINNOST

Obor č. 1: Matematika a statistika

Zobecnění Pascalova trojúhelníku do vyšších dimenzí



Pavel Hyánek
Jihomoravský kraj

Brno 2025

STŘEDOŠKOLSKÁ ODBORNÁ ČINNOST

Obor č. 1: Matematika a statistika

Zobecnění Pascalova trojúhelníku do vyšších dimenzí

Generalization of Pascal's triangle to higher dimensions

Autor: Pavel Hyánek
Škola: Gymnázium Brno, třída Kapitána Jaroše, p. o.
Kraj: Jihomoravský
Vedoucí: Zdeněk Pezlar

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou práci SOČ vypracoval samostatně a použil jsem pouze prameny a literaturu uvedené v seznamu bibliografických záznamů. Prohlašuji, že tištěná verze a elektronická verze soutěžní práce SOČ jsou shodné. Nemám závažný důvod proti zpřístupňování této práce v souladu se zákonem č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon) v platném znění.

V Brně dne: .... Podpis: ....

Poděkování

Chtěl bych poděkovat Zdeňkovi Pezlarovi za to, že mi nabídl jeho bezvadné vedení této práce a za řadu jeho užitečných rad. Děkuji také Mgr. Petře Eliášové a Mgr. Petrovi Pupíkovi, kteří mě s tímto tématem seznámili. Můj dík patří i Tomášovi Pazourkovi za jeho dobré připomínky.

Tato práce byla vypracována za finanční podpory JMK.

Abstrakt

V této práci představujeme Pascalův trojúhelník a nabízíme způsoby, kterými ho můžeme rozšířit. Nejprve ukazujeme, že je tvořen kombinačními čísly. Potom představujeme Pascalovy simplexy, které pojem Pascalova trojúhelníku rozšíří do více rozměrů a popíšeme čísla v něm multinomickými koeficienty, tedy zobecněnými kombinačními čísly. Tato kombinační čísla a multinomické koeficienty mají ve svém předpisu faktoriály definované na nezáporných celých číslech. Pomocí funkce Gamma dokážeme jejich definiční obor rozšířit na reálná čísla, pak snadno získat spojitou verzi kombinačních čísel a nakonec i multinomických koeficientů. Skrze celou práci se zabýváme chováním a zajímavými vlastnostmi těchto objektů, které na sebe často navazují.

Klíčová slova

Pascalův trojúhelník, Pascalův d-simplex, kombinační číslo, multinomický koeficient, funkce Gamma

Abstract

In this paper, we introduce Pascal's triangle and present some ways in which it can be generalised. First, we show that it is composed of binomial coefficients. Then, we introduce Pascal's simplexes, which extend the concept of Pascal's triangle to higher dimensions and describe the numbers within them using multinomial coefficients, which are a generalisation of binomial coefficients. These binomial and multinomial coefficients are expressed using formulas involving factorials, defined for non-negative integers. Using the Gamma function, we widen their domain to real numbers, allowing us to derive a continuous version of binomial coefficients and, finally, multinomial coefficients. Throughout the paper, we explore the behavior and interesting properties of these objects, which often build upon one another.

Key words

Pascal's triangle, Pascal's d-simplex, binomial coefficient, multinomial coefficient, Gamma function

Obsah

Úvod

Roku 1665 byl posmrtně vydán spis Blaise Pascala, ve kterém popsal jisté nekonečné uspořádání přirozených čísel ve tvaru trojúhelníku a shrnul jeho dosud známé vlastnosti. Z toho důvodu dnes toto uspořádání nazýváme Pascalovým trojúhelníkem, přestože se první zmínky o něm datují už stovky let před Pascalovým narozením.

Dnes se dá říct, že je Pascalův trojúhelník jednou z nejznámější číselných struktur. Za to vděčí především jeho opravdu triviální konstrukci a nespočtu v něm skrytých vlastností, k nimž patří například ta, že součet čísel v každé jeho n-té vrstvě roven 2^n. Také je znám díky jeho kombinatorickému využití, které plyne ze schopnosti vyjádření každého jeho čísla pomocí kombinačního čísla definovaného, pro vhodná $n, k \in \mathbb{N}_0$, jako

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Může se nabízet otázka, proč má být Pascalův trojúhelník právě trojúhelník. Odpověď na ni je pravdépodobně to, že se pak dá jednoduše zachytit na papír a snadno se s ním pracuje, každopádně můžeme ve světle Pascalova trojúhelníku vytvořit podobně se chovající číselné struktury ve tvaru vícerozměrných zobecnění trojúhelníku nazývané Pascalovy simplexy. Ty tedy budeme stále moct generovat jednoduchým způsobem a řada vlastností Pascalova trojúhelníku se do nich přenese, takže bude například součet čísel v každé jejich n-té vrstvě roven d^n, kde d udává počet rozměrů daného objektu. Jejich kombinatorický význam bude spočívat v tom, že každé jejich číslo bude vyjádřitelné pomocí multinomického koeficientu (zobecnění kombinačních čísel) definovaného, pro vhodná $n, k_1 \dots, k_d \in \mathbb{N}_0$, jako

$$\binom{n}{k_1, \dots, k_d} = \frac{n!}{k_1! \dots k_d!}.$$

Dále nás může trápit, že kombinační čísla Pascalova trojúhelníku máme definované pouze pro nezáporná celá čísla. Představíme proto funkci Gamma, která přirozeně zvětší definiční obor faktoriálů v jejich definici z nezáporných celých i na velkou část reálných čísel. Metodami matematické analýzy pak prozkoumáme vlastnosti takto rozšířených kombinačních čísel, z nichž některé budou stále navazovat na vlastnosti těch diskrétních - integrál přes *α-tý řádek* bude stále roven 2^α.

V poslední kapitole pak zkombinujeme oba zmíněné způsoby, kterými můžeme kombinační čísla zobecnit, čímž získáme spojitou verzi multinomických koeficientů definovanou na většině reálných čísel a opět vyšetříme jejich chování. Hlavní přínos práce se pak skrývá v poslední větě, kde dokážeme, že integrál *α-té vrstvy* d-rozměrných multinomických koeficientů roste asymptoticky stejně jako d^α.

Kapitola 1

Pascalův trojúhelník

1.1 Sestrojení Pascalova trojúhelníku

Uvažme následující konstrukci. Napíšeme číslo 1 a následně pod něj budeme rekurentně vytvářet nové řádky čísel v trojúhelníkové mřížce jako na obrázku 1.1. Z každého řádku vytvoříme další tak, že si nalevo i napravo od něj domyslíme čísla 0 a pro každou dvojici sousedících čísel v něm pak napíšeme na další řádek mezi ně jejich součet. Touto jednoduchou konstrukcí vzniká nekonečné uspořádání čísel ve tvaru trojúhelníku nazývané Pascalův trojúhelník.

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
 & & & & & & 0 & & 1 & & 0 & & & & & & \\
 & & & & & 0 & & 1 & & 1 & & 0 & & & & & \\
 & & & & 0 & & 1 & & 2 & & 1 & & 0 & & & & \\
 & & & 0 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & 0 & & & \\
 & & 0 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & 0 & & \\
 & 0 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & 0 & \\
0 & & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & & 0 \\
 & & & & & & & & \vdots & & & & & & & &
\end{array}$$

Obrázek 1.1: Prvních 6 řádků Pascalova trojúhelníku

1.2 Počet cest k číslům Pascalova trojúhelníku

Pro jednodušší zacházení s Pascalovým trojúhelníkem v něm zavedeme souřadnicový systém. Každému jeho číslu tedy přiřadíme dvojici celých čísel (k_1, k_2), kde $k_1 + k_2$ bude udávat číslo řádku Pascalova trojúhelníku, ve kterém je, a k_1 bude udávat jeho pořadí zleva v tom řádku. Řádky i pořadí v nich budeme číslovat od 0. Formálně můžeme konstrukci Pascalova trojúhelníku z předchozí sekce zapsat v následující definici.

Definice 1.2.1. Nechť $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2} \in \mathbb{R}^2$ jsou jednotkové vektory se vzájemnou odchylkou $60°$ tvořící bázi B a f je funkce splňující pro každá $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ s $k_1 + k_2 \geq 0$

$$f[(k_1, k_2)_B] = \begin{cases} 1, & \text{pokud } k_1 = k_2 = 0 \\ 0, & \text{pokud } k_1 < 0 \text{ nebo } k_2 < 0 \\ f[(k_1 - 1, k_2)_B] + f[(k_1, k_2 - 1)_B], & \text{pokud } k_1, k_2 \in \mathbb{N}_0 \text{ a } k_1 + k_2 \neq 0. \end{cases}$$

Pak pojmem *Pascalův trojúhelník* rozumíme množinu všech bodů $(k_1, k_2)_B$ s $k_1, k_2 \in \mathbb{N}_0$ a k nim přiřazeným hodnotám funkcí f.

Nyní si představme, že stojíme na počáteční jedničce v nultém řádku Pascalova trojúhelníku a začneme scházet dolů tak, že se vždy přesuneme na jedno ze dvou čísel, která jsou na dalším řádku hned pod námi.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}$$

Obrázek 1.2: Kroky tvořící cesty k číslu 3

Zamysleme se, kolika možnými způsoby dokážeme dojít na nějaké číslo s celočíselnými souřadnicemi (k_1, k_2). Definujme funkci g, pro kterou bude $g(k_1, k_2)$ právě tento hledaný počet. V té počáteční jedničce začínáme vždy, takže

$$g(0, 0) = 1. \tag{1.1}$$

Dále je jasně vidět, že na souřadnice (k_1, k_2) mimo Pascalův trojúhelník, tedy taková kde $k_1 < 0$ nebo $k_2 < 0$, nemůžeme dojít, takže pro ně platí

$$g(k_1, k_2) = 0. \tag{1.2}$$

Nakonec si všimněme, že na libovolný prvek se můžeme dostat jen ze dvou prvků nad ním, a proto máme pro $k_1, k_2 \in \mathbb{N}_0$ splňující $k_1 + k_2 \neq 0$

$$g(k_1, k_2) = g(k_1 - 1, k_2) + g(k_1, k_2 - 1). \tag{1.3}$$

Funkcionální rovnice (1.1), (1.2) a (1.3) funkce g se ale přesně shodují s funkcí f v definici Pascalova trojúhelníku 1.2.1, z čehož dostáváme příští větu.

Věta 1.2.2. *Nechť $k_1, k_2 \in \mathbb{N}_0$. Pak je číslo Pascalova trojúhelníku na souřadnicích (k_1, k_2) rovno $g(k_1, k_2)$.*

1.3 Kombinační čísla v Pascalově trojúhelníku

Nyní najděme předpis pro funkci g z předchozí sekce. Abychom sešli k nějakému číslu se souřadnicemi (k_1, k_2) splňujícím $k_1, k_2 \in \mathbb{N}_0$, musíme se posunout dohromady k_1-krát dolů doleva a k_2-krát dolů doprava, jelikož krok doprava zvýší první souřadnici o 1 a krok doleva zvýší o 1 zase tu druhou. Počet způsobů, kterými můžeme dojít na souřadnice (k_1, k_2) v Pascalově troúhelníku, je tedy roven počtu možností, kterými z $(k_1 + k_2)$-prvkové množiny kroků dokážeme vybrat k_1 neuspořádaných kroků směřujících doleva dolů. První z nich můžeme vybrat $k_1 + k_2$ způsoby, druhý $k_1 + k_2 - 1$ způsoby a tak dále až k_1-ní $k_2 + 1$ způsby. Chceme ale, aby tyto kroky byly neuspořádané, takže tento výledek ještě musíme podělit $k_1!$, tedy počtem permutací těchto k_1 vybraných kroků. Máme proto

$$g(k_1, k_2) = \frac{(k_1 + k_2)(k_1 + k_2 - 1)\dots(k_2 + 1)}{k_1!} = \frac{(k_1 + k_2)!}{k_1!k_2!}. \tag{1.4}$$

Definice 1.3.1. Nechť $n \in \mathbb{N}_0, k \in \mathbb{Z}$. Pak *kombinační číslo* (někdy *binomický koeficient*) definujme jako

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!}, & \text{pokud } 0 \le k \le n \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Označme $n = k_1 + k_2$ (z toho jak jsme zaváděli souřadnice v Pascalově trojúhelníku je n číslo jeho řádku, ve kterém leží prvek se souřadnicemi (k_1, k_2)) a nahraďme k_1 pouhým k. Jelikož máme $k_2 \in \mathbb{N}_0$, musí platit $0 \le k \le n$, takže je v n-tém řádku Pascalova trojúhelníku právě $n+1$ čísel. Z této změny proměnných a rovnice (1.4) pak dostáváme hlavně následující větu.

Věta 1.3.2. *Nechť $n, k \in \mathbb{N}_0$ splňují $n \ge k$. Pak je k-té číslo n-tého řádku Pascalova trojúhelníku rovno $\binom{n}{k}$.*

Pascalův trojúhelník proto nyní můžeme zapsat tímto způsobem:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5}
\end{array}$$

Obrázek 1.3: Kombinační čísla v Pascalově trojúhelníku

Při odvozování rovnice (1.4) jsme nastínili kombinatorický význam kombinačních čísel (takže i čísel Pascalova trojúhelníku), který je vysvětlen v následující větě

Věta 1.3.3. *Nechť $n, k \in \mathbb{N}_0$ splňují $n \geq k$. Potom je kombinační číslo $\binom{n}{k}$ rovno počtu různých k-prvkových podmnožin množiny o n prvcích.*

Díky funkci g, definici 1.3.1 a pozorování, že má n-tý řádek Pascalova trojúhelníku $n+1$ prvků také dostáváme tyto vlastnosti kombinačních čísel:

Věta 1.3.4. *Nechť $n, k \in \mathbb{N}_0$ splňují $n \geq k$. Pak platí:*

(i)

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \tag{1.5}$$

(ii)

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \tag{1.6}$$

(iii)

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \tag{1.7}$$

(iv)

$$(k+1)\binom{n+1}{k+1} = (n+1)\binom{n}{k} \tag{1.8}$$

Důkaz. K číslům na pravém a levém kraji libovolného řádku Pascalova trojúhelníku dokážeme zřejmě sejít pouze jedním způsobem, takže pro každé číslo řádku $n \in \mathbb{N}_0$ platí $g(n, 0) = g(0, n) = 1$ a při konstrukci Pascalova trojúhelníku jsme vůbec nepotřebovali rozlišovat levou a pravou stranu, tudíž pro každá k_1, k_2 platí $g(k_1, k_2) = g(k_2, k_1)$. Po dosazení do rovnice (1.4) a z definice 1.3.1 pak máme právě rovnice (1.5) a (1.6). Rovnici (1.7) dostáváme díky vztahu (1.2) také z rovnice (1.4) a definice 1.3.1. Nakonec rovnici (1.8) můžeme dokázat prostým dosazením do definice 1.3.1 a následnou úpravou:

$$(k+1)\binom{n+1}{k} = (k+1)\frac{(n+1)!}{(k+1)![n+1-(k+1)]!} = (n+1)\frac{n!}{k!(n-k)!} = (n+1)\binom{n}{k}.$$

□

Společně s jejich kombinatorickým významem je pravděpodobně nejdůležitější aplikací kombinačních čísel binomická věta.

Věta 1.3.5 (Binomická věta)**.** *Nechť $n \in \mathbb{N}_0, x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a $n = 0$ pouze když $x + y \neq 0$. Pak platí*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k. \tag{1.9}$$

Důkaz. Toto zřejmě platí pokud $n = 0$. Pro $n \neq 0$ si můžeme $(x+y)^n$ rozepsat jako součin n závorek $(x+y)$:

$$(x+y)^n = \underbrace{(x+y)(x+y)\dots(x+y)}_{n\text{-krát}}$$

Nyní si představme, že roznásobíme pravou stranu předchozí rovnice člen po členu. Každý takový člen by potom korespondoval s unikátním způsobem, kterým můžeme ze všech n dvojčlenů $(x+y)$ vybrat jedno z čísel x nebo y a vypadal by jako $x^{n-k}y^k$, kde k odpovídá tomu, kolikrát jsme z těch dvojčlenů vybrali y. Počet způsobů, kterými můžeme vybrat z n dvojčlenů právě k-krát y, je ale díky větě 1.3.3 právě $\binom{n}{k}$. To znamená, že budeme mít $\binom{n}{0}$ členů $x^n y^0$, $\binom{n}{1}$ členů $x^{n-1}y^1, \ldots$ a $\binom{n}{n}$ členů $x^0 y^n$. Po jejich sečtení pak dostáváme právě

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Důsledek 1.3.6. *Pascalův trojúhelník má praktické využití při roznásobování závorek ve tvaru* $(x+y)^n$.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & & \multicolumn{7}{c}{1x^0+4x^1+6x^2+4x^3+1x^4=(1+x)^4} & & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}$$

Obrázek 1.4: Pomůcka pro roznásobení $(1+x)^4$

1.4 Některé vlastnosti Pascalova trojúhelníku

V této sekci představíme několik základních vlatností kombinačních čísel, z nichž díky větě 1.3.2 vyplynou vlastnosti Pascalova trojúhelníku.

Věta 1.4.1. *Nechť* $n \in \mathbb{N}_0$. *Pak platí*

$$\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \cdots < \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = \binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil} > \cdots > \binom{n}{n-1} > \binom{n}{n}. \tag{1.10}$$

Důkaz. V případě, že $n = 0$, platí rovnice (1.10) triviálně, takže dále přepokládejme $n > 0$. Zároveň nám díky rovnici 1.6 bude stačit dokázat pouze první polovinu těchto nerovností. Mějme libovolné nezáporné celé $j < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Potom z definice 1.3.1 platí

$$\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!} = \frac{j+1}{n-j} \frac{n!}{(j+1)!(n-j-1)!} = \frac{j+1}{n-j} \binom{n}{j+1}.$$

Kvůli

$$\frac{j+1}{n-j} = \frac{n+1}{n-j} - 1 < \frac{n+1}{n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor} - 1 \leq 1$$

pak musí platit i

$$\binom{n}{j} < \binom{n}{j+1}.$$

Uvážením předchozí rovnice pro všechna $j \in \{0, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1\}$ dostáváme právě

$$\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \dots < \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}.$$

□

Důsledek 1.4.2. *Nechť $n, k \in \mathbb{N}_0$ splňují $n \geq k$. Pak platí*

$$\max_{i \in \{0 \dots n\}} \left\{ \binom{n}{i} \right\} = \binom{n}{k} \Leftrightarrow k \in \left\{ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \right\}$$

$$\min_{i \in \{0 \dots n\}} \left\{ \binom{n}{i} \right\} = \binom{n}{k} \Leftrightarrow k \in \{0, n\}$$

Z věty 1.4.1 tedy dostáváme, že jsou čísla libovolné n-té vrstvy Pascalova trojúhelníku uspořádaná vzestupné v jeho první polovině a sestupně v té druhé. Proto jsou jeho nejmenší čísla na jeho krajích a jeho největší uprostřed něj, jak říká důsledek 1.4.2.

Velká část vlastností kombinačních čísel zahrnuje jejich určité součty. Těm se věnujeme v příštích větách.

Věta 1.4.3. *Nechť $n \in \mathbb{N}_0$. Pak platí*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Důkaz. Z binomické věty 1.3.5 plyne

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot 1^{n-k} \cdot 1^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

□

Věta 1.4.4. *Nechť $n \in \mathbb{N}_0$. Pak platí*

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

Důkaz. Tato věta by se zase dala dokázat jednoduchým dosazením do binomické věty 1.3.5. Pro změnu ale nabízíme důkaz využívající rovnice (1.5) a (1.7):

$$\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} = -\binom{n+1}{0} + (-1)^{n+1} \binom{n+1}{n+1} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right)$$

$$= -\binom{n}{0} + (-1)^{n+1}\binom{n}{n} + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}$$
$$= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} - \sum_{k=0}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k} = 0$$

□

Věta 1.4.5. *Nechť $n \in \mathbb{N}_0$. Pak platí*

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$

Důkaz. Případ, kdy $n = 0$, zřejmě platí. Pokud $n > 0$, dostáváme díky větě 1.4.3 a rovnici 1.8

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = 0 \cdot \binom{n}{0} + \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k} = n2^{n-1}.$$

□

Věty 1.4.3, 1.4.4 a 1.4.5 můžeme interpretovat tak, že v libovolném n-tém řádku Pascalova trojúhelníku jsou součet čísel, součet čísel s alternujícím znaménkem a součet čísel vynásobených jejich pořádím v tom řádku rovny postupně 2^n, 0 a $n2^{n-1}$.

Věta 1.4.6. *Nechť $n \in \mathbb{N}_0$. Pak platí*

$$\sum_{k=0}^{n} 10^k\binom{n}{k} = 11^k.$$

Důkaz. Opět z binomické věty 1.3.5 rovnou vyplývá

$$11^n = (1+10)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}10^k = \sum_{k=0}^{n}10^k\binom{n}{k}.$$

□

Význam věty 1.4.6 v Pascalově trojúhelníku jde nejlépe vidět v jeho prvních pěti řádcích, v nichž jsou všechna čísla jednociferná:

$$\begin{array}{ccccccccc|l}
 & & & & 1 & & & & & = 11^0 \\
 & & & 1 & & 1 & & & & = 11^1 \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & & = 11^2 \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & = 11^3 \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & = 11^4
\end{array}$$

Obrázek 1.5: Mocniny jedenácti v prvních pěti řádcích Pascalova trojúhelníku

Věta 1.4.7. *Nechť $n \in \mathbb{N}_0$. Pak platí*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Každá cesta, která vede do čísla se souřadnicemi (n, n) prochází jedním číslem z n-tého řádku. Počet těchto cest, které vedou do (n, n) a prochází přes číslo $(k, n-k)$ pro $0 \le k \le n$ je tedy roven počtu cest, které vedou shora (z $(0,0)$) do $(k, n-k)$ krát počet cest, které vedou z $(k, n-k)$ do (n, n). Všimněme si, že čísla $(0,0)$ a (n, n) jsou osově sdružená podle n-tého řádku Pascalova trojúhelníku, takže mezi množinami cest z $(0,0)$ do $(k, n-k)$ a z $(k, n-k)$ do (n, n) existuje bijekce, která zobrazí každou cestu z jedné množiny na cestu z druhé množiny, která je s ní osově sdružená podle toho n-tého řádku. Můžeme proto říct, že počet cest shora do (n, n) vedoucí přes $(k, n-k)$ je roven počtu cest shora do $(k, n-k)$ umocněnému na druhou, což je díky rovnici (1.4) a definici 1.3.1 právě $\binom{n}{k}^2$. Pokud toto sečteme přes všechna k od 0 po n, dostaneme počet všech cest z $(0,0)$ do (n, n), a to je opět z rovnice (1.4) a definice 1.3.1 právě $\binom{2n}{n}$. □

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}$$

$$1^2 + 3^2 + 3^2 + 1^2 = 20$$

Obrázek 1.6: Obrázek ke větě 1.4.7 pro $n = 3$

Věta 1.4.8. *Nechť $n, k \in \mathbb{N}_0$. Pak platí*

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{k+i}{k} = \binom{n+k+1}{k+1}. \tag{1.11}$$

Důkaz. Postupujme indukcí vzhledem k n. Pro $n = 0$ máme díky (1.5)

$$\sum_{i=0}^{0} \binom{k+i}{k} = \binom{k}{k} = 1 = \binom{0+k+1}{k+1}.$$

Nyní předpokládejme, že pro nějaké $m \in \mathbb{N}_0$ platí

$$\sum_{i=0}^{m} \binom{k+i}{k} = \binom{m+k+1}{k+1}.$$

Potom

$$\sum_{i=0}^{m+1}\binom{k+i}{k}=\sum_{i=0}^{m}\binom{k+i}{k}+\binom{k+m+1}{k}=\binom{m+k+1}{k+1}+\binom{k+m+1}{k},$$

což se rovná $\binom{m+k+2}{k+1}$ díky (1.7), takže je důkaz indukcí hotov. $\square$

V Pascalově trojúhelníku můžeme předešlou větu 1.4.8 přeformulovat na to, že pro všechna $n, k \in \mathbb{N}_0$ je součet prvních $n+1$ čísel v jeho $k+1$-ní diagonále roven $k+1$-nímu číslu v jeho $n+k+1$-ním řádku.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}$$

$$1+3+6+10=20$$

Obrázek 1.7: Obrázek ke větě 1.4.8 pro případ $(n, k) = (3, 2)$

Věta 1.4.9 (Chu-Vandermondeho konvoluce). *Nechť $n, m, k \in \mathbb{N}_0$ splňují $m, n \geq k$. Pak platí*

$$\binom{m+n}{k}=\sum_{i=0}^{k}\binom{m}{i}\binom{n}{k-i}.$$

Důkaz. Z věty 1.3.3 víme, že kombinační číslo $\binom{m+n}{k}$ je rovno počtu k-prvkových podmnožin množiny o $m+n$ prvků. Mějme tedy nějakou množinu $S = \{x_1, x_2, \ldots x_m, y_1, y_2 \ldots y_n\}$ a spočítejme počet jejích k-prvkových podmnožin podle toho, kolik prvků z $\{x_1, x_2, \ldots x_m\}$ obsahují. Pro libovolné i od 0 po k zjevně existuje právě $\binom{m}{i}\binom{n}{k-i}$ k-prvkových podmnožin S, které obsahují i prvků z $\{x_1, x_2, \ldots x_m\}$ a $k-i$ prvků z $\{y_1, y_2 \ldots y_n\}$. Zároveň je jasné, že více než k prvků v k-prvkové podmnožině být nemůže, tudíž tímto způsobem pokryjeme všechny k-prvkové podmnožiny S. Ten počet, který hledáme, tedy dostaneme sečtením $\binom{m}{i}\binom{n}{k-i}$ pro všechna i od 0 po k, což jsme chtěli dokázat. $\square$

Na závěr této sekce uvádíme propojení Pascalova trojúhelníku s Fibonacciho čísly.

Věta 1.4.10. *Nechť $n \in \mathbb{N}_0$. Pak platí*

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\binom{n-k}{k}=F_{n+1},$$

kde F_i je i-té Fibonacciho číslo.

Důkaz. Použijeme indukci na n. Případy $n = 0, 1$ můžeme ověřit jednoduchým dosazením. Nyní předpokládejme, že věta 1.4.10 platí pro všechna nezáporná celá čísla menší nebo rovna nějakému m. S opakovaným využitím rovnice (1.7) potom dostáváme

$$F_{m+3} = F_{m+1} + F_{m+2} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \binom{m-k}{k} + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor} \binom{m+1-k}{k} = \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1} \binom{m+1-k}{k-1} + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor} \binom{m+1-k}{k}$$

$$= \sum_{k=\lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor + 1}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1} \binom{m+1-k}{k-1} + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor} \left(\binom{m+1-k}{k-1} + \binom{m+1-k}{k} \right) + \binom{m+1}{0}$$

$$= \sum_{k=\lfloor \frac{m+3}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{m+2}{2} \rfloor} \binom{m+1-k}{k-1} + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor} \binom{m+2-k}{k} + \binom{m+2}{0} = \sum_{k=\lfloor \frac{m+3}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{m+2}{2} \rfloor} \binom{m+1-k}{k-1} + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor} \binom{m+2-k}{k}$$

Toto si rozdělme na dva případy podle parity m. Když je m liché, máme

$$\sum_{k=\lfloor \frac{m+3}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{m+2}{2} \rfloor} \binom{m+1-k}{k-1} + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor} \binom{m+2-k}{k} = 0 + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m+2}{2} \rfloor} \binom{m+2-k}{k} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m+2}{2} \rfloor} \binom{m+2-k}{k}.$$

Pokud je m sudé, máme

$$\sum_{k=\lfloor \frac{m+3}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{m+2}{2} \rfloor} \binom{m+1-k}{k-1} + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor} \binom{m+2-k}{k} = \binom{m+1-\left(\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1\right)}{\left(\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1\right) - 1} + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor} \binom{m+2-k}{k}$$

$$= 1 + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor} \binom{m+2-k}{k} = \binom{m+1-\left(\lfloor \frac{m+2}{2} \rfloor + 1\right)}{\left(\lfloor \frac{m+2}{2} \rfloor + 1\right) - 1} + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor} \binom{m+2-k}{k} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m+2}{2} \rfloor} \binom{m+2-k}{k}.$$

V obou případech je důkaz indukcí u konce. $\square$

Tato věta se dá v Pascalově trojúhelníku zobrazit tak, že zarovnáme všechny jeho řádky na jednu stranu a vyznačíme v něm „diagonály“ jako na obrázku 1.8. Součet čísel v libovolné n-té diagonále je potom roven F_{n+1}.

1						
1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	
1	6	15	20	15	6	1

Obrázek 1.8: Diagonály Pascalova trojúhelníku se součty rovnými Fibonacciho číslům

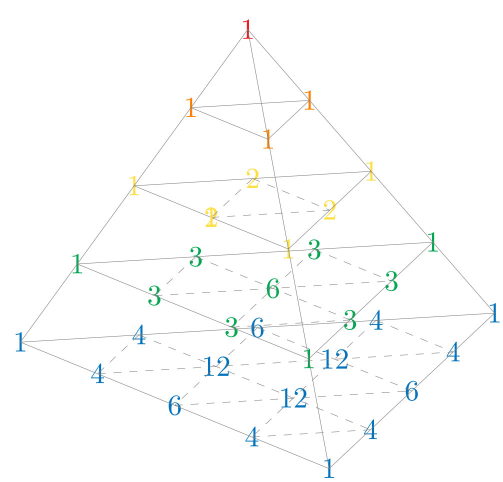
Kapitola 2

Rozšíření Pascalova trojúhelníku do vyšších dimenzí

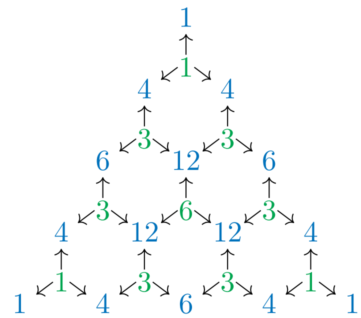
Pascalův trojúhelník je pouze dvojrozměrný. V této kapitole si ale ukážeme, že se jeho koncept dá posunout za hranici těchto dvou dimenzích. Našim prvním krokem bude vytvořit a stručně popsat Pascalův čtyřstěn. Následně se budeme podrobněji věnovat rozšířením Pascalova trojúhelníku do libovolného počtu dimenzí a jejich vlastnostem, ze kterých také vyplynou další opomenuté vlastnosti Pascalova čtyřstěnu.

2.1 Pascalův čtyřstěn

Pascalův čtyřstěn zkonstruujeme podobným způsobem jako Pascalův trojúhelník. Začneme s číslem 1 v jeho první vrstvě. Každé číslo v dalších vrstvách, které jsou svým tvarem shodné s několika prvními řádkami Pascalova trojúhelníku, vytvoříme sečetním tří čísel nad ním (nebo méně, pokud nad ním nejsou tři).



Obrázek 2.1: Prvních pět vrstev Pascalova čtyřstěnu



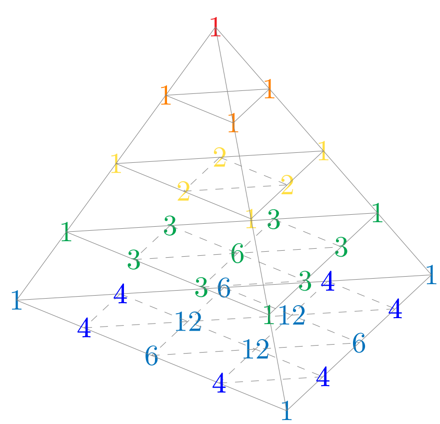
Obrázek 2.2: Princip rekurentní konstrukce vrstev Pascalova čtyřstěnu

Rigorózní definici Pascalova čtyřstěnu uvedeme až v sekci 2.3.

2.2 Trinomické koeficienty v Pascalově čtyřstěnu

Opět přiřaďíme číslům Pascalova čtyřstěnu nějaké souřadnice pro lepší manipulaci s nimi. Všechny jeho vrstvy mají tvar několika prvních řádků Pascalova trojúhelníku (viz obrázek 2.1), takže je na ty řádky můžeme rozdělit. To se sice dá udělat třemi způsoby, ale všechny jsou ekvivalentní vzhledem k symetrii Pascalova čtyřstěnu, kterou dostáváme z jeho konstrukce. Podle libovolného z nich tedy rozdělme všechny řádky Pascalova čtyřstěnu a dále vyberme způsob, kterým směrem budeme jednotlivá čísla v těchto řádcích indexovat (zleva nebo zprava).

Nyní v Pascalově čtyřstěnu můžeme zavést systém souřadnic, v němž všechna jeho čísla popíšeme třemi souřadnicemi (k_1, k_2, k_3). Součet $k_1 + k_2 + k_3$ bude udávat číslo jejich vrstvy, k_1 číslo jejich řádku v té vrstvě a k_2 jejich pořádí v tom řádku. Číslování všech souřadnic bude zase začínat od nuly. Všem vyznačeným čtyřkám na obrázku 2.3 potom můžeme přiřadit jedny ze souřadnic $(0, 1, 3)$, $(0, 3, 1)$, $(1, 0, 3)$, $(1, 3, 0)$, $(3, 0, 1)$ nebo $(3, 1, 0)$ podle toho, jak čtvrtou vrstvu rozdělíme na řádky, a ze které strany tyto řádky očíslujeme.



Obrázek 2.3: Čísla 4 ve čtvrtém řádku Pascalova čtyřstěnu

Představme si zase, že stojíme v čísle 1 na vrcholu Pascalova čtyřstěnu a znovu, jako u Pascalova trojúhelníku, budeme scházet k číslům v dalších vrstvách (z každého čísla můžeme jít na jedno ze tří pod ním). Způsobem analogickým k tomu, který jsme použili v sekci 1.2, dokážeme v nadcházejících sekcích, že jednotlivá čísla se opět rovnají počtu cest od počáteční jedničky k nim. Následně díky tomu stejnou úvahou, jako v minulé kapitole, budeme schopni dokázat, že na libovolných souřadnicích (k_1, k_2, k_3) pro $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N}_0$ je právě trinomický koeficient $\binom{k_1+k_2+k_3}{k_1,k_2,k_3}$.

Definice 2.2.1. Nechť $n \in \mathbb{N}_0, k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$. Pak *trinomický koeficient* definujme jako

$$\binom{n}{k_1, k_2, k_3} = \begin{cases} \frac{n!}{k_1!k_2!k_3!}, & \text{pokud } k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N}_0 \text{ a } n = k_1 + k_2 + k_3 \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Studium Pascalova čtyřstěnu je tedy jen studium konfigurace trinomických koeficientů. V následujících větách uvádíme bez důkazu základní vlastnosti trinomických koeficientů. Zobecnění těchto vět a dalších jejich vlastností probereme důkladněji, jak už jsme zmínili, v příštích sekcích.

Věta 2.2.2 (Navazující na větu 1.3.3)**.** *Nechť $n, k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N}_0$ splňují $n = k_1+k_2+k_3$. Pak je trinomický koeficient $\binom{n}{k_1,k_2,k_3}$ roven počtu způsobů, kterými můžeme rozdělit n prvků mezi množiny K_1, K_2, K_3 tak, aby pro každé $i \in \{1, 2, 3\}$ platilo $|K_i| = k_i$.*

Věta 2.2.3 (Navazující na větu 1.3.4)**.** *Nechť $n, k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N}_0$ splňují $n = k_1 + k_2 + k_3$ a σ je libovolná permutace na množině $\{k_1, k_2, k_3\}$. Pak platí:*

(i)

$$\binom{n}{n, 0, 0} = \binom{n}{0, n, 0} = \binom{n}{0, 0, n} = 1 \tag{2.1}$$

(ii)

$$\binom{n}{k_1, k_2, k_3} = \binom{n}{\sigma(k_1), \sigma(k_2), \sigma(k_3)} \tag{2.2}$$

(iii)

(iv) Pokud $n > 0$, platí

$$\binom{n}{k_1, k_2, k_3} = \binom{n-1}{k_1 - 1, k_2, k_3} + \binom{n-1}{k_1, k_2 - 1, k_3} + \binom{n-1}{k_1, k_2, k_3 - 1}. \tag{2.3}$$

$$(k_1 + 1)\binom{n+1}{k_1 + 1, k_2, k_3} = (n + 1)\binom{n}{k_1, k_2, k_3} \tag{2.4}$$

Věta 2.2.4 (Trinomická věta, navazující na větu 1.3.5)**.** *Nechť $n \in \mathbb{N}_0, x, y, z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a $n = 0$ pouze když $x + y + z \neq 0$. Pak platí*

$$(x + y + z)^n = \sum_{k_1=0}^{n} \sum_{k_2=0}^{n-k_1} \binom{n}{k_1, k_2, n - k_1 - k_2} x^{n-k_1-k_2} y^{k_1} z^{k_2}. \tag{2.5}$$

Důsledek 2.2.5. *Pascalův čtyřstěn může díky trinomické větě sloužit jako nepříliš praktická pomůcka pro roznásobování závorek ve tvaru* $(x+y+z)^n$*. Pro případ* $n=3$ *máme*

$$\begin{aligned}(x+y+z)^3 = &1x^3y^0z^0\\ &+3x^2y^1z^0+3x^2y^0z^1\\ &+3x^1y^2z^0+6x^1y^1z^1+3x^1y^0z^2\\ &+1x^0y^3z^0+3x^0y^2z^1+3x^0y^1z^2+1x^0y^0z^3,\end{aligned}$$

Obrázek 2.4: Roznásobení umocněné závorky pomocí Pascalova čtyřstěnu

kde se modré koeficienty shodují se třetí vrstvou Pascalova čtyřstěnu.

Věta 2.2.6. *Nechť* $n, k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N}_0$ *splňují* $n = k_1 + k_2 + k_3$*. Pak platí*

$$\binom{n}{k_1, k_2, k_3} = \binom{n}{k_1}\binom{n-k_1}{k_2}.$$

Předchozí věta nám umožňuje vyjádřit libovolný trinomický koeficient jako součin dvou nám už známých kombinačních čísel. Dokonce s její pomocí dokážeme libovolnou n-tou vrstvu Pascalova čtyřstěnu generovat vynásobením prvních $n+1$-vrstev Pascalova trojúhelníkem jeho n-tým řádkem jako na následujícím obrázku 2.5 pro případ $n=4$.

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
 & & \binom{n-k_1}{k_2} & & & \cdot & \binom{n}{k_1} & = & & & & \binom{n}{k_1,k_2,k_3} & & & & \\
 & & & & 1 & & \cdot 1 & & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & \cdot 4 & & & & 4 & & 4 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 \quad \cdot 6 & \longrightarrow & & 6 & & 12 & & 6 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & 1 \quad \cdot 4 & & 4 & & 12 & & 12 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 \quad 1 \quad \cdot 1 & & 1 & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}$$

Obrázek 2.5: Čtvrtá vrstva Pascalova čtyřstěnu vytvořena z Pascalova trojúhelníku

2.3 Pascalovy simplexy

Nyní budeme rozšiřovat Pascalův trojúhelník do libovolného počtu dimenzí. Definujme proto jakékoliv $d \in \mathbb{N}$, které bude tento počet po zbytek kapitoly udávat. Stručně popišme tvary, které tato zobecnění Pascalova trojúhelníku budou mít.

Definice 2.3.1. Pojmem *d-simplex* rozumíme d-rozměrné zobecnění trojúhelníku, tedy konvexní obal $d+1$ bodů (jeho vrcholů) v $\mathbb{R}^d$.

Například 0-simplex je bod, 1-simplex úsečka, 2-simplex trojúhelník a 3-simplex čtyřstěn.

Definice 2.3.2. Definujme *pravidelný d-simplex* jako konvexní obal $d+1$ různých bodů $v_1, \dots, v_d$ (jeho vrcholů) v $\mathbb{R}^d$ takových, že pro každou dvojici indexů $i \neq j$ od 1 po $d+1$ platí $|v_i v_j| = c$ pro nějakou konstantu $c \in \mathbb{R}^+$.

Přenesení pojmu Pascalova trojúhelníku do $\mathbb{R}^d$ bude nějaké uspořádání čísel do pravidelného d-simplexu, kterému budeme říkat Pascalův d-simplex. Už tedy známe Pascalův 2-simplex (trojúhelník) a Pascalův 3-simplex (čtyřúhelník). Není jasné, jak bychom si tento objekt v $\mathbb{R}^d$ měli představovat, ale zatím nám postačí vědět, že každý prvek v něm můžeme označit souřadnicemi $(k_1, \dots, k_d)$ pro nějaká $k_1, \dots, k_d \in \mathbb{Z}$ splňující $k_1 + \dots + k_d \geq 0$. Budeme-li dále požadovat, aby byl Pascalův d-simplex rozdělený na nějaké vrstvy, kde v prní z nich bude pouze číslo 1 a každé další číslo v následujících vrstvách bude součtem několika čísel „nad ním v předchozí vrstvě“, a aby byla čísla v něm uspořádaná v trojúhelníkové mřížce, viz obrázky 1.1, 2.1, dostaneme následující definici.

Definice 2.3.3. Nechť $\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_d} \in \mathbb{R}^d$ jsou jednotkové vektory, z nichž každé dva z nich svírají odchylku 60°, tvořící bázi B a f je funkce splňující pro každá $k_1, \dots, k_d \in \mathbb{Z}$ s $k_1 + \dots + k_d \geq 0$

$$f[(k_1, \dots, k_d)_B] = \begin{cases} 1, & \text{pokud } k_1 = \dots = k_d = 0 \\ 0, & \text{pokud existuje } i \in \{1, \dots, d\} \text{ splňující } k_i < 0 \\ \sum_{i=1}^{d} f(k_1 - \delta_{1,i} \dots, k_d - \delta_{d,i}), & \text{pokud } k_1, \dots, k_d \in \mathbb{N}_0 \text{ a } k_1 + \dots + k_d \neq 0. \end{cases}$$

Pak pojmem *Pascalův d-simplex* rozumíme množinu všech bodů $(k_1, \dots, k_d)_B$ s $k_1, \dots, k_d \in \mathbb{N}_0$ a k nim přiřazeným hodnotám funkcí f.

Pro zjednodušení zápisu jsme zde využili funkci Kroneckerovo delta.

Definice 2.3.4. Nechť $i, j \in \mathbb{Z}$. Pak definujme *Kroneckerovo delta* jako

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{pokud } i = j \\ 0, & \text{pokud } i \neq j. \end{cases}$$

Poznámka 1. Mezi cíly této práce není nějak podrobně analyzovat strukturu Pascalových simplexů, i když k ní něco zmíníme v sekci 2.6, takže existenci vektorů $\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_d} \in \mathbb{R}^d$ s danými vlastnostmi v definici 2.3.3 ponecháme bez důkazu.

2.4 Počet cest k číslům Pascalových simplexů

Dále budeme jako u Pascalova trojúhelníku a čtyřstěnu scházet z čísla se souřadnicemi $(0, \dots, 0)$ (tedy z „počáteční jedničky“) k jednotlivým číslům Pascalova d-simplexu. Cesty, po nichž půjdeme budou složeny z diskrétních kroků mezi jednotlivými prvky s celočíselnými souřadnicemi, které budou jako kroky v Pascalově trojúhelníku, viz sekce 1.2, zvyšovat právě jednu souřadnici o 1. Z prvku se souřadnicemi $(k_1, \dots, k_d)$, pro libovolná $k_1, \dots, k_d \in \mathbb{N}_0$, můžeme tedy v jednom kroku popojít na prvek se souřadnicemi $(k_1 - \delta_{1,i}, \dots, k_d - \delta_{d,i})$ pro každý index $i \in \{1 \dots, d\}$. Pokud nyní definujme funkci g tak, aby $g(k_1, \dots, k_d)$ bylo rovno počtu cest, jimiž dokážeme dojít na souřadnice $(k_1, \dots, k_d)$, pro každá $k_1, \dots, k_d \in \mathbb{Z}$ splňující $k_1 + \dots + k_d \geq 0$, máme $g(0, \dots, 0) = 1$, protože z prvku se souřadnicemi $(0,\dots,0)$ vždy vycházíme. Dále se z definice těchto cest nemůžeme dostat na prvek se souřadnicemi $(k_1,\dots,k_d)$, kdyby pro nějaký index $i \in \{1\dots,d\}$ platilo $k_i < 0$ a také z ní máme za předpokladů $k_1,\dots,k_d \in \mathbb{N}_0$ a $k_1+\dots,k_d > 0$

$$g(k_1,\dots,k_d) = \sum_{i=1}^{d} g(k_1-\delta_{1,i}\dots,k_d-\delta_{d,i}). \tag{2.6}$$

Tyto tři pozorování se ale přesně shodují s tím, jak jsme v definici 2.3.3 definovali čísla v Pascalově d-simplexu, takže musí platit tato věta:

Věta 2.4.1 (Zobecnění věty 1.2.2)**.** *Nechť $k_1,\dots,k_d \in \mathbb{N}_0$. Pak je číslo v Pascalově d-simplexu na souřadnicích $(k_1,\dots,k_d)$ rovno $g(k_1\dots,k_d)$.*

2.5 Multinomické koeficienty v Pascalových simplexech

Najděme předpis funkce g pomocí věty 2.4.1. Každou cestu vedoucí k číslu se souřadnicemi $(k_1,\dots,k_d)$ je z definice kroků tvořících tuto cestu složena z k_1 kroků zvyšujících první souřadnici o 1, k_2 zvyšujících druhou souřadnici o 1 atd. až k_d zvyšujících poslední (d-tou) souřadnici o 1. Je jedno jak za sebe tyto kroky uspořádáme, takže pokud označíme $k_1+\dots+k_d = n$, bude $g(k_1,\dots,k_d)$ rovno počtu způsobů, kterými dokážeme rozdělit všechny prvky množiny S o mohutnosti n (reprezentující n kroků, které potřebujeme k dosažení toho čísla) rozdělit do množin $K_1,\dots,K_d$ tak, aby v každé množině K_i bylo právě k_i prvků. Ze sekce 1.3 víme, že počet způsobů, kterými můžeme přemístit k_1 prvků z S do K_1 je díky větě 1.3.3 právě $\binom{n}{k_1}$, pro přesunutí k_2 prvků do K_2 to následně bude $\binom{n-k_1}{k_2}$ a takto bychom pokračovali až po okamžik, kdy bychom z S přemístili k_{d-1} prvků do K_{d-1} jednou z $\binom{n-k_1-\dots-k_{d-2}}{k_{d-1}}$ možností a zbylých k_d prvků bychom pak bez možnosti na výběr přesunuli do K_d. Dohromady dostáváme

$$g(k_1,\dots,k_d) = \binom{n}{k_1}\binom{n-k_1}{k_2}\binom{n-k_1-k_2}{k_3}\dots\binom{n-k_1-\dots-k_{d-2}}{k_{d-1}} \tag{2.7}$$

$$= \frac{n!}{k_1!(n-k_1)!}\frac{(n-k_1)!}{k_2!(n-k_1-k_2)!}\frac{(n-k_1-k_2)!}{k_3!(n-k_1-k_2-k_3)!}\dots\frac{(n-k_1-\dots-k_{d-2})!}{k_{d-1}!(n-k_1-\dots-k_{d-1})!}$$

$$= \frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_d!} \tag{2.8}$$

Definice 2.5.1 (Zobecnění definice 1.3.1)**.** Nechť $n \in \mathbb{N}_0, k_1,\dots,k_d \in \mathbb{Z}$. Pak *multinomický koeficient* definujme jako

$$\binom{n}{k_1,\dots,k_d} = \begin{cases} \frac{n!}{\prod_{i=1}^{d} k_i!}, & \text{pokud } k_1,k_2,\dots,k_d \in \mathbb{N}_0 \text{ a } n = k_1+\dots+k_d \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Pro $k_1,k_2,\dots,k_d \in \mathbb{N}_0$ tedy díky rovnici (2.8) máme

$$g(k_1,\dots,k_d) = \binom{n}{k_1,k_2,\dots,k_d}, \tag{2.9}$$

z čehož dostáváme následující větu.

Věta 2.5.2 (Zobecnění věty 1.3.2). *Nechť $n \in \mathbb{N}_0, k_1, \dots, k_d \in \mathbb{N}_0$ splňují $n = k_1 + \dots + k_d$. Pak je číslo na souřadnicích $(k_1, \dots, k_d)$ v Pascalově d-simplexu rovno multinomickému koeficientu $\binom{n}{k_1,\dots,k_d}$.*

Zároveň z toho, jak jsme odvodili rovnici (2.8), dostáváme také kombinatorický význam multinomických koeficientů.

Věta 2.5.3 (Zobecnění věty 1.3.3). *Nechť $n, k_1, \dots, k_d \in \mathbb{N}_0$ splňují $n = k_1 + \dots + k_d$. Pak je multinomický koeficient $\binom{n}{k_1,k_2,\dots,k_d}$ roven počtu způsobů, kterými dokážeme všechny prvky n-prvkové množiny S rozdělit do množin $K_1, K_2, \dots, K_d$ tak, aby $|K_i| = k_i$ pro všechny indexy $i \in \{1 \dots, d\}$.*

V příští větě uvádíme základní vlastnosti těchto multinomických koeficientů.

Věta 2.5.4 (Zobecnění věty 1.3.4). *Nechť $n, k_1, \dots, k_d \in \mathbb{N}_0$ splňují $n = k_1 + \dots + k_d$ a σ je libovolná permutace na množině $\{k_1, \dots, k_d\}$. Pak platí:*

(i)
$$\binom{n}{\underbrace{n, 0, \dots, 0}_{d\ \text{čísel}}} = \binom{n}{0, n, \dots, 0} = \dots = \binom{n}{0, 0, \dots, n} = 1 \tag{2.10}$$

(ii)
$$\binom{n}{k_1, k_2 \dots, k_d} = \binom{n}{\sigma(k_1), \sigma(k_2) \dots, \sigma(k_d)} \tag{2.11}$$

(iii) Pokud $n \geq 1$, platí
$$\binom{n}{k_1, k_2 \dots, k_d} = \sum_{i=1}^{d} \binom{n-1}{k_1 - \delta_{1,i}, k_2 - \delta_{2,i}, \dots, k_d - \delta_{d,i}}. \tag{2.12}$$

(iv)
$$(k_1 + 1)\binom{n+1}{k_1 + 1, k_2 \dots, k_d} = (n+1)\binom{n}{k_1, k_2 \dots, k_d} \tag{2.13}$$

(v)
$$\binom{n}{k_1, k_2 \dots, k_d} = \binom{n}{k_1}\binom{n - k_1}{k_2, \dots, k_d} \tag{2.14}$$

Důkaz. Rovnice (2.10) a (2.11) dostáváme z dosazení do definice (2.5.1) a komutativity násobení:

$$\binom{n}{n, 0, \dots, 0} = \binom{n}{0, n, \dots, 0} = \dots = \binom{n}{0, 0, \dots, n} = \frac{n!}{n! \cdot (0!)^{d-1}} = 1$$

$$\binom{n}{\sigma(k_1), \sigma(k_2) \dots, \sigma(k_d)} = \frac{n!}{\sigma(k_1)!\sigma(k_2)! \dots \sigma(k_d)!} = \frac{n!}{k_1!k_2! \dots k_d!} = \binom{n}{k_1, k_2 \dots, k_d}$$

Rovnici (2.12) máme čistě jen z nahrazení funkcí g v rovnici (2.6) multinomickými koeficienty díky vztahu (2.9). Pro důkaz rovnic (2.14) a (2.13) nám stačí jen definice 1.3.1 a 2.5.1:

$$(k_1 + 1)\binom{n+1}{k_1 + 1, k_2 \dots, k_d} = (k_1 + 1)\frac{(n+1)!}{(k_1 + 1)!k_2! \dots k_d!} = (n+1)\frac{n!}{k_1!k_2! \dots k_d!}$$

$$= (n+1)\binom{n}{k_1, k_2 \dots, k_d},$$

$$\binom{n}{k_1, k_2 \dots, k_d} = \frac{n!}{k_1! \dots k_d!} = \frac{n!(n-k_1)!}{k_1!(n-k_1)!k_2! \dots k_d!} = \frac{n!}{k_1!(n-k_1)!} \frac{(n-k_1)!}{k_2! \dots k_d!}$$

$$= \binom{n}{k_1}\binom{n-k_1}{k_2, \dots, k_d}$$

□

Poznámka 2. Rovnice (2.11) nám říká, že nezáleží na pořadí argumentů ve spodní čašti multinomických koeficientů. Proto bychom mohli například rovnici (2.13) rozšířit tak, že pro každý index $i \in \{1, \dots, d\}$ platí

$$(k_i + 1)\binom{n+1}{k_1, \dots, k_{i-1}, k_i + 1, k_{i+1}, \dots, k_d} = (n+1)\binom{n}{k_1, k_2 \dots, k_d}.$$

Tato zřejmá zobecnění ale pro jednoduchost zápisu této i nadcházejících rovnic či vět nebudeme uvádět.

Stejně jako u významu kombinačních čísel v binomické větě hrají multinomické koeficienty důležitou roli v multinomické větě, po které jsou také pojmenované.

Věta 2.5.5 (Multinomická věta, zobecnění věty 1.3.5)**.** *Nechť $x_1, \dots, x_d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, n \in \mathbb{N}_0$ a $n = 0$ pouze když $x_1 + \dots + x_d \neq 0$. Pak platí*

$$(x_1 + \dots + x_d)^n = \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_d = n \\ k_1, \dots, k_d \in \mathbb{N}_0}} \binom{n}{k_1, \dots, k_d} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_d^{k_d} \tag{2.15}$$

$$= \sum_{k_1=0}^{n} \sum_{k_2=0}^{n-k_1} \cdots \sum_{k_{d-1}=0}^{n-k_1-\dots-k_{d-2}} \binom{n}{k_1, \dots, k_{d-1}, n-k_1-\dots-k_{d-1}} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_{d-1}^{k_{d-1}} x_d^{n-k_1-\dots-k_{d-1}}.$$

Důkaz. V případě $n = 0$ se obě strany rovnice (2.15) rovnají jedné. Pokud $n \neq 0$, můžeme si levou stranu rovnice (2.15) (jako u důkazu binomické věty 1.3.5) rozepsat jako součin n závorek $(x_1 + \dots + x_d)$:

$$(x_1 + \dots + x_d)^n = \underbrace{(x_1 + \dots + x_d)(x_1 + \dots + x_d) \dots (x_1 + \dots + x_d)}_{n\text{-krát}} \tag{2.16}$$

Po roznásobení té pravé strany dostaneme členy tvaru $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_{d-1}^{k_{d-1}} x_d^{k_d}$ pro nějaká $k_1, k_2, \dots, k_d \in \mathbb{N}_0$ se součtem n. Spočítejme, kolikrát se tam objeví člen $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_{d-1}^{k_{d-1}} x_d^{k_d}$ pro nějaká specifická $k_1, k_2, \dots, k_d$. Všimněme si, že každý člen, který dostaneme, odpovídá právě jednomu způsobu, jímž dokážeme z těch závorek na pravé straně rovnice (2.16) vybrat k_1-krát x_1, k_2-krát x_2 a tak dále až k_d-krát x_d. Počet těchto způsobů je ale (s pomocí věty 2.5.3) roven $\binom{n}{k_1, \dots, k_d}$, takže zmíněný člen přispěje do součtu právě tolikrát. Proto se $(x_1 + \dots + x_d)^n$ rovná součtu výrazu $\binom{n}{k_1, \dots, k_d} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_d^{k_d}$ přes všechny možné d-tice $k_1, \dots, k_d \in \mathbb{N}_0$ splňující $k_1 + \dots + k_d = n$, tedy pravé straně rovnice (2.15).

□

2.6 Náhled do geometrie Pascalových simplexů

Vrstvy Pascalova trojúhelníku (2-simplexu) jsou čísla uspořádaná na úsečce, tj. 1-simplexu. Vrstvy Pascalova čtyřstěnu (3-simplexu) tvoří čísla uspořádaná do trojúhelníku, tedy do 2-simplexu. Obecně má n-tá vrstva libovolného Pascalova d-simplexu právě tvar prvních $n+1$ vrstev Pascalova $d-1$-simplexu (pro všechna $n, d \in \mathbb{N}$, v případě $d-1=0$ dostáváme bezrozměrný bod). Toto rozdělování d-simplexů na $d-1$-simplexy můžeme využít v případě, když chceme zachytit všechna čísla nějakého Pascalova d-simplexu. Obrázky na začátku této kapitoly sice zobrazují prvních pár vrstev Pascalova čtyřstěnu poměrně přehledně, ale lepší je zachytit jej po jednotlivých vrstvách.

1	1 1 1	1 2 2 1 2 1	1 3 3 3 6 3 1 3 3 1	...

Obrázek 2.6: Pascalův čtyřstěn rozdělený na jednotlivé vrstvy

Vizualizace Pascalova 4-simplexu se dá provést podobným způsobem. Nejdřív ho můžeme rozdělit na několik 3-simplexů (čtyřstěnů) a ty zase jednotlivě rozdělllit na 2-simplexy (trojúhelníky).

nultá vrstva	první vrstva	druhá vrstva	třetí vrstva	
1	1	1	1	
	1 1 1	2 2 2	3 3 3	
		1 2 2 1 2 1	3 6 6 3 6 3	...
			1 3 3 3 6 3 1 3 3 1	

Obrázek 2.7: Přehledná reprezentace prvních čtyř vrstev Pascalova 4-simplexu

Pascalův 5-simplex bychom podobně rozdělili na 4-simplexové vrstvy, ty na 3-simplexové vrstvy a ty na 2-simplexové vrstvy. Úplně analogicky se dá zachytit libovolný Pascalův d-simplex.

Nyní vysvětleme význam souřadnic, které jsme přiřadili číslům v Pascalově d-simplexu. Uvažme jakékoliv souřadnice $(k_1, \dots, k_d)$, kde $k_1, \dots, k_{d-1} \in \mathbb{N}_0$, součet $k_1 + \cdots + k_d$ označme pro jednoduchost zápisu jako n a číslo s nimi označme jako x. Zatím jsme si řekli jen to, že n udává číslo vrstvy toho Pascalova d-simplexu, ve kterém x je. Tato vrstva ale má tvar prvních $n+1$ vrstev Pascalova $d-1$-simplexu. Řekněme, že x leží v l_1-ní z těchto vrstev (připomínáme, že vrstvy indexujeme od 0). Potom druhá souřadnice x, k_1, je rovna právě $n - l_1$. Tato l_1-ní vrstva má opět tvar prvních $l_1 + 1$ vrstev Pascalova $d-2$ simplexu, kde x leží l_2-hé z nich a třetí souřadnice x, k_2, je rovna $l_1 - l_2$. Analogicky bychom se dostali k číslu l_3 a čtvrtá souřadnice x by měla hodnotu $l_2 - l_3$. Tímto způsobem se dá postupovat i pro všechny další souřadnice x. Obrázek 2.7 tedy můžeme interpretovat takto:

nultá vrstva	první vrstva	druhá vrstva	třetí vrstva	
$\binom{0}{0,0,0,0}$	$\binom{1}{1,0,0,0}$	$\binom{2}{2,0,0,0}$	$\binom{3}{3,0,0,0}$	
	$\binom{1}{0,1,0,0}$ $\binom{1}{0,0,1,0}\binom{1}{0,0,0,1}$	$\binom{2}{1,1,0,0}$ $\binom{2}{1,0,1,0}\binom{2}{1,0,0,1}$	$\binom{3}{2,1,0,0}$ $\binom{3}{2,0,1,0}\binom{3}{2,0,0,1}$	
		$\binom{2}{0,2,0,0}$ $\binom{2}{0,1,1,0}\binom{2}{0,1,0,1}$ $\binom{2}{0,0,2,0}\binom{2}{0,0,1,1}\binom{2}{0,0,0,2}$	$\binom{3}{1,2,0,0}$ $\binom{3}{1,1,1,0}\binom{3}{1,1,0,1}$ $\binom{3}{1,0,2,0}\binom{3}{1,0,1,1}\binom{3}{1,0,0,2}$	$\cdots$
			$\binom{3}{0,3,0,0}$ $\binom{3}{0,2,1,0}\binom{3}{0,2,0,1}$ $\binom{3}{0,1,2,0}\binom{3}{0,1,1,1}\binom{3}{0,1,0,2}$ $\binom{3}{0,0,3,0}\binom{3}{0,0,2,1}\binom{3}{0,0,1,2}\binom{3}{0,0,0,3}$	

Obrázek 2.8: Význam souřadnic v Pascalově 4-simplexu

2.7 Některé vlastnosti Pascalových simplexů

V této sekci uvedeme podobně jako v sekci 1.4 několik vlastností multinomických koeficientů, ze kterých pomocí věty 2.5.2 dostaneme vlastnosti Pascalových simplexů. Většina z nadcházejících vět bude zobecňovat vlastnosti kombinačních čísel, repsektive Pascalova trojúhelníku ze sekce 1.4 z dvou rozměrů do jejich libovolného počtu.

Věta 2.7.1 (Zobecnění důsledku 1.4.2)**.** *Nechť* $n, a_1, \dots, a_d \in \mathbb{N}_0$ *splňují* $n = a_1 + \cdots + a_d$.

Pak platí

$$\max_{\substack{k_1+\cdots+k_d=n\\ k_1,\ldots,k_d\in\mathbb{N}_0}} \left\{\binom{n}{k_1,\ldots,k_d}\right\} = \binom{n}{a_1,\ldots,a_d} \Leftrightarrow \{a_1,\ldots,a_d\} = \left\{\left\lfloor\frac{n}{d}\right\rfloor, \left\lceil\frac{n}{d}\right\rceil\right\}, \tag{2.17}$$

$$\max_{\substack{k_1+\cdots+k_d=n\\ k_1,\ldots,k_d\in\mathbb{N}_0}} \left\{\binom{n}{k_1,\ldots,k_d}\right\} = \binom{n}{a_1,\ldots,a_d} \Leftrightarrow \{a_1,\ldots,a_d\} = \{0,n\}. \tag{2.18}$$

Důkaz. Předpokládejme, že je $\binom{n}{a_1,\ldots,a_d}$ maximální. Kdyby existovaly nějaké dva různé indexy $i,j\in\{0,\ldots,n\}$ takové, že $a_i+1<a_j$, platilo by z definice 2.5.1

$$\binom{n}{a_1,\ldots,a_d} = \frac{n!}{a_1!\ldots a_i!\ldots a_j!\ldots a_d!} = \frac{a_i+1}{a_j}\frac{n!}{a_1!\ldots(a_i+1)!\ldots(a_j-1)!\ldots a_d!}$$

$$= \frac{a_i+1}{a_j}\binom{n}{a_1,\ldots,(a_i+1),\ldots,(a_j-1),\ldots,a_d} < \binom{n}{a_1,\ldots,(a_i+1),\ldots,(a_j-1),\ldots,a_d}, \tag{2.19}$$

což je spor s danou maximalitou. Proto maximum v rovnici (2.17) nastává právě pro taková $a_1,\ldots,a_d$, u kterých se žádná dvě neliší o více než 1. Mezi $a_1,\ldots,a_d$ se proto musí objevovat právě jen $\lfloor\frac{n}{d}\rfloor, \lceil\frac{n}{d}\rceil$ (samozřejmě ve správné poměru tak, aby v součtu dávali n). Tímto jsme dokázali ekvivalenci(2.17).

Nyní zase předpokládejme, že $\binom{n}{a_1,\ldots,a_d}$ je minimální. Kdyby existoval index m takový, že $0<a_m<n$, musel by díky $a_1+\cdots+a_d=n$ existovat i druhý index $l\neq m$, pro který by platilo $0<a_l<n$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme $a_m<a_l$. Z rovnice (2.19) ale víme, že

$$\binom{n}{a_1,\ldots,a_d} > \binom{n}{a_1,\ldots,(a_m-1),\ldots,(a_l+1),\ldots,a_d},$$

takže opět dostáváme spor s tou minimalitou. Pro minimalizaci $\binom{n}{a_1,\ldots,a_d}$ tedy mezi $a_1,\ldots,a_d$ musí být jen čísla 0 a n (přesněji jednou n a $d-1$-krát 0). To dokazuje ekvivalenci (2.18). □

Díky větě 2.7.1 jsou proto nejvyšší čísla v každé vrstvě Pascalova d-simplexu uprostřed ní a ta nejnižší na jejích krajích. Dále uvádíme věty zahrnující součty multinomických koeficientů.

Věta 2.7.2 (Zobecnění věty 1.4.3)**.** *Nechť $n\in\mathbb{N}_0$. Pak platí*

$$\sum_{\substack{k_1+\cdots+k_d=n\\ k_1,\ldots,k_d\in\mathbb{N}_0}} \binom{n}{k_1,\ldots,k_d} = d^n.$$

Důkaz. Po dosazení $x_1=x_2=\cdots=x_d=1$ do multinomické věty 2.5.5 dostáváme

$$d^n = (\underbrace{1+\cdots+1}_{d\text{-krát}})^n = \sum_{\substack{k_1+\cdots+k_d=n\\ k_1,\ldots,k_d\in\mathbb{N}_0}} \binom{n}{k_1,\ldots,k_d} 1^{k_1}1^{k_2}\ldots 1^{k_d} = \sum_{\substack{k_1+\cdots+k_d=n\\ k_1,\ldots,k_d\in\mathbb{N}_0}} \binom{n}{k_1,\ldots,k_d}.$$

□

Věta 2.7.3 (Zobecnění věty 1.4.5)**.** *Nechť $n \in \mathbb{N}_0$. Pak platí*

$$\sum_{\substack{k_1+\cdots+k_d=n\\ k_1,\ldots,k_d\in\mathbb{N}_0}} k_1\binom{n}{k_1,\ldots,k_d} = nd^{n-1}.$$

Důkaz. Věta 2.7.3 triviálně platí v případě $n=0$. Jinak máme díky rovnici (2.13) a větě 2.7.2

$$\sum_{\substack{k_1+\cdots+k_d=n\\ k_1,\ldots,k_d\in\mathbb{N}_0}} k_1\binom{n}{k_1,\ldots,k_d} = \sum_{\substack{k_2+\cdots+k_d=n\\ k_2,\ldots,k_d\in\mathbb{N}_0}} 0\cdot\binom{n}{0,k_2,\ldots,k_d} + \sum_{\substack{k_1+\cdots+k_d=n\\ k_1,\ldots,k_d\in\mathbb{N}_0,k_1>0}} k_1\binom{n}{k_1,\ldots,k_d}$$

$$= 0 + \sum_{\substack{k_1+\cdots+k_d=n\\ k_1,\ldots,k_d\in\mathbb{N}_0,k_1>0}} n\binom{n-1}{k_1-1,\ldots,k_d} = n\left(\sum_{\substack{k_1+\cdots+k_d=n-1\\ k_1,\ldots,k_d\in\mathbb{N}_0}} \binom{n-1}{k_1,k_2\ldots,k_d}\right) = nd^{n-1}.$$

□

Věta 2.7.4 (Zobecnění věty 1.4.8)**.** *Nechť $n,k_1,\ldots,k_d\in\mathbb{N}_0$ splňují $n=k_1+\cdots+k_d$ a $d\geq 2$. Pak platí*

$$\binom{n}{k_1,\ldots,k_d} = \sum_{j=k_2}^{k_1+k_2}\sum_{i=2}^{d}\binom{n-1+j-k_1-k_2}{j-k_2,k_2-\delta_{2,i},\ldots,k_d-\delta_{d,i}}. \tag{2.20}$$

Důkaz. Díky rovnici (2.12) můžeme nahradit

$$\sum_{j=k_2}^{k_1+k_2}\sum_{i=2}^{d}\binom{n-1+j-k_1-k_2}{j-k_2,k_2-\delta_{2,i},\ldots,k_d-\delta_{d,i}} = \sum_{j=k_2}^{k_1+k_2}\left(\binom{n+j-k_1-k_2}{j-k_2,k_2,\ldots,k_d}-\binom{n-1+j-k_1-k_2}{j-k_2-1,k_2,\ldots,k_d}\right).$$

Toto dále můžeme jednoduše převést na teleskopický součet:

$$\sum_{j=k_2}^{k_1+k_2}\left(\binom{n+j-k_1-k_2}{j-k_2,k_2,\ldots,k_d}-\binom{n-1+j-k_1-k_2}{j-k_2-1,k_2,\ldots,k_d}\right)$$

$$=\binom{n}{k_1,\ldots,k_d}+\sum_{j=k_2}^{k_1+k_2-1}\left(\binom{n+j-k_1-k_2}{j-k_2,k_2,\ldots,k_d}-\binom{n+j-k_1-k_2}{j-k_2,k_2,\ldots,k_d}\right)-\binom{n-1-k_1}{-1,k_2,\ldots,k_d}$$

$$=\binom{n}{k_1,\ldots,k_d}+0+0=\binom{n}{k_1,\ldots,k_d},$$

protože $\binom{n-1-k_1}{-1,k_2,\ldots,k_d}=0$ z definice 2.5.1. □

V libovolné n-té vrstvě Pascalově d-simplexu z vět 2.7.2 a 2.7.3 dostáváme, že jsou součet čísel v ní a součet čísel v ní vynásobených jednou z jejich souřadnic rovny postupně d^n a nd^{n-1}. Přesná interpretace věty 1.4.8 v Pascalově d-simplexu není triviální. Alespoň k ní tedy zmíníme, že po vyznačení všech sčítaných multinomických koeficientů na pravé straně rovnice (2.20) bychom dostali něco blízce se podobajícího obrázku 1.7 (samozřejmě v d rozměrech).

Věta 2.7.5. *Nechť $n \in \mathbb{N}_0$. Pak je počet čísel v n-té vrstvě Pascalova d-simplexu je roven*

$$\binom{n+d-1}{d-1}$$

a celkový počet čísel v jeho prvních n vrstvách je

$$\binom{n+d-1}{d}.$$

Důkaz. Z přiřazování souřadnic číslům v Pascalových simplexech v sekci 2.3 víme, že počet všech čísel v n-té vrstvě Pascalova d-simplexu musí být stejný jako počet uspořádaných d-tic nezáporných celých čísel se součtem n. Množinu všech těchto d-tic označme A. Jako B dále označme množinu všech $d-1$-prvkových podmnožin množiny $\{1, 2, \ldots, n+d-1\}$. Rovnou z věty 1.3.3 je $|B| = \binom{n-d-1}{d-1}$. Našim cílem bude najít bijekci mezi těmito množnami, protože potom by i $|A|$ bylo $\binom{n-d-1}{d-1}$.

Nyní pro každé $x = (k_1, k_2, \ldots, k_d) \in A$, s $k_1, k_2, \ldots, k_d \in \mathbb{N}_0, k_1 + k_2 + \cdots + k_d = n$ vytvořme prvky

$$a_i := i + \sum_{j=1}^{i} k_j$$

pro všechna $i \in \{1, 2, \ldots, d-1\}$ a následně definujme $f(x) := \{a_1, a_2, \ldots, a_{d-1}\}$. Všimněme si, že pro všechna $i \in \{1, 2, \ldots, d-2\}$ máme

$$a_{i+1} = i + 1 + \sum_{j=1}^{i+1} k_j = a_i + 1 + k_{i+1} > a_i,$$

$$a_{d-1} = d - 1 + \sum_{j=1}^{d-1} k_j \leq d - 1 + \sum_{j=1}^{d} k_j = n + d - 1,$$

takže $f(x) \in B$. K funkci f existuje funkce inverzní, jelikož pro libovolné $y \in B$, kde $y = \{b_1, b_2 \ldots, b_{d-1}\}$ s $b_i < b_{i+1}$ pro všechna $i \in \{1, 2, \ldots, d-2\}$, můžeme snadno ověřit, že

$$(b_1 - 1, b_2 - b_1 - 1, b_3 - b_2 - 1, \ldots, b_{d-1} - b_{d-2} - 1, n + d - b_{d-1} - 1) \in A,$$

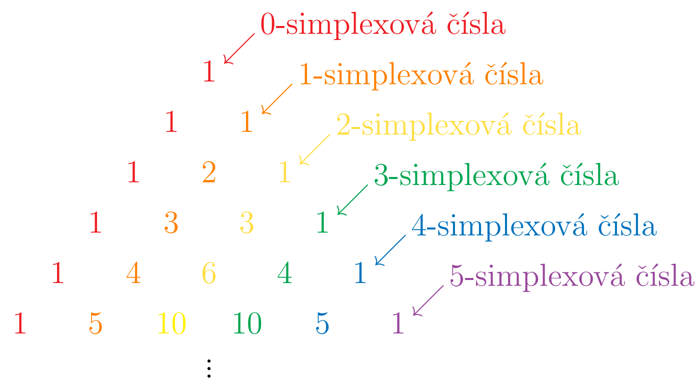
$$y = f((b_1 - 1, b_2 - b_1 - 1, b_3 - b_2 - 1, \ldots, b_{d-1} - b_{d-2} - 1)).$$

Proto je funkce f bijekce mezi množinami A a B, takže $|A| = |B| = \binom{n-d-1}{d-1}$, což je tedy počet čísel v n-té vrstvě Pascalova d-simplexu.

Počet čísel v prvních $n+1$ vrstvách Pascalova $d+1$ simplexu spočítáme jako součet počtů čísel v jednotlivých vrstvách. Z předchozího odstavce a použitím věty 1.4.8 dostáváme, že se tento součet rovná právě $\binom{n+d-1}{d}$.

□

Poznámka 3. Obecně se číslo ve tvaru $\binom{n+d-1}{d}$ (s $n, d \in \mathbb{N}$) nazývá *n-té d-simplexové číslo*, protože (z věty 2.7.5) udává počet čísel v prvních n vrstvách Pascalova d-simplexu (nebo jakéhokoliv jiného podobného uspořádání čísel do pravidelného d-simplexu). Nejznámější z nich jsou trojúhelníková (2-simplexová) čísla tj. $0, 1, 3, 6, 10, \ldots$ Všechna tato simplexová čísla jsou uspořádána v Pascalově trojúhelníku



Obrázek 2.9: Simplexová čísla v Pascalově trojúhelníku

Kapitola 3

Předpoklady matematické analýzy

V následujících kapitolách se náplň této práce přesune z oboru kombinatoriky do oboru matematické analýzy, jelikož v nich vytvoříme spojité verze diskrétních kombinačních čísel a multinomických koeficientů, se kterými jsme dosud pracovali. Proto se nyní pozastavíme a v této kapitlole shrneme potřebné znalosti k tomu, abychom mohli pokračovat dále. V sekci 3.1 připomeneme několik vět a definicí matematické analýzy a v sekci 3.2 představíme funkci Gamma, která bude klíčová pro zbytek práce.

3.1 Důležité definice a věty

Důkazy následujících vět můžeme najít v dokumentu [5] a v dalších dokumentech mezi použitými zdroji, nebo jsou dost snadné na to, abychom je zde vynechali.

Mnohokrát budeme pracovat s limitami posloupností a funkcí, s čímž nám pomohou následující věty.

Věta 3.1.1 (Věta o třech limitách)**.** *Nechť $(a_i)_{i=0}^{\infty}$, $(b_i)_{i=0}^{\infty}$, $(c_i)_{i=0}^{\infty}$ jsou posloupnosti reálných čísel, existje $I \in \mathbb{N}_0$ takové, že pro každý index $i \in \mathbb{N}_{\geq I}$ platí $a_i \leq b_i \leq c_i$ a $\lim_{i\to\infty} a_i = \lim_{i\to\infty} c_i = L \in \mathbb{R}$. Pak platí i $\lim_{i\to\infty} b_i = L$.*

Věta 3.1.2 (Aritmetika limit posloupností)**.** *Nechť $(a_i)_{i=0}^{\infty}$, $(b_i)_{i=0}^{\infty}$ jsou posloupnosti reálných čísel a $\lim_{i\to\infty} a_i = A \in \mathbb{R}$, $\lim_{i\to\infty} b_i = B \in \mathbb{R}$. Pak platí*

$$\lim_{i\to\infty} (a_i + b_i) = A + B, \lim_{i\to\infty} a_i b_i = AB$$

a pokud $B \neq 0$, $b_i \neq 0$ pro každý index $i \in \mathbb{N}_0$, platí i

$$\lim_{i\to\infty} \frac{a_i}{b_i} = \frac{A}{B}.$$

Věta 3.1.3 (Limita a uspořádání)**.** *Nechť $(a_i)_{i=0}^{\infty}$, $(b_i)_{i=0}^{\infty}$ jsou konvergentní posloupnosti reálných čísel a existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $i \geq n$ platí $a_n \leq b_n$. Pak platí $\lim_{i\to\infty} a_i \leq \lim_{i\to\infty} b_i$.*

Věta 3.1.4 (Limita složené funkce)**.** *Nechť $c, L, M \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, funkce f, g splňují $\lim_{x\to c} g(x) = L$ a $\lim_{y\to L} f(y) = M$ a funkce f je spojitá v bodě L. Pak platí $\lim_{x\to c} f[g(x)] = M$.*

Věta 3.1.5 (Aritmetika limit funkcí)**.** *Nechť* $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$*,* f *a* g *jsou reálné funkce splňující* $\lim_{x \to c} f(x) = A \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ *a* $\lim_{x \to c} f(x) = B \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$*. Pak platí:*

(i) $\lim_{x \to c} [f(x) + g(x)] = A + B$*, pokud je výraz na pravé straně definován,*

(ii) $\lim_{x \to c} f(x) g(x) = AB$*, pokud je výraz na pravé straně definován,*

(iii) $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$*, pokud je výraz na pravé straně definován*

Věta 3.1.6 (L'Hospitalovo pravidlo)**.** *Nechť* $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ *a* f*,* g *jsou reálné funkce, pro které existuje*

$$\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

a platí $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = 0$ *nebo* $\lim_{x \to c} |g(x)| = \infty$*. Pak platí*

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Věta 3.1.7 (Důsledek Heiného věty)**.** *Nechť* f *je reálná funkce, existuje* $lim_{x \to \infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$ *a* $(a_i)_{i=0}^{\infty}$ *je posloupnost reálných čísel splňující* $a_i = f(i)$ *pro každý index* $i \in \mathbb{N}_0$*. Pak platí* $\lim_{i \to \infty} a_i = L$*.*

Také se budeme zabývat nekonečnými řadami, součiny, integrály a jejich konvergencí.

Definice 3.1.8. Nechť $(a_i)_{i=0}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel, f je reálná funkce a $l \in \mathbb{N}_0, c \in \mathbb{R}$. Pak definujme následující *řadu*, *nekonečný součin* a *nekonečné integrály* jako

$$\sum_{i=l}^{\infty} a_i = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=l}^{n} a_i, \prod_{i=l}^{\infty} a_i = \lim_{n \to \infty} \prod_{i=l}^{n} a_i$$

$$\int_c^{\infty} f(x)\, dx = \lim_{a \to \infty} \int_c^a f(x)\, dx, \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \int_0^{\infty} f(x)\, dx + \int_{-\infty}^{0} f(x)\, dx.$$

Jednotliě o nich říkáme, že kovergují pokud

$$\sum_{i=l}^{\infty} a_i \in \mathbb{R}, \prod_{i=l}^{\infty} a_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\int_c^{\infty} f(x)\, dx \in \mathbb{R}, \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx \in \mathbb{R}$$

a o zmíněné řadě a nekonečných integrálech jednotlivě říkáme, že absolutně konvergují, pokud

$$\sum_{i=l}^{\infty} |a_i| \in \mathbb{R}, \int_c^{\infty} |f(x)|\, dx \in \mathbb{R}, \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx \in \mathbb{R}.$$

Důsledek 3.1.9 (Součet nekonečných řad a integrálů)**.** *Nechť* $(a_i)_{i=0}^{\infty}$*,* $(b_i)_{i=0}^{\infty}$ *jsou posloupnosti reálných čísel, pro které konvergují řady* $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$*,* $\sum_{i=0}^{\infty} b_i$ *a* f*,* g *jsou reálné funkce, pro které konvergují vlastní integrály* $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx, \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, dx$*. Pak platí*

$$\sum_{i=0}^{\infty} (a_i + b_i) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i + \sum_{i=0}^{\infty} b_i, \int_{-\infty}^{\infty} f(x) + g(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx + \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, dx.$$

Důsledek 3.1.10 (Řada, nekonečný integrál a uspořádání). *Nechť $(a_i)_{i=0}^{\infty}$, $(b_i)_{i=0}^{\infty}$ jsou posloupnosti reálných čísel splňující $a_n \leq b_n$ pro všechna $i \in \mathbb{N}_0$ a f, g jsou reálné funkce splňující $f(x) \leq g(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Pak platí*

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i \leq \sum_{i=0}^{\infty} b_i, \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, dx. \tag{3.1}$$

Důsledek 3.1.11. *Nechť $(a_i)_{i=0}^{\infty}$, $(b_i)_{i=0}^{\infty}$ jsou posloupnosti reálných čísel a existuje $\prod_{i=0}^{\infty} a_i b_i$. Pokud $\lim_{i\to\infty} a_i = 1$, pak platí $\prod_{i=0}^{\infty} a_i b_i = a_0 \prod_{i=0}^{\infty} a_{i+1} b_i$.*

Důsledek 3.1.12. *Nechť $(a_i)_{i=1}^{\infty}$, $(b_i)_{i=0}^{\infty}$, $(c_i)_{i=1}^{\infty}$ jsou posloupnosti reálných čísel, $b_0 \neq 0$ a existuje $\prod_{i=0}^{\infty} \frac{a_i b_i}{c_i}$. Pokud $\lim_{i\to\infty} \frac{a_{i+1}}{b_{i-1}} = 1$, pak platí $\prod_{i=1}^{\infty} \frac{a_i b_i}{c_i} = \frac{a_1}{b_0} \prod_{i=1}^{\infty} \frac{a_{i+1} b_{i-1}}{c_i}$.*

Věta 3.1.13 (d'Alambertovo kritérium). *Nechť $(a_i)_{i=0}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Pak nekonečný součet $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ konverguje absolutně, pokud $\lim_{i\to\infty} |\frac{a_i+1}{a_i}| < 1$, a diverguje, pokud $\lim_{i\to\infty} |\frac{a_i+1}{a_i}| > 1$.*

Definice 3.1.14 (Cauchyův součin). Nechť $(a_i)_{i=0}^{\infty}$, $(b_i)_{i=0}^{\infty}$, jsou posloupnosti reálných čísel. Pak *Cauchovým součinem* řad $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$, $\sum_{i=0}^{\infty} b_i$ rozumíme řadu $\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j}$.

Věta 3.1.15 (Mertensova věta). *Nechť $(a_i)_{i=0}^{\infty}$, $(b_i)_{i=0}^{\infty}$, jsou posloupnosti reálných čísel. Pokud řada $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ konverguje absolutně a řada $\sum_{i=0}^{\infty} b_i$ konverguje, pak je jejich Cauchyův součin roven $\big(\sum_{i=0}^{\infty} a_i\big)\big(\sum_{i=0}^{\infty} b_i\big)$.*

Věta 3.1.16 (Důsledek Lebesgueovy věty). *Nechť $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost reálných funkcí takových, že existuje*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x)|\, dx,$$

pak platí

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\, dx.$$

Rovněž budeme hledat extrémy jistých funkcí.

Věta 3.1.17. *(Weierstrassova věta) Nechť f je funkce spojitá na intervalu $[a, b]$. Pak f na $[a, b]$ nabývá svého maxima i minima.*

Věta 3.1.18 (Zobecnění Weierstrassovy věty). *Nechť M je kartézský součin konečného počtu uzavřených intervalů a f je spojité zobrazení z M do $\mathbb{R}$. Pak f nabývá na M svého maxima i minima.*

Důležité pro nás budou také mocninné řady spolu s jejich konvergencí.

Věta 3.1.19 (Chauchyův tvar zbytku Taylorova polynomu). *Nechť $x_0, x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ splňují $x_0 < x$ a f je reálná funkce, která má v každém bodě na intervalu mezi x_0 a x vlastní derivaci řádu $n+1$. Pak existuje c ostře mezi x_0 a x takové, že platí*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)(x-c)^n(x-x_0)}{n!}.$$

Věta 3.1.20 (Lagrangeův tvar zbytku Taylorova polynomu)**.** *Nechť $x_0, x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ splňují $x_0 < x$ a f je reálná funkce, která má v každém bodě na intervalu mezi x_0 a x vlastní derivaci řádu $n+1$. Pak existuje c ostře mezi x_0 a x takové, že platí*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Věta 3.1.21. *Nechť $a, b, c \in \mathbb{R}$ splňují $a < c < b$, $(d_k)_{k=0}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel a mocninná řada $\sum_{k=0}^{\infty} d_k x^k$ konverguje k reálné funkci $f(x)$ pro všechna $x \in (a, b)$. Pak existuje n-tá derivace f pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a pro každé $k \in \mathbb{N}_0$ platí*

$$d_k = \frac{f^{(k)}(c)}{k!}.$$

Zmíníme i blízké propojení zkoumaných funkcí s padajícím faktoriálem a funkcí Sinc.

Definice 3.1.22. Nechť $x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}_0$. Pak definujme *padající faktoriál* jako

$$x^{\underline{k}} = \prod_{i=0}^{k-1} (x - i).$$

Definice 3.1.23. Nechť $x \in \mathbb{R}$. Pak definujme funkci *Sinc* jako

$$\operatorname{sinc}(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}, & \text{pokud } x \neq 0 \\ 1, & \text{pokud } x = 0. \end{cases}$$

Věta 3.1.24. (Vlastnosti funkce Sinc).

(i) *Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí* $|\operatorname{sinc}(x)| \leq 1$.

(ii) *Pro každé $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ platí* $\operatorname{sinc}(k) = 0$.

(iii) $\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}(x)\, dx = 1$

(iv) $\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}^2(x)\, dx = 1$

Nakonec se budeme věnovat asymptotickému chování některých funkcí.

Definice 3.1.25. Nechť f a g jsou reálné funkce jedné proměnné splňující $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. Pak o nich říkáme, že rostou asymptoticky stejně rychle a značíme tento fakt jako $f \sim g$.

Definice 3.1.26. Nechť f a g jsou reálné funkce jedné proměnné splňující $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. Pak říkáme, že f roste asymptoticky pomaleji než g a značíme tento fakt jako $f \ll g$.

Věta 3.1.27. *Nechť f, g a h jsou reálné funkce jedné proměnné splňující $f \sim g$ a $g \sim h$. Pak platí $f \sim h$.*

Věta 3.1.28. *Nechť f, g a h jsou reálné funkce jedné proměnné splňující $f \sim g$. Pak platí $h \ll f \Leftrightarrow h \ll g$.*

Věta 3.1.29. *Nechť f a g jsou reálné funkce jedné proměnné. Pak platí $f + g \sim f \Leftrightarrow g \ll f \Leftrightarrow g \ll f + g$.*

3.2 Funkce Gamma

Kombinační čísla a následně multinomické koeficienty jsme v definicích 1.3.1, 2.5.1 definovali buď jako kombinaci podílu a součinu faktoriálů nebo v méně zajímavých případech jen jako 0. To nás může motivovat k nalezení nějaké funkce f, která by zobecnila faktoriál pro obor reálných čísel.

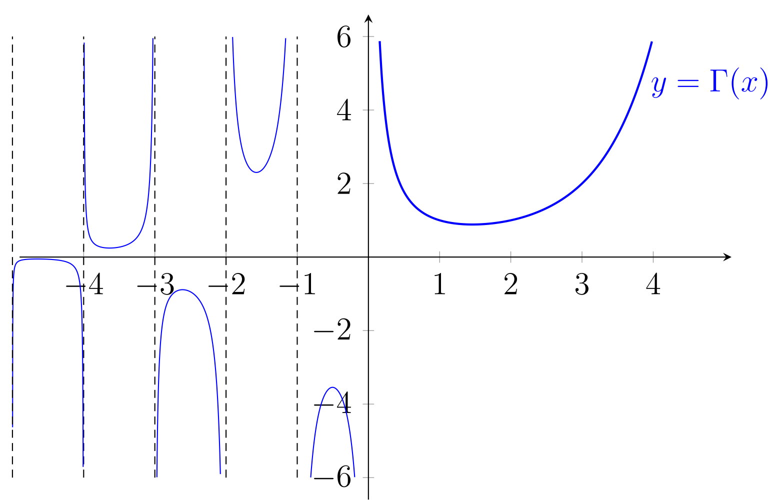
Reálných funkcí f splňující $f(n) = n!$ pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$ je ale zřejmě nekonečně mnoho, takže musíme naše podmínky na f doupřesnit. Pravděpodobně nejdůležitější vlastnost faktoriálu je, že pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$ platí $(n+1)! = (n+1)n!$, takže budeme požadovat, aby ještě platilo $f(x+1) = (x+1)f(x)$ pro všechna x definičního oboru f. Díky tomuto předpokladu nemusíme požadovat, aby $f(n) = n!$ pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$, protože bude zřejmě stačit jen předpoklad $f(0) = 1$. I s těmito dvěma požadavky ale pro f máme stále nekonečně mnoho možností, takže naší poslední podmínkou bude, aby byla funkce $\ln[f(x)]$ konvexní pro $x > -1$, i když na první pohled není jasné, proč bychom něco takového měli chtít. Tyto tři podmínky nám už ale budou jednoznačně udávat funkci f (za dodatečného předpokladu, že má její definiční obor být co největší podmnožina $\mathbb{R}$). Nyní bude naším cíle dokázat, že všechny tyto uvedené předpoklady splňuje právě funkce f definovaná na $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$ splňující $f(x) = \Gamma(x+1)$[1] pro všechna x z jejího definičního oboru.

Definice 3.2.1. Funkci Γ (Gamma) definujme pro všechna $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$ jako následující limitu, která konverguje právě pro zmíněná x:

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} n^{x-1} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{x-1}{k}\right)^{-1}$$

Poznámka 4. Známější definice funkce Γ je následující nevlastní integrál, který ale konverguje jen pro $x \in \mathbb{R}^+$.

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-x}\mathrm{d}t.$$



Obrázek 3.1: Graf funkce Γ

[1] K tomuto nepříliš praktickému posunu o 1 vedly jisté historické okolnosti. Existuje sice i funkce Π, která se shoduje s f přesně, ale Γ je používanější, takže zůstaneme u ní.

Nyní dokažme jednoznačnosti funkce f. K tomu využijeme následující větu dokázanou v článku [10].

Věta 3.2.2 (Bohrova-Mullerupova věta)**.** *Nechť funkce* $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *splňuje následující podmínky:*

(i) $g(1) = 1$

(ii) $g(x+1) = xg(x)$ *pro všechna* $x \in \mathbb{R}^+$

(iii) Funkce $\ln[g(x)]$ *je konvexní na* $\mathbb{R}^+$.

Pak se funkce g *a* Γ *shodují na celém intervalu* $\mathbb{R}^+$.

Z této věty tedy dostáváme, že pro všechna $x \in \mathbb{R}^+$ naše hledaná funkce f musí splňovat $f(x) = \Gamma(x+1)$. Čistě z definice 3.2.1 se dá pomocí definice nekonečného součinu 3.1.8 a věty 3.1.2 o aritmetice limit ukázat, že $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ platí pro všechna $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_0^-$, což se s ohledem na posun o 1 mezi funkcemi f a Γ na $\mathbb{R}^+$ shoduje s naší rekurentní podmínkou pro funkci f. Nyní předpokládejme, že existuje $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$, pro které platí $f(y) \neq \Gamma(y+1)$ a uvažme libovolné $n \in \mathbb{N}$ splňující $n > |y| \Rightarrow y + n > -1$. Pak z opakovaného použití předchozího pozorování dostáváme

$$\begin{aligned} f(y) &\neq \Gamma(y+1) \\ f(y)\prod_{i=1}^{n}(y+n) &\neq \Gamma(y+1)\prod_{i=1}^{n}(y+n) \\ f(y+n) &\neq \Gamma(y+n+1), \end{aligned}$$

jelikož $\prod_{i=1}^{n}(y+n) \neq 0$ z předpokladu $y \notin \mathbb{Z}^-$. To je ale spor s první větou předchozího odstavce, takže pro maximalizaci velikosti definičního oboru funkce f musí platit $f(x) = \Gamma(x+1)$ pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_0^-$. Nakonec dokažme, že funkce f nemůže mít definiční obor větší. Opět pro spor předpokládejme, že existuje $m \in \mathbb{Z}^-$, pro které je funkce f definovaná. Pak ale opět z opakovaně použitého jejího rekurentního vztahu dostáváme

$$\begin{aligned} f(m)\prod_{i=1}^{-m}(m+i) &= f(1) \\ f(m)\cdot 0 \cdot \prod_{i=1}^{-m-1}(m+i) &= 1 \\ 0 &= 1, \end{aligned}$$

což ukončuje celý důkaz. □

V příští větě uvádíme všechny vlastnosti funkce Γ, které budeme používat.

Věta 3.2.3. *Nechť* $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_0^-, y \in \mathbb{R}^+, z \in \mathbb{R}_0^+, m \in \mathbb{N}_0$. *Pak platí:*

(i) Shoda s faktoriálem:

$$\Gamma(m+1) = m!, \tag{3.2}$$

(ii) Rozšířený rekurentní vzath faktoriálu:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \tag{3.3}$$

(iii) *Funkce* $\ln[f(x)]$ *je na intervalu* $(0, \infty)$ *konvexní.*

(iv) *Eulerova reflexní formule:*

$$\frac{1}{\Gamma(x)\Gamma(1-x)} = \frac{\sin(\pi x)}{\pi}, \tag{3.4}$$

(v) Γ *je spojitá v bodě* x *a není spojitá v bodě* $-m$*:*

$$\lim_{w \to x} \Gamma(w) = \Gamma(x), \tag{3.5}$$

$$\lim_{w \to -m} |\Gamma(w)| = \infty, \tag{3.6}$$

(vi) *Funkce* ψ *(Digamma):*

$$\psi(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln(\Gamma(x)) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}, \tag{3.7}$$

$$\psi'(y) > 0, \tag{3.8}$$

(vii) *Žádné kořeny a kladnost na* $\mathbb{R}^+$*:*

$$\Gamma(x) \neq 0, \tag{3.9}$$

$$\Gamma(y) > 0, \tag{3.10}$$

(viii) *Existují konstanty* $a, b \in \mathbb{R}^+$ *splňující*

$$a\left(\frac{z+\frac{1}{2}}{e}\right)^{z+\frac{1}{2}} \leq \Gamma(z+1) < b\left(\frac{z+\frac{1}{2}}{e}\right)^{z+\frac{1}{2}}. \tag{3.11}$$

Kapitola 4

Pascalova rovina

Jak už jsme nastínili v sekci 3.2, funkce Γ nám dovolí přirozeně rozšířit definiční obor kombinačních čísel. V této kapitole představíme několik vlastností tohoto rozšíření, kde se při důkazu části z nich budeme inspirovat článkem [13].

Definice 4.0.1 (Zobecnění definice 1.3.1)**.** Nechť $\alpha, x \in \mathbb{R}$. Pak *kombinační číslo* definujme jako

$$\binom{\alpha}{x} = \begin{cases} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(x+1)\Gamma(\alpha-x+1)}, & \text{pokud } \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^- \text{ a } (x+1) \notin \mathbb{Z}_0^- \text{ a } (\alpha - x + 1) \notin \mathbb{Z}_0^- \\ 0, & \text{pokud } \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^- \text{ a } (x+1) \in \mathbb{Z}_0^- \text{ nebo } (\alpha - x + 1) \in \mathbb{Z}_0^- \\ \frac{\alpha^{\underline{x}}}{x!}, & \text{pokud } \alpha \in \mathbb{Z}^- \text{ a } x \in \mathbb{N}_0. \end{cases}$$

Poznámka 5. Definice 4.0.1 je konzistentní s definicí 1.3.1.

První část definice 4.0.1 vychází z pouhého nahrazení faktoriálů funkcí Γ v definici 1.3.1. V případě, že platí $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$ a $(x+1) \in \mathbb{Z}_0^-$ nebo $(\alpha - x + 1) \in \mathbb{Z}_0^-$, má alespoň jedna z funkcí Γ ve jmenovateli první části definice 4.0.1 nevlastní limitu. Proto jsme v něm definovali $\binom{\alpha}{x}$ jako 0, aby platila následující věta.

Věta 4.0.2. *Nechť $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-, x \in \mathbb{R}$. Pak je funkce $\binom{\alpha}{x}$ spojitá v obou proměnných α, x.*

Důkaz. Když $x + 1 \notin \mathbb{Z}_0^-$ a $(\alpha - x + 1) \notin \mathbb{Z}_0^-$, potom je kombinační číslo $\binom{\alpha}{x}$ definované podle první části definice 4.0.1, tudíž je spojité vzhledem ke spojitosti funkce Γ (rovnice (3.5)) a její nenulovosti (vlastnost (3.9)). Dále pokud $x+1 = n \in \mathbb{Z}_0^-$ a $(\alpha-x+1) \notin \mathbb{Z}_0^-$, máme díky vlastnosti (3.6)

$$\lim_{(y,z)\to(\alpha,x)} \binom{y}{z} = \lim_{(y,z)\to(\alpha,x)} \frac{\Gamma(y+1)}{\Gamma(z+1)\Gamma(y-z+1)} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-x+1)} \lim_{z\to n-1} \frac{1}{\Gamma(z+1)}$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-x+1)} \cdot 0 = 0 = \binom{\alpha}{x},$$

což dokazuje spojitost kombinačního čísla $\binom{\alpha}{x}$ v bodě (α, x). Zbylé dvě možnosti $x + 1 \notin \mathbb{Z}_0^-$ a $(\alpha - x + 1) \notin \mathbb{Z}_0^-$ nebo $x + 1 \notin \mathbb{Z}_0^-$ a $(\alpha - x + 1) \in \mathbb{Z}_0^-$ mají analogický důkaz. □

Motivace k definici třetího případu v definici 4.0.1 vyplyne z věty 4.1.1 v následující sekci.

4.1 Kombinační čísla jedné nezáporné celé a jedné reálné proměnné

Práce s kombinačními čísly dvou reálných argumentů definovanými není jednoduchá kvůli komplikovanosti funkce Γ. Pokud ale připustíme, aby byl jejich spodní argument nezáporný celý, můžeme se funkcí Γ v jejich definici „zbavit" díky následující větě.

Věta 4.1.1. *Pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ a $k \in \mathbb{N}_0$ platí*

$$\binom{x}{k} = \frac{x^{\underline{k}}}{k!}.$$

Důkaz. Pokud $x \notin \mathbb{Z}^-$, můžeme rovnou použít definici 4.0.1, takže mějme $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$. Kdyby bylo $(x - k + 1) \notin \mathbb{Z}_0^-$, měli bychom z definice 4.0.1 a vztahu (3.3)

$$\binom{x}{k} = \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(x-k+1)} = \frac{x(x-1)\dots(x-k+1)\Gamma(x-k+1)}{k!\Gamma(x-k+1)} = \frac{x\dots(x-k+1)}{k!} = \frac{x^{\underline{k}}}{k!}.$$

Nakonec když $(x - k + 1) \in \mathbb{Z}_0^-$, musí z předpokladů $x > -1$ a $k \in \mathbb{N}_0$ existovat $m \in \mathbb{N}_0$ s $m < k$, pro něž je $x - m = 0$, takže $\frac{x^{\underline{k}}}{k!} = 0$, což se shoduje s druhou částí definice 4.0.1, podle které je $\binom{x}{k} = 0$. □

K takovémuto zápisu kombinačních čísel bychom ale mohli přijít i bez funkce Γ. Kombinační čísla takto bývají definována, aby platila věta 4.1.2.

Věta 4.1.2 (Zobecnění binomické věty 1.3.5)**.** *Nechť $x, y, \alpha \in \mathbb{R}$ splňují $0 < |x| < |y|$. Pak platí*

$$(x+y)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k y^{\alpha-k} \tag{4.1}$$

a daná řada konverguje absolutně.

Důkaz. Označme funkci f splňující $f(x) = (x+y)^\alpha$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Snadnou indukcí můžeme ověřit, že pro všechna $k \in \mathbb{N}_0$ platí

$$f^{(k)}(x) = \alpha^{\underline{k}}(x+y)^{\alpha-k}.$$

Zvolením $x_0 = 0$ ve větě 3.1.19 o Cauchyově tvaru zbytku Taylorova polynomu dostáváme, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ exituje c_n ostře mezi 0 a x splňující

$$(x+y)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^{\underline{k}} y^{\alpha-k}}{k!} x^k + \frac{\alpha^{\underline{n+1}}(c_n+y)^{\alpha-n-1}(x-c_n)^n x}{n!},$$

z čehož máme pomocí věty 4.1.1

$$\begin{aligned}\left|(x+y)^\alpha - \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k y^{\alpha-k}\right| &= \left|\frac{\alpha^{\underline{n+1}}(c_n+y)^{\alpha-n-1}(x-c_n)^n x}{n!}\right| \\ &= \left|\frac{\alpha^{\underline{n+1}}}{n!}(c_n+y)^{\alpha-1}\left(\frac{x-c_n}{c_n+y}\right)^n x\right|. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Protože platí $\frac{d}{dz}(z+y)^{\alpha-1} = (\alpha-1)(z+y)^{\alpha-2}$, musí být funkce $(z+y)^{\alpha-1}$ proměnné z zřejmě monotónní na intervalu mezi 0 a x, takže pokud označíme $m = \max\{1, (x+y)^{\alpha-1}\}$, dostáváme

$$(c_n + y)^{\alpha-1} \leq m. \tag{4.3}$$

Z definice čísla c_n máme $\operatorname{sgn}(x) = \operatorname{sgn}(c_n)$, tudíž platí

$$\left|\frac{x-c_n}{c_n+y}\right| \leq \left|\frac{|x|-|c_n|}{|y|-|c_n|}\right| = \frac{|x|-|c_n|}{|y|-|c_n|} = \left|\frac{x}{y}\right| - \frac{|\frac{x}{y}||c_n| - |c_n|}{|y|-|c_n|} < \left|\frac{x}{y}\right|, \tag{4.4}$$

což nám spolu s nerovnicí (4.3) dává

$$\left|\frac{\alpha^{\underline{n+1}}}{n!}(c_n+y)^{\alpha-1}\left(\frac{x-c_n}{c_n+y}\right)^n x\right| < \left|\frac{\alpha^{\underline{n+1}}}{n!} m \left(\frac{x}{y}\right)^n x\right|. \tag{4.5}$$

Nyní položíme $a_n = \left|\frac{\alpha^{\underline{n+1}}}{n!} m \left(\frac{x}{y}\right)^n x\right|$. Pokud $\alpha \in \mathbb{N}_0$, pak pro všechna $l \in \mathbb{N}_{\geq \alpha}$ je jeden ze činitelů v součinu padajícího faktoriálu v definici a_l roven nule, takže platí $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Jinak v případě $\alpha \notin \mathbb{N}$ nemůže být zmíněný padající faktoriál 0 a dostáváme

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{\alpha^{\underline{n+2}}}{(n+1)!} m (\frac{x}{y})^{n+1} x}{\frac{\alpha^{\underline{n+1}}}{n!} m (\frac{x}{y})^n x}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{y}\right|\left|\frac{\alpha-n-1}{n+1}\right| < 1.$$

Z d'Alambertova kritéria (věta 3.1.13) proto řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, tudíž máme z nutné podmínky pro její konvergenci $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Díky rovnici (4.2), nerovnici (4.5) a větě 3.1.3 o uspořádání limit pak platí

$$\lim_{n\to\infty}\left|(x+y)^\alpha - \sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k} x^k y^{\alpha-k}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha^{\underline{n+1}}}{n!}(c_n+y)^{\alpha-1}\left(\frac{x-c_n}{c_n+y}\right)^n x\right| \leq \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha^{\underline{n+1}}}{n!} m \left(\frac{x}{y}\right)^n x\right| = 0.$$

Při důkazu absolutní konvergence řady na pravé straně rovnice (4.1) si nejdříve všimněme, že kdyby platilo $\alpha \in \mathbb{N}_0$ měli bychom $\binom{\alpha}{k} = 0$ pro všechna $k \in \mathbb{N}_{>\alpha}$, z čehož rovnou dostáváme zmíněnou konvergenci. Jinak můžeme opět využít větu 4.1.1 a d'Alambertovo kritérium z věty 3.1.13:

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{\binom{\alpha}{k+1} x^{k+1} y^{\alpha-k-1}}{\binom{\alpha}{k} x^k y^{\alpha-k}}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{\frac{\alpha^{\underline{k+1}}}{(k+1)!} x^{k+1} y^{\alpha-k-1}}{\frac{\alpha^{\underline{k}}}{k!} x^k y^{\alpha-k}}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{\alpha-k}{k+1}\right|\left|\frac{x}{y}\right| = \left|\frac{x}{y}\right| < 1$$

□

Také dostáváme zobecnění dalších tří vět sekce 1.4.

Věta 4.1.3 (Zobecnění věty 1.4.3)**.** *Nechť $\alpha \in \mathbb{R}_{>-1}$. Pak platí*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k} = 2^\alpha.$$

Důkaz. Při důkazu této věty budeme postupovat podobně jako u věty 4.1.2 pro případ $x = y = 1$. Definujme $g(x) \equiv (1+x)^\alpha$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a ve větě 3.1.20 o Lagrangeově zbytku Taylorova polynomu zvolme $x_0 = 0$ a $x = 1$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ tedy existuje $c_n \in [x_0, x] = [0, 1]$ splňující

$$g(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{g^k(0)}{k!}(1-0)^k + \frac{g^{(n+1)}(c_n)(1-0)^{n+1}}{(n+1)!}. \tag{4.6}$$

Opět můžeme lehkou indukcí dokázat, že pro všechna $k \in \mathbb{N}$ platí

$$g^k(x) = \alpha^{\underline{k}}(1+x)^{\alpha-k},$$

takže z rovnice (4.6) máme

$$2^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^{\underline{k}}(1+0)^{\alpha-k}}{k!} + \frac{\alpha^{\underline{n+1}}(1+c_n)^{\alpha-n-1}}{(n+1)!}.$$

Označíme-li $m = \max\{1, (x+y)^{\alpha-1}\}$ dostaneme pomocí věty 4.1.1 a stejným argumentem jako v důkazu věty 4.1.2

$$\left| 2^\alpha - \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{n} \right| \leq \left| m \binom{\alpha}{n+1} \right|. \tag{4.7}$$

Ve větě 4.2.9 dokážeme, že pro dané $\alpha > -1$ platí $\lim_{x\to\infty} \binom{\alpha}{x} = 0$, takže pomocí Heiného věty 3.1.7 a věty 3.1.3 o uspořádání limit z nerovnice (4.7) vyplývá věta 4.1.3. □

Věta 4.1.4 (Zobecnění věty 1.4.4)**.** *Nechť $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$. Pak platí*

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} = 0. \tag{4.8}$$

Důkaz. V rovnici (4.12) dokážeme, že pro dané $\alpha > 0$ a libovolné $k \in \mathbb{N}_0$ platí

$$\binom{\alpha}{k} = \binom{\alpha-1}{k-1} + \binom{\alpha-1}{k},$$

z čehož po dosazení do rovnice (4.8), následné úpravě na teleskopický součet a aplikaci definice 4.0.1 dostáváme

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\binom{\alpha-1}{k-1} + \binom{\alpha-1}{k} \right) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \left(\binom{\alpha-1}{k-1} + \binom{\alpha-1}{k} \right) \\
&= \lim_{N\to\infty} \left[\binom{\alpha-1}{-1} + \sum_{k=0}^{N} \left((-1)^k \binom{\alpha-1}{k} + (-1)^{k+1} \binom{\alpha-1}{k} \right) + \binom{\alpha-1}{N} \right] \\
&= \lim_{N\to\infty} \left[0 + \sum_{k=0}^{N} 0 + \binom{\alpha-1}{N} \right] = \lim_{N\to\infty} \binom{\alpha-1}{N}.
\end{aligned}$$

Zase ve větě 4.2.9 ukážeme, že se tato limita díky $\alpha - 1 > -1$ a Heineho větě 3.1.7 rovná nule. □

Věta 4.1.5 (Zobecnění Chu-Vandermondeho konvoluce ve větě 1.4.9)**.** *Nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ a $\gamma \in \mathbb{Z}$. Pak platí*

$$\sum_{i=0}^{\gamma} \binom{\alpha}{i} \binom{\beta}{\gamma - i} = \binom{\alpha+\beta}{\gamma}. \tag{4.9}$$

Důkaz. Pokud platí $\gamma \in \mathbb{Z}^-$, je daný součet na levé straně rovnice (4.9) prázdný, a tedy nula stejně jako kombinační číslo na její pravé straně z definice 4.0.1.

Jinak uvažme libovolné $x \in (0,1)$. Pak z věty 4.1.2 máme

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha+\beta}{k} x^k = (1+x)^{\alpha+\beta} = (1+x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\beta}{k} x^k\right)$$

Jelikož nám věta dává absolutní konvergenci obou řad na pravé straně předchozí rovnice, můžeme z Mertensovy věty 3.1.15 nahradit jejich součin Cauchyovým součinem, takže dostáváme

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha+\beta}{k} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{k} \binom{\alpha}{l} \binom{\beta}{k-l} x^l x^{k-l} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{k} \binom{\alpha}{l} \binom{\beta}{k-l}\right) x^k.$$

To jsou ale mocninné řady, které konvergují na intervalu $(0,1)$, takže se z věty 3.1.21 musí jejich koeficienty rovnat, což ukončuje důkaz věty 4.1.5. □

Z věty 4.1.4 dostáváme i absolutní konvergenci řady kombinačních čísel.

Věta 4.1.6. *Nechť $\alpha \in \mathbb{R}_0^+$. Pak řada $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k}$ konverguje absolutně.*

Důkaz. Pokud $\alpha \in \mathbb{N}_0$, pak pro každé $k \in \mathbb{N}_{>\alpha}$ platí $\binom{\alpha}{k} = 0$, takže je jen konečně mnoho čísel v dané řadě nenulových, a proto konverguje absolutně.

Jinak předpokládejme $\alpha \notin \mathbb{N}_0$, z čehož pro každé $k \in \mathbb{N}_{>\alpha}$ vyplývá $\binom{\alpha}{k} \neq 0$ (toto platí i bez podmínky $k > \alpha$). Pak pro ně máme z věty 4.1.1

$$\frac{\binom{\alpha}{k+1}}{\binom{\alpha}{k}} = \frac{\frac{\alpha^{\underline{k+1}}}{(k+1)!}}{\frac{\alpha^{\underline{k}}}{k!}} = \frac{\alpha - k}{k+1} < 0,$$

takže od určitého indexu střídají sčítaná kombinační čísla své znaménka. Máme proto

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left|\binom{\alpha}{k}\right| = \sum_{k=0}^{\lceil \alpha \rceil} \left|\binom{\alpha}{k}\right| + \left|\sum_{k=\lceil \alpha \rceil}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k}\right|,$$

což díky předpokladu $\alpha \neq 0$ a větě 4.1.4 zřejmě konverguje. □

Pomocí vlastnosti (3.4) můžeme vyjádřit bez použití funkce Γ i většinu kombinačních čísel, které mají přirozený jen horní argument.

Věta 4.1.7. *Nechť $x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}_0$. Pak platí*

$$\binom{k}{x} = \begin{cases} \frac{\sin[\pi(x-k)]k!}{\pi x^{\underline{k+1}}}, & \textit{pokud } x \in \mathbb{R} \setminus \{0, \ldots, k\} \\ 1, & \textit{pokud } x = 0. \end{cases}$$

Důkaz. Pokud $x = 0$, máme rovnou z definice 4.0.1

$$\binom{k}{0} = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(0+1)\Gamma(k+1)} = 1.$$

Kdyby platilo $(x-k) \in \mathbb{Z}_0^-$, byl daný koeficient roven nule z definice 4.0.1 stejně jako $\frac{\sin[\pi(x-k)]k!}{\pi x^{\underline{k+1}}}$, jelikož pro každé $m \in \mathbb{Z}$ platí $\sin(\pi m) = 0$.

Nyní předpokládejme $(x-k) \notin \mathbb{Z}_0^-$. Pak postupně díky definici 4.0.1 a rovnicím (3.4), (3.3) dostáváme

$$\binom{k}{x} = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(x+1)\Gamma(k-x+1)} = \frac{\Gamma(x-k)k!}{\Gamma(x-k)\Gamma(x+1)\Gamma(k-x+1)} = \frac{\Gamma(x-k)\sin(\pi(x-k))k!}{\pi\Gamma(x+1)}$$
$$= \frac{\Gamma(x-k)\sin(\pi(x-k))k!}{\pi x(x-1)\dots(x-k)\Gamma(x-k)} = \frac{\sin(\pi(x-k))k!}{\pi x^{\underline{k+1}}}.$$

□

Poznámka 6. Pro $x \in \{1, \dots, k\}$ ve větě 4.1.7 sice nemáme pro dané kombinační číslo explicitní vzorec, ale můžeme ho díky spojitosti kombinačních čísel ve větě 4.0.2 vyjádřit jako

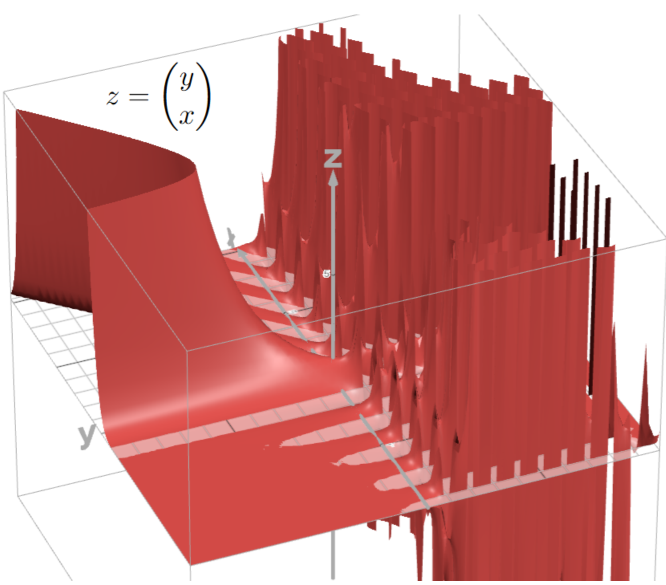
$$\binom{k}{x} = \lim_{y \to x} \frac{\sin[\pi(y-k)]k!}{\pi y^{\underline{k+1}}}.$$

Z případu, kdy $k = 0$ ve větě 4.1.7 dostáváme tento hezký důsledek:

Důsledek 4.1.8. *Nechť $x \in \mathbb{R}$. Pak platí $\binom{0}{x} = \operatorname{sinc}(x)$.*

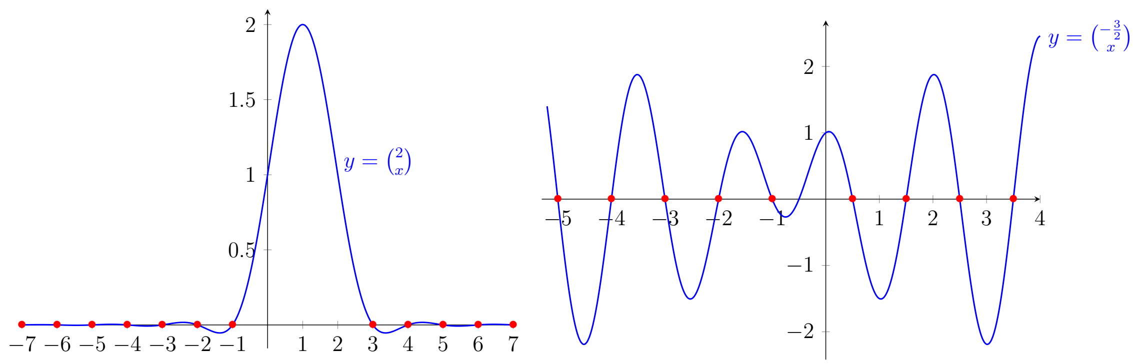
4.2 Kombinační čísla dvou reálných proměnných

V této sekci se vrátíme ke kombinačním číslům $\binom{\alpha}{x}$ z první a druhé části definice 4.0.1 a vyšetříme jejich vlastnosti, ve kterých je budeme brát především jako funkci proměnné x. Nejprve stručně analyzujme graf kombinačního čísla $\binom{\alpha}{x}$ se dvěma přoměnnými α, x.



Obrázek 4.1: Graf kombinačních čísel $\binom{y}{x}$

Na první pohled chaotické chování pro $\alpha < -1$ si můžeme spojit s průběhem $\Gamma(x)$ pro $x < 0$, viz obrázek 4.2. Naopak pro $\alpha > -1$ a $x \in [0, \alpha]$ dostáme spojitou verzi nám známého Pascalova trojúhelníku a pro zbylá $x \in \mathbb{R} \setminus [0, \alpha]$ vidíme, že se $\binom{\alpha}{x}$ přibližuje k 0. Pro fixní α připomínají grafy funkcí $\binom{\alpha}{x}$ funkce $\sin(x)x^m$, kde $m > 0$ pokud $\alpha < -1$ a $m < 0$ pokud $\alpha > -1$:



Obrázek 4.2: Grafy funkcí $\binom{2}{x}$ a $\binom{-\frac{3}{2}}{x}$

Červeně vyznačené kořeny kombinačních čísel můžeme jednoduše vysvětlit větou 4.2.1.

Věta 4.2.1. *Nechť $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-, x \in \mathbb{R}$. Pak platí*

$$\binom{\alpha}{x} = 0 \Leftrightarrow (x+1) \in \mathbb{Z}_0^- \vee (\alpha - x + 1) \in \mathbb{Z}_0^-.$$

Důkaz. Levý směr implikace platí z definice 4.0.1. Předpokládejme nyní $\binom{\alpha}{x} = 0$ a dokažme $(x+1) \in \mathbb{Z}_0^-$ nebo $(\alpha - x + 1) \in \mathbb{Z}_0^-$. Všimněme si, že pokud α, x splňují podmínku první části definice 4.0.1, pak je číslo $\binom{\alpha}{x}$ definované jako kombinace součinu a podílu nenulových reálných čísel díky vlastnosti (3.9). Proto α, x musí splňovat druhou podmínku definice 4.0.1, jak jsme chtěli dokázat. □

Abychom mohli s danými kombinačními čísly lépe pracovat, vyjádříme v příští větě kombinační čísla dvou reálných proměnných jako nekonečný součin, díky kterému, mimo jiné, nebudeme muset rozlišovat první a druhou část definice 4.0.1.

Věta 4.2.2. *Nechť $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-, x \in \mathbb{R}$. Pak platí*

$$\binom{\alpha}{x} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(k+x)(k+\alpha-x)}{k(k+\alpha)},$$

kde daný nekonečný součin pro daná α, x vždy konverguje.

Důkaz. Pokud je kombinační číslo $\binom{\alpha}{x}$ definované podle první části definice 4.0.1, dostáváme díky definici (3.2.1), větě 3.1.2 (jelikož nadcházející limity konvergují) a vlastnosti (3.9)

$$\binom{\alpha}{x} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(x+1)\Gamma(\alpha-x+1)} =$$

$$= \frac{\lim_{n_1\to\infty} n_1^{\alpha} \prod_{k_1=1}^{n_1}(1+\frac{\alpha}{k_1})^{-1}}{\lim_{n_2\to\infty} n_2^{x} \prod_{k_2=1}^{n_2}(1+\frac{x}{k_2})^{-1} \lim_{n_3\to\infty} n_3^{\alpha-x} \prod_{k_3=1}^{n_3}(1+\frac{\alpha-x}{k_3})^{-1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} n^{\alpha-x-(\alpha-x)} \prod_{k=1}^{n} \frac{\frac{k+x}{k}\frac{k+\alpha-x}{k}}{\frac{k+\alpha}{k}} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(k+x)(k+\alpha-x)}{k(k+\alpha)}.$$

Jinak musí α, x splňovat podmínku druhé části definice 4.0.1, takže platí $\binom{\alpha}{x} = 0$ a $(x+1) \in \mathbb{Z}_0^-$ nebo $(\alpha - x + 1) \in \mathbb{Z}_0^-$. Pak ale musí existovat $l \in \mathbb{N}$ takové, že $l + x = 0$ nebo $l + \alpha - x = 0$, tudíž

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{(k+x)(k+\alpha-x)}{k(k+\alpha)} = 0 = \binom{\alpha}{x},$$

jak jsme chtěli dokázat. □

Dále uvádíme zobecnění základních vlastností kombinačních čísel přirozených proměnných a užitečné lemma.

Věta 4.2.3 (Zobecnění věty 1.3.4)**.** *Pro libovolné $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-, x \in \mathbb{R}$ platí:*

(i)

$$\binom{\alpha}{0} = \binom{\alpha}{\alpha} = 1 \tag{4.10}$$

(ii)

$$\binom{\alpha}{x} = \binom{\alpha}{\alpha - x} \tag{4.11}$$

(iii)

$$\binom{\alpha+1}{x} = \binom{\alpha}{x} + \binom{\alpha}{x-1}, \tag{4.12}$$

(iv) Pokud $\alpha \neq 0$, platí i

$$y\binom{\alpha}{y} = \alpha\binom{\alpha-1}{y-1}. \tag{4.13}$$

Důkaz. Pro důkaz rovnice (4.10) využijeme to, že z vlastnosti (3.2) platí $\Gamma(1) = 0! = 1$:

$$\binom{\alpha}{0} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(0+1)\Gamma(\alpha-0+1)} = 1 = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha-\alpha+1)} = \binom{\alpha}{\alpha}$$

Dále rovnice (4.11) plyne z čistého dosazení do věty 4.2.2:

$$\binom{\alpha}{x} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(k+x)(k+\alpha-x)}{k(k+\alpha)} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{[k+\alpha-(\alpha-x)](k+\alpha-x)}{k(k+\alpha)} = \binom{\alpha}{\alpha-x}$$

Pokud $\alpha + 1 - x \neq 0$, dostáváme rovnici (4.12) z věty 4.2.2 a důsledku 3.1.11:

$$\binom{\alpha+1}{x} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(k+\alpha+1-x)}{(k+\alpha+1)} \frac{(k+x)}{k} \right) = \frac{\alpha+1}{\alpha+1-x} \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(k+\alpha-x)}{(k+\alpha)} \frac{(k+x)}{k} \right)$$

$$= \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(k+\alpha-x)}{(k+\alpha)} \frac{(k+x)}{k} \right) + \frac{x}{\alpha+1-x} \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(k+x)(k+\alpha-x)}{k(k+\alpha)} \right)$$

$$= \binom{\alpha}{x} + \frac{x}{\alpha+1-x} \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(k+\alpha-x)}{(k+\alpha)} \frac{(k+x)}{k} \right) = \binom{\alpha}{x} + \binom{\alpha}{x-1}$$

Když platí $\alpha - x + 1 = 0$, máme $x = \alpha + 1$ a z rovnice (4.10) a definice 4.0.1 platí

$$\binom{\alpha}{x} + \binom{\alpha}{x-1} = \binom{\alpha}{\alpha+1} + \binom{\alpha}{\alpha} = 1 = \binom{\alpha+1}{\alpha+1} = \binom{\alpha+1}{x}.$$

Nakonec rovnici (4.13) dostáváme rovnou z věty 4.2.2, důsledku 3.1.11 a předpokladu $\alpha \neq 0$:

$$\frac{\alpha}{y}\binom{\alpha}{y} = \frac{\alpha}{y} \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(k+y)}{(k+\alpha)} \frac{(k+\alpha-y)}{k} \right) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(k+y-1)(k+\alpha-y)}{k(k+\alpha-1)} = \binom{\alpha-1}{y-1}.$$

□

Lemma 4.2.4. *Nechť $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-, x \in \mathbb{R}$ s $x \neq 0$. Pak platí*

$$\binom{\alpha}{x} = \left(-1 + \frac{\alpha+1}{x} \right) \binom{\alpha}{x-1}.$$

Důkaz. Daná rovnice je díky vztahu (4.12) a větě 4.2.2 ekvivalentní s

$$\begin{aligned}
\binom{\alpha}{x} &= -\binom{\alpha}{x-1} + \frac{\alpha+1}{x}\binom{\alpha}{x-1} \\
\binom{\alpha}{x} + \binom{\alpha}{x-1} &= \frac{\alpha+1}{x}\binom{\alpha}{x-1} \\
\binom{\alpha+1}{x} &= \frac{\alpha+1}{x}\binom{\alpha}{x-1} \\
\prod_{k=1}^{\infty} \frac{(k+x)(k+\alpha-x+1)}{k(k+\alpha+1)} &= \frac{\alpha+1}{x} \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(k+x-1)}{(k+\alpha)} \frac{(k+\alpha-x+1)}{k} \right).
\end{aligned}$$

Tato poslední rovnost plyne z důsledku 3.1.12. □

Nyní můžeme v příštích větách 4.2.5, 4.2.6 částečně objasnit podobnost grafů kombinačních čísel v obrázku 4.2 s funkcemi $\sin(x)x^m$ zmíněnými na začátku této sekce.

Věta 4.2.5. *Nechť $\alpha \in \mathbb{R}_{>-1}, \beta \in \mathbb{R}_{<-1}, x, y \in \mathbb{R}$ splňují $x > \alpha + 1, \binom{\alpha}{x} \neq 0, y > 0, \binom{\beta}{y} \neq 0$. Pak platí*

$$\left|\binom{\alpha}{x}\right| < \left|\binom{\alpha}{x-1}\right|, \operatorname{sgn}\binom{\alpha}{x} = -\operatorname{sgn}\binom{\alpha}{x-1}, \tag{4.14}$$

$$\left|\binom{\alpha}{\alpha-x}\right| < \left|\binom{\alpha}{\alpha-x+1}\right|, \operatorname{sgn}\binom{\alpha}{\alpha-x} = -\operatorname{sgn}\binom{\alpha}{\alpha-x+1}, \tag{4.15}$$

$$\left|\binom{\beta}{y}\right| < \left|\binom{\beta}{y-1}\right|, \operatorname{sgn}\binom{\beta}{y} = -\operatorname{sgn}\binom{\beta}{y-1}, \tag{4.16}$$

$$\left|\binom{\beta}{\beta-y}\right| < \left|\binom{\beta}{\beta-y+1}\right|, \operatorname{sgn}\binom{\beta}{\beta-y} = -\operatorname{sgn}\binom{\beta}{\beta-y+1}. \tag{4.17}$$

Důkaz. Díky podmínkám $\alpha > -1, x > \alpha + 1$ a $\beta < -1, y > 0$ máme $-1 + \frac{\alpha+1}{x} \in (-1, 0)$ a $-1 + \frac{\beta+1}{y} \in (-\infty, -1)$ z čehož pomocí lemmatu 4.2.4 plynou všechny vztahy na řádcích (4.14) a (4.16). Z nich pak použitím rovnice (4.11) dostáváme i zbylé vztahy na řádcích (4.15) a (4.17). $\square$

Věta 4.2.6. *Nechť $\alpha \in \mathbb{R}_{>-1}$. Pak je funkce $\binom{\alpha}{x}$ proměnné x kladná na intervalu $(-1, \alpha + 1)$, nulová na intervalu $[-1, \alpha+1]$ jen v jeho krajních bodech, rostoucí na intervalu $[-1, \frac{\alpha}{2}]$ a klesající na intervalu $[\frac{\alpha}{2}, \alpha + 1]$.*

Důkaz. Nejprve dokažme, že je funkce $\binom{\alpha}{x}$ proměnné x nezáporná na intervalu $[-1, \alpha + 1]$. Díky $\alpha \in \mathbb{R}_{>-1} \Rightarrow \alpha \notin \mathbb{Z}^-$ víme z věty 4.2.2, že pro libovolné $w \in [-1, \alpha + 1]$ máme

$$\binom{\alpha}{w} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(k + w)(k + \alpha - w)}{k(k + \alpha)}.$$

Pro libovolné $l \in \mathbb{N}$ snadno pomocí $l \geq 1, \alpha > -1, \alpha + 1 \geq w \geq -1$ ověříme, že je každý člen daného součinu nezáporný, takže $\binom{\alpha}{w} \geq 0$. Rovnost zde na daném intervalu $[-1, \alpha + 1]$ pomocí věty 4.2.1 nastává pouze v krajních bodech -1 a $\alpha + 1$, jak jsme chtěli dokázat.

Nyní dokažme, že je funkce $\binom{\alpha}{x}$ proměnné x rostoucí na intervalu $[-1, \frac{\alpha}{2}]$, takže mějme libovolné $y, z \in [-1, \frac{\alpha}{2}]$ s $y < z$ a ukažme, že platí $\binom{\alpha}{y} < \binom{\alpha}{z}$. Z podmínky $y < z$ dostáváme, že $z \in (-1, \frac{\alpha}{2}]$, tudíž máme z předchozího odstavce $\binom{\alpha}{z} \neq 0$. Větu 4.2.2 tedy můžeme použít následnovně:

$$\frac{\binom{\alpha}{y}}{\binom{\alpha}{z}} = \frac{\prod_{k_1=1}^{\infty} \frac{(k_1+y)(k_1+\alpha-y)}{k_1(k_1+\alpha)}}{\prod_{k_2=1}^{\infty} \frac{(k_2+z)(k_2+\alpha-z)}{k_2(k_2+\alpha)}}. \tag{4.18}$$

Jelikož dané nekonečné součiny konvergují z věty 4.2.2 a ten ve jmenovatli není 0, dostáváme z věty 3.1.2

$$\frac{\prod_{k_1=1}^{\infty} \frac{(k_1+y)(k_1+\alpha-y)}{k_1(k_1+\alpha)}}{\prod_{k_2=1}^{\infty} \frac{(k_2+z)(k_2+\alpha-z)}{k_2(k_2+\alpha)}} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(k + y)(k + \alpha - y)}{(k + z)(k + \alpha - z)}.$$

Pro jakákoliv $l \in \mathbb{N}, u \in \mathbb{R}$ označme funkci $f_l(u) = (l + u)(l + \alpha - u)$ proměnné u. Lehce ověříme, že je kvadratická se záporným vedoucím koeficientem a vrcholem v $u = \frac{\alpha}{2}$, takže je rostoucí na intervalu $[-1, \frac{\alpha}{2}]$ a $f_l(y) < f_l(z)$. Proto je poslpoupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, jejíž každý člen je definovaný jako $a_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{f_k(y)}{f_k(z)}$ klesající a platí $a_1 < 1$. Díky tomuto pozorování a nerovnici $\binom{\alpha}{z} > 0$ dostáváme z rovnice (4.18)

$$\frac{\binom{\alpha}{y}}{\binom{\alpha}{z}} = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{f_k(y)}{f_k(z)} < 1 \Rightarrow \binom{\alpha}{y} < \binom{\alpha}{z},$$

což jsme přesně chtěli. To že funkce $\binom{\alpha}{x}$ proměnné x klesá na intervalu $[\frac{\alpha}{2}, \alpha+1]$ snadno dostaneme aplikováním vztahu (4.11). $\square$

Z předchozí věty získáváme následující nerovnost týkající se funkce Γ, kterou využijeme v příští kapitole.

Věta 4.2.7. *Nechť $x, y, c \in \mathbb{R}^+$ splňují $x < y$ a $x - c > 0$. Pak platí*

$$\frac{1}{\Gamma(x)\Gamma(y)} < \frac{1}{\Gamma(x - c)\Gamma(y + c)}. \tag{4.19}$$

Důkaz. Věta 4.18 nám říká, že platí

$$\binom{x+y-1}{x-1} > \binom{x+y-1}{x-c-1}.$$

Z daných předpokladů víme, že obě kombinační čísla v této nerovnici jsou definovaná podle první části definice 4.0.1 a zároveň pomocí vztahu (3.10) dostáváme $\Gamma[(x+y-1)+1] > 0$. Vydělení předchozí nerovnice tímto výrazem nám potom dá rovnou nerovnici (4.19). □

Kombinace vět 4.2.5, 4.2.6 nám také dovoluje najít globální maximum kombinačních čísel $\binom{\alpha}{x}$ pro určitá α.

Věta 4.2.8 (Zobecnění věty 1.4.1)**.** *Nechť $\alpha \in \mathbb{R}_{>-1}, x \in \mathbb{R}$. Pak platí*

$$\binom{\alpha}{x} = \sup_{w\in\mathbb{R}} \binom{\alpha}{w} \Leftrightarrow x = \frac{\alpha}{2}.$$

Důkaz. Uvažme libovolné $w \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\alpha}{2}\}$ a dokažme pro něj $\binom{\alpha}{w} < \binom{\alpha}{\frac{\alpha}{2}}$. Tato nerovnost v případě $w \in [-1, \alpha+1]$ platí rovnou z věty 4.2.6. Stačí nám uvažovat už jen $w > \alpha + 1$, protože potom $\binom{\alpha}{w} < \binom{\alpha}{\frac{\alpha}{2}}$ pro zbylá $w < -1$ opět dostaneme čistě z rovnice (4.11). Díky větě 4.2.6 také víme, že $\binom{\alpha}{\frac{\alpha}{2}} > 0$, tudíž můžeme předpokládat ještě $\binom{\alpha}{w} \neq 0$.

Mějme nejmenší $n \in \mathbb{N}$, pro které $\alpha + 1 \geq w - n$. Jelikož je z $\alpha > -1$ interval $[-1, \alpha+1]$ delší než 1, musíme z minimality n mít $w - n \in [-1, \alpha+1]$. Z toho plyne $\binom{\alpha}{w-n} < \binom{\alpha}{\frac{\alpha}{2}}$ a kvůli větě 4.2.6 máme i $\binom{\alpha}{w-n} = \left|\binom{\alpha}{w-n}\right|$. Opětovným využitím nerovnice na řádku (4.14) nyní dostáváme

$$0 < \binom{\alpha}{w} \leq \left|\binom{\alpha}{w}\right| < \left|\binom{\alpha}{w-1}\right| < \cdots < \left|\binom{\alpha}{w-n+1}\right| < \left|\binom{\alpha}{w-n}\right| = \binom{\alpha}{w-n} < \binom{\alpha}{\frac{\alpha}{2}},$$

jak jsme chtěli ukázat. □

V následující větě vyšetříme asymptotiku kombinačních čísel.

Věta 4.2.9. *Nechť $\alpha \in \mathbb{R}_{>-1}, \beta \in \mathbb{R}_{<-1} \setminus \mathbb{Z}^-$. Pak platí*

$$\lim_{x\to\infty} \binom{\alpha}{x} = \lim_{x\to-\infty} \binom{\alpha}{x} = 0,$$

limity

$$\lim_{x\to\infty} \binom{\beta}{x}, \lim_{x\to-\infty} \binom{\beta}{x}$$

neexistují a funkce $\binom{\beta}{y}$ proměnné y není ohraničená.

Důkaz. Díky vzathu (4.11) nám stačí dokázat pouze tvrzení o daných limitách, ve kterých se x přibližuje nekonečnu.

Nyní vyberme libovolné $c \in \mathbb{N}$ splňující $c \geq \max\{\alpha+1, \beta+1\}$ a pro všechna $i \in \mathbb{N}$ definujme intervaly

$$I_i := [c+i, c+i+1].$$

Jelikož je podle věty 4.0.2 kombinačního číslo $\binom{\alpha}{x}$ spojité na intervalu I_i, můžeme z Weierstrassovy věty 3.1.17 definovat pro každé $i \in \mathbb{N}$ čtveřici reálných čísel A_i, B_i a $a_i, b_i \in I_i$ splňující

$$A_i = \binom{\alpha}{a_i} = \max_{x \in I_i} \left| \binom{\alpha}{x} \right| \tag{4.20}$$

$$B_i = \binom{\alpha}{b_i} = \max_{x \in I_i} \left| \binom{\beta}{x} \right|. \tag{4.21}$$

Našim cílem bude dokázat, že

$$\lim_{i \to \infty} A_i = 0 \tag{4.22}$$

$$\lim_{i \to \infty} B_i = \infty. \tag{4.23}$$

Rovnice (4.22) by totiž dokázala $\lim_{x\to\infty} \binom{\alpha}{x} = 0$. Z rovnice (4.23) bychom pak dostali neohraničenost funkce $\binom{\beta}{y}$ proměnné y díky střídání jejího znaménka z druhé rovnice na řádku (4.14) a zároveň by potom muselo platit, že $\lim_{x\to\infty} \binom{\beta}{x}$ buď neexistuje, anebo se rovná nekonečnu. Kvůli větě 4.2.1 ale pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\binom{\beta}{\beta+n+1} = 0$, takže $\lim_{x\to\infty} \binom{\beta}{x}$ se nekonečnu nerovná, a proto by tato limita nemohla existovat.

Definujme funkci f na intervalu $[c+1, \infty)$ splňující $f(w) = -1 + \frac{\alpha+1}{w}$ pro každé w v něm. Její derivace $f'(w) = -\frac{\alpha+1}{w^2}$ je záporná na intervalu $[c+1,\infty)$ a zároveň z definice čísla c máme $f(c+1) = -1 + \frac{\alpha+1}{c+1} < 0$, takže je i samotná funkce $f(w)$ záporná na intervalu $[c+1,\infty)$. Proto je funkce$|f(w)|$ rostoucí na intervalu $[c+1,\infty)$, a tudíž pro každé $i \in \mathbb{N}$ a $x \in I_i$ platí

$$\left| -1 + \frac{\alpha+1}{x} \right| = |f(x)| < |f(c+i+1)| = \left| -1 + \frac{\alpha+1}{c+i+1} \right|.$$

Z lemmatu 4.2.4, rovnice (4.20) a zápornosti funkce f pro všechna $i \in \mathbb{N}$ dostáváme

$$A_{i+1} = \left| \left(-1 + \frac{\alpha+1}{a_{i+1}-1} \right) \binom{\alpha}{a_{i+1}-1} \right| < \left| -1 + \frac{\alpha+1}{c+i+1} \right| A_i = \left(1 - \frac{\alpha+1}{c+i+1} \right) A_i. \tag{4.24}$$

Analogicky můžeme uvážit funkci g splňující $g(w) = -1 + \frac{\beta+1}{w}$ pro každé $w \in [c+1,\infty)$ a dokázat, že pro každé $i \in \mathbb{N}$ a $x \in I_i$ platí

$$\left| -1 + \frac{\beta+1}{x} \right| = |g(x)| > |g(c+i+1)| = \left| -1 + \frac{\beta+1}{c+i+1} \right|,$$

z čehož pro každé $i \in \mathbb{N}$ máme zase díky lemmatu 4.2.4, rovnici (4.21) a lehce ověřitelné zápornosti funkce g na daném intervalu

$$B_{i+1} \geq \left| \binom{\beta}{b_i+1} \right| = \left| \left(-1 + \frac{\beta+1}{b_i} \right) \binom{\beta}{b_i} \right| > \left| -1 + \frac{\beta+1}{c+i+1} \right| B_i = \left(1 - \frac{\beta+1}{c+i+1} \right) B_i. \tag{4.25}$$

Opakováním nerovností (4.24) a (4.25) získáme pro každé $i \in \mathbb{N}$

$$A_i \leq A_1 \prod_{k=c+2}^{i} \left(1 - \frac{\alpha+1}{k}\right),$$
$$B_i \geq B_1 \prod_{k=c+2}^{i} \left(1 - \frac{\beta+1}{k}\right),$$

z čehož plynou nerovnosti

$$\lim_{j\to\infty} A_j \leq A_1 \lim_{j\to\infty} \prod_{k=c+2}^{j} \left(1 - \frac{\alpha+1}{k}\right), \tag{4.26}$$
$$\lim_{j\to\infty} B_j \geq B_1 \lim_{j\to\infty} \prod_{k=c+2}^{j} \left(1 - \frac{\beta+1}{k}\right). \tag{4.27}$$

Kvůli větě 4.2.1 zřejmě existují dvě čísla $x_1, x_2 \in I_1 = [c+1, c+2]$, pro která $\binom{\alpha}{x_1} \neq 0$, $\binom{\beta}{x_2} \neq 0$, takže jsou z rovnic (4.20) a (4.21) obě čísla A_1 a B_1 kladná. Pro důkaz rovnic (4.22) a (4.23) nám proto z nerovnic (4.26) a (4.27) stačí dokázat, že

$$\lim_{j\to\infty} \prod_{k=c+2}^{j} \left(1 - \frac{\alpha+1}{k}\right) = 0, \tag{4.28}$$
$$\lim_{j\to\infty} \prod_{k=c+2}^{j} \left(1 - \frac{\beta+1}{k}\right) = \infty. \tag{4.29}$$

Všimněme si, že pro každé $z \in \mathbb{R}_0^+$ platí

$$1 + z \leq e^z,$$

jelikož $1 + 0 \leq e^0$ a $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(1+z) = 1 \leq e^z = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}e^z$. Ze spojitosti exponenciální funkce a věty 3.1.4 o limitě spojitých funkcí tedy dostáváme

$$\lim_{j\to\infty} \prod_{k=c+2}^{j} \left(1 - \frac{\alpha+1}{k}\right) \leq \lim_{j\to\infty} \prod_{k=c+2}^{j} e^{\frac{\alpha+1}{k}} = e^{-\lim_{j\to\infty} \sum_{k=c+2}^{j} -\frac{\alpha+1}{k}}. \tag{4.30}$$

Máme ale

$$\lim_{j\to\infty} \sum_{k=c+2}^{j} -\frac{\alpha+1}{k} = -(\alpha+1) \lim_{j\to\infty} \sum_{k=c+2}^{j} \frac{1}{k} = -(\alpha+1)\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{c+1} \frac{1}{k}\right) = -\infty,$$

protože $\alpha + 1 > 0$ a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ je harmonický součet divergující k nekonečnu. Po dosazení do nerovnice (4.30) získáváme

$$\lim_{j\to\infty} \prod_{k=c+2}^{j} \left(1 - \frac{\alpha+1}{k}\right) \leq 0.$$

Všechny činitelé daného součinu jsou ale nezáporné, takže i on je nezáporný, což spolu s touto nerovností dokazuje pomocí věty o třech limitách rovnici (4.28). Nakonec s ohledem na $\beta+1<0$ máme

$$\lim_{j\to\infty}\prod_{k=c+2}^{j}\left(1-\frac{\beta+1}{k}\right)=\lim_{j\to\infty}\prod_{k=c+2}^{j}\left(1+\frac{-(\beta+1)}{k}\right)>\lim_{j\to\infty}\left(1+\sum_{k=c+2}^{j}\frac{-(\beta+1)}{k}\right)$$
$$>\lim_{j\to\infty}\sum_{k=c+2}^{j}\frac{-(\beta+1)}{k}=-(\beta+1)\lim_{j\to\infty}\sum_{k=c+2}^{j}\frac{1}{k}=-(\beta+1)\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{c+1}\frac{1}{k}\right)=\infty,$$

z čehož vyplývá rovnice (4.29). □

Závěrem této sekce uvádíme estetickou větu 4.2.10.

Věta 4.2.10. *Nechť $\alpha,\beta\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}^-$. Pak platí*

$$\binom{\alpha}{\beta}\binom{\beta}{\alpha}=\operatorname{sinc}(\alpha-\beta).$$

Důkaz. Naším cílem tedy je ukázat, že platí

$$\binom{\alpha}{\beta}\binom{\beta}{\alpha}=\begin{cases}\frac{\sin[\pi(\alpha-\beta)]}{\pi(\alpha-\beta)}, & \text{pokud } \alpha\neq\beta\\ 1, & \text{pokud } \alpha=\beta.\end{cases}$$

Kdyby platilo $\alpha=\beta$, měli bychom rovnou z rovnice (4.10) $\binom{\alpha}{\beta}\binom{\beta}{\alpha}=1$.

V případě že by platilo $(\alpha-\beta+1)\in\mathbb{Z}_0^-$ a $\alpha\neq\beta$, bychom z definice 4.0.1 získali

$$\binom{\alpha}{\beta}\binom{\beta}{\alpha}=0\cdot\binom{\beta}{\alpha}=0=\frac{\sin[\pi(\alpha-\beta)]}{\pi(\alpha-\beta)}$$

a úplně stejně bychom mohli vyřadit možnost, kdy $(\beta-\alpha+1)\in\mathbb{Z}_0^-$ a $\alpha\neq\beta$. Zbývá nám tedy případ, ve kterém platí $(\alpha-\beta)\notin\mathbb{Z}$. Nyní můžeme použít u obou daných kombinační čísla první část definice 4.0.1:

$$\binom{\alpha}{\beta}\binom{\beta}{\alpha}=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha-\beta+1)}\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta-\alpha+1)}=\frac{1}{\Gamma(\alpha-\beta+1)\Gamma(\beta-\alpha+1)}$$

Pomocí vlastnotsí (3.3) a (3.4) nakonec máme

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha-\beta+1)\Gamma(\beta-\alpha+1)}=\frac{1}{(\alpha-\beta)\Gamma(\alpha-\beta)\Gamma(\beta-\alpha+1)}=\frac{\sin[\pi(\alpha-\beta)]}{\pi(\alpha-\beta)},$$

jak jsme chtěli dokázat. □

4.3 Další vyjádření kombinačních čísel a jejich integrace

Dosud jsme v této práci uvažovali jisté součty diskrétních kombinačních čísel. To, že jsme v této kapitole představili jejich spojitou verzi, nás proto může motivovat k jejich spojitému sčítání, tedy integraci.

Nová reprezentace kombinačních čísel a rozšíření několika součtů kombinačních čísel ze sekce 1.4 jsou pomocí ní dokázány ve článku [14] a shrnuty v příští větě.

Věta 4.3.1 (Navazující na věty 1.4.3, 1.4.4, 1.4.5, 1.4.7, 1.4.9)**.** *Nechť* $\alpha, \gamma, y \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}_{>-1}$*.*

Pokud $\alpha > -1$*, platí:*

$$\binom{\alpha}{y} = \frac{2^\alpha}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^\alpha(t) \cos[t(2y-\alpha)] \mathrm{d}t$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \binom{\alpha}{x} \, dx = 2^\alpha$$

Pokud $\alpha > 0$*, platí*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(\pi x) \binom{\alpha}{x} \, dx = 0.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x \binom{\alpha}{x} \, dx = \alpha 2^{\alpha-1},$$

Pokud $\alpha > -\frac{1}{2}$*, platí*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \binom{\alpha}{x}^2 \, dx = \binom{2\alpha}{\alpha}.$$

Pokud $\alpha > -1$ *a* $\alpha + \beta > -1$*, platí*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \binom{\alpha}{x} \binom{\beta}{\gamma - x} \, dx = \binom{\alpha+\beta}{\gamma}.$$

Ve článku [15] je pomocí Fourierovy transformace kombinačního čísla z definice 4.0.1 dokázáno další vyjádření kombinačních čísel.

Věta 4.3.2. *Nechť* $\alpha \in \mathbb{R}_{>-1}, x \in \mathbb{R}$*. Pak platí*

$$\binom{\alpha}{x} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{\alpha}{i} \operatorname{sinc}(x-i),$$

kde daný součet konverguje i absolutně.

Důkazy předchozích dvou vět jsou dosti komplikované a nehodí se do rozsahu této práce, takže musíme uznat, že si zde vypůjčujeme cizí výsledky. Každopádně stojí alespoň za zmínku a hlavně nám umožňují dokázat následující větu.

Věta 4.3.3 (Zobecnění věty 1.4.9)**.** *Nechť* $\alpha \in \mathbb{R}_{>-1}, \beta \in \mathbb{R}_0^+, \gamma \in \mathbb{R}$ *splňují* $(\beta - \gamma) \in \mathbb{Z}$*. Pak platí*

$$\sum_{i=0}^{\infty} \binom{\alpha}{i} \binom{\beta}{\gamma - i} = \binom{\alpha+\beta}{\gamma}.$$

Důkaz. Kombinací věty 4.3.2, rovnice 4.11 a části 5 věty 4.3.1 dostáváme

$$\binom{\alpha+\beta}{\gamma} = \int_{-\infty}^{\infty} \binom{\alpha}{x} \binom{\beta}{\gamma - x} \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \binom{\alpha}{x} \binom{\beta}{\beta - \gamma + x} \, dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{i=0}^{\infty} \binom{\alpha}{i} \operatorname{sinc}(x-i) \right] \left[\sum_{i=0}^{\infty} \binom{\beta}{i} \operatorname{sinc}(\beta - \gamma + x - i) \right] dx. \tag{4.31}$$

Vzhledem k tomu, že oba nekonečné součty konvergují absolutně (věta 4.3.2), můžeme je díky Mertensově větě 3.1.15 rozepsat jako jejich Cauchyův součin (definice 3.1.14). Platí tedy

$$\left[\sum_{i=0}^{\infty} \binom{\alpha}{i} \operatorname{sinc}(x-i) \right] \left[\sum_{i=0}^{\infty} \binom{\beta}{i} \operatorname{sinc}(\beta-\gamma+x-i) \right] = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{i} \binom{\alpha}{j} \binom{\beta}{i-j} \operatorname{sinc}(x-j) \operatorname{sinc}(\beta-\gamma+x-i+j). \tag{4.32}$$

Jednoduchým doplněním na čtverec můžeme pro libovolná $a, b \in \mathbb{R}$ dokázat nerovnost $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$, takže platí

$$|\operatorname{sinc}(x-j) \operatorname{sinc}(\beta - \gamma + x - i + j)| \leq \frac{|\operatorname{sinc}(x-j)|^2 + |\operatorname{sinc}(\beta - \gamma + x - i + j)|^2}{2}.$$

Díky důsledkům 3.1.10, 3.1.9 a větě 3.1.24 máme

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\operatorname{sinc}(x-j) \operatorname{sinc}(\beta - \gamma + x - i + j)| \, dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\operatorname{sinc}(x-j)|^2 + |\operatorname{sinc}(\beta - \gamma + x - i + j)|^2}{2} \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |\operatorname{sinc}(x-j)|^2 \, dx + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |\operatorname{sinc}(\gamma - x - i + j)|^2 \, dx = 1.$$

Opět z důsledku 3.1.10 proto dostáváme

$$\sum_{i=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{j=0}^{i} \binom{\alpha}{j} \operatorname{sinc}(x-j) \binom{\beta}{i-j} \operatorname{sinc}(\beta - \gamma + x - i + j) \right| dx \leq \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{i} \binom{\alpha}{j} \binom{\beta}{i-j}, \tag{4.33}$$

což se z absoulutní konvergence řady $\sum_{i=0}^{\infty} \binom{\beta}{i}$ ve větě 4.1.6, Mertensově větě 3.1.15 a součtu kombinačních čísel ve větě 4.1.3 rovná

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} \binom{\alpha}{i} \right) \left(\sum_{i=0}^{\infty} \binom{\beta}{i} \right) = 2^{\alpha+\beta}.$$

Také z důsledku 3.1.10 je řada integrálů na levé straně nerovnice (4.33) zřejmě nezáporná, takže tedy musí konvergovat. Nyní proto můžeme aplikovat důsledek Lebesguovy věty ve větě 3.1.16 na spojení rovnic (4.31) a (4.32), z čehož máme

$$\binom{\alpha+\beta}{\gamma} = \sum_{i=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=0}^{i} \binom{\alpha}{j} \binom{\beta}{i-j} \operatorname{sinc}(x-j) \operatorname{sinc}(\beta - \gamma + x - i + j) \, dx$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{i} \binom{\alpha}{j} \binom{\beta}{i-j} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}(x-j) \operatorname{sinc}(\beta - \gamma + x - i + j) \, dx. \tag{4.34}$$

Pro každou dvojici $i, j \in \mathbb{N}_0$ splňující $i \geq j$ a definujme funkci $f_{i,j}$ splňující pro všechna $x \in \mathbb{R}$

$$f_{i,j}(x) = \operatorname{sinc}(x-j) \operatorname{sinc}(\beta - \gamma + x - i + j). \tag{4.35}$$

Předpokládejme, že $x \neq j \neq -\beta + \gamma + i - j \neq x$. Pak máme z definice 3.1.23 a lehce ověřitelného rozkladu na parciální zlomky

$$
\begin{aligned}
f_{i,j}(x) &= \frac{\sin[\pi(x-j)]\sin[\pi(\beta-\gamma+x-i+j)]}{\pi^2(x-j)(\gamma-x-i+j)} \\
&= \frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\sin[\pi(x-j)]\sin[\pi(\beta-\gamma+x-i+j)]}{(\beta-\gamma-i+2j)(x-j)} - \frac{\sin[\pi(x-j)]\sin[\pi(\beta-\gamma+x-i+j)]}{(\beta-\gamma-i+2j)(\beta-\gamma+x-i+j)}\right) \\
&= \frac{1}{\pi^2(\beta-\gamma-i+2j)}\left(\frac{\sin[\pi(x-j)]\sin[\pi(\beta-\gamma+x-i+j)]}{(x-j)} + \frac{\sin[\pi(x-j)]\sin[\pi(\beta-\gamma+x-i+j)]}{(\beta-\gamma+x-i+j)}\right).
\end{aligned}
\tag{4.36}
$$

Dále pro každou dvojici čísel $i, j \in \mathbb{N}_0$ splňující $i \geq j$ a $b - \gamma - i + 2j \neq 0$ definujme funkci $g_{i,j}$ splňující pro všechna $x \in \mathbb{R} \setminus \{j\}$

$$
g_{i,j}(x) = \frac{\sin[\pi(x-j)]\sin[\pi(\beta-\gamma+x-i+j)]}{(x-j)}
$$

a funkci $h_{i,j}$ splňující pro všechna $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\beta + \gamma + i - j\}$

$$
h_{i,j}(x) = \frac{\sin[\pi(x-j)]\sin[\pi(\beta-\gamma+x-i+j)]}{(\beta-\gamma+x-i+j)}.
$$

Snadným dosazením a využitím vztahů $i, j, \gamma \in \mathbb{Z}$ dostaneme, že platí $g_{i,j}(x) = -g_{i,j}(-x + 2j)$, takže $g_{i,j}[x+j] = -g_{i,j}[-x+j]$. Funkce $g_{i,j}$ je tedy v jistém smyslu lichá kolem bodu j. Analogicky můžeme ukázat, že je funkce $h_{i,j}$ ve stejném smyslu lichá kolem bodu $-\beta + \gamma + i - j$. Proto platí

$$
\int_{-\infty}^{j} g_{i,j}(x)\,dx + \int_{j}^{\infty} g_{i,j}(x)\,dx = \int_{-\infty}^{-\beta+\gamma+i-j} h_{i,j}(x)\,dx + \int_{-\beta+\gamma+i-j}^{\infty} h_{i,j}(x)\,dx = 0,
$$

což nám v kombinaci s rovnicí (4.36), která nám říká, že můžeme funkci $f_{i,j}$ rozložit na skalární násobek součtu funkcí $g_{i,j}$ a $h_{i,j}$ na celém $\mathbb{R}$ kromě dvou diskrétních bodů, kde je $f_{i,j}$ řádně definovaná z rovnice (4.35), dává (stále za předpokladu $j \neq -\beta + \gamma + i - j$)

$$
\int_{-\infty}^{\infty} f_{i,j}(x)\,dx = 0. \tag{4.37}
$$

Jinak pokud platí $j = -\beta + \gamma + i - j$, tedy $i = 2j + \beta - \gamma$, dostáváme díky větě 3.1.24

$$
\int_{-\infty}^{\infty} f_{i,j}(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}^2(x-j)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}^2(x)\,dx = 1. \tag{4.38}
$$

Po dosazení rovnic (4.37) a (4.38) do rovnice (4.34) a použitím rovnice (4.11) získáváme

$$
\begin{aligned}
\binom{\alpha+\beta}{\gamma} &= \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{i}\binom{\alpha}{j}\binom{\beta}{i-j}\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{sinc}(x-j)\operatorname{sinc}(\beta-\gamma+x-i+j)\,dx \\
&= \sum_{\substack{i,j\in\mathbb{N}_0, i\geq j \\ i=2j+\beta-\gamma}}\binom{\alpha}{j}\binom{\beta}{i-j} = \sum_{j=0}^{\infty}\binom{\alpha}{j}\binom{\beta}{j+\beta-\gamma} = \sum_{j=0}^{\infty}\binom{\alpha}{j}\binom{\beta}{\gamma-j},
\end{aligned}
$$

jak jsme chtěli dokázat. □

Zvolením $\alpha = \beta$ a opět pomocí vztahu (4.11) dostaneme tento důsledek:

Důsledek 4.3.4 (Zobecnění věty 1.4.7)**.** *Nechť* $\alpha \in \mathbb{R}_{>-\frac{1}{2}}$. *Pak platí*

$$\sum_{i=0}^{\infty} \binom{\alpha}{i}^2 = \binom{2\alpha}{\alpha}.$$

Kapitola 5

Pascalovy vícerozměrné prostory

V této kapitole spojíme oba způsoby, kterými jsme v kapitolách 2 a 4 zobecňovali kombinační čísla, čímž v následující definici 2.5.1 získáme multinomické koeficienty definované na oboru reálných čísel. Ty se sice v některých oblastech matematiky již vyskytují, ale v této práci poprvé detailně prozkoumáme jejich vlastnosti. Definujme nyní libovolné $d \in \mathbb{N}$, které bude po zbytek kapitoly udávat rozměr, tedy počet argumentů ve spodní části, těchto multinomických koeficientů.

Definice 5.0.1 (Zobecnění definic 2.5.1, 4.0.1)**.** Nechť $\alpha, x_1, \ldots, x_d \in \mathbb{R}$ splňují $\alpha = x_1 + \cdots + x_d$ a $i \in \{1, \ldots, d\}$. Pak definujme *multinomický koeficient* jako

$$\binom{\alpha}{x_1, \ldots, x_d} = \begin{cases} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\prod_{k=1}^{d} \Gamma(x_k+1)}, & \text{pokud } \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^- \text{ a } (x_k+1) \notin \mathbb{Z}_0^- \text{ pro každé } k \in \{1, \ldots, d\} \\ 0, & \text{pokud } \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^- \text{ a } (x_k+1) \in \mathbb{Z}_0^- \text{ pro jisté } k \in \{1, \ldots, d\} \\ \frac{\alpha^{\underline{\alpha - x_i}}}{\prod_{j \in \{1,\ldots,d\} \setminus \{i\}} x_j!}, & \text{pokud } \alpha \in \mathbb{Z}^- \text{ a } x_k \in \mathbb{N}_0 \text{ pro každé } k \in \{1, \ldots, d\} \setminus \{i\}. \end{cases}$$

Motivace k této definici jednotlivých případů zůstává stejná jako u definice 4.0.1, tj. její první část vznikla čistě nahrazením faktoriálů v definici multinomických koeficientů 2.5.1 funkcí Γ, její druhou část jsme definovali pro spojitost těchto reálných multinomických koeficientů, kterou dokážeme v příští větě 5.0.2, a tu třetí obhájí věta 5.1.1 následující sekce 5.1.

Věta 5.0.2 (Zobecnění věty 4.0.2)**.** *Nechť $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-, x_1, \ldots, x_{d-1} \in \mathbb{R}$ splňují. Pak je multinomický koeficient $\binom{\alpha}{x_1,\ldots,x_{d-1},\alpha-\sum_{i=1}^{d-1} x_i}$ spojitý ve všech proměnných $\alpha, x_1, \ldots, x_{d-1}$.*

Důkaz. Kdyby platilo $(\alpha - \sum_{i=1}^{d-1} x_i) \notin \mathbb{Z}_0^-$ a pro každý index $i \in \{1, \ldots, d-1\}$ by bylo $(x_i+1) \notin \mathbb{Z}_0^-$, byl by daný multinomický koeficient definovaný podle první části definice 5.0.1, takže by byl spojitý díky spojitosti a nenulovosti fukce Γ z vlastností (3.5) a (3.9).

Nyní předpokládejme, že platí $(\alpha - \sum_{i=1}^{d-1} x_i) \in \mathbb{Z}_0^-$. Z definice 5.0.1 tedy platí $\binom{\alpha}{x_1,\ldots,x_{d-1},\alpha-\sum_{i=1}^{d-1} x_i} = 0$. Dále rozdělme $(d-1)$-tici $x_1, \ldots, x_{d-1}$ na $x_{a_1}, \ldots, x_{a_n}$ a $x_{b_1}, \ldots, x_{b_{d-1-n}}$ pro nějaké $n \in \{0, \ldots, d-1\}$ tak, aby platilo $(x_{a_k}+1) \in \mathbb{Z}_0^-$ a $(x_{b_l}+1) \notin \mathbb{Z}_0^-$ pro všechna $k \in \{1, \ldots, n\}, l \in \{1, \ldots, d-1-n\}$. Díky definici 5.0.1 a vlastnosti (3.6) dostáváme

$$\lim_{(\beta,y_1,\ldots,y_{d-1}) \to (\alpha,x_1\ldots,x_{d-1})} \binom{\beta}{y_1, \ldots, y_{d-1}, \beta - \sum_{i=1}^{d-1} y_i}$$

$$= \lim_{(\beta,y_1,\ldots,y_{d-1}) \to (\alpha,x_1\ldots,x_{d-1})} \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta - \sum_{i=1}^{d-1} y_i + 1) \prod_{i=1}^{d-1} \Gamma(y_i+1)}$$

$$= \lim_{(y_{a_1},\dots,y_{a_{d-1}})\to(x_{a_1}\dots,x_{a_{d-1}})} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-\sum_{i=1}^{d-1} y_i+1)\prod_{i=1}^{d-1}\Gamma(y_i+1)}$$
$$= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\prod_{i=1}^{d-1-n}\Gamma(y_{b_i}+1)} \lim_{(y_{a_1},\dots,y_{a_{d-1}})\to(x_{a_1}\dots,x_{a_{d-1}})} \frac{1}{\Gamma(\alpha-\sum_{i=1}^{d-1} y_i+1)\prod_{i=1}^{n}\Gamma(y_{a_i}+1)}$$
$$= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\prod_{i=1}^{d-1-n}\Gamma(y_{b_i}+1)}\cdot 0 = 0 = \binom{\alpha}{x_1,\dots,x_{d-1},\alpha-\sum_{i=1}^{d-1}x_i},$$

což opět dokazuje kýženou spojitost. Případ kdy $(\alpha-\sum_{i=1}^{d-1}x_i)\notin\mathbb{Z}_0^-$ a existuje index $i\in\{1,\dots,d-1\}$, pro který $(x_i+1)\in\mathbb{Z}_0^-$ můžeme vyšetřit stejným způsobem. $\square$

5.1 Multinomické koeficienty několika nezáporných celých a dvou reálných proměnných

Jako ve větě 4.1.1 můžeme v případě, kdy jsou všechny argumenty multinomického koeficientu v jeho spodní části až na jeden nezáporné celé, zapsat tento multinomický koeficient bez užití funkce Γ.

Věta 5.1.1 (Zobecnění věty 4.1.1)**.** *Nechť $x,k_d\in\mathbb{R}, k_1,\dots,k_{d-1}\in\mathbb{N}_0$ splňují $k_1+\dots+k_d=x$. Pak platí*

$$\binom{x}{k_1,\dots,k_{d-1},k_d} = \frac{x^{\underline{x-k_d}}}{\prod_{i=1}^{d-1}k_i!}. \tag{5.1}$$

Důkaz. Případ kdy $x\in\mathbb{Z}^-$ plyne z rovnou z definice 5.0.1.

Kdyby byl daný multinomický koeficient definovaný podle druhé části definice 5.0.1, tedy roven 0, bylo by $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}^-$ a díky předpokladu $k_1,\dots,k_{d-1}\in\mathbb{N}_0$ by muselo platit $(k_d+1)\in\mathbb{Z}_0^-$. Také z něj a podmínky $k_1+\dots+k_d=x$ dostáváme $x-k_d=k_1+\dots+k_{d-1}\in\mathbb{N}_0$, takže a dohromady máme $x\in\mathbb{Z}\Rightarrow x\in\mathbb{N}_0$. Nyní tedy

$$x^{\underline{x-k_d}} = \prod_{j=0}^{x-k_d-1}(x-j) = x(x-1)\dots(k_d+2)(k_d+1) = 0,$$

protože je to součin několika po sobě jdoucích celých čísel, z nichž první je nezáporné a poslední nekladné, tudíž se některý z činitelů rovná nule. V tomto případě jsou proto obě strany rovnice (5.1) nulové.

Nakonec nám zbývá možnost, kdy je multinomický koeficient na levé straně rovnice (5.1) definovaný podle první části definice 5.0.1. Pak z ní a vztahu (3.3) dostáváme

$$\binom{x}{k_1,\dots,k_{d-1},k_d} = \frac{\Gamma(x+1)}{\prod_{i=1}^{d}\Gamma(k_i+1)} = \frac{\Gamma[x+1-(x-k_d)]x(x-1)\dots[x-(x-k_d)+1]}{\Gamma(k_d+1)\prod_{i=1}^{d-1}k_i!}$$
$$= \frac{\Gamma(k_d+1)x^{\underline{x-k_d}}}{\Gamma(k_d+1)\prod_{i=1}^{d-1}k_i!} = \frac{x^{\underline{x-k_d}}}{\prod_{i=1}^{d-1}k_i!}.$$

$\square$

Díky předešlé větě pak můžeme rozšířit dvě věty sekce 4.1.

Věta 5.1.2 (Zobecnění multinomické věty 2.15 a věty 4.1.2)**.** *Nechť* $\alpha, x_1, \dots, x_d \in \mathbb{R}$ *splňují* $|x_d + \dots + x_{d-i+1}| > |x_{d-i}| > 0$ *pro každý index* $i \in \{1, \dots, d-1\}$. *Pak platí*

$$(x_1 + \dots + x_d)^\alpha = \sum_{k_1=0}^{\infty} \dots \sum_{k_{d-1}=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k_1, \dots, k_{d-1}, \alpha - \sum_{i=1}^{d-1} k_i} x_1^{k_1} \dots x_{d-1}^{k_{d-1}} x_d^{\alpha - \sum_{i=1}^{d-1} k_i} \tag{5.2}$$

Důkaz. Indukcí dokažme, že pro všechna $n \in \{1, \dots d-1\}$ platí

$$(x_1 + \dots + x_d)^\alpha = \sum_{k_1=0}^{\infty} \dots \sum_{k_n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k_1, \dots, k_n, \alpha - \sum_{i=1}^{n} k_i} x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n} (x_{n+1} + \dots + x_d)^{\alpha - \sum_{i=1}^{n} k_i}. \tag{5.3}$$

Bázový krok $n = 1$ dostáváme použitím věty 4.1.2 a díky předpokladu $|x_2 + \dots + x_d| > |x_1| > 0$:

$$(x_1 + \dots + x_d)^\alpha = [x_1 + (x_2 + \dots + x_d)]^\alpha$$

$$= \sum_{k_1=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k_1} x_1^{k_1} (x_2 + \dots + x_d)^{\alpha - k_1} = \sum_{k_1=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k_1, \alpha - k_1} x_1^{k_1} (x_2 + \dots + x_d)^{\alpha - k_1}$$

Nyní předpokládejme platnost rovnice (5.3) pro všechna $n \in \{1, \dots m\}$ (kde $m \in \mathbb{N}_{<d-1}$) a dokažme ji pro $n = m+1$. Opět z věty 4.1.2 a předpokladu $|x_{m+1} + \dots + x_d| > |x_m| > 0$ máme

$$\begin{aligned}
(x_1 + \dots + x_d)^\alpha &= \sum_{k_1=0}^{\infty} \dots \sum_{k_m=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k_1, \dots, k_m, \alpha - \sum_{i=1}^{m} k_i} x_1^{k_1} \dots x_m^{k_m} (x_{m+1} + \dots + x_d)^{\alpha - \sum_{i=1}^{m} k_i} \\
&= \sum_{k_1=0}^{\infty} \dots \sum_{k_m=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k_1, \dots, k_m, \alpha - \sum_{i=1}^{m} k_i} x_1^{k_1} \dots x_m^{k_m} [x_{m+1} + (x_{m+1} + \dots + x_d)]^{\alpha - \sum_{i=1}^{m} k_i} \\
&= \sum_{k_1=0}^{\infty} \dots \sum_{k_m=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k_1, \dots, k_m, \alpha - \sum_{i=1}^{m} k_i} x_1^{k_1} \dots x_m^{k_m} \sum_{k_{m+1}}^{\infty} \binom{\alpha - \sum_{i=1}^{m} k_i}{k_{m+1}} x_{m+1}^{k_{m+1}} (x_{m+1} \dots + x_d)^{\alpha - \sum_{i=1}^{m+1} k_i} \\
&= \sum_{k_1=0}^{\infty} \dots \sum_{k_{m+1}=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k_1, \dots, k_m, \alpha - \sum_{i=1}^{m} k_i} \binom{\alpha - \sum_{i=1}^{m} k_i}{k_{m+1}} x_1^{k_1} \dots x_m^{k_m} x_{m+1}^{k_{m+1}} (x_{m+1} \dots + x_d)^{\alpha - \sum_{i=1}^{m+1} k_i}.
\end{aligned} \tag{5.4}$$

V rovnici (5.10) větě 5.2.2 dokážeme, že

$$\binom{\alpha}{k_1, \dots, k_m, \alpha - \sum_{i=1}^{m} k_i} \binom{\alpha - \sum_{i=1}^{m} k_i}{k_{m+1}} = \binom{\alpha}{k_1, \dots, k_{m+1}, \alpha - \sum_{i=1}^{m+1} k_i},$$

což po dosazení zpět do rovnice (5.4) ukončí důkaz indukcí. Zejména případ, kdy $n = d-1$ v rovnici (5.3), dokazuje větu 5.2. □

Věta 5.1.3 (Zobecnění vět 2.7.2, 4.1.3)**.** *Nechť* $\alpha \in \mathbb{R}_{>-1}$. *Pak platí*

$$\sum_{k_1=0}^{\infty} \dots \sum_{k_{d-1}=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k_1, \dots, k_{d-1}, \alpha - \sum_{i=1}^{d-1} k_i} = d^\alpha.$$

Důkaz. Uvažme d-tici čísel $x_1 = \cdots = x_d = 1$. Jelikož pro každý index $i \in 1, \ldots, d-2$ platí $|x_d + \cdots + x_{d-i+1}| > |x_{d-i}| > 0$, můžeme podobně jako v důkazu předešlé věty 5.2 indukcí dokázat, že pro každé $n \in \{1, \ldots, d-2\}$ platí

$$d^\alpha = (x_1 + \cdots + x_d)^\alpha$$

$$= \sum_{k_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k_1, \ldots, k_n, \alpha - \sum_{i=1}^{n} k_i} x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n} (x_{n+1} + \cdots + x_d)^{\alpha - \sum_{i=1}^{n} k_i}$$

$$= \sum_{k_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k_1, \ldots, k_n, \alpha - \sum_{i=1}^{n} k_i} (d-n)^{\alpha - \sum_{i=1}^{n} k_i}.$$

Z případu $n = d-2$ a následně aplikováním věty 4.1.3 díky předpokladu $\alpha > -1$ máme

$$d^\alpha = \sum_{k_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_{d-2}=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k_1, \ldots, k_{d-2}, \alpha - \sum_{i=1}^{d-2} k_i} 2^{\alpha - \sum_{i=1}^{d-2} k_i}$$

$$= \sum_{k_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_{d-2}=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k_1, \ldots, k_{d-2}, \alpha - \sum_{i=1}^{d-2} k_i} \sum_{k_d=0}^{\infty} \binom{\alpha - \sum_{i=1}^{d-2} k_i}{k_{d-1}}$$

$$= \sum_{k_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_{d-1}=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k_1, \ldots, k_{d-2}, \alpha - \sum_{i=1}^{d-2} k_i} \binom{\alpha - \sum_{i=1}^{d-2} k_i}{k_{d-1}}. \tag{5.5}$$

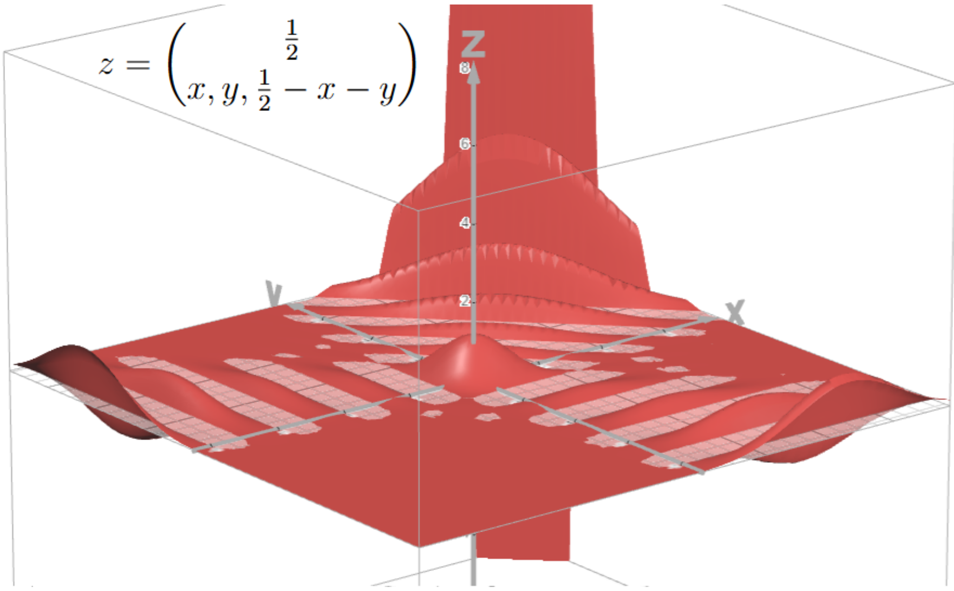
Opět díky rovnici (5.10) ve větě 5.2.2 bude platit

$$\binom{\alpha}{k_1, \ldots, k_{d-2}, \alpha - \sum_{i=1}^{d-2} k_i} \binom{\alpha - \sum_{i=1}^{d-2} k_i}{k_{d-1}} = \binom{\alpha}{k_1, \ldots, k_{d-1}, \alpha - \sum_{i=1}^{d-1} k_i},$$

a to spolu s rovnicí (5.5) dokáže větu 5.1.3. □

5.2 Multinomické koeficienty reálných proměnných

V této sekci probereme multinomické koeficienty $\binom{\alpha}{x_1, \ldots, x_d}$ (pro $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-, x_1, \ldots, x_d \in \mathbb{R}$ splňující $\alpha = x_1 + \ldots, x_d$) definované podle první a druhé části definice 5.0.1. Použijeme-li terminologii z kapitoly 2, budeme se zabývat zejména jednotlivými vrstvami těchto multinomických koeficientů, tedy zafixujeme proměnnou α a budeme zkoumat jak se chovají v proměnných $x_1, \ldots, x_d$. Bohužel neexistje nějaký přehledný způsob, kterým bychom zde mohli zobrazit jednotlivé vrstvy multinomických koeficientů, pokud $d > 3$. Proto uvádíme graf jedné z jejich vrstev pro případ $d = 3$, který dále nebudeme podrobněji zkoumat.



Obrázek 5.1: Graf multinomických koeficientů $\binom{\frac{1}{2}}{x,y,\frac{1}{2}-x-y}$

Díky definici 3.2.1 funkce Γ opět můžeme vyjádřit multinomické koeficienty z první a drhué části definice 5.0.1 jako nekonečný součin.

Věta 5.2.1 (Zobecnění věty 4.2.2)**.** *Nechť $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-, x_1, \ldots, x_d \in \mathbb{R}$ splňují $\alpha = x_1 + \cdots + x_d$. Pak platí*

$$\binom{\alpha}{x_1, \ldots, x_d} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\prod_{i=1}^{d}(k + x_i)}{k^{d-1}(k + \alpha)}.$$

Důkaz. Podobně jako u důkazu věty 4.2.2 využijeme definici 3.2.1. Kdyby platilo $(x_1+1), \ldots, (x_d+1) \notin \mathbb{Z}_0^-$, měli bychom díky ní, definicím 5.0.1, 3.1.8 a větě 3.1.2

$$\binom{\alpha}{x_1, \ldots, x_d} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\prod_{i=1}^{d}\Gamma(x_i+1)} = \frac{\lim_{n_0\to\infty} n_0^{\alpha} \prod_{k=1}^{n_0}\left(1+\frac{\alpha}{k}\right)^{-1}}{\prod_{i=1}^{d}\lim_{n_i\to\infty} n_i^{x_i}\prod_{k=1}^{n_i}\left(1+\frac{x_i}{k}\right)^{-1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\alpha}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k+\alpha}{k}\right)^{-1}}{\prod_{i=1}^{d} n^{x_i}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k+x_i}{k}\right)^{-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^{\alpha}\prod_{i=1}^{d}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k+x_i}{k}\right)}{n^{\sum_{i=1}^{d} x_i}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k+\alpha}{k}\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{\prod_{i=1}^{d}\left(\frac{k+x_i}{k}\right)}{\left(\frac{k+\alpha}{k}\right)} = \prod_{k=1}^{\infty}\frac{\prod_{i=1}^{d}(k+x_i)}{k^{d-1}(k+\alpha)}.$$

Jinak v případě, že existuje index $i \in \{1, \ldots, d\}$, pro který $(x_i + 1) \in \mathbb{Z}_0^-$, musí existovat $l \in \mathbb{N}$ splňující $(l + x_i + 1) = 0$, takže pak pravá strana rovnice (5.2.1) musí být 0. Z definice 5.0.1 je ale multinomický koeficient na její levé straně také roven nule. $\square$

Toto vyjádření nám umožní lehce dokázat následující základní vlastnosti multinomických koeficientů.

Věta 5.2.2 (Zobecnění věty 2.5.4, 4.2.3)**.** *Nechť $\alpha \in \mathbb{R}, x_1, \ldots, x_d \in \mathbb{R}$ splňují $\alpha = x_1 + \cdots + x_d$ a ať je σ libovolná permutace na množině $\{1, \ldots, d\}$. Pokud $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$, platí:*

(i)

$$\underbrace{\binom{\alpha}{\alpha, 0, \ldots, 0}}_{d \text{ čísel}} = \binom{\alpha}{0, \alpha, \ldots, 0} = \cdots = \binom{\alpha}{0, 0, \ldots, \alpha} = 1 \tag{5.6}$$

(ii)

$$\binom{\alpha}{x_1, x_2 \ldots, x_d} = \binom{\alpha}{\sigma(x_1), \sigma(x_2) \ldots, \sigma(x_d)} \tag{5.7}$$

Pokud $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_0^-$, platí

(iii)

$$\binom{\alpha}{x_1, x_2 \ldots, x_d} = \sum_{i=1}^{d} \binom{\alpha - 1}{x_1 - \delta_{1,i}, \ldots, x_d - \delta_{d,i}}, \tag{5.8}$$

(iv)

$$x_1 \binom{\alpha}{x_1, x_2 \ldots, x_d} = \alpha \binom{\alpha - 1}{x_1 - 1, x_2, \ldots, x_d}. \tag{5.9}$$

(v) Pokud $\alpha, \alpha - x_1 \notin \mathbb{Z}_0^-$ nebo $x_1, \ldots, x_{d-1} \in \mathbb{N}_0$, platí

$$\binom{\alpha}{x_1, x_2, \ldots, x_d} = \binom{\alpha}{x_1} \binom{\alpha - x_1}{x_2, \ldots, x_d}. \tag{5.10}$$

Důkaz. Jelikož $\alpha > -1$, rovnici (5.6) dostáváme z definice 5.0.1 a vlastnosti (3.2)

$$\binom{\alpha}{\alpha, \ldots, 0} = \binom{\alpha}{0, \alpha, \ldots, 0} = \cdots = \binom{\alpha}{0, \ldots, \alpha} = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1)[\Gamma(0 + 1)]^{d-1}} = 1.$$

Vztah (5.7) plyne čistě z toho, že jsou všechny tři části definice multinomického koeficientu 5.0.1 nezávislé na pořadí proměnných $x_1, \ldots, x_d$.

Nyní dokažme rovnici (5.8) za předpokladu $\alpha > 0$. Všimněme si, že kdyby pro nějaký index $i \in \{1, \ldots, d\}$ platilo $(x_i + 1) \in \mathbb{Z}_0^-$, byla by její levá strana rovna nule stejně jako všechny sčítance na její pravé straně z definice 5.0.1. Předpokládejme tedy, že žádný takový index neexistuje. Ze zmíněné definice, předpokladu $0 < \alpha = x_1 + \cdots + x_d$ a díky vlastnosti Γ funkce (3.3) dostáváme

$$\binom{\alpha}{x_1, x_2 \ldots, x_d} = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\prod_{k=1}^{d} \Gamma(x_k + 1)} = \frac{\alpha \Gamma(\alpha)}{\prod_{k=1}^{d} \Gamma(x_k + 1)} = \frac{(x_1 + \cdots + x_d)\Gamma(\alpha)}{\prod_{k=1}^{d} \Gamma(x_k + 1)}$$
$$= \sum_{i=1}^{d} \frac{x_i \Gamma(\alpha)}{\prod_{k=1}^{d} \Gamma(x_k + 1)}.$$

Stačí nám tedy dokázat, že pro libovolný index $j \in \{1, \ldots, d\}$ platí

$$\frac{x_j \Gamma(\alpha)}{\prod_{k=1}^{d} \Gamma(x_k + 1)} = \binom{\alpha - 1}{x_1 - \delta_{1,j}, \ldots, x_d - \delta_{d,j}}.$$

Kdyby bylo $x_j = 0$, rovnali by se obě strany pomocí definice 5.0.1 nule a pokud by bylo $x_j \neq 0$, měli bychom díky tomu, že pro žádný index $i \in \{1, \dots, d\}$ neplatí $(x_i + 1) \notin \mathbb{Z}_0^-$, vztahu (3.3) a definici 5.0.1

$$\frac{x_j \Gamma(\alpha)}{\prod_{k=1}^{d} \Gamma(x_k + 1)} = \frac{\Gamma(\alpha)}{\prod_{k=1}^{d} \Gamma(x_k - \delta_{k,j} + 1)} = \binom{\alpha - 1}{x_1 - \delta_{1,j}, \dots, x_d - \delta_{d,j}}.$$

Rovnice (5.9) plyne z vět 5.2.1, důsledku 3.1.11 a předpokladu $\alpha \neq 0$:

$$\frac{x_1}{\alpha} \binom{\alpha}{x_1, x_2 \dots, x_d} = \frac{x_1}{\alpha} \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(k + x_1)}{(k + \alpha)} \frac{\prod_{i=2}^{d} (k + x_i)}{k^{d-1}} \right)$$

$$= \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(k + x_1 - 1)}{(k + \alpha - 1)} \frac{\prod_{i=2}^{d} (k + x_i)}{k^{d-1}} \right) = \binom{\alpha - 1}{x_1 - 1, x_2, \dots, x_d}.$$

Nakonec zbývá dokázat rovnici (5.10). Předpokládejme, že $\alpha - x_1 \notin \mathbb{Z}_0^-$. Pak jsou všechny tři multinomické koeficienty v rovnici (5.10) definované podle první nebo druhé části definice 4.0.1. Kdyby existoval index $i \in \{1, \dots, d\}$, pro který by platilo $x_i \in \mathbb{Z}_0^-$, byly by obě strany rovnice (5.10) rovny nule díky druhé části definice 5.0.1. V opačném případě takový index neexistuje, a proto z první části definice 5.0.1 máme

$$\binom{\alpha}{x_1, x_2, \dots, x_d} = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\prod_{k=1}^{d} \Gamma(x_k + 1)} = \frac{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\alpha - x + 1)}{\Gamma(\alpha - x + 1) \prod_{k=1}^{d} \Gamma(x_k + 1)}$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(x + 1)\Gamma(\alpha - x + 1)} \frac{\Gamma(\alpha - x + 1)}{\prod_{k=2}^{d} \Gamma(x_k + 1)} = \binom{\alpha}{x_1} \binom{\alpha - x_1}{x_2, \dots, x_d}.$$

Kdyby platilo $x_1, \dots, x_{d-1} \in \mathbb{N}_0$, budou všechny tři zmíněné multinomické koeficienty definované podle třetí části definice 5.0.1. Pak dostáváme díky větě 4.1.1

$$\binom{\alpha}{x_1, x_2, \dots, x_d} = \frac{\alpha^{\underline{\alpha - x_d}}}{\prod_{j=1}^{d-1} x_j!} = \frac{\prod_{l=0}^{\alpha - x_d - 1} (\alpha - l)}{x_1! \prod_{j=2}^{d-1} x_j!} = \frac{\left[\prod_{l_1=0}^{\alpha - x_1 - 1} (\alpha - l_1) \right] \left[\prod_{l_2 = x_1}^{\alpha - x_d - 1} (\alpha - l_2) \right]}{x_1! \prod_{j=2}^{d-1} x_j!}$$

$$= \frac{\alpha^{\underline{x_1}}}{x_1!} \frac{(\alpha - x_1)^{\underline{\alpha - x_d}}}{\prod_{j=2}^{d-1} x_j!} = \binom{\alpha}{x_1} \binom{\alpha - x_1}{x_2, \dots, x_d}.$$

□

Poznámka 7. Díky rovnici (5.7) bychom mohli jako v poznámce 2 lehce zobecnit například rovnici (5.9), jelikož z ní plyne, že u multinomických koeficientů definovaných podle první nebo druhé části definice 5.0.1 nezáleží na pořadí argumentů v jejich spodní části (stejné tvrzení platí i pro multinomické koeficienty definované podle její třetí části, ale těmi se už nezabýváme). Takováto zřejmá rozšíření opět nebudeme uvažovat.

Také můžeme snadno najít všechny kořeny multinomických koeficientů.

Věta 5.2.3 (Zobecnění věty 4.2.1)**.** *Nechť $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-, x_1, \dots, x_d \in \mathbb{R}$ splňují $\alpha = x_1 + \dots + x_d$. Pak platí*

$$\binom{\alpha}{x_1, \dots, x_d} = 0$$

právě když existuje index $i \in \{1, \dots, d\}$, pro který $(x_i + 1) \in \mathbb{Z}_0^-$.

Důkaz. Pokud takový index existuje, pak z definice 5.0.1 platí $\binom{\alpha}{x_1,\dots,x_d} = 0$. Kdyby neexistoval, byl by daný multinomický koeficient definovaný kvůli $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$ podle první části definice 5.0.1, tedy vzhledem k vlastnosti (3.9) jako kombinace součinu a podílu nenulových reálných čísel. Nemohl by se proto rovnat nule, což dokazuje i druhý směr implikace. $\square$

Dále budeme multinomické koeficienty zkoumat jako funkce jednoho argumentu v jejich spodní části. To nám usnadní redukovaná kombinační čísla.

Definice 5.2.4. Nechť $\alpha, x \in \mathbb{R}$. Pak definujme *redukované kombinační číslo* jako

$$\left\langle {\alpha \atop x} \right\rangle = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(x+1)\Gamma(\alpha-x+1)}, & \text{pokud } (x+1) \notin \mathbb{Z}_0^- \text{ a } (\alpha - x + 1) \notin \mathbb{Z}_0^- \\ 0, & \text{pokud } (x+1) \in \mathbb{Z}_0^- \text{ nebo } (\alpha - x + 1) \in \mathbb{Z}_0^-. \end{cases}$$

Poznámka 8. Z definic 4.0.1 a 5.2.4 dostáváme pro $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-, x \in \mathbb{R}$

$$\binom{\alpha}{x} = \Gamma(\alpha+1) \left\langle {\alpha \atop x} \right\rangle.$$

Smysl toho, proč jsme tato redukovaná kombinační čísla definovali spočívá v příští větě.

Věta 5.2.5. *Nechť $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-, x_2, \dots, x_{d-1} \in \mathbb{R}$. Pak existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x_1 \in \mathbb{R}$ platí*

$$\binom{\alpha}{x_1, x_2, \dots, x_{d-1}, \alpha - \sum_{i=1}^{d-1} x_i} = c \left\langle {\alpha - \sum_{i=2}^{d-1} x_i \atop x_1} \right\rangle. \tag{5.11}$$

Zejména pokud $x_2, \dots, x_{d-1} \notin \mathbb{Z}^-$, platí

$$\binom{\alpha}{x_1, x_2, \dots, x_{d-1}, \alpha - \sum_{i=1}^{d-1} x_i} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\prod_{i=2}^{d-1} \Gamma(x_i+1)} \left\langle {\alpha - \sum_{i=2}^{d-1} x_i \atop x_1} \right\rangle.$$

Důkaz. Kdyby libovolné číslo z $x_2, \dots, x_{d-1}$ náleželo $\mathbb{Z}^-$, mohli bychom zvollit $c = 0$, jelikož by podle definice 5.0.1 platilo $\binom{\alpha}{x_1, x_2, \dots, x_{d-1}, \alpha - \sum_{i=1}^{d-1} x_i} = 0$.

Nyní dokažme, že v opačném případě vyhovuje

$$c = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\prod_{i=2}^{d-1} \Gamma(x_i+1)}.$$

Pro $x_1 \in \mathbb{Z}^-$ nebo $\alpha - \sum_{i=1}^{d-1} x_i \in \mathbb{Z}^-$ by se z definic 5.0.1 a 5.2.4 rovnaly obě strany rovnice (5.11) nule. Jinak dostáváme ze stejných definic

$$\binom{\alpha}{x_1, x_2, \dots, x_{d-1}, \alpha - \sum_{i=1}^{d-1} x_i} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha - \sum_{i=1}^{d-1} x_i + 1) \prod_{i=1}^{d-1} \Gamma(x_i+1)}$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\prod_{i=2}^{d-1} \Gamma(x_i+1)} \frac{1}{\Gamma(\alpha - \sum_{i=2}^{d-1} x_i - x_1 + 1)\Gamma(x_1+1)} = c \left\langle {\alpha - \sum_{i=2}^{d-1} x_i \atop x_1} \right\rangle.$$

$\square$

Věta 5.2.5 nám tedy říká, že pokud se na multinomické koeficienty budeme dívat jako na funkci jedné proměnné v jejich spodní části, dostaneme pouze nějaký násobek redukovaného kombinačního čísla. Díky jeho podobnosti s běžnými kombinačními čísly (viz poznámka 8) dostáváme následují vlastnosti redukovaných kombinačních čísel a tedy pomocí věty 5.2.5 i multinomických koeficientů.

Věta 5.2.6 (Navazující na věty 4.11, 4.2.1, 4.2.4, 4.2.9)**.** *Nechť* $\alpha, x \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}_{\leq -1}, \delta \in \mathbb{R}_{>-1}$. *Pak platí:*

(i)

$$\left\langle \begin{matrix} \alpha \\ x \end{matrix} \right\rangle = \left\langle \begin{matrix} \alpha \\ \alpha - x \end{matrix} \right\rangle \tag{5.12}$$

(ii)

$$\left\langle \begin{matrix} \alpha \\ x \end{matrix} \right\rangle = 0 \Leftrightarrow (x+1) \in \mathbb{Z}_0^- \vee (\alpha - x + 1) \in \mathbb{Z}_0^- \tag{5.13}$$

(iii) Pokud $x \neq 0$, *platí*

$$\left\langle \begin{matrix} \alpha \\ x \end{matrix} \right\rangle = \left(-1 + \frac{\alpha+1}{x} \right) \left\langle \begin{matrix} \alpha \\ x-1 \end{matrix} \right\rangle. \tag{5.14}$$

(iv)

$$\lim_{y \to \infty} \left\langle \begin{matrix} \delta \\ y \end{matrix} \right\rangle = \lim_{y \to -\infty} \left\langle \begin{matrix} \delta \\ y \end{matrix} \right\rangle = 0, \tag{5.15}$$

limity

$$\lim_{y \to \infty} \left\langle \begin{matrix} \beta \\ y \end{matrix} \right\rangle, \lim_{y \to -\infty} \left\langle \begin{matrix} \beta \\ y \end{matrix} \right\rangle \tag{5.16}$$

neexistují a funkce $\left\langle \begin{smallmatrix} \beta \\ y \end{smallmatrix} \right\rangle$ *proměnné* y *není ohraničená pokud* $\beta < -1$.

Důkaz. Jelikož platí $\alpha - (\alpha - x) + 1 = x + 1$, musí být obě redukovaná kombinační čísla v rovnici (5.12) definovaná podle stejné části definice 5.2.4. Kdyby byla definovaná podle její první části, máme

$$\left\langle \begin{matrix} \alpha \\ x \end{matrix} \right\rangle = \frac{1}{\Gamma(x+1)\Gamma(\alpha-x+1)} = \frac{1}{\Gamma[\alpha-(\alpha-x)+1]\Gamma(\alpha-x+1)} = \left\langle \begin{matrix} \alpha \\ \alpha - x \end{matrix} \right\rangle$$

a v opačném případě se obě strany rovnice (5.12) rovnají nule, což ukončuje její důkaz.

Ekvivalence (5.13) můžeme dokázat anlogicky jako větu 4.2.1 s jedinou změnou, že použijeme definici 5.2.4 místo 4.0.1.

Dále dokažme rovnici (5.14). Kdyby platilo $x = \alpha + 1$, byla by její levá strana rovna nule stejně jako redukované kombinační číslo na její pravé straně z definice 5.2.4. Nyní tedy předpokládejme, že $x \neq \alpha + 1$, z čehož vyplývá $(\alpha - x + 1) \in \mathbb{Z}_0^- \Leftrightarrow [\alpha - (x-1) + 1] \in \mathbb{Z}_0^-$. Z předpokladu $x \neq 0$ máme také $(x+1) \in \mathbb{Z}_0^- \Leftrightarrow [(x-1)+1] \in \mathbb{Z}_0^-$. Tyto dvě ekvivalence nám dohromady dávají, že jsou redukovaná kombinační čísla na obou stranách rovnice (5.14) definovaná podle stejné části definice 5.2.4. Rovnice (5.14) zřejmě platí, kdyby obě byla podle její druhé části 0. Jinak máme z definice 5.2.4 a vlastnosti 3.3

$$\left\langle \begin{matrix} \alpha \\ x \end{matrix} \right\rangle = \frac{1}{\Gamma(x+1)\Gamma(\alpha-x+1)} = \frac{\alpha-x+1}{(x+1)\Gamma(x)\Gamma(\alpha-x+2)} = \left(-1 + \frac{\alpha+1}{x} \right) \left\langle \begin{matrix} \alpha \\ x-1 \end{matrix} \right\rangle.$$

Rovnici (5.15) a neexistenci limit (5.16) pro $\beta \notin \mathbb{Z}^-$ dostáváme čistě z poznámky 8, vlastnosti (3.10) a vět 4.2.8, 4.2.9. Analogicky k důkazu věty 4.2.9 (prostým nahrazení kombinačních čísel těmi redukovanými) můžeme díky rovnicím (5.12), (5.13) a (5.14) dokázat, že pro $\beta \in \mathbb{Z}_{<-1}$

limity na řádku (5.16) neexistují a funkce $\left\langle {\beta \atop y} \right\rangle$ proměnné y neohraničená, a že pro $\beta = -1$ nám pro neexistenci limit na řádku (5.16) stačí dokázat

$$\lim_{j\to\infty} \prod_{k=c+2}^{j} \left(1 - \frac{\beta+1}{k}\right) > 0.$$

To ale jasně platí, protože po dosazení $\beta = -1$ dostáváme nerovnici $1 > 0$. □

Nebylo by těžké dokázat pro redukovaná kombinační čísla, takže z věty 5.2.5 i pro multinomické koeficienty, další analogie vlastností kombinačních čísel ze sekce 4.2, ale uvádíme zde jen ty, které využijeme v příštích větách.

Nyní jednoduše získáváme následující větu a její důsledek.

Věta 5.2.7 (Zobecnění věty 4.2.9)**.** *Nechť $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}^-, x_2, \ldots, x_{d-1} \in \mathbb{R}$. Pokud dále $\alpha - \sum_{k=2}^{d-1} x_k > -1$, pak platí*

$$\lim_{x_1\to\infty} \binom{\alpha}{x_1, x_2, \ldots, x_{d-1}, \alpha - \sum_{i=2}^{d-1} x_i - x_1} = \lim_{x_1\to-\infty} \binom{\alpha}{x_1, x_2, \ldots, x_{d-1}, \alpha - \sum_{i=2}^{d-1} x_i - x_1} = 0.$$

Jinak obě dané limity divergují a funkce $\binom{\alpha}{x_1, x_2, \ldots, x_{d-1}, \alpha - \sum_{k=2}^{d-1} - x_1}$ proměnné x_1 není ohraničená.

Důkaz. Tato věta plyne čistě z věty 5.2.5 a části 4 věty 5.2.6. □

Důsledek 5.2.8. *Nechť $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$. Pokud $d \geq 3$, pak nadcházející integrál nekonverguje.*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \binom{\alpha}{x_1, \ldots, x_{d-1}, \alpha - \sum_{i=0}^{d-1} x_i} dx_1\, dx_2 \ldots dx_{d-1}$$

Kvůli důsledku 5.2.8 tedy nemůžeme zobecnit integrál kombinačního čísla v části 2 věty 4.3.1. Podobně bychom nemohli zobecnit zbytek nekonečných integrálů v této větě. Neohraničenost multinomického koeficientu ve větě 5.2.7 nám také nedovoluje plně rozšířit větu 4.2.8 o supremu kombinačního čísla proměnné v jeho spodní části na $\mathbb{R}$. Platí alespoň věta 5.2.10, s jejímž důkazem nám pomůže následující lemma.

Lemma 5.2.9. *Nechť $\alpha \in \mathbb{R}_{>-1}, x_1, \ldots, x_d \in (-1, \alpha+1], c \in \mathbb{R}^+$ splňují $\alpha = x_1 + \cdots + x_d$, $x_1 < x_2$ a $x_1 - c > -1$. Pak platí*

$$\binom{\alpha}{x_1, x_2, \ldots, x_d} > \binom{\alpha}{x_1 - c, x_2 + c, \ldots, x_d}. \tag{5.17}$$

Důkaz. Z věty 4.2.7 platí

$$\frac{1}{\Gamma(x_1+1)\Gamma(x_2+1)} < \frac{1}{\Gamma(x_1-c+1)\Gamma(x_2+c+1)}.$$

Pokud tuto nerovnici vynásobíme výrazem $\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\prod_{i=3}^{d}\Gamma(x_i+1)}$, který je kvůli daným předpokladům a vztahu (3.10) kladný, dostaneme pomocí definice multinomických koeficientů 5.0.1 právě nerovnici (5.17). □

Věta 5.2.10 (Zobecnění věty 4.2.8)**.** *Nechť* $\alpha \in \mathbb{R}_{>-1}, x_1, \ldots, x_d \in [-1, \alpha + 1]$ *splňují* $\alpha = x_1 + \cdots + x_d$. *Pak platí*

$$\binom{\alpha}{x_1, \ldots, x_d} = \sup_{\substack{y_1,\ldots,y_d \in [-1,\alpha+1] \\ y_1+\cdots+y_d=\alpha}} \binom{\alpha}{y_1, \ldots, y_d} \Leftrightarrow x_1, \ldots, x_d = \frac{\alpha}{d}, \tag{5.18}$$

$$\inf_{\substack{y_1,\ldots,y_d \in [-1,\alpha+1] \\ y_1+\cdots+y_d=\alpha}} \binom{\alpha}{y_1, \ldots, y_d} = 0. \tag{5.19}$$

Důkaz. Z definice 5.0.1 je multinomický koeficient $\binom{\alpha}{x_1,\ldots,x_d}$ definovaný buď jako 0 nebo jako kombinace součinu a podílu kladných čísel kvůli předpokladu $x_1, \ldots, x_d \in [-1, \alpha+1]$ a vlastnosti (3.10), tudíž $\binom{\alpha}{x_1,\ldots,x_d} \geq 0$. Rovnost zde může nastat například pokud $x_1 = \alpha + 1, x_2 = -1, x_3 = \cdots = x_d = 0$, což tedy dokazuje rovnici (5.19).

Nyní dokažme ekvivalenci 5.18. Pomocí předpokladu $\alpha = x_1 + \cdots + x_d$ nahraďme $x_d = \alpha - \sum_{i=1}^{d-1} x_i$. Jelikož je multinomický koeficient $\binom{\alpha}{y_1,\ldots,y_{d-1},\alpha-\sum_{i=1}^{d-1} y_i}$ proměnných $y_1, \ldots, y_{d-1}$ z věty 5.0.2 spojitý na uzavřené množině $[-1, \alpha + 1]^d$, musí na ní kvůli zobecněné Weierstrassově větě 3.1.18 nabývat nějakého svého maxima M. To je zjevně kladné, jelikož z rovnice (5.6) platí $M \geq \binom{\alpha}{\alpha,0,\ldots,0} = 1$.

Dokažme nyní, že zmíněné maximum M nastává pouze v případě, když $x_1, \ldots, x_d = \frac{\alpha}{d}$. Pro spor předpokládejme, že $M = \binom{\alpha}{y_1,\ldots,y_d}$ pro nějaká $y_1, \ldots, y_d \in [-1, \alpha+1]$ se součtem α, která se všechna navzájem nerovnají. Aby toto mohlo platit, musíme mít $y_1, \ldots, y_d \in (-1, \alpha+1]$, protože by jinak existoval index $l \in \{1, \ldots, d\}$ splňující $y_l = -1$ a z definice multinomických koeficientů 5.0.1 by platilo $M = \binom{\alpha}{y_1,\ldots,y_d} = 0$. Kvůli podmínce $\sum_{k=1}^{d} y_k = \alpha$ musí zřejmě existovat dva indexy $i, j \in \{1, \ldots\}$, pro něž máme $y_i < \frac{\alpha}{d}$ a $y_j > \frac{\alpha}{d}$. Vzhledem k rovnici (5.7) můžeme předpokládat, že platí $i = 1$ a $j = 2$. Pak určitě existuje $c \in \mathbb{R}^+$ splňující $y_1 + c < y_2 - c$, a proto z lemmatu 5.2.9 platí

$$M = \binom{\alpha}{y_1, y_2, \ldots, y_d} < \binom{\alpha}{y_1 + c, y_2 - c, \ldots, y_d},$$

čímž dostáváme chtěný spor. □

Ve větě 5.2.11 nabízíme horní odhad na suprema multinomických koeficientů ve větě 5.2.10, tedy na multinomický koeficient „uprostřed jejich vrstev."

Věta 5.2.11. *Nechť* $\alpha \in \mathbb{R}_{>-1}$. *Pak platí*

$$\sup_{D \in \mathbb{N}} \binom{\alpha}{\underbrace{\frac{\alpha}{D}, \ldots, \frac{\alpha}{D}}_{D\text{-krát}}} = \Gamma(\alpha + 1)e^{\gamma\alpha}, \tag{5.20}$$

kde $\gamma = -\psi(1) = -\Gamma'(1) \approx 0{,}5772$ *je Eulerova–Mascheroniho konstanta.*

Důkaz. Z předpokladu $\alpha \in \mathbb{R}_{>-1}$ je daný multinomický koeficient pro libovolné $d \in \mathbb{N}$ definovaný podle první části definice 5.0.1 jako $\frac{\Gamma(\alpha+1)}{[\Gamma(\frac{\alpha}{D}+1)]^D}$. Definujme tedy funkci f splňující $f(x) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{[\Gamma(\frac{\alpha}{x}+1)]^x}$ pro všechna $x \in [1, \infty)$ a nejprve dokažme, že je na něm neklesající. Úpravami a nakonec využitím vztahu (3.7) dostáváme

$$f'(x) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{[\Gamma(\frac{\alpha}{x} + 1)]^x} = \Gamma(\alpha + 1) \frac{\partial}{\partial x} \left[\Gamma\left(\frac{\alpha}{x} + 1\right)\right]^{-x} = \Gamma(\alpha + 1) \frac{\partial}{\partial x} e^{-x \ln[\Gamma(\frac{\alpha}{x}+1)]}$$

$$= \Gamma(\alpha+1)e^{-x\ln[\Gamma(\frac{\alpha}{x}+1)]}\frac{\partial}{\partial x}\Big\{-x\ln\Big[\Gamma\Big(\frac{\alpha}{x}+1\Big)\Big]\Big\} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{[\Gamma(\frac{\alpha}{x}+1)]^x}\Big\{-x\frac{\partial}{\partial x}\ln\Big[\Gamma\Big(\frac{\alpha}{x}+1\Big)\Big]-\ln\Big[\Gamma\Big(\frac{\alpha}{x}+1\Big)\Big]\Big\}$$

$$= f(x)\left\{-\frac{x\frac{\partial}{\partial x}\Gamma\Big(\frac{\alpha}{x}+1\Big)}{\Big[\Gamma\Big(\frac{\alpha}{x}+1\Big)\Big]}-\ln\Big[\Gamma\Big(\frac{\alpha}{x}+1\Big)\Big]\right\} = f(x)\left\{\frac{x\Gamma\Big(\frac{\alpha}{x}+1\Big)\psi\Big(\frac{\alpha}{x}+1\Big)\frac{\alpha}{x^2}}{\Big[\Gamma\Big(\frac{\alpha}{x}+1\Big)\Big]}-\ln\Big[\Gamma\Big(\frac{\alpha}{x}+1\Big)\Big]\right\}$$

$$= f(x)\Big\{\frac{\alpha}{x}\psi\Big(\frac{\alpha}{x}+1\Big)-\ln\Big[\Gamma\Big(\frac{\alpha}{x}+1\Big)\Big]\Big\}. \tag{5.21}$$

Funkce Γ je na intervalu $[1,\infty)$ kladná, takže je na něm zjevně i f kladná. Aby na $[1,\infty)$ platilo i $f'(x)>0$, musí být složená závorka v rovnici (5.21) nezáporná. Uvažme tedy substituci $y := \frac{\alpha}{x}$, pro kterou z $\alpha>-1, x\geq 1$ máme $y\in(-1,\infty)$, a definujme funkci $g(y)\equiv\ln[\Gamma(y+1)]$. Díky vztahu (3.7) chceme nyní pro všechna y dokázat, že

$$\frac{\alpha}{x}\psi\Big(\frac{\alpha}{x}+1\Big)-\ln\Big[\Gamma\Big(\frac{\alpha}{x}+1\Big)\Big] = yg'(y)-g(y)\geq 0. \tag{5.22}$$

Máme ale

$$\frac{d}{dy}[yg'(y)-g(y)] = yg''(y)+g'(y)-g'(y) = yg''(y)$$

a z vlastnosti 3 funkce Γ víme, že je funkce g pro všechna y konvexní, takže $g''(y)>0$. Potom tedy $yg'(y)-g(y)$ klesá na $(-1,0]$ a roste na $[0,\infty]$. Nakonec si všimněme, že platí $0\cdot g'(0)-g(0) = 0-\ln(1)=0$, z čehož dostáváme nerovnici (5.22), a proto platí $f'(x)\geq 0$ pro všechna $x\in[1,\infty)$.

Dokázali jsme tedy, že pro všechna $D\in\mathbb{N}$ máme $f(D)\leq f(D+1)$. Z Heineho věty 3.1.7 nám pro důkaz rovnice (5.20) stačí už jen ukázat, že

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \Gamma(\alpha+1)e^{\gamma\alpha}. \tag{5.23}$$

Úpravou a následné využitím věty 3.1.4 díky spojitosti exponenciální funkce dostáváme

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{[\Gamma(\frac{\alpha}{x}+1)]^x} = \Gamma(\alpha+1)\lim_{x\to\infty} e^{-x\ln[\Gamma(\frac{\alpha}{x}+1)]} = \Gamma(\alpha+1)e^{\lim_{x\to\infty}-x\ln[\Gamma(\frac{\alpha}{x}+1)]}$$

Na danou limitu můžeme lehce aplikovat L'Hospitálovo pravidlo z věty 3.1.6:

$$\lim_{x\to\infty} -x\ln\Big[\Gamma\Big(\frac{\alpha}{x}+1\Big)\Big] = \lim_{x\to\infty}\frac{-\ln[\Gamma(\frac{\alpha}{x}+1)]}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\psi(\frac{\alpha}{x}+1)\frac{\alpha}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = -\psi(1)\alpha = \gamma\alpha.$$

Zpětné dosazení dokazuje rovnici (5.23).

5.3 Integrace multinomickcýh koeficientů

Jak už jsme řekli v předchozí sekci, kvůli důsledku 5.2.8 nemůžeme uvažovat nekonečné integrály multinomických koeficientů, které by zobecnily integrály kombinačních čísel ze článku [14] ve větě 4.3.1. V této sekci na ně alespoň navážeme v asymptotickém smyslu.

Nejprve v lemmatu 5.3.8 ukážeme, že pro $d\in\mathbb{R}_{\geq 1}, \alpha\to\infty$ platí

$$\int_0^\alpha \binom{\alpha}{x} d^{-x}\,dx \sim \left(\frac{d+1}{d}\right)^\alpha$$

pomocí série vztahů

$$\left(\frac{d+1}{d}\right)^{\alpha} \sim \sum_{i=0}^{\infty} \binom{\alpha}{i} d^{-i} \sim \sum_{i=0}^{\lfloor \alpha \rfloor} \binom{\alpha}{i} d^{-i} \sim \int_0^{\lfloor \alpha \rfloor + 1} \binom{\alpha}{x} d^{-x}\, dx \sim \int_0^{\alpha} \binom{\alpha}{x} d^{-x}\, dx. \tag{5.24}$$

Lemma 5.3.1. *Nechť $d \in \mathbb{R}_{\geq 1}, \alpha \to \infty$. Pak platí*

$$\left(\frac{d+1}{d}\right)^{\alpha} \sim \sum_{i=0}^{\lfloor \alpha \rfloor} \binom{\alpha}{i} d^{-i}.$$

Důkaz. Z věty 4.1.2 a v případě $d = 1$ z věty 4.1.3 máme pomocí předpokladu $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$

$$\left(\frac{d+1}{d}\right)^{\alpha} = \left(1 + d^{-1}\right)^{\alpha} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{\alpha}{i} d^{-i}.$$

Aplikací věty 3.1.19 o Cauchyově tvaru zbytku Taylorova polynomu stejným způsobem, jako v důkazu věty 4.1.2, se tato řada rovná

$$\sum_{i=0}^{\lfloor \alpha \rfloor} \binom{\alpha}{i} d^{-i} + \frac{\alpha^{\underline{\lfloor \alpha+1 \rfloor}} \left(c_{\lfloor \alpha \rfloor} + 1\right)^{\alpha - \lfloor \alpha \rfloor - 1} \left(\frac{1}{d} - c_{\lfloor \alpha \rfloor}\right)^{\lfloor \alpha \rfloor} \frac{1}{d}}{\lfloor \alpha \rfloor !} = \left(\frac{d+1}{d}\right)^{\alpha}, \tag{5.25}$$

kde $c_{\lfloor \alpha \rfloor} \in \left(0, \frac{1}{d}\right)$. Snadno můžeme pro $\alpha > 0$ díky omezení na $c_{\lfloor \alpha \rfloor}$, $\alpha - \lfloor \alpha \rfloor - 1 < 1$ a definici padajícího faktoriálu 3.1.22 dokázat

$$\left| \frac{\alpha^{\underline{\lfloor \alpha+1 \rfloor}} \left(c_{\lfloor \alpha \rfloor} + 1\right)^{\alpha - \lfloor \alpha \rfloor - 1} \left(\frac{1}{d} - c_{\lfloor \alpha \rfloor}\right)^{\lfloor \alpha \rfloor} \frac{1}{d}}{\lfloor \alpha \rfloor !} \right| < \left| \frac{\lceil \alpha \rceil^{\underline{\lfloor \alpha \rfloor + 1}} (1)^{\alpha - \lfloor \alpha \rfloor - 1} \left(\frac{1}{d}\right)^{\lfloor \alpha \rfloor + 1}}{\lfloor \alpha \rfloor !} \right|$$

$$< \left| \frac{\lceil \alpha \rceil^{\underline{\lfloor \alpha \rfloor}} (\alpha - \lfloor \alpha \rfloor)}{\lfloor \alpha \rfloor !} \right| < \left| \frac{\lceil \alpha \rceil \lfloor \alpha \rfloor^{\underline{\lfloor \alpha \rfloor}}}{\lfloor \alpha \rfloor !} \right| = \left| \lceil \alpha \rceil \right| = \lceil \alpha \rceil < \alpha + 1.$$

Z věty 3.1.3 proto platí

$$0 \leq \lim_{\alpha \to \infty} \left| \frac{\frac{\alpha^{\underline{\lfloor \alpha+1 \rfloor}} \left(c_{\lfloor \alpha \rfloor} + 1\right)^{\alpha - \lfloor \alpha \rfloor - 1} \left(\frac{1}{d} - c_{\lfloor \alpha \rfloor}\right)^{\lfloor \alpha \rfloor} \frac{1}{d}}{\lfloor \alpha \rfloor !}}{\left(\frac{d+1}{d}\right)^{\alpha}} \right| \leq \lim_{\alpha \to \infty} \frac{\alpha + 1}{\left(\frac{d+1}{d}\right)^{\alpha}} = 0,$$

takže zjevně máme

$$\lim_{\alpha \to \infty} \frac{\frac{\alpha^{\underline{\lfloor \alpha+1 \rfloor}} \left(c_{\lfloor \alpha \rfloor} + 1\right)^{\alpha - \lfloor \alpha \rfloor - 1} \left(\frac{1}{d} - c_{\lfloor \alpha \rfloor}\right)^{\lfloor \alpha \rfloor} \frac{1}{d}}{\lfloor \alpha \rfloor !}}{\left(\frac{d+1}{d}\right)^{\alpha}} = 0.$$

Díky větě 3.1.29 použité na rovnici 5.25 pak dostáváme

$$\left(\frac{d+1}{d}\right)^{\alpha} \sim \sum_{i=0}^{\lfloor \alpha \rfloor} \binom{\alpha}{i} d^{-i},$$

jak jsme chtěli dokázat. □

Dále bude užitečné definovat následující funkci.

Definice 5.3.2. Nechť $d \in \mathbb{R}_{\geq 1}, \alpha \in \mathbb{R}^+$. Pak definujme funkci $f_{d,\alpha}$ splňující $f_{d,\alpha}(x) = \binom{\alpha}{x} d^{-x}$ pro všechna $x \in [0, \lfloor \alpha \rfloor + 1]$.

Lemma 5.3.3. *Nechť $d \in \mathbb{R}_{\geq 1}, \alpha \in \mathbb{R}^+$. Pak je funkce $f_{d,\alpha}$ kladná na svém definičním oboru a klesající na intervalu $[\alpha, \lfloor \alpha \rfloor + 1]$.*

Důkaz. Funkce $f_{d,\alpha}$ je součinem kombinačního čísla $\binom{\alpha}{x}$, které je na jejím definičním oboru kladné z věty 4.2.6, a funkce d^{-x}, která je na něm také kladná, takže musí být i ona samotná kladná na celém intervalu $[0, \lfloor \alpha \rfloor + 1]$. Zároveň je kombinační číslo $\binom{\alpha}{x}$ v proměnné x opět kvůli větě 4.2.6 klesající na intervalu $[\alpha, \lfloor \alpha \rfloor + 1]$ a d^{-x} je na něm nerostoucí, tudíž na něm $f_{d,\alpha}$ klesá. □

Při důkazu další asymptotické rovnosti na řádku (5.24) budeme potřebovat příští dvě lemmata.

Lemma 5.3.4. *Nechť $d \in \mathbb{R}_{\geq 1}, \alpha \to \infty$. Pak platí*

$$\max_{x \in [0, \lfloor \alpha \rfloor + 1]} f_{d,\alpha}(x) \ll \left(\frac{d+1}{d} \right)^{\alpha}. \tag{5.26}$$

Důkaz. Jelikož jsou kombinační čísla v předpisu funkce $f_{d,\alpha}$ definovaná pro $x \in [0, \alpha]$ podle první části definice 4.0.1, můžeme použít vlastnost funkce Γ (3.11), ze které pro nějaká konstantní $a, b \in \mathbb{R}^+$ dostáváme

$$f_{d,\alpha}(x) = \binom{\alpha}{x} d^{-x} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(x+1)\Gamma(\alpha-x+1)} d^{-x} < \frac{b\left(\frac{\alpha+\frac{1}{2}}{e}\right)^{\alpha+\frac{1}{2}}}{a\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{e}\right)^{x+\frac{1}{2}} a\left(\frac{\alpha-x+\frac{1}{2}}{e}\right)^{\alpha-x+\frac{1}{2}}} d^{-x}$$

$$= \frac{b\sqrt{e}}{a^2} \frac{\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)^{\alpha+\frac{1}{2}}}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^{x+\frac{1}{2}}\left(\alpha-x+\frac{1}{2}\right)^{\alpha-x+\frac{1}{2}} d^x}.$$

Kvůli tomu, že $f_{d,\alpha}$ klesá na intervalu $[\alpha, \lfloor \alpha \rfloor + 1]$ z lemmatu 5.3.3, máme

$$\max_{x \in [0, \lfloor \alpha \rfloor + 1]} f_{d,\alpha}(x) < \frac{b\sqrt{e}}{a^2} \max_{x \in [0, \alpha]} \frac{\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)^{\alpha+\frac{1}{2}}}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^{x+\frac{1}{2}}\left(\alpha-x+\frac{1}{2}\right)^{\alpha-x+\frac{1}{2}} d^x}. \tag{5.27}$$

Definujme nyní funkci h splňující pro všechna $x \in [0, \alpha]$

$$h(x) = \left(x+\frac{1}{2}\right)^{x+\frac{1}{2}} \left(\alpha-x+\frac{1}{2}\right)^{\alpha-x+\frac{1}{2}} d^x.$$

Funkce h je zřejmě spojitá na svém definičním oboru a její první derivace podle x je

$$\frac{\partial}{\partial x} h(x) = \frac{\partial}{\partial x} \left(x+\frac{1}{2}\right)^{x+\frac{1}{2}} \left(\alpha-x+\frac{1}{2}\right)^{\alpha-x+\frac{1}{2}} d^x = \frac{\partial}{\partial x} e^{\left(x+\frac{1}{2}\right)\ln\left(x+\frac{1}{2}\right)+\left(\alpha-x+\frac{1}{2}\right)\ln\left(\alpha-x+\frac{1}{2}\right)+x\ln(d)}$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(x+\frac{1}{2}\right)\ln\left(x+\frac{1}{2}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha-x+\frac{1}{2}\right)\ln\left(\alpha-x+\frac{1}{2}\right) + \frac{\partial}{\partial x} x\ln(d)\right] e^{\left(x+\frac{1}{2}\right)\ln\left(x+\frac{1}{2}\right)+\left(\alpha-x+\frac{1}{2}\right)\ln\left(\alpha-x+\frac{1}{2}\right)+x\ln(d)}$$

$$= \left[\ln\left(x+\frac{1}{2}\right)+1-\ln\left(\alpha-x+\frac{1}{2}\right)-1+\ln(d)\right]e^{\left(x+\frac{1}{2}\right)\ln\left(x+\frac{1}{2}\right)+\left(\alpha-x+\frac{1}{2}\right)\ln\left(\alpha-x+\frac{1}{2}\right)+x\ln(d)}$$

$$= \ln\left(\frac{dx+\frac{d}{2}}{\alpha-x+\frac{1}{2}}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)^{x+\frac{1}{2}}\left(\alpha-x+\frac{1}{2}\right)^{\alpha-x+\frac{1}{2}}d^x. \tag{5.28}$$

Aby byla tato derivace nulová, musí kvůli $x \in [0,\alpha]$ platit $\ln\left(\frac{dx+\frac{d}{2}}{\alpha-x+\frac{1}{2}}\right) = 0$, tedy $dx + \frac{d}{x} = \alpha - x + \frac{1}{2}$, což nastane pouze pokud $x = \frac{\alpha+1}{d+1} - \frac{1}{2}$. Pro dostatečně velká α máme $\frac{\alpha+1}{d+1} - \frac{1}{2} \in [0,\alpha]$. Zdlouhavou derivací výrazu (5.28) podle x bychom po dosazení zjistili, že druhá derivace funkce h v $x = \frac{\alpha+1}{d+1} - \frac{1}{2}$ je kladná, takže v něm má lokální minimum. Jelikož je h na svém definičním oboru kladná, musí proto pro dostatečně velká α z těchto poznatků platit

$$\frac{bc\sqrt{e}}{a^2}\max_{x\in[0,\alpha]}\frac{\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)^{\alpha+\frac{1}{2}}}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^{x+\frac{1}{2}}\left(\alpha-x+\frac{1}{2}\right)^{\alpha-x+\frac{1}{2}}d^x}$$

$$\leq \frac{b\sqrt{e}}{a^2}\frac{\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)^{\alpha+\frac{1}{2}}}{\left(\frac{\alpha+1}{d+1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^{\frac{\alpha+1}{d+1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}\left(\alpha-\frac{\alpha+1}{d+1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^{\alpha-\frac{\alpha+1}{d+1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}d^{\frac{\alpha+1}{d+1}-\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{b\sqrt{e}}{a^2}\frac{\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)^{\alpha+\frac{1}{2}}}{\left(\frac{\alpha+1}{d+1}\right)^{\frac{\alpha+1}{d+1}}\left[\frac{d(\alpha+1)}{d+1}\right]^{\frac{d(\alpha+1)}{d+1}}d^{\frac{\alpha+1}{d+1}-\frac{1}{2}}}.$$

Pro důkaz vztahu (5.26) pak díky nerovnici (5.27) a nezápornosti funkce $f_{d,\alpha}$ na svém definičním oboru z lemmatu 5.3.3 stačí dokázat limitu

$$\lim_{\alpha\to\infty}\frac{\frac{b\sqrt{e}}{a^2}\frac{\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)^{\alpha+\frac{1}{2}}}{\left(\frac{\alpha+1}{d+1}\right)^{\frac{\alpha+1}{d+1}}\left[\frac{d(\alpha+1)}{d+1}\right]^{\frac{d(\alpha+1)}{d+1}}d^{\frac{\alpha+1}{d+1}-\frac{1}{2}}}}{\left(\frac{d+1}{d}\right)^{\alpha}} = 0. \tag{5.29}$$

Úpravami a následně pomocí věty 3.1.4 a spojitosti exponenciální funkce dostáváme

$$\lim_{\alpha\to\infty}\frac{\frac{b\sqrt{e}}{a^2}\frac{\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)^{\alpha+\frac{1}{2}}}{\left(\frac{\alpha+1}{d+1}\right)^{\frac{\alpha+1}{d+1}}\left[\frac{d(\alpha+1)}{d+1}\right]^{\frac{d(\alpha+1)}{d+1}}d^{\frac{\alpha+1}{d+1}-\frac{1}{2}}}}{\left(\frac{d+1}{d}\right)^{\alpha}} = \frac{b\sqrt{e}}{a^2}\lim_{\alpha\to\infty}\frac{\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)^{\alpha+\frac{1}{2}}d^{\alpha}}{\left(\frac{\alpha+1}{d+1}\right)^{\frac{\alpha+1}{d+1}}\left[\frac{d(\alpha+1)}{d+1}\right]^{\frac{d(\alpha+1)}{d+1}}d^{\frac{\alpha+1}{d+1}-\frac{1}{2}}(d+1)^{\alpha}}$$

$$= \frac{b\sqrt{e}}{a^2}\lim_{\alpha\to\infty}\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)^{\alpha+\frac{1}{2}}d^{\alpha-\frac{d(\alpha+1)}{d+1}-\frac{\alpha+1}{d+1}-\frac{1}{2}}(d+1)^{\frac{\alpha+1}{d+1}+\frac{d(\alpha+1)}{d+1}-\alpha}(\alpha+1)^{-\frac{\alpha+1}{d+1}-\frac{d(\alpha+1)}{d+1}}$$

$$= \frac{b\sqrt{e}(d+1)}{a^2d^{\frac{3}{2}}}\lim_{\alpha\to\infty}\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)^{\alpha+\frac{1}{2}}\alpha^{-\alpha-1} = \frac{b\sqrt{e}(d+1)}{a^2d^{\frac{3}{2}}}e^{\lim_{\alpha\to\infty}\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\ln\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)-(\alpha+1)\ln(\alpha)}. \tag{5.30}$$

Díky L'Hospitalově větě 3.1.6 máme

$$\lim_{\alpha\to\infty}\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\ln\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)-\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\ln(\alpha)=\lim_{\alpha\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{\alpha+\frac{1}{2}}{\alpha}\right)}{\frac{1}{\alpha+\frac{1}{2}}}=\lim_{\alpha\to\infty}\frac{\frac{d}{d\alpha}\ln\left(\frac{\alpha+\frac{1}{2}}{\alpha}\right)}{\frac{d}{d\alpha}\frac{1}{\alpha+\frac{1}{2}}}$$

$$=\lim_{\alpha\to\infty}\frac{\frac{\alpha}{\alpha+\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{2\alpha^2}\right)}{-\frac{1}{\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)^2}}=\lim_{\alpha\to\infty}\frac{\alpha+\frac{1}{2}}{2\alpha}=\frac{1}{2},$$

takže z věty 3.1.5 o aritmetice limit funkcí platí

$$\lim_{\alpha\to\infty}\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\ln\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)-(\alpha+1)\ln(\alpha)$$

$$=\lim_{\alpha\to\infty}\left[\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\ln\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)-\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\ln(\alpha)\right]+\lim_{\alpha\to\infty}\left[-\frac{1}{2}\ln(\alpha)\right]=\frac{1}{2}-\infty=-\infty.$$

Po dosazení tohoto výsledku do rovnice (5.30) dostáváme rovnici (5.29), což ukončuje důkaz lemmatu 5.3.4. ☐

Lemma 5.3.5. *Nechť $d\in\mathbb{R}_{\geq 1},\alpha\in\mathbb{R}^+$. Pak existuje konstanta c nezávislá na α, d splňující*

$$\left|\int_0^{\lfloor\alpha\rfloor+1} f_{d,\alpha}(x)\,dx-\sum_{i=0}^{\lfloor\alpha\rfloor} f_{d,\alpha}(i)\right|<c\max_{x\in[0,\lfloor\alpha\rfloor+1]} f_{d,\alpha}(x). \tag{5.31}$$

Důkaz. Uvažme díky vztahu (3.7) a definici kombinačních čísel 4.0.1, podle jejíž první části musí být definovaná kombinační čísla v přepisu funkce $f_{d,\alpha}$, derivaci funkce $f_{d,\alpha}$ podle x:

$$\frac{\partial}{\partial x}f_{d,\alpha}(x)=\frac{\partial}{\partial x}\binom{\alpha}{x}d^{-x}=-\ln(d)\binom{\alpha}{x}d^{-x}+\left(\frac{\partial}{\partial x}\binom{\alpha}{x}\right)d^{-x}$$

$$=-\ln(d)\binom{\alpha}{x}d^{-x}+\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(x+1)\Gamma(\alpha-x+1)}\right)d^{-x}$$

$$=-\ln(d)\binom{\alpha}{x}d^{-x}+\frac{\Gamma(\alpha+1)[\psi(x+1)-\psi(\alpha-x+1)]\Gamma(x+1)\Gamma(\alpha-x+1)}{[\Gamma(x+1)\Gamma(\alpha-x+1)]^2}d^{-x}$$

$$=[\psi(x+1)-\psi(\alpha-x+1)-\ln(d)]f_{d,\alpha}(x).$$

Ze vztahu (3.8) musí být funkce $\psi(x+1)-\psi(\alpha-x+1)-\ln(d)$ v proměnné x rostoucí, tudíž z kladnosti funkce $f_{d,\alpha}$ v lemmatu 5.3.3 může být tato derivace nulová maximálně jednou na intervalu $[0,\lfloor\alpha\rfloor+1]$. Funkce $f_{d,\alpha}$ má na tomto intervalu tedy maximálně jeden lokální extrém, o kterém víme, že musí být lokální maximum, jelikož $f_{d,\alpha}$ díky lemmatu 5.3.3 klesá na intervalu $[\alpha,\lfloor\alpha\rfloor+1]$. Existuje tedy $x_0\in[0,\lfloor\alpha\rfloor+1]$ takové, že v něm $f_{d,\alpha}$ nabývá na daném intervalu maximum, je rostoucí na intervalu $[0,x_0]$ a klesající na intervalu $[x_0,\lfloor\alpha\rfloor+1]$.

Pro každé $i\in\{0,\dots,\lfloor\alpha\rfloor\}$ definujme interval

$$I_i:=[i,i+1].$$

Funkce $f_{d,\alpha}$ je na svém definičním oboru spojitá kvůli spojitosti kombinačních čísel ve větě 4.0.2 a spojitosti exponenciální funkce, takže můžeme z Weierstrassovy věty 3.1.17 definovat pro každé $i \in \{0, \ldots, \lfloor\alpha\rfloor\}$ také

$$m_i := \min_{x \in I_i} f_{d,\alpha}(x), M_i := \max_{x \in I_i} f_{d,\alpha}(x).$$

Nakonec zvolme $j \in \{0, \ldots, \lfloor\alpha\rfloor\}$ splňující $x_0 \in I_j$. Všimněme si, že kvůli předpokladům týkajících se monotonie funkce $f_{d,\alpha}$ platí pro každé $i \in \{0, \ldots, \lfloor\alpha\rfloor\}$

$$m_i = \begin{cases} f_{d,\alpha}(i), & \text{pokud } i < j \\ f_{d,\alpha}(i+1), & \text{pokud } i > j \end{cases}, M_i = \begin{cases} f_{d,\alpha}(i+1), & \text{pokud } i < j \\ f_{d,\alpha}(i-1), & \text{pokud } i > j. \end{cases}$$

Máme proto

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\lfloor\alpha\rfloor} M_i - \sum_{i=0}^{\lfloor\alpha\rfloor} m_i &\leq \sum_{i=0}^{j-2}(M_i - m_{i+1}) + \sum_{i=j+1}^{\lfloor\alpha\rfloor-1}(M_{i+1} - m_i) + M_{j-1} + M_j + M_{j+1} \\ &= M_{j-1} + M_j + M_{j+1} < 3M_j = 3f_{d,\alpha}(x_0), \end{aligned} \tag{5.32}$$

kde M_l definujeme jako 0, pokud $l \notin \{0, \ldots, \lfloor\alpha\rfloor\}$. Zároveň také zřejmě platí

$$\sum_{i=0}^{\lfloor\alpha\rfloor} m_i \leq \int_0^{\lfloor\alpha\rfloor+1} f_{d,\alpha}(x)\,dx \leq \sum_{i=0}^{\lfloor\alpha\rfloor} M_i, \sum_{i=0}^{\lfloor\alpha\rfloor} m_i \leq \sum_{i=0}^{\lfloor\alpha\rfloor} f_{d,\alpha}(i) \leq \sum_{i=0}^{\lfloor\alpha\rfloor} M_i,$$

takže z nerovnice (5.32) plyne

$$\left| \int_0^{\lfloor\alpha\rfloor+1} f_{d,\alpha}(x)\,dx - \sum_{i=0}^{\lfloor\alpha\rfloor} f_{d,\alpha}(i) \right| < 3f_{d,\alpha}(x_0).$$

□

Dohromady nám předchozí dvě lemmata jednoduše dávají to nadcházející.

Lemma 5.3.6. *Nechť* $d \in \mathbb{R}_{\geq 1}, \alpha \to \infty$. *Pak platí*

$$\sum_{i=0}^{\lfloor\alpha\rfloor} f_{d,\alpha}(i) \sim \int_0^{\lfloor\alpha\rfloor+1} f_{d,\alpha}(x)\,dx. \tag{5.33}$$

Důkaz. Mějme funkci g takovou, že pro všechna $\beta \in \mathbb{R}^+$ platí

$$\sum_{i=0}^{\lfloor\beta\rfloor} f_{d,\beta}(i) = \int_0^{\lfloor\beta\rfloor+1} f_{d,\beta}(x) + g(\beta). \tag{5.34}$$

Nyní z lemmat 5.3.4, 5.3.5 a věty 3.1.28 dostáváme

$$g(\alpha) \ll \left(\frac{d+1}{d}\right)^\alpha \sim \sum_{i=0}^{\lfloor\alpha\rfloor} f_{d,\alpha}(i) \Rightarrow g(\alpha) \ll \sum_{i=0}^{\lfloor\alpha\rfloor} f_{d,\alpha}(i) = \int_0^{\lfloor\alpha\rfloor+1} f_{d,\alpha}(x) + g(\alpha).$$

Potom spolu věta 3.1.29 a rovnice (5.34) dokáží vztah (5.33). □

Poslední asymptotickou rovnost na řádku (5.24) dokážeme v lemmatu 5.3.7.

Lemma 5.3.7. *Nechť* $d \in \mathbb{R}_{\geq 1}, \alpha \to \infty$. *Pak platí*

$$\int_0^{\lfloor\alpha\rfloor+1} f_{d,\alpha}(x)\,dx \sim \int_0^{\alpha} f_{d,\alpha}(x)\,dx. \tag{5.35}$$

Důkaz. Čistě z pozorování o funkci $f_{d,\alpha}$ v lemmatu 5.3.3 dostáváme

$$\left|\int_0^{\lfloor\alpha\rfloor+1} f_{d,\alpha}(x)\,dx - \int_0^{\alpha} f_{d,\alpha}(x)\,dx\right| = \int_{\alpha}^{\lfloor\alpha\rfloor+1} f_{d,\alpha}(x)\,dx < \lfloor\alpha\rfloor + 1 - \alpha < 1,$$

což zjevně klesá asymptoticky pomaleji než integrál na levé straně řádku (5.35) (v předchozích lemmatech 5.3.1, 5.3.6 víme, že roste jako $(\frac{d+1}{d})^{\alpha}$, tedy exponenciálně). Pak dostáváme vztah (5.35) stejně snadnou úvahou, jako tou v důkazu lemmatu 5.3.6. □

Nakonec dostáváme kýžené lemma 5.3.8.

Lemma 5.3.8. *Nechť* $d \in \mathbb{R}_{\geq 1}, \alpha \to \infty$. *Pak platí*

$$\int_0^{\alpha} \binom{\alpha}{x} d^{-x}\,dx \sim \left(\frac{d+1}{d}\right)^{\alpha}.$$

Důkaz. Plyne z lemmat 5.3.1, 5.3.6, 5.3.7 a definice 5.3.2 funkce $f_{d,\alpha}$. □

Hlavní podstata lemmatu 5.3.8 spočívá v následující definici a lemmatu.

Definice 5.3.9. Definujme funkci σ splňující pro všechna $\alpha \in \mathbb{R}_0^+$

$$\sigma(\alpha) = \int_0^{\alpha} \binom{\alpha}{x} k^{-x}\,dx - \left(\frac{k+1}{k}\right)^{\alpha}.$$

Lemma 5.3.10. *Nechť* $c_1 \in \mathbb{R}^+$. *Pak existuje* $a \in \mathbb{R}^+$, *takové, že pro všechna* $y \in \mathbb{R}_{\geq a}$ *máme*

$$\frac{|\sigma(y)|}{(\frac{k+1}{k})^y} < c_1.$$

Důkaz. Plyne z definice 5.3.9 funkce σ a lemmatu 5.3.8 díky větě 3.1.29. □

K důkazu hlavní věty této sekce už potřebujeme jen lemma 5.3.11.

Lemma 5.3.11. *Nechť* $d \in \mathbb{N}, k \in \{1 \ldots, d-1\}$. *Pak platí*

$$\lim_{\alpha\to\infty}\left|\frac{\int_0^{\alpha}\cdots\int_0^{\alpha-\sum_{i=1}^{d-k-2}x_i} k^{\alpha-\sum_{i=1}^{d-k-1}x_i}\left(\prod_{i=1}^{d-k-1}\binom{\alpha-\sum_{j=1}^{i-1}x_j}{x_i}\right)\sigma\left(\alpha-\sum_{i=1}^{d-k-1}x_i\right)dx_{d-k-1}\ldots dx_1}{\int_0^{\alpha}\cdots\int_0^{\alpha-\sum_{i=1}^{d-k-2}x_i}(k+1)^{\alpha-\sum_{i=1}^{d-k-1}x_i}\left(\prod_{i=1}^{d-k-1}\binom{\alpha-\sum_{j=1}^{i-1}x_j}{x_i}\right)dx_{d-k-1}\ldots dx_1}\right| = 0. \tag{5.36}$$

Důkaz. Oba zde vystupující integrály si můžeme vyložit jako integrály přes všechny $d-k-1$-tice reálných čísel $x_1 \ldots, x_{d-k-1} \in [0, \alpha]$ se součtem menším nebo rovným α. Pro zjednodušení zápisu označme množinu všech těchto $d-k-1$-tic jako M.

Zvolme nyní libovolné $c_1 \in \mathbb{R}^+$. Pro něj z lemmatu 5.3.10 existuje $a \in \mathbb{R}^+$, takové, že pro všechna $y \in \mathbb{R}_{\geq a}$ platí

$$\frac{|\sigma(y)|}{(\frac{k+1}{k})^y} < c_1.$$

Dále zjevně existuje nějaké $c_2 \in \mathbb{R}^+$ splňující pro všechna $y \in \mathbb{R}_{<a}$

$$\frac{|\sigma(y)|}{(\frac{k+1}{k})^y} < c_2.$$

Množinu všech $d-k-1$-tic z M takových, že $\alpha - \sum_{i=1}^{d-k-1} x_i \geq a$ označme jako $M_{\geq a}$ a množinu ostatních $d-k-1$-tic z M zase označme jako $M_{<a}$. Z těchto pozorování, díky nezápornosti kombinačních čísel v následujících výrazech z věty 4.2.6 a opakovaným použitím rovnice (5.10) (zřejmě vždy platí $\alpha, x_1 \ldots, x_{d-1}, \alpha - \sum_{i=1}^{d-1} x_i \in \mathbb{R}_0^+$) máme[1]

$$\left| \int_0^{\alpha} \cdots \int_0^{\alpha - \sum_{i=1}^{d-k-2} x_i} k^{\alpha - \sum_{i=1}^{d-k-1} x_i} \left(\prod_{i=1}^{d-k-1} \binom{\alpha - \sum_{j=1}^{i-1} x_j}{x_i} \right) \sigma\left(\alpha - \sum_{i=1}^{d-k-1} x_i\right) dx_{d-k-1} \ldots dx_1 \right| \tag{5.37}$$

$$= \int_M k^{\alpha - \sum_{i=1}^{d-k-1} x_i} \left(\prod_{i=1}^{d-k-1} \binom{\alpha - \sum_{j=1}^{i-1} x_j}{x_i} \right) \left| \sigma\left(\alpha - \sum_{i=1}^{d-k-1} x_i\right) \right| dx_{d-k-1} \ldots dx_1$$

$$= \int_{M_{\geq a}} k^{\alpha - \sum_{i=1}^{d-k-1} x_i} \left(\prod_{i=1}^{d-k-1} \binom{\alpha - \sum_{j=1}^{i-1} x_j}{x_i} \right) \left| \sigma\left(\alpha - \sum_{i=1}^{d-k-1} x_i\right) \right| dx_{d-k-1} \ldots dx_1$$

$$+ \int_{M_{<a}} k^{\alpha - \sum_{i=1}^{d-k-1} x_i} \left(\prod_{i=1}^{d-k-1} \binom{\alpha - \sum_{j=1}^{i-1} x_j}{x_i} \right) \left| \sigma\left(\alpha - \sum_{i=1}^{d-k-1} x_i\right) \right| dx_{d-k-1} \ldots dx_1$$

$$< \int_{M_{\geq a}} k^{\alpha - \sum_{i=1}^{d-k-1} x_i} \left(\prod_{i=1}^{d-k-1} \binom{\alpha - \sum_{j=1}^{i-1} x_j}{x_i} \right) c_1 \left(\frac{k+1}{k} \right)^{\alpha - \sum_{i=1}^{d-k-1} x_i} dx_{d-k-1} \ldots dx_1$$

$$+ \int_{M_{<a}} k^{\alpha - \sum_{i=1}^{d-k-1} x_i} \left(\prod_{i=1}^{d-k-1} \binom{\alpha - \sum_{j=1}^{i-1} x_j}{x_i} \right) c_2 \left(\frac{k+1}{k} \right)^{\alpha - \sum_{i=1}^{d-k-1} x_i} dx_{d-k-1} \ldots dx_1$$

$$= c_1 \int_{M \geq a} (k+1)^{\alpha - \sum_{i=1}^{d-k-1} x_i} \binom{\alpha}{x_1 \ldots, x_{d-k-1}, \alpha - \sum_{i=1}^{d-k-1} x_i} dx_{d-k-1} \ldots dx_1$$

$$+ c_2 \int_{M<a} (k+1)^{\alpha - \sum_{i=1}^{d-k-1} x_i} \binom{\alpha}{x_1 \ldots, x_{d-k-1}, \alpha - \sum_{i=1}^{d-k-1} x_i} dx_{d-k-1} \ldots dx_1.$$

Zde budeme chtít ukázat, že první z těchto sčítanců roste asymptoticky rychleji než ten druhý.

Pro dostatečně velké α musí platit pro všechny $d-k-1$-tice z $M_{<a}$ opakovaným použitím lemmatu 5.2.9 zkombinovaným se vztahem (5.7)

$$\binom{\alpha}{x_1, \ldots, x_{d-k-1}, \alpha - \sum_{i=1}^{d-k-1} x_i} < \binom{\alpha}{\frac{\alpha-a}{d-k-1}, \ldots, \frac{\alpha-a}{d-k-1}, a},$$

[1]Při integraci přes množinu zde využíváme notaci z Lebesgueova integrálu.

z čehož vyplývá

$$(k+1)^{\alpha-\sum_{i=1}^{d-k-1} x_i} \binom{\alpha}{x_1,\ldots,x_{d-k-1},\alpha-\sum_{i=1}^{d-k-1} x_i} < (k+1)^a \binom{\alpha}{\frac{\alpha-a}{d-k-1},\ldots,\frac{\alpha-a}{d-k-1},a}. \tag{5.38}$$

Stejným způsobem pak můžeme ukázat, že platí také

$$\binom{\alpha}{\frac{\alpha-a}{d-k-1},\ldots,\frac{\alpha-a}{d-k-1},a} \le \binom{\alpha}{y_1,\ldots,y_{d-k-1},\alpha-\sum_{i=1}^{d-k-1} y_i}$$

a potom i

$$(k+1)^a \binom{\alpha}{\frac{\alpha-a}{d-k-1},\ldots,\frac{\alpha-a}{d-k-1},a} \le (k+1)^{\alpha-\sum_{i=1}^{d-k-1} y_i} \binom{\alpha}{y_1,\ldots,y_{d-k-1},\alpha-\sum_{i=1}^{d-k-1} y_i}, \tag{5.39}$$

kde $y_1,\ldots,y_{d-k-1} \in [\frac{\alpha}{d-k}, \frac{\alpha-a}{d-k-1}]$ (uvažujeme dost velká α na to, aby byly koncové body tohoto intervalu ve správném pořadí). Množiny všech těchto $d-k-1$-tic $y_1,\ldots,y_{d-k-1}$ označme N. Snadno můžeme ověřit, že je každá $d-k-1$-tice z N také v $M_{\ge a}$, takže je N podmnožina $M_{\ge a}$. Proto dostáváme z nerovnice (5.38), věty o uspořádání limit 3.1.3 a z nezápornosti multinomických koeficientů v příštích výrazech díky větě 5.2.10

$$0 \le \lim_{\alpha\to\infty} \frac{c_2 \int_{M<a} (k+1)^{\alpha-\sum_{i=1}^{d-k-1} x_i} \binom{\alpha}{x_1\ldots,x_{d-k-1},\alpha-\sum_{i=1}^{d-k-1} x_i} \,dx_{d-k-1}\ldots dx_1}{c_1 \int_{M\ge a} (k+1)^{\alpha-\sum_{i=1}^{d-k-1} x_i} \binom{\alpha}{x_1\ldots,x_{d-k-1},\alpha-\sum_{i=1}^{d-k-1} x_i} \,dx_{d-k-1}\ldots dx_1} \tag{5.40}$$

$$\le \frac{c_2}{c_1} \lim_{\alpha\to\infty} \frac{\int_{M<a} (k+1)^a \binom{\alpha}{\frac{\alpha-a}{d-k-1},\ldots,\frac{\alpha-a}{d-k-1},a} \,dx_{d-k-1}\ldots dx_1}{\int_N (k+1)^{\alpha-\sum_{i=1}^{d-k-1} x_i} \binom{\alpha}{x_1\ldots,x_{d-k-1},\alpha-\sum_{i=1}^{d-k-1} x_i} \,dx_{d-k-1}\ldots dx_1}.$$

Předchozí limita kvůli nerovnici (5.39) nemůže být (opět z věty 3.1.3) zjevně větší než limita

$$\frac{c_2}{c_1} \lim_{\alpha\to\infty} \frac{\int_{M<a} dx_{d-k-1}\ldots dx_1}{\int_N dx_{d-k-1}\ldots dx_1}. \tag{5.41}$$

Z definice $d-k-1$-tic z množiny N víme, že $\int_N dx_{d-k-1}\ldots dx_1 = (\frac{\alpha-a}{d-k-1} - \frac{\alpha}{d-k})^{d-k-1}$, a to je polynom v proměnné α stupně $d-k-1$. Integrál $\int_{M<a} dx_{d-k-1}\ldots dx_1$ můžeme zapsat následovně:

$$\int_{M<a} dx_{d-k-1}\ldots dx_1 = \int_0^\alpha \int_0^{\alpha-x_1} \cdots \int_0^{\alpha-\sum_{i=1}^{d-k-3} x_i} \int_{\alpha-\sum_{i=1}^{d-k-2} x_i - a}^{\alpha-\sum_{i=1}^{d-k-2} x_i} dx_{d-k-1}\ldots dx_1$$

$$= \int_0^\alpha \int_0^{\alpha-x_1} \cdots \int_0^{\alpha-\sum_{i=1}^{d-k-3} x_i} a\,dx_{d-k-2}\ldots dx_1$$

To je ale určitě menší než

$$\int_0^\alpha \cdots \int_0^\alpha a\,dx_{d-k-2}\ldots dx_1 = a\alpha^{d-k-2},$$

což je polynom proměnné α stupně $d-k-2$. Limita (5.41) se proto nutně musí rovnat nule, jelikož je zjevně nezáporná a (zase z věty 3.1.3) menší limita podílu dvou polynomů, z nichž má ten ve jmenovateli menší stupeň než ten v čitateli.

Ohlédněme se na to, co jsme nyní dostali. Limita na řádku (5.40) se tedy nutně musí rovnat nule, a proto díky větě 3.1.29 platí

$$c_1 \int_{M_{\geq a}} (k+1)^{\alpha - \sum_{i=1}^{d-k-1} x_i} \binom{\alpha}{x_1 \ldots, x_{d-k-1}, \alpha - \sum_{i=1}^{d-k-1} x_i} dx_{d-k-1} \ldots dx_1$$
$$+c_2 \int_{M_{<a}} (k+1)^{\alpha - \sum_{i=1}^{d-k-1} x_i} \binom{\alpha}{x_1 \ldots, x_{d-k-1}, \alpha - \sum_{i=1}^{d-k-1} x_i} dx_{d-k-1} \ldots dx_1$$
$$\sim c_1 \int_{M_{\geq a}} (k+1)^{\alpha - \sum_{i=1}^{d-k-1} x_i} \binom{\alpha}{x_1 \ldots, x_{d-k-1}, \alpha - \sum_{i=1}^{d-k-1} x_i} dx_{d-k-1} \ldots dx_1,$$

což potom nemůže v proměnné α růst asymptoticky pomaleji než výraz na řádku (5.37). Z věty (3.1.3), definice množiny $M_{\geq a}$, díky několikrát použité rovnici (5.10) a nezápornosti multinomických koeficientů v příštích výrazech z věty 5.2.10 proto máme

$$\lim_{\alpha\to\infty} \left| \frac{\int_0^\alpha \cdots \int_0^{\alpha - \sum_{i=1}^{d-k-2} x_i} k^{\alpha - \sum_{i=1}^{d-k-1} x_i} \left(\prod_{i=1}^{d-k-1} \binom{\alpha - \sum_{j=1}^{i-1} x_j}{x_i} \right) \sigma\left(\alpha - \sum_{i=1}^{d-k-1} x_i\right) dx_{d-k-1} \ldots dx_1}{\int_0^\alpha \cdots \int_0^{\alpha - \sum_{i=1}^{d-k-2} x_i} (k+1)^{\alpha - \sum_{i=1}^{d-k-1} x_i} \left(\prod_{i=1}^{d-k-1} \binom{\alpha - \sum_{j=1}^{i-1} x_j}{x_i} \right) dx_{d-k-1} \ldots dx_1} \right|$$

$$\leq \lim_{\alpha\to\infty} \left| \frac{c_1 \int_{M_{\geq a}} (k+1)^{\alpha - \sum_{i=1}^{d-k-1} x_i} \binom{\alpha}{x_1 \ldots, x_{d-k-1}, \alpha - \sum_{i=1}^{d-k-1} x_i} dx_{d-k-1} \ldots dx_1}{\int_0^\alpha \cdots \int_0^{\alpha - \sum_{i=1}^{d-k-2} x_i} (k+1)^{\alpha - \sum_{i=1}^{d-k-1} x_i} \binom{\alpha}{x_1 \ldots, x_{d-k-1}, \alpha - \sum_{i=1}^{d-k-1} x_i} dx_{d-k-1} \ldots dx_1} \right|$$

$$\leq \lim_{\alpha\to\infty} \left| \frac{c_1 \int_0^\alpha \cdots \int_0^{\alpha - \sum_{i=1}^{d-k-2} x_i} (k+1)^{\alpha - \sum_{i=1}^{d-k-1} x_i} \binom{\alpha}{x_1 \ldots, x_{d-k-1}, \alpha - \sum_{i=1}^{d-k-1} x_i} dx_{d-k-1} \ldots dx_1}{\int_0^\alpha \cdots \int_0^{\alpha - \sum_{i=1}^{d-k-2} x_i} (k+1)^{\alpha - \sum_{i=1}^{d-k-1} x_i} \binom{\alpha}{x_1 \ldots, x_{d-k-1}, \alpha - \sum_{i=1}^{d-k-1} x_i} dx_{d-k-1} \ldots dx_1} \right| = |c_1| = c_1$$

Číslo c_1 je ale kladné reálné a libovolně malé, takže limita na řádku (5.36) je menší než všechna kladná reálná čísla. Zároveň je ale zjevně nezáporná, takže musí být rovná nule, jak jsme chtěli ukázat.

□

Nyní můžeme v příští větě popsat asymptotické chování integrálu multinomického koeficientu $\binom{\alpha}{x_1, \ldots, x_{d-1}, \alpha - \sum_{i=1}^{d-1} x_i}$ přes všechny $d-1$-tice čísel $x_1, \ldots, x_{d-1}$ z intervalu $[0, \alpha]$ se součtem α.

Věta 5.3.12 (Navazující na větu 4.3.1)**.** *Nechť* $d \in \mathbb{N}, \alpha \to \infty$. *Pak platí*

$$\int_0^\alpha \int_0^{\alpha - x_1} \cdots \int_0^{\alpha - \sum_{i=1}^{d-2} x_i} \binom{\alpha}{x_1, \ldots, x_{d-1}, \alpha - \sum_{i=1}^{d-1} x_i} dx_{d-1} \ldots dx_1 \sim d^\alpha. \tag{5.42}$$

Důkaz. Levou stranu vztahu 5.42 označme jako $I(\alpha)$ a nyní indukcí dokažme, že pro každé $n \in \{1, \ldots, d\}$ platí

$$I(\alpha) \sim \int_0^\alpha \cdots \int_0^{\alpha - \sum_{i=1}^{d-n-1} x_i} n^{\alpha - \sum_{i=1}^{d-n} x_i} \left(\prod_{i=1}^{d-n} \binom{\alpha - \sum_{j=1}^{i-1} x_j}{x_i} \right) dx_{d-n} \ldots dx_1. \tag{5.43}$$

Bázový krok $n = 1$ plyne rovnou z opakovaně použitého vztahu (5.10). Jinak předpokládejme, že vztah 5.43 platí pro $1, \ldots, k$ pro nějaké $k \in \{1, \ldots, d-1\}$ a dokažme jeho platnost pro $k+1$.

Z indukčního předpokladu a zvolením $\alpha - \sum_{i=1}^{d-k-1} x_i$ místo α v definici 5.3.9 tedy dostáváme

$$I(\alpha) \sim \int_0^{\alpha} \cdots \int_0^{\alpha - \sum_{i=1}^{d-k-1} x_i} k^{\alpha - \sum_{i=1}^{d-k} x_i} \left(\prod_{i=1}^{d-k} \binom{\alpha - \sum_{j=1}^{i-1} x_j}{x_i} \right) dx_{d-k} \dots dx_1$$

$$= \int_0^{\alpha} \cdots \int_0^{\alpha - \sum_{i=1}^{d-k-2} x_i} k^{\alpha - \sum_{i=1}^{d-k-1} x_i} \left(\prod_{i=1}^{d-k-1} \binom{\alpha - \sum_{j=1}^{i-1} x_j}{x_i} \right) \left[\sigma\left(\alpha - \sum_{i=1}^{d-k-1} x_i\right) + \left(\frac{k+1}{k}\right)^{\alpha - \sum_{i=1}^{d-k-1} x_i} \right] dx_{d-k-1} \dots dx_1$$

$$= \int_0^{\alpha} \cdots \int_0^{\alpha - \sum_{i=1}^{d-k-2} x_i} k^{\alpha - \sum_{i=1}^{d-k-1} x_i} \left(\prod_{i=1}^{d-k-1} \binom{\alpha - \sum_{j=1}^{i-1} x_j}{x_i} \right) \sigma\left(\alpha - \sum_{i=1}^{d-k-1} x_i\right) dx_{d-k-1} \dots dx_1$$

$$+ \int_0^{\alpha} \cdots \int_0^{\alpha - \sum_{i=1}^{d-k-2} x_i} (k+1)^{\alpha - \sum_{i=1}^{d-k-1} x_i} \left(\prod_{i=1}^{d-k-1} \binom{\alpha - \sum_{j=1}^{i-1} x_j}{x_i} \right) dx_{d-k-1} \dots dx_1.$$

Všimněme si, že z lemmatu 5.3.11 spojeného s větou 3.1.29 roste tento součet integrálů asymptoticky stejně jako druhý z nich, což ukončuje důkaz indukcí.

V případě $n = d$ v asymptotické rovnosti (5.43) potom dostáváme (opět z několikrát aplikované rovnice (5.10)) právě chtěný vztah (5.42). $\square$

Závěr

V této práci jsme definovali Pascalův trojúhelník a poté přehledně rozebrali dva různé směry, kterými lze rozšířit kombinační čísla v něm, tj. zvýšení počtu jejich proměnných multinomickými koeficienty a zvětšení jejich definičního oboru pomocí funkce Gamma. Nakonec jsme oba tyto směry zkombinovali spojitými multinomickými koeficienty. Skrze celou práci se nám podařilo celkem důkladně popsat chování kombinačních čísel a všech těchto jejich rozšíření. Hlavní myšlenka práce pak byla ta, že jsme ukázali, jak některé vlastnosti kombinačních čísel Pascalova trojúhelníku přetrvávají i po zmíněných zobecněních. Jako první jsme podrobně vyšetřili spojité multinomické koeficienty a za největší nový přínos práce považujeme věty 4.3.3, 5.2.11 a 5.3.12.

Musíme podotknout fakt, že kombinační čísla přirozených argumentů jsou součástí obrovského množství identit, takže jsme zmínili a zobecnili jen několik základních.

Je také možné rozšířit definiční obor funkce Gamma z reálných i na komplexní čísla a například vyjádření spojitých kombinačních čísel ve větě 4.3.2 ze článku [15] platí nejen pro reálné proměnné. Můžeme proto spekulovat, že by alespoň část vět posledních dvou kapitol 4 a 5 mohla být tímto způsobem zobecněna.

Nakonec pro ty, kterým by se mohla zdát předložená rozšíření kombinačních čísel příliš nahodilá, bychom měli zmínit Dirichletovo pravděpodobnostní rozdělení, v němž vystupuje multinomický koeficient reálných proměnných jako normalizační konstanta, viz článek [16].

Literatura

[1] Kathleen Lynn Davidson: *Pascal's Triangle: it's History, Patterns and Applications*. 1988. Dostupné z: https://scholarworks.calstate.edu/downloads/zg64tq39s.

[2] Anthonio Saucedo Jr.: *Pascal's Triangle, Pascal's Pyramid, and the Trinomial Triangle*. 2019. Dostupné z: https://scholarworks.lib.csusb.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1957&context=etd.

[3] Boris A. Bondarenko: *Generalised Pascal Triangles and Pyramids their Fractals, Graphs and Applications*. 1990. Dostupné z: https://www.fq.math.ca/Books/Pascal/bondarenko-1.pdf.

[4] Charles H. Jones: *Generalised Hockey Stick Identities and N-Dimensional Blockwalking*. 1994. Dostupné z: https://www.fq.math.ca/Scanned/34-3/jones.pdf.

[5] L. Pick, S. Hencl, J. Spurný a M. Zelený: *Matematická analýza (předběžná verze)*. 2024. Dostupné z: https://www.karlin.mff.cuni.cz/~pick/analyza-pro-studenty-2024-12-13.pdf.

[6] Mattias Flygare: *Some Properties of Infinite Series*. 2012. Dostupné z: https://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:535147/FULLTEXT01.pdf.

[7] Jan Rataj: *Přednáška 3.10.2023*. 2023. Dostupné z: https://www.karlin.mff.cuni.cz/~rataj/TMI/TMI-text_2023.pdf.

[8] Simon J.A. Malham: *An introduction to asymptotic analysis*. 2023. Dostupné z: https://www.macs.hw.ac.uk/~simonm/ae.pdf.

[9] Robert Baillie, David Borwein, and Jonathan M. Borwein: *Surprising Sinc Sums and Integrals*. 2007. Dostupné z: https://carmamaths.org/resources/jon/sinc-sums.pdf.

[10] Emil Artin: *The Gamma Function*. 1964. Dostupné z: https://archive.org/details/THEGAMMAFUNCTION/page/n9/mode/1up.

[11] Necdet Batir: *Inequalities for the Gamma funtcion*. 2000. Dostupné z: https://rgmia.org/papers/v12n1/AderM-1.pdf.

[12] Louis Comtet: *Advanced Combinatorics*. 1974. Dostupné z: https://ia801306.us.archive.org/27/items/Comtet_Louis_-_Advanced_Coatorics/Comtet_Louis_-_Advanced_Combinatorics.pdf.

[13] Tatiana I. Fedoryaeva: *On Binomial Coefficients of Real Arguments*. 2022. Dostupné z: https://arxiv.org/pdf/2206.03007.

[14] Salwinski, David: *The Continuous Binomial Coefficient: An Elementary Approach*. 2018. Dostupné z: https://www.researchgate.net/publication/323347943_The_Continuous_Binomial_Coefficient_An_Elementary_Approach.

[15] Lorenzo, David: *The Binomial Coefficient as an (In)finite Sum of Sinc Functions*. 2021. Dostupné z: https://arxiv.org/abs/2005.12363.

[16] Jiayu Lin: *On The Dirichlet Distribution* . 2016. Dostupné z: https://mast.queensu.ca/~communications/Papers/msc-jiayu-lin.pdf.

Použitá značení

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}$	množina přirozených, celých, reálných čísel
$\mathbb{N}_0$	množina přirozených čísel s nulou
$\mathbb{Z}^-$	množina záporných celých čísel
$\mathbb{R}_{>-1}$	množina všech reálných čísel větších než -1
$\mathbb{R}^d$	d-krát opakovaný kartézský součin množiny reálných čísel se sebou
$\max, \min, \sup, \inf$	maximum, minimum, supremum a infimum množiny
$\lceil x \rceil, \lfloor x \rfloor$	horní a dolní celá část čísla x
$\binom{n}{k}$	kombinační číslo n nad k
$\binom{n}{k_1, k_2, k_3}$	trinomický koeficient n nad k_1, k_2, k_3
$\binom{n}{k_1, \ldots, k_d}$	multinomický koeficient n nad $k_1, \ldots, k_d$
$\left\langle {\alpha \atop x} \right\rangle$	redukované kombinační číslo α nad x
$\overrightarrow{e}$	vektor e
$(k_1, \ldots, k_d)_B$	vektor v bázi B
$\delta_{i,j}$	Kroneckerovo delta
$\alpha^{\underline{k}}$	padající faktoriál
sinc	funkce Sinc
sgn	funkce Signum
Γ	funkce Gamma
ψ	funkce Digamma
γ	Eulerova–Mascheroniho konstanta
f'	derivace funkce f
$f \sim g$	funkce f a g rostou asymptoticky stejně rychle
$f \ll g$	funkce f roste asymptoticky pomaleji než funkce g