

STŘEDOŠKOLSKÁ ODBORNÁ ČINNOST

Obor č. 2: Fyzika

Korelace modelů gravitačního pole Měsíce GL1500E a RFM_2519

**Vít Perkner
Hlavní město Praha**

Praha 2024

STŘEDOŠKOLSKÁ ODBORNÁ ČINNOST

Obor č. 2: Fyzika

Korelace modelů gravitačního pole Měsíce GL1500E a RFM_2519

Correlation of the lunar gravity field models GL1500E and RFM_2519

Autor: Vít Perkner

Škola: ScioŠkola Žižkov, Prokopova 100/16, 130 00 Praha 3 - Žižkov

Kraj: Hlavní město Praha

Konzultant: doc. Ing. Michal Šprlák, Ph.D.

Praha 2024

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou práci SOČ vypracoval/a samostatně a použil/a jsem pouze prameny a literaturu uvedené v seznamu bibliografických záznamů.

Prohlašuji, že tištěná verze a elektronická verze soutěžní práce SOČ jsou shodné.

Nemám závažný důvod proti zpřístupnění této práce v souladu se zákonem č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon) ve znění pozdějších předpisů.

V Praze dne 25. 03. 2024

.....

Vít Perkner

Poděkování

Přeji si poděkovat mému konzultantovi doc. Ing. Michalu Šprlákovi, Ph.D. za úsilí, čas a trpělivost, které mi věnoval, za pozornost, s níž vnímal mé dotazy a v neposlední řadě za početné cenné rady při psaní práce.

Anotace

Práce prozkoumává vlastnosti prostorových korelací modelů gravitačního pole Měsíce GL1500E a RFM_2519 v oblastech výšin, nížin a South Pole-Aitken Basin. Další cíl spočívá v navržení a implementaci globálního modelu povrchové hustoty. Pro jeho účely jsou numerickými experimenty zjištěny ortogonální vlastnosti některých potenciálně využitelných báзовých funkcí sloužících k popisu hustoty. Porovnáním se stávajícími modely hustoty je umožněn přibližný odhad množství hmoty obsažených v podpovrchových strukturách nezaznamenaných globálním modelem. Zároveň je poukázáno na vliv těchto nerovnoměrností na vypočtené korelační koeficienty.

Klíčová slova

gravitační pole Měsíce, sférický harmonický rozvoj, odhad hustoty, GL1500E, RFM_2519

Annotation

This work investigates the properties of the spatial correlations of the lunar gravity field models GL1500E and RFM_2519 in the highlands, lowlands and South Pole-Aitken Basin regions. Another objective is to propose and implement a global surface density model. For its purpose, orthogonal properties of some potentially useful basis functions used to describe the density are determined by numerical experiments. By comparison with existing density models, it is possible to roughly estimate the amount of mass contained in subsurface structures not recognized by the global model. The influence of these non-uniformities on the calculated correlation coefficients is pointed out.

Keywords

lunar gravity field, spherical harmonics expansion, density estimate, GL1500E, RFM_2519

OBSAH

Úvod	7
1 Rozvoj gravitačního potenciálu do řady sférických harmonických funkcí	8
1.1 Odvození rozvoje gravitačního potenciálu do řady sférických harmonických funkcí.....	8
1.2 Vlastnosti rozvoje gravitačního potenciálu do řady sférických harmonických funkcí	9
2 Modely gravitačního pole	10
2.1 Rozlišení modelů gravitačního pole	10
2.2 Využité modely gravitačního pole.....	11
2.2.1 Model GL1500E	11
2.2.2 Model RFM_2519.....	13
3 Korelace modelů gravitačního pole.....	15
3.1 Metody výpočtu korelace	15
3.2 Výsledky korelace.....	16
3.3 Původ vlastností korelace	18
4 Model hustoty.....	20
4.1 Předpis chování hustoty.....	20
4.2 Síla signálu členů rozvoje hustoty	20
4.3 Určení koeficientů modelu hustoty	21
4.4 Syntéza z modelu hustoty	22
5 Výsledky modelu hustoty	23
6 Diskuze	28
7 Závěr.....	31
8 Dodatky	32
8.1 Legendreovy polynomy a přidružené funkce 1. druhu. Sférické harmonické funkce	32
8.2 Korelační koeficient	34
8.3 Ortogonalita bázových funkcí rozvoje gravitačního potenciálu	34
8.3.1 Bázové funkce ztrácející ortogonalitu	35
8.3.2 Numerické vyhodnocení ztráty ortogonality.....	36
Reference	41
9 Přílohy	44

ÚVOD

Na první pohled by se mohlo zdát, že gravitační pole planetárních těles představuje stejnorodou entitu. Ve skutečnosti se vyskytují drobné gravitační anomálie. Právě ty nám umožňují nahlédnout do ukrytých, podpovrchových vlastností těles.

Prohlubující se porozumění vnitřní struktury Měsíce a jeho dávnému tepelnému vývoji poskytuje jedinečnou příležitost k porozumění vzniku sluneční soustavy. Mezi klíčové cesty pro postupné odhalování tajemství dávného souputníka Země řadíme gravimetrii [1]. Detailní data obdržená díky družicovým misím uskutečněným v posledních desetiletích vedla k zásadnímu zpřesnění stávajících znalostí a umožňují v kombinaci s matematickým modelováním předvídat jevy dosud ukryté pod povrchem Měsíce. [2]

Stěžejní cíl této práce spočívá v analýze gravitačních polí Měsíce popsanych modelem GL1500E založeného na gravimetrických datech poskytnutých dvojicí družic GRAIL a modelem RFM_2519 generovaného topografií měsíčního povrchu. Na rozdíl od hojně využívaných tzv. spektrálních korelací [např. 3] metoda prostorových korelací využitá v této práci umožňuje výpočet omezit na specifické lokality na měsíčním povrchu a zachycuje tak informace poskytnuté různorodými geofyzikálními charakteristikami oblastí.

Za účelem poskytnout důkladnější porozumění základních vlastností jednotlivých prostorových oblastí je v této práci určen model hustoty založený na globálních podmínkách pro chování hustoty. Následuje porovnání výsledků s již existujícími modely hustoty, které v ideálním případě umožní prověřit důvěryhodnost učiněných předpokladů.

V první kapitole stručně odvodíme rozvoj gravitačního potenciálu do řady sférických harmonických funkcí. Ve druhé kapitole se seznámíme s modely gravitačního pole využitými v této práci. Podobnosti gravitačního pole generovaného dvěma různými modely je věnována třetí kapitola. Následuje popis navrženého odhadu hustoty a jeho implementace. Obdržené výsledky jsou předmětem kapitoly 5. Doplnující materiály týkající se využitého matematického aparátu a částem programového kódu najde čtenář v dodatcích.

1 ROZVOJ GRAVITAČNÍHO POTENCIÁLU DO ŘADY SFÉRICKÝCH HARMONICKÝCH FUNKCÍ

Pomocí experimentálních měření gravitačního pole nebo jeho odhadu na základě znalosti topografie tělesa stanovujeme konstanty, tj. sférické harmonické koeficienty, popisující některé fyzikální vlastnosti tělesa specifikované sférickým harmonickým stupněm n a řádem m [4]. Tyto konstanty nazýváme také spektrem gravitačního potenciálu. Odhadnutý model gravitačního pole umožňuje výpočet gravitačního potenciálu v dalších bodech prostoru [5].

Tato sekce poskytuje stručný přehled odvození rozvoje gravitačního potenciálu obecného tělesa vně nejmenší Brillouinovy sféry a jeho prostorových derivací do řady sférických harmonických funkcí. Poukazuje tak na jeho zásadní vlastnosti využitě ve zbytku práce.

1.1 Odvození rozvoje gravitačního potenciálu do řady sférických harmonických funkcí

Rozvoj gravitačního potenciálu do řady sférických harmonických funkcí vychází z Newtonova integrálu. Využijeme sférické souřadnice, kde Ω zastupuje sférickou délku a šířku a r vyjadřuje vzdálenost od počátku souřadnicového systému ležícího zpravidla v těžišti zkoumaného tělesa. Podle Newtonova integrálu vypočítáme gravitační potenciál obecného tělesa $V(r, \Omega)$ v bodě o souřadnicích r, Ω pomocí integrálu přes všechny body tělesa:

$$V(r, \Omega) = G \int_{\Omega'} \int_{r'=0}^{h(\Omega')} \frac{\rho(r', \Omega')}{|\mathbf{l}(r, \Omega, r', \Omega')|} r'^2 dr' d\Omega', \quad (1.1)$$

kde $\rho(r', \Omega')$ označuje hustotu v bodě o souřadnicích r', Ω' a $\mathbf{l}(r, \Omega, r', \Omega')$ představuje vektor vzdálenosti mezi body r, Ω a r', Ω' . G označuje Newtonovu gravitační konstantu a $h(\Omega')$ výšku terénu pro dané Ω' .

Vyšší z hodnot r, r' označíme $r_>$ a nižší $r_<$. Sférická vzdálenost bodů Ω, Ω' na sféře o jednotkovém poloměru bude označována θ . Pomocí vytvářející funkce Legendreových polynomů 1. druhu lze vyjádřit převrácenou hodnotu velikosti vektoru $\mathbf{l}(r, \Omega, r', \Omega')$ [6, s. 743]:

$$\frac{1}{|\mathbf{l}(r, \Omega, r', \Omega')|} = \frac{1}{r_>} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r_<}{r_>}\right)^n P_n(\cos \theta). \quad (1.2)$$

Předpokládejme, že bod r, Ω leží vně nejmenší Brillouinovy sféry. Pak lze upravit rovnost (1.1) do tvaru:

$$V(r, \Omega) = G \int_{\Omega'} \int_{r'=0}^{h(\Omega')} \rho(r', \Omega') \left[\frac{1}{r'} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos \theta) \right] r'^2 dr' d\Omega'. \quad (1.3)$$

Zavedeme libovolné parametry R v jednotkách vzdálenosti a M v jednotkách hmotnosti. Parametr M je zpravidla roven hmotnosti tělesa. Pro gravitační potenciál tak s využitím součtové věty (8.15) získáváme sférický harmonický rozvoj:

$$V(r, \Omega) = \frac{GM}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \bar{C}_{n,m} \bar{Y}_{n,m}(\Omega), \quad (1.4)$$

$$\bar{C}_{n,m} = \frac{1}{R^n M (2n+1)} \int_{\Omega'} \int_{r'=0}^{h(\Omega')} \rho(r', \Omega') \bar{Y}_{n,m}(\Omega') r'^{n+2} dr' d\Omega'. \quad (1.5)$$

Koeficienty $\bar{C}_{n,m}$ představují pro každý sférický harmonický stupeň n a řád m konstanty definované fyzikálními vlastnostmi tělesa.

1.2 Vlastnosti rozvoje gravitačního potenciálu do řady sférických harmonických funkcí

Výpočet gravitačního potenciálu a jeho prostorových derivací není ovlivněn volbou parametrů R a M . Záruka konvergence sférického harmonického rozvoje závisí na tom, zda se bod r, Ω nachází vně nejmenší Brillouinovy sféry. Bylo ukázáno, že uplatnění vzorce (1.4) pod nejmenší Brillouinovou sférou nepřináší realistické výsledky [7].

Dosažení příslušných hodnot sférického harmonického stupně a řádu do vzorce (1.5) poskytuje informaci o fyzikálních vlastnostech tělesa odpovídající příslušným sférickým harmonickým koeficientům. Jestliže je M rovno hmotnosti tělesa, pak $\bar{C}_{0,0} = 1$. Hodnoty koeficientů $\bar{C}_{1,-1}$, $\bar{C}_{1,0}$ a $\bar{C}_{1,1}$ lze stanovit z vektoru vzdálenosti mezi počátkem souřadnicového systému a těžištěm tělesa. Všechny koeficienty $\bar{C}_{1,-1}$, $\bar{C}_{1,0}$ a $\bar{C}_{1,1}$ nabývají nulových hodnot současně, pokud se počátek souřadnicové soustavy nachází v těžišti tělesa. [5]

Rozvoj gravitačního potenciálu vně nejmenší Brillouinovy sféry umožňuje odvodit vzorce pro prostorové derivace gravitačního potenciálu, z nichž zbytek práce využívá první tři radiální derivace:

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{GM}{R^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left(\frac{R}{r}\right)^{n+2} (n+1) \bar{C}_{n,m} \bar{Y}_{n,m}(\Omega), \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} = \frac{GM}{R^3} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left(\frac{R}{r}\right)^{n+3} (n+1)(n+2) \bar{C}_{n,m} \bar{Y}_{n,m}(\Omega), \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial^3 V}{\partial r^3} = -\frac{GM}{R^4} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left(\frac{R}{r}\right)^{n+4} (n+1)(n+2)(n+3) \bar{C}_{n,m} \bar{Y}_{n,m}(\Omega). \quad (1.8)$$

Protože průvodič r roste se vzdáleností od počátku souřadnicového systému, nabývají liché derivace opačných hodnot vůči důsledkům konvence, kde je derivace vypočítána vůči rozměru rostoucímu směrem k těžišti tělesa.

2 MODELÝ GRAVITAČNÍHO POLE

Sférické harmonické koeficienty jsou odhadovány z experimentálních měření. Proces jejich odhadu nazýváme sférická harmonická analýza a množina všech odhadnutých koeficientů tvoří model gravitačního pole tělesa [8]. Maximální sférický harmonický stupeň, pro nějž stanovujeme hodnoty koeficientů, odpovídá rozlišení modelu [5]. Počátek souřadnicového systému bývá zpravidla definován v těžišti tělesa. Sférická harmonická syntéza je proces získávání gravitačního potenciálu a jeho prostorových derivací [8].

Pro koeficienty vyššího sférického harmonického stupně n dochází k většímu zatížení experimentálních dat chybou měření. Bývá proto definováno tzv. Kaulovo pravidlo, jež specifikuje požadované přibližné hodnoty sférických harmonických koeficientů od určitého stupně. [9]

2.1 Rozlišení modelů gravitačního pole

Pro aproximaci výpočtu gravitačního potenciálu a jeho derivací omezujeme maximální využitý sférický harmonický stupeň. Je tak dáno rozlišení modelu gravitačního pole. Rozlišení budu označovat ψ , uváděno může být ve sférické vzdálenosti na jednotkové sféře nebo na sféře o poloměru r . Menší hodnoty ψ odpovídají podrobnějšímu rozlišení. Uvádím dva způsoby stanovení rozlišení, oba vyjádřené na jednotkové sféře.

První metoda je založena na počtu nulových bodů na rovníku. Tento počet je stanoven pro tu sférickou harmonickou funkci v rozvoji gravitačního potenciálu a jeho derivací, pro kterou je těchto nulových bodů nejvíce. Rozlišení ψ_1 je pak dáno:

$$\psi_1 = \frac{\pi}{n_{max}}. \quad (2.1)$$

Druhý postup využívá ve sférické vzdálenosti vyjádřený průměr takové kulové úseče, pro níž platí, že poměr celé sféry vůči jejímu povrchu je roven počtu členů rozvoje gravitačního potenciálu. Pro rozlišení ψ_2 dostáváme:

$$\psi_2 = 4 \arcsin\left(\frac{1}{n_{max} + 1}\right). \quad (2.2)$$

Jestliže budu nanášet hodnoty gravitačního potenciálu nebo jeho derivací do mapy, pak budu volit rozlišení v souladu se vzorcem (2.1).

Tabulka 2.1 uvádí rozlišení v závislosti na maximálním použitým sférickým harmonickým stupni. První dvojice řádků vyjadřuje rozlišení ve stupních na jednotkové sféře, druhá dvojice v km na nejmenší Brillouinově sféře R_{Br} . Její hodnota pro Měsíc je 1 748,2 km [10].

ROZLIŠENÍ MODELU GRAVITAČNÍHO POLE							
DEFINICE ROZLIŠENÍ	MAXIMÁLNÍ SFÉRICKÝ HARMONICKÝ STUPEŇ						
	30	50	90	360	400	720	1500
ψ_1 (°)	6.000	3.600	2.000	0.500	0.450	0.250	0.120
ψ_2 (°)	7.394	4.494	2.519	0.635	0.572	0.318	0.153
$\psi_1 \times R_{Br.}$ (km)	183.071	109.843	61.024	15.256	13.730	7.628	3.661
$\psi_2 \times R_{Br.}$ (km)	225.613	137.123	76.846	19.371	17.438	9.699	4.659

Tabulka 2.1: Rozlišení modelu gravitačního pole pro maximální sférický harmonický stupeň pro maximální sférické harmonické stupně 30, 50, 90, 360, 400, 720 a 1500.

2.2 Využití modely gravitačního pole

Tato práce využívá modely gravitačního pole Měsíce vně nejmenší Brillouinovy sféry GL1500E [11] odvozený z měření gravitačního pole Měsíce pomocí družice GRAIL a RFM_2519 [12] generovaný topografií Měsíce naměřenou družicí LRO.

2.2.1 Model GL1500E

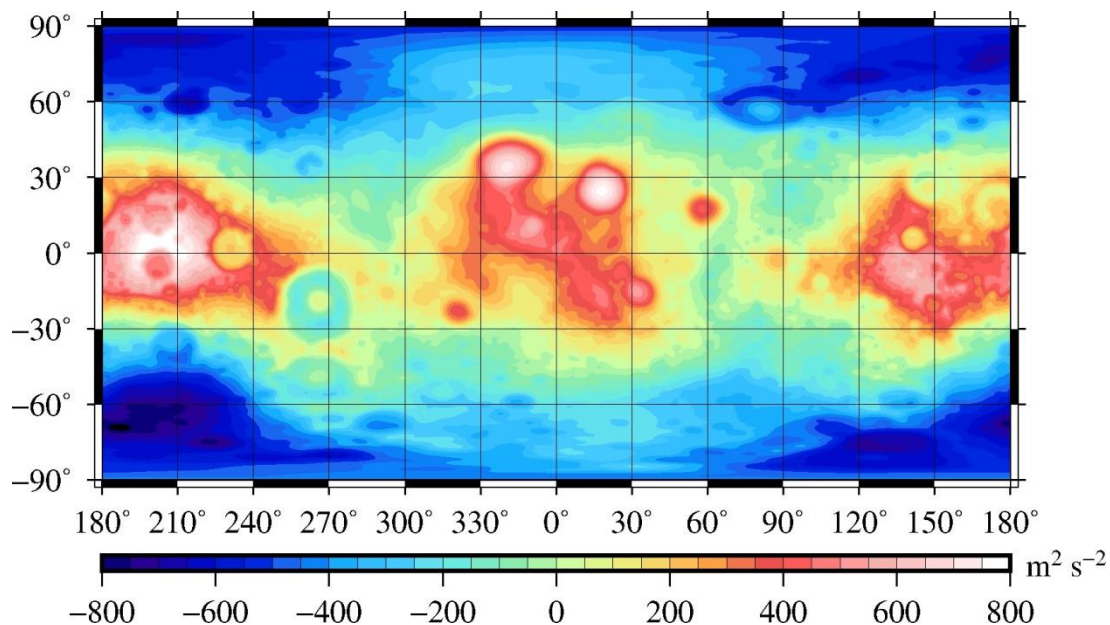
Mise GRAIL (Gravity Recovery and Interior Laboratory) sestávala z dvojice družic GRAIL-A a GRAIL-B a odstartovala na oběžnou dráhu Země 10. září 2011 [13]. Cílem mise bylo zmapovat gravitační pole Měsíce, a to jak na přivrácené, tak odvrácené straně. Obě družice byly vybaveny LGRS (Lunar Gravity Ranging System) za účelem přesného měření vzdálenost mezi družicemi GRAIL-A a GRAIL-B [14]. Získané výsledky měly vést k lepšímu porozumění vnitřní struktury Měsíce a jeho dřívějšímu tepelnému vývoji [13]. Data obdržena během primární a rozšířené mise vedla ke zlepšení znalostí o gravitačním poli Měsíce [15].

Tabulka 2.2 uvádí základní charakteristiky modelu GL1500E. Veličina n_{max} označuje nejvyšší sférický harmonický stupeň sférických harmonických koeficientů a n_{min}^K představuje nejnižší stupeň podržující se Kaulovu pravidlu. Kaulovo pravidlo bylo nastaveno za předpokladu spolehlivosti modelu pro $r = 1738$ km a nemusí proto reprezentovat realistická kritéria pro sférické harmonické koeficienty [7].

Gravitační potenciál a jeho první, druhá a třetí radiální derivace byly syntetizovány s využitím programu specializovaného na sférickou harmonickou syntézu zavedeného v [16]. Výpočet probíhal pro sférické harmonické stupně v rozmezí od 2 do 720. Průvodič r byl nastaven na poloměr nejmenší Brillouinovy sféry. K zobrazení dat byl využit program Generic Mapping Tools (GMT) [17]. Gravitační potenciál je znázorněn na obrázku 2.1. Jeho radiální derivace znázorňují obrázky 9.1 – 9.3.

GL1500E		
VELIČINA	JEDNOTKA	HODNOTA
GM	$10^{12} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$	4.903
R	km	1738.000
n_{max}	-	1500
n_{min}^K	-	701
Kaulovo pravidlo	8×10^{-10}	8.000
ψ_1	°	0.120
ψ_2	°	0.153
$\psi_1 \times R_{Br}$	km	3.661
$\psi_2 \times R_{Br}$	km	4.659

Tabulka 2.2: Základní charakteristiky modelu gravitačního pole Měsíce GL1500E.



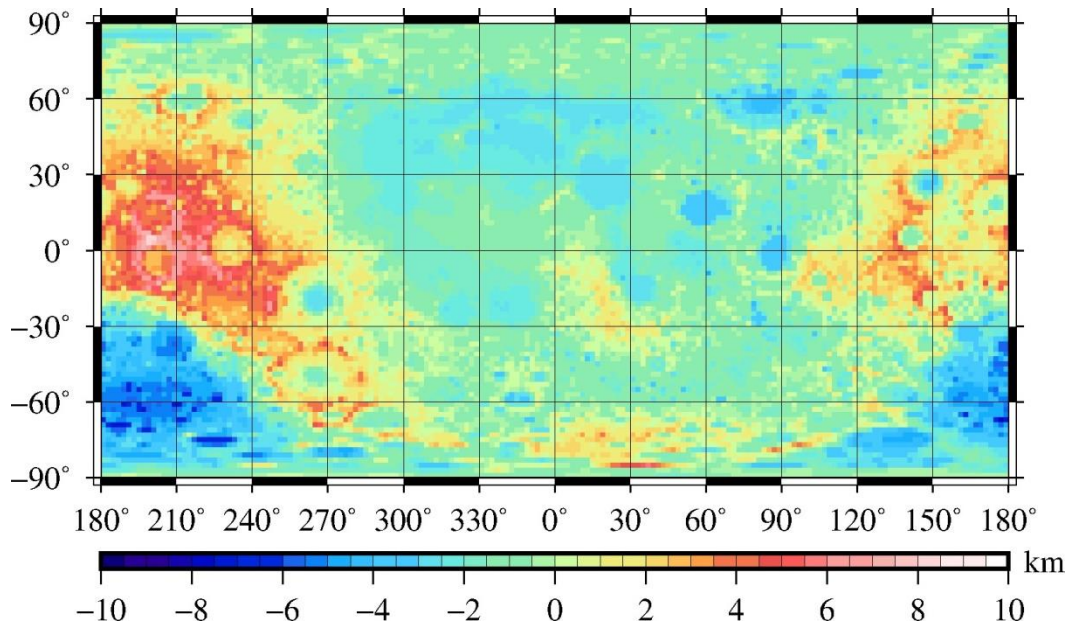
Obrázek 2.1: Gravitační potenciál vypočítaný z modelu GL1500E s použitím sférických harmonických stupňů $2 \leq n \leq 720$ pro $r = 1748,2$ km. Data lze interpretovat jako anomálie gravitačního potenciálu.

Nejvyšší hodnoty gravitačního potenciálu na základě modelu GL1500E vychází v oblasti výšin na odvrácené straně Měsíce a nížin na přivrácené straně. Nejnižší obdržené hodnoty korespondují s oblastmi v blízkosti severního a jižního pólu, a zvláště s kráterem South Pole-Aitken Basin, jenž se nachází se na jihu odvrácené strany. Zhruba opačné charakteristiky vykazuje první radiální derivace gravitačního potenciálu, a to díky růstu průvodiče r směrem od počátku souřadnicové soustavy. Pro vyšší derivace přestávají být tyto jevy patrné a projevuje se výrazná prostorová proměnlivost veličin v oblasti výšin.

2.2.2 Model RFM_2519

Družice LRO (Lunar Reconnaissance Orbiter) obíhá Měsíc od roku 2009 [18]. Mezi cíle mise patří poskytnutí detailní topografické mapy měsíčního povrchu. Družice je vybavena senzorem LOLA (Lunar Orbiter Laser Altimeter) sloužícím k měření své výšky nad povrchem Měsíce, která činí přibližně 50 km [19].

Obrázek 2.2 znázorňuje mapu měsíčního povrchu. Hodnoty jsou nanášeny v intervalech 2° planetocentrické délky a šířky.



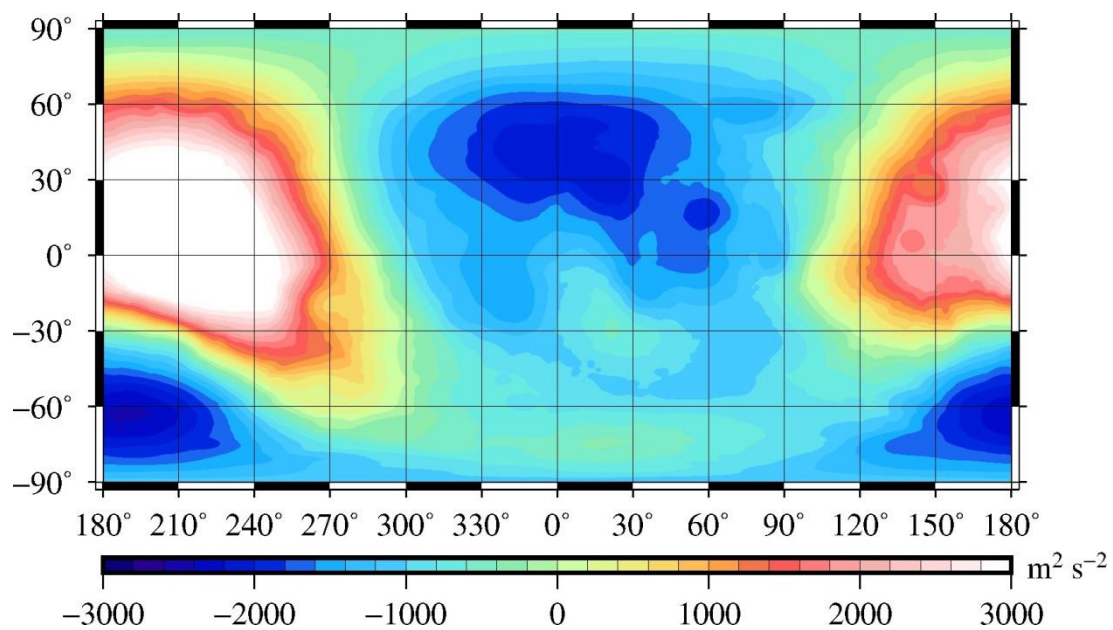
Obrázek 2.2: Topografická mapa Měsíce. Hodnoty jsou nanášeny v intervalech 2° planetocentrické délky a šířky.

Základní charakteristiky modelu RFM_2519 jsou uvádí tabulka 2.3. Model využívá data o topografii Měsíce a je předpokládána konstantní hustota $\rho = 2\,550 \text{ kg m}^{-3}$.

Syntéza gravitačního potenciálu z modelu RFM_2519 byla provedena pro r rovno poloměru nejmenší Brillouinovy sféry a sférický harmonický stupeň od 1 do 720. Vzhledem k tomu, že sférické harmonické koeficienty stupně 1 jsou v modelu GL1500E nulové, je možné obrázky 2.1 a 2.3 porovnat. Vyšší radiální derivace gravitačního potenciálu jsou uvedeny na obrázcích 9.4 – 9.6 v přílohách.

RFM_2519		
VELIČINA	JEDNOTKA	HODNOTA
GM	$10^{12} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$	4.903
R	km	1748.200
n_{max}	-	2519
ρ	kg m^{-3}	2550
ψ_1	°	0.071
ψ_2	°	0.091
$\psi_1 \times R_{Br.}$	km	2.180
$\psi_2 \times R_{Br.}$	km	2.775

Tabulka 2.3: Základní charakteristiky modelu gravitačního pole Měsíce RFM_2519. Veličina ρ označuje konstantní hustotu předpokládanou modelem.



Obrázek 2.3: Gravitační potenciál vypočítaný z modelu RFM_2519 s použitím sférických harmonických stupňů $1 \leq n \leq 720$ pro $r = 1748,2$ km.

3 KORELACE MODELŮ GRAVITAČNÍHO POLE

3.1 Metody výpočtu korelace

Z porovnání gravitačního potenciálu a jeho prvních 3 radiálních derivací generovaných modely GL1500E a RFM_2519 je patrná jejich neshoda. K popisu podobnosti gravitačního potenciálu a jeho radiálních derivací budu používat jejich prostorově vypočítaný korelační koeficient (viz dodatek 8.2).

Charakteristiky různých oblastí na povrchu Měsíce se mohou odlišovat a s ním i korelace různých modelů gravitačního pole. Pro výpočet korelačních koeficientů byly vybrány oblasti uvedené v tabulce 3.1. Hranice oblastí jsou definovány pomocí sférických souřadnic omezující nejzápadnější, nejvýchodnější, nejjihnější a nejsevernější body. Všechny body nacházející se mezi těmito hranicemi jsou považovány za součást zkoumané oblasti.

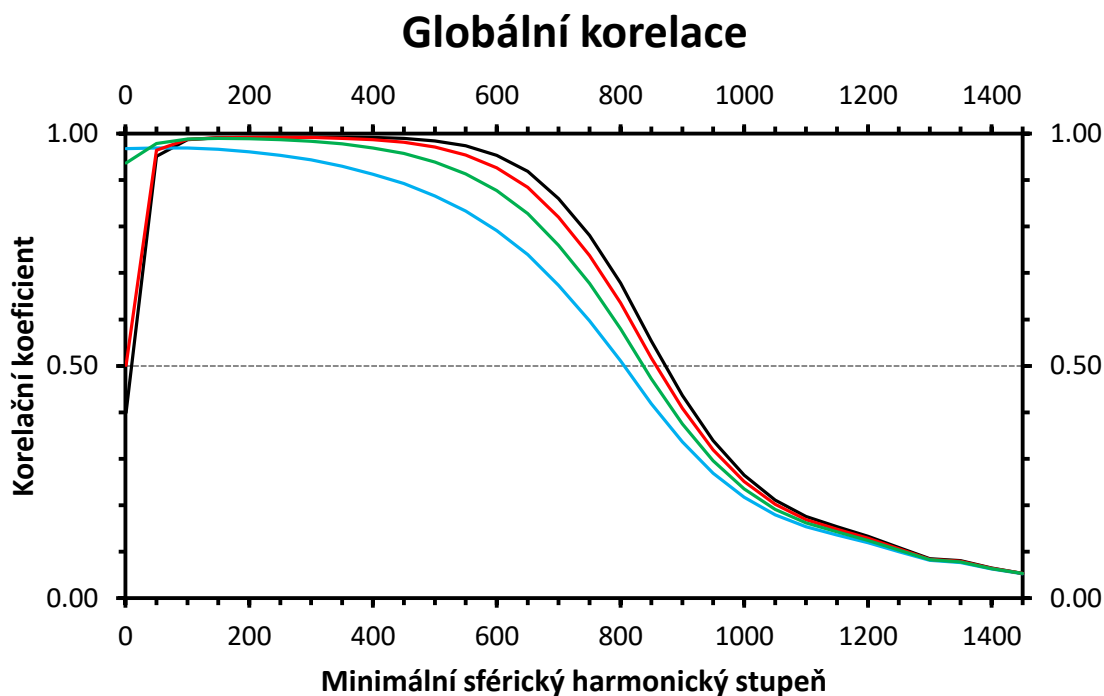
Gravitační potenciál generovaný modely GL1500E a RFM_2519 a jeho první až třetí radiální derivace byly vypočítány pro sférické harmonické stupně $n_{min} \leq n \leq 1500$, kde minimální stupeň n_{min} nabývá hodnot 1, 25, 75, 100, 150, 200, ..., 1450. Protože hodnota korelačního koeficientu nezáleží na vzájemném posunu polohy zkoumaných veličin, výpočet neproběhl pro $n_{min} = 0$. Výsledky jsou uváděny odděleně pro n_{min} v intervalech 50 (resp. 49) s maximální hodnotou 1450 a 25 (resp. 24) s maximální hodnotou 100. Hodnoty byly vypočítávány v pravidelných intervalech $0,12^\circ$ planetocentrické délky a šířky, v souladu s tabulkou 2.1. Hodnota r byla nastavena na 1748,2 km.

OBLASTI PRO VÝPOČET KORELACE MODELŮ GL1500E A RFM_2519					
OBLAST	HRANICE OBLASTI ($^\circ$)				POVRCH
	λ_z	λ_v	φ_j	φ_s	
Globální	-179.94	179.94	-89.94	89.94	100.00%
Výšiny	-179.94	-120.06	-15.06	45.06	8.08%
Nížiny	-89.94	30.06	14.94	60.06	10.18%
South Pole-Aitken Basin	149.94	-119.94	-85.02	-30.06	6.22%

Tabulka 3.1: Oblasti vybrané pro výpočet korelačních koeficientů modelů gravitačního pole GL1500E s RFM_2519. Hodnoty λ_z , λ_v , φ_j , φ_s vyjadřují ve stupních postupně západní, východní, jižní a severní hranici vybraných oblastí. Hodnoty jsou uvedeny v planetocentrické šířce a délce, záporné hodnoty odpovídají západní délce, resp. jižní šířce. Povrch oblasti je uveden v jednotkách celkového povrchu Měsíce.

3.2 Výsledky korelace

Korelační koeficienty vypočítané v globální oblasti jsou zobrazeny na obrázku 3.2¹. Protože zkoumané vlastnosti Měsíce mohou záležet na oblasti, v níž je výpočet proveden, globálně vypočítaný korelační koeficient nemusí pro každou oblast vyjadřovat její reálné vlastnosti.



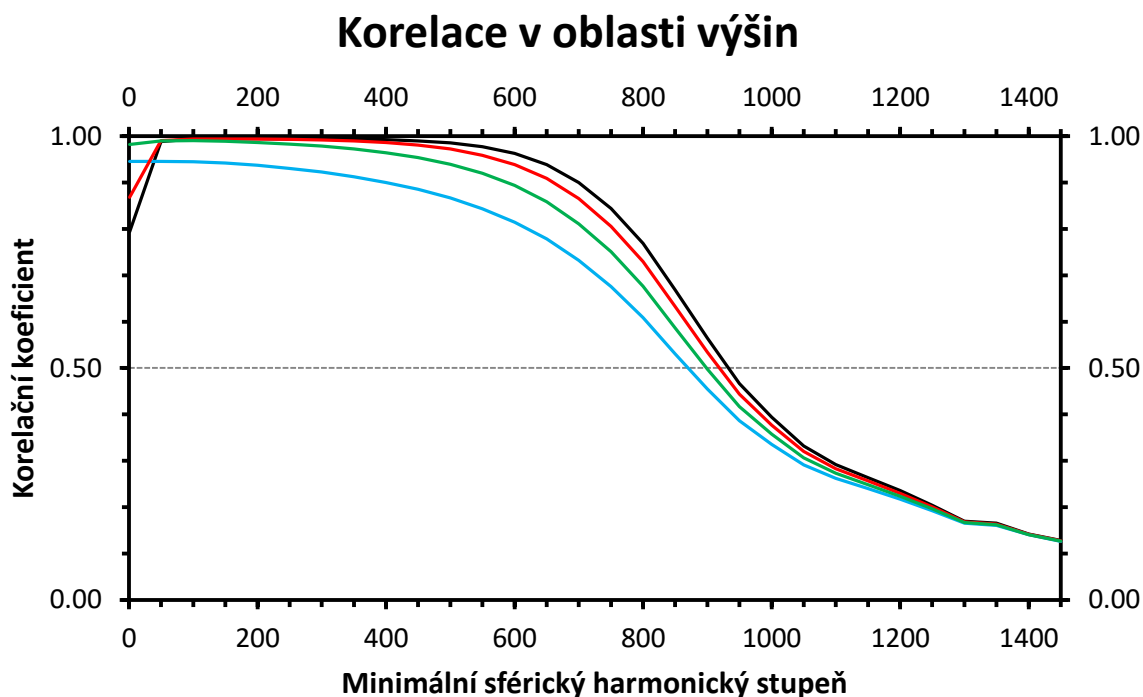
Obrázek 3.1: Globálně vypočítaný korelační koeficient mezi modely GL1500E a RFM_2519 pro minimální sférický harmonický stupeň 1, 50, 100, ..., 1450. Gravitační potenciál a jeho první 3 radiální derivace odpovídají postupně černé, červené, zelené a modré křivce.

Pro minimální sférický harmonický stupeň n_{min} v rozmezí od 1 do přibližně 50 je korelace nejnižší pro nízké derivace gravitačního potenciálu a hodnoty rostou s n_{min} . Při n_{min} dostatečně vysokém, aby byly korelační koeficienty blízké 1, je korelace pro nízké derivace gravitačního potenciálu naopak nejvyšší.

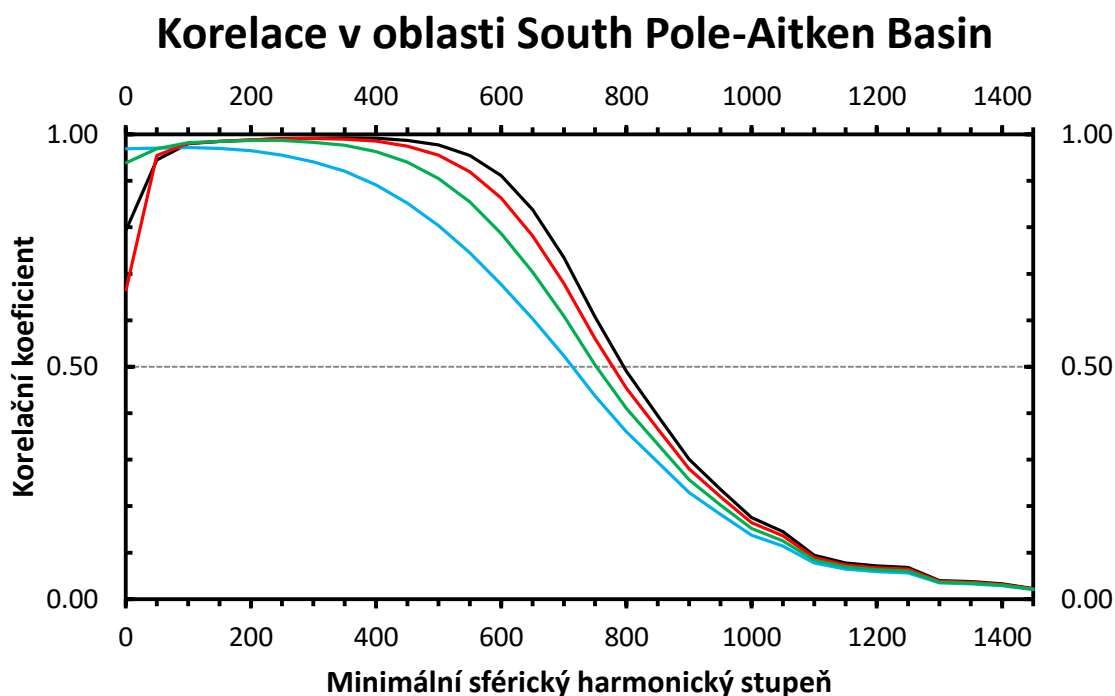
Od vysokého minimálního sférického harmonického stupně dochází k poklesu korelačních koeficientů. Pro gravitační potenciál a jeho různé radiální derivace se tento stupeň odlišuje. Korelační koeficienty gravitačního potenciálu nabývají hodnot blízkých 1 až do $n_{min} \approx 500$, s hodnotou přibližně 0,984. Pro vyšší derivace gravitačního potenciálu dochází k poklesu korelace dříve.

Korelační koeficient nabývá v oblasti výšin ve srovnání s ostatními oblastmi vysokých hodnot v celém spektru n_{min} a pokles je mírnější. Dochází k nárůstu nízkých korelací pro $1 \leq n_{min} \lesssim 100$, podobně jako v ostatních oblastech.

¹ Grafy korelačních koeficientů v této sekci pro $1 \leq n_{min} \leq 100$ lze dohledat v přílohách (obrázky 9.7 – 9.10).



Obrázek 3.2: Korelační koeficient mezi modely GL1500E a RFM_2519 v oblasti výšin pro minimální sférický harmonický stupeň 1, 50, 100, ..., 1450. Gravitační potenciál a jeho první 3 radiální derivace odpovídají postupně černé, červené, zelené a modré křivce.

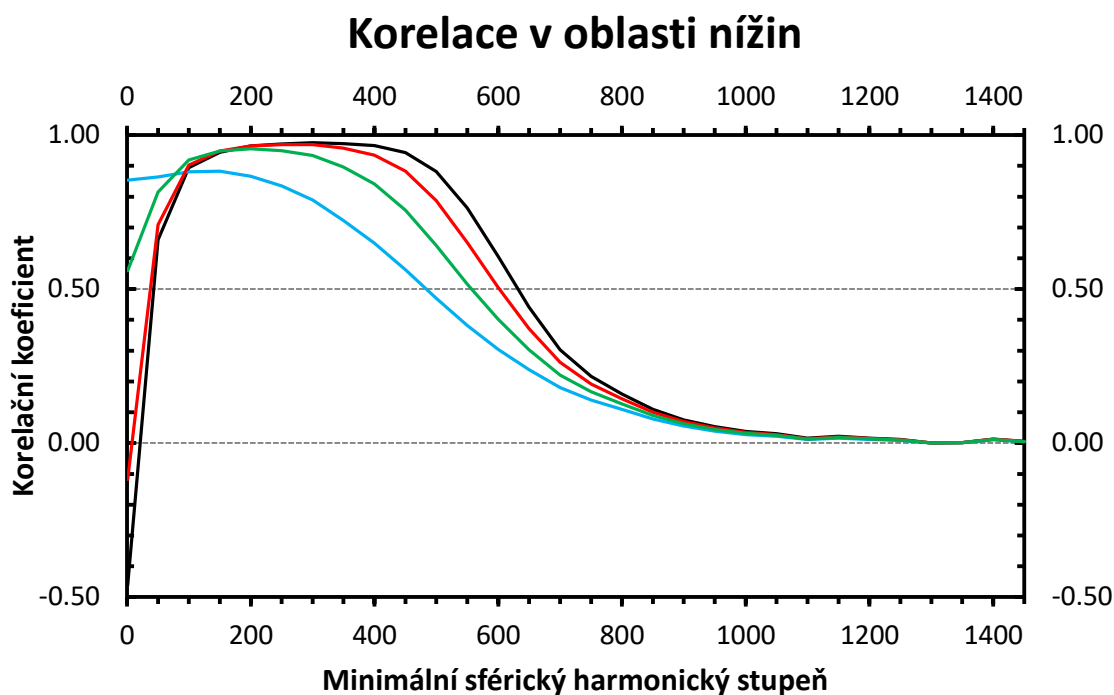


Obrázek 3.3: Korelační koeficient mezi modely GL1500E a RFM_2519 v oblasti South Pole-Aitken Basin pro minimální sférický harmonický stupeň 1, 50, 100, ..., 1 450. Gravitační potenciál a jeho první 3 radiální derivace odpovídají postupně černé, červené, zelené a modré křivce.

Průběh korelace v oblasti South Pole-Aitken Basin se podobá korelaci v globální oblasti a výšinách a její míra se nachází zpravidla mezi hodnotami v těchto oblastech. Rozdílem je, že pro $n_{min} = 1$

vychází nejmenší korelační koeficient pro první radiální derivaci gravitačního potenciálu, a nikoliv pro samotný gravitační potenciál. Anomálie vymizí pro $n_{min} = 25$.

Oblast nížin vykazuje ze zkoumaných oblastí nejnižší korelace. Pro $n_{min} = 1$ je korelace gravitačního potenciálu i jeho první radiální derivace záporná. Vysokých hodnot korelace je dosaženo až pro $n_{min} \approx 250$. Pokles korelací nastává při nižších minimálních sférických harmonických stupních než v ostatních oblastech.



Obrázek 3.4: Korelační koeficient mezi modely GL1500E a RFM_2519 v oblasti nížin pro minimální sférický harmonický stupeň 1, 50, 100, ..., 1 450. Gravitační potenciál a jeho první 3 radiální derivace odpovídají postupně černé, červené, zelené a modré křivce.

3.3 Původ vlastností korelace

Možnými příčinami neshod mezi modely GL1500E a RFM_2519 vyjádřených korelačními koeficienty jsou nerovnoměrné rozložení hmoty pod povrchem Měsíce, nepřesnosti sférických harmonických koeficientů a Kaulovo pravidlo aplikované v modelu GL1500E od stupně 701. Předpokládám, že jsou zmíněné nepřesnosti pro hodnoty $1 \leq n_{min} \lesssim 250$ zanedbatelné. Pak dochází k neshodě modelů pro tyto hodnoty n_{min} z důvodu předpokladu konstantní hustoty $2\,550 \text{ kg m}^{-3}$ v modelu RFM_2519. Data proto naznačují, že existují struktury pod povrchem Měsíce, jejichž hustota se odlišuje od hustoty okolního prostředí.

Za příčinu poklesu korelace pro $n_{min} \gtrsim 400$ považuji nepřesnosti sférických harmonických koeficientů zatěžující obdržená data a Kaulovo pravidlo uplatněné od $n = 701$. Korelační koeficienty vyšších radiálních derivací gravitačního potenciálu zde nabývají nižších hodnot. Domnívám se, že příčinou jevu je faktor $(n + 1) \times (n + 2) \times \dots \times (n + k)$ v rozvoji k -té derivace pomocí řady sférických harmonických funkcí, který přiřazuje vyšší význam sférickým harmonickým koeficientům

vyššího stupně, a to ve větší míře pro vyšší k . Je tak vysvětlen i opačný jev pro $1 \leq n_{min} \lesssim 25$, kde nejvyšších hodnot zpravidla nabývají nejvyšší derivace a korelace s rostoucím n_{min} roste.

Nabízí se mnoho možných vysvětlení neshod chování korelací v různých prostorových oblastech. Význam mohou mít případné význačné nerovnoměrnosti v hustotě pod povrchem tělesa. Role topografie nabývá většího významu pro sférické harmonické koeficienty vyššího stupně. Prostorové měřítko vyskytujících se nerovnoměrností v hustotě může s rostoucím sférickým harmonickým stupněm postupně více převyšovat rozlišení odpovídající tomuto sférickému harmonickému stupni.

4 MODEL HUSTOTY

V rámci této práce byla dále vyvinuta metoda pro výpočet odhadu hustoty a aplikována za účelem zjištění platnosti či neplatnosti zavedených globálních podmínek popisujících chování hustoty. Nebyl uplatněn filtr v žádné oblasti spektra gravitačního potenciálu, jako např. v [20]. Tím je umožněno aplikování globálních omezení pro chování hustoty, aniž by byl učiněn předpoklad o výskytu jejích nerovnoměrností v konkrétních prostorových oblastech. Výsledek je pak možné porovnat s dalšími modely hustoty a odhadnout tak, do jaké míry je chování modelů gravitačního pole (sekce 3) ovlivněno lokálními podpovrchovými nerovnoměrnostmi hustoty nezaznamenanými globálními předpisy jejího chování.

Úloha hledání hustoty v jednotlivých bodech obecného tělesa na základě známých sférických harmonických koeficientů je nejednoznačná. Z toho důvodu je nutné zvolit podmínky, které omezují množinu všech možných rozložení hmoty a umožňují tak dosáhnout kýženého odhadu hustoty. [21] V hustotném modelu byly proto uplatněny předpoklady popsané v sekci 4.1.

4.1 Předpis chování hustoty

Hustotu v každém bodě popíšeme jako součet dvou složek $\mu(r)$, popisující očekávanou hustotu pro každou hodnotu r , a $\rho'(r, \Omega)$, vyjadřující odchylku hustoty od $\mu(r)$ v konkrétním bodě.

$$\rho(r, \Omega) = \mu(r) + \rho'(r, \Omega) \quad (4.1)$$

Hustota $\rho'(r, \Omega)$ byla odhadnuta pomocí sférického harmonického rozvoje zajišťujícího, aby popsané anomálie hustoty za zavedené aproximace topografie jako sféry po poloměru r_s vysvětlovaly neshodu $\bar{C}_{n,m}^p$ mezi modely gravitačního pole GL1500E a RFM_2519.

$$\rho'(r, \Omega) = \sum_{n=1}^{n_{max}} \sum_{m=-n}^n \frac{R^n M(2n+1)(2n+3)r^n}{4\pi r_s^{2n+3}} \bar{C}_{n,m}^p \bar{Y}_{n,m}(\Omega) \quad (4.2)$$

Jestliže je připuštěna možnost, kde hustota v každém bodě implikuje výskyt podobné hustoty v okolním prostředí a naopak, pak je potřeba nahradit sférické harmonické funkce ve vzorci (4.2) jinými bázovými funkcemi. Ortogonalita garantující předpovědi hustoty odpovídající neshodě modelů gravitačního pole, proto přestává platit. Zjištěné narušení ortogonálních vlastností použitých funkcí poskytuje informaci o důvěryhodnosti modelu hustoty pro daný maximální sférický harmonický stupeň n_{max} . Numerickým experimentům a teoretickým výpočtům s cílem analýzy významu těchto jevů na předpovědi modelu hustoty je věnován dodatek 8.3. Další omezení pro maximální sférický harmonický stupeň odhadu hustoty je možné definovat pomocí chování síly signálu ze sekce (4.2).

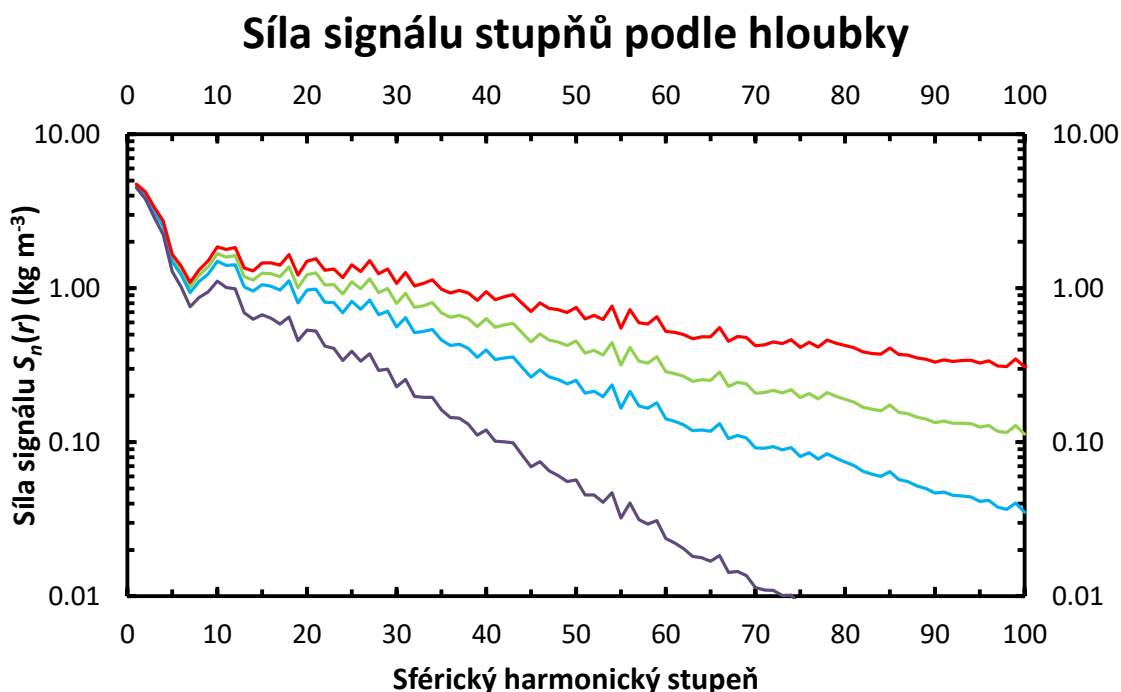
4.2 Síla signálu členů rozvoje hustoty

Pro nižší hodnoty r lze očekávat pokles síly signálu pro odhad $\rho'(r, \Omega)$. K vyhodnocení síly signálu $S_n(r)$ členů daných sférických harmonických stupňů ve vzorci (4.2) na výslednou hustotu bylo využito

odmocniny z aritmetického průměru čtverců koeficientů v rozvoji hustoty stejného stupně n . Metoda je analogická např. k [22].

$$S_n(r) = \frac{M(Rr)^n}{4\pi r_s^{2n+3}} (2n+3)\sqrt{2n+1} \left[\sum_{m=-n}^n (\bar{C}_{n,m}^\rho)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.3)$$

Ověření poklesu odhadu hustoty s hloubkou pod povrchem Měsíce způsobené matematickými vlastnostmi vzorce (4.2) se uskutečnilo pro $r = 1720, 1700$ a 1650 km. Za účelem možnosti porovnání obdržných hodnot výpočet proběhl i pro $r = r_s = 1737,4$ km. Potvrzuje se pokles odhadu hustoty pro nižší volbu r . Jev je jednoznačně patrný od sférického harmonického stupně 5. S výjimkou $r = 1737,4$ km hodnoty klesají v celé oblasti $1 \leq n \leq 850$. Proto byl model hustoty implementován pro střední sféru $r = r_s = 1737,4$ km [10].



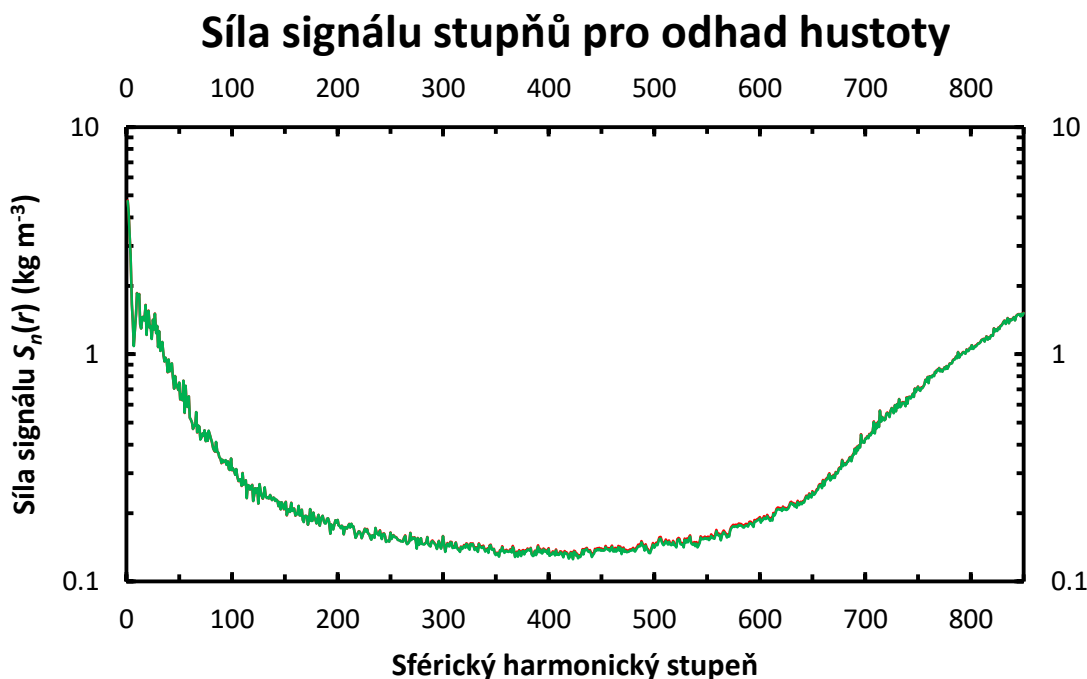
Obrázek 4.1: Síla signálu $S_n(r)$ pro jednotlivé sférické harmonické stupně v rozmezí $1 \leq n \leq 100$. Průvodič r byl nastaven na 1 737,4 km (červeně), 1 700 km (zeleně), 1 700 km (modře) a 1 650 km (fialově).

4.3 Určení koeficientů modelu hustoty

Implementace vzorce (4.2) vyžaduje odečtení sférických harmonických koeficientů modelů GL1500E a RFM_2519. Před odečtením byly parametry R koeficientů obou modelů nastaveny na stejnou hodnotu 1 748,2 km. Proběhla možnost odlišné volby hustoty $\mu(r_s)$ než předpokládané modelem RFM_2519. Koeficienty modelu RFM_2519 byly vynásobeny poměrem nově stanovené hustoty a předpokládané konstantní hustoty $2\,550 \text{ kg m}^{-3}$.

Výpočet síly signálu pro odhad modelu hustoty pocházející z jednotlivých sférických harmonických stupňů (4.3) pro očekávanou hustotu $\mu(r_s)$ zvolenou postupně $2\,540,6\text{ kg m}^{-3}$ [12] a $2\,550\text{ kg m}^{-3}$ [3] poukazuje na zanedbatelnost rozdílu výsledků obou voleb očekávané hustoty (obrázek 4.2).

Předpokládám proto, že hustota $2\,544\text{ kg m}^{-3}$ [23] také nepřináší odlišné výsledky. Vzhledem k lineární závislosti hustoty na $\mu(r)$ ve vzorci (4.1) se výsledky modelů pro různé volby očekávané hustoty budou odlišovat přibližně o rozdíl volby $\mu(r)$. Následující výpočty byly provedeny pouze pro $\mu(r_s) = 2\,550\text{ kg m}^{-3}$.



Obrázek 4.2: Síla signálu $S_n(r)$ pro jednotlivé sférické harmonické stupně v rozmezí $1 \leq n \leq 850$ za předpokladu hustoty $2\,550\text{ kg m}^{-3}$ (červeně) a $2\,540,6\text{ kg m}^{-3}$ (zeleně).

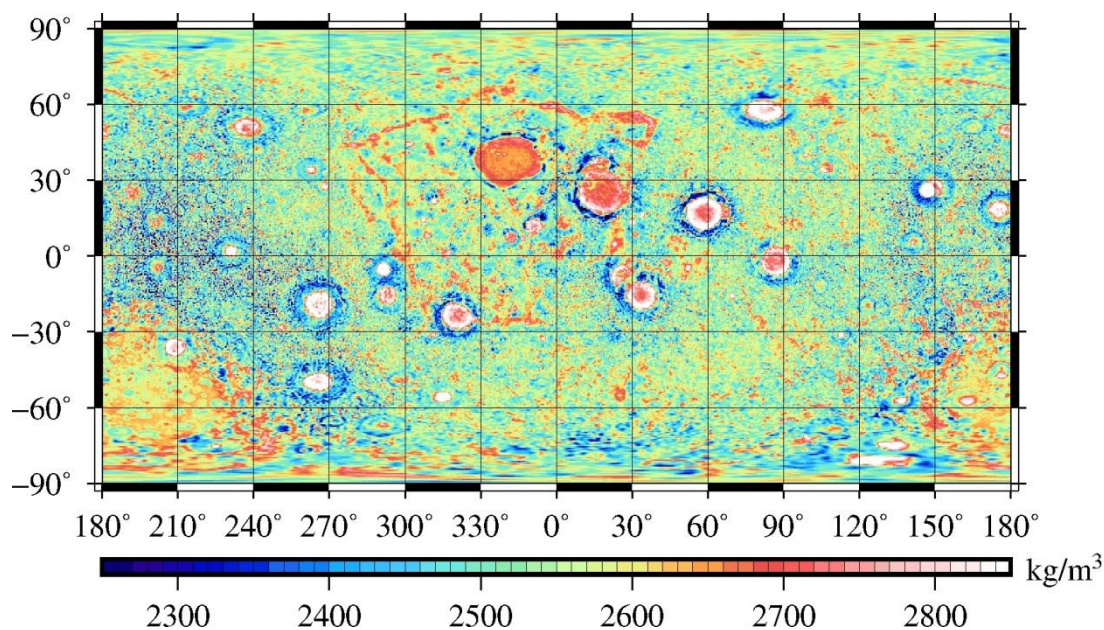
4.4 Syntéza z modelu hustoty

Pro snadnější uplatnění vzorce (4.2) k výpočtu hustoty byly jednotlivé členy upraveny tak, aby mohl být pro výpočet využit program sloužící ke sférické harmonické syntéze gravitačního potenciálu a jeho radiálních derivací. Po nastavení Newtonovy gravitační konstanty $G \approx 6,6743 \times 10^{-11}\text{ m}^3\text{ kg}^{-1}\text{ s}^{-2}$ byly koeficienty vzniklé rozdílem sférických harmonických koeficientů modelů GL1500E a RFM_2519 násobeny příslušnými faktory.

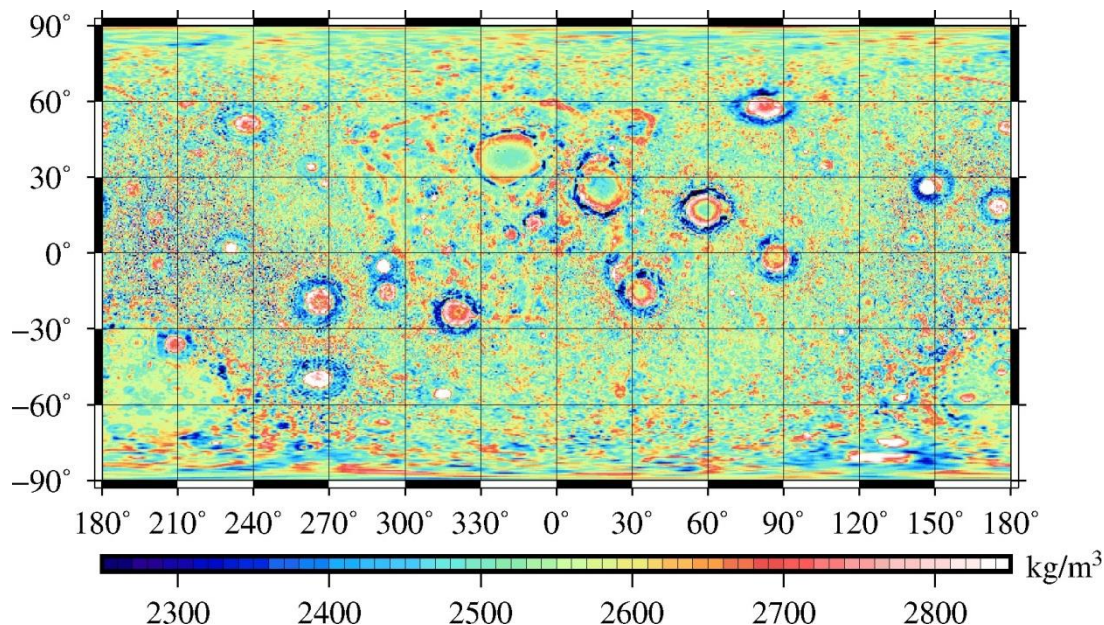
Maximální využitý sférický harmonický stupeň odhadu hustoty byl nastaven na 30, 50 a 90 (viz dodatek 8.3). Pro doplňující výpočet byl hledán nejvyšší sférický harmonický stupeň, o kterém lze očekávat, že nepřesnosti zatěžující data a důsledky nevhodné volby Kaulova pravidla jsou minimální. Síla signálu pocházející z jednotlivých sférických harmonických stupňů n klesá pro $n \lesssim 400$. Nejvyšší z využitých maximálních stupňů pro odhad hustoty proto omezují na 400.

5 VÝSLEDKY MODELU HUSTOTY

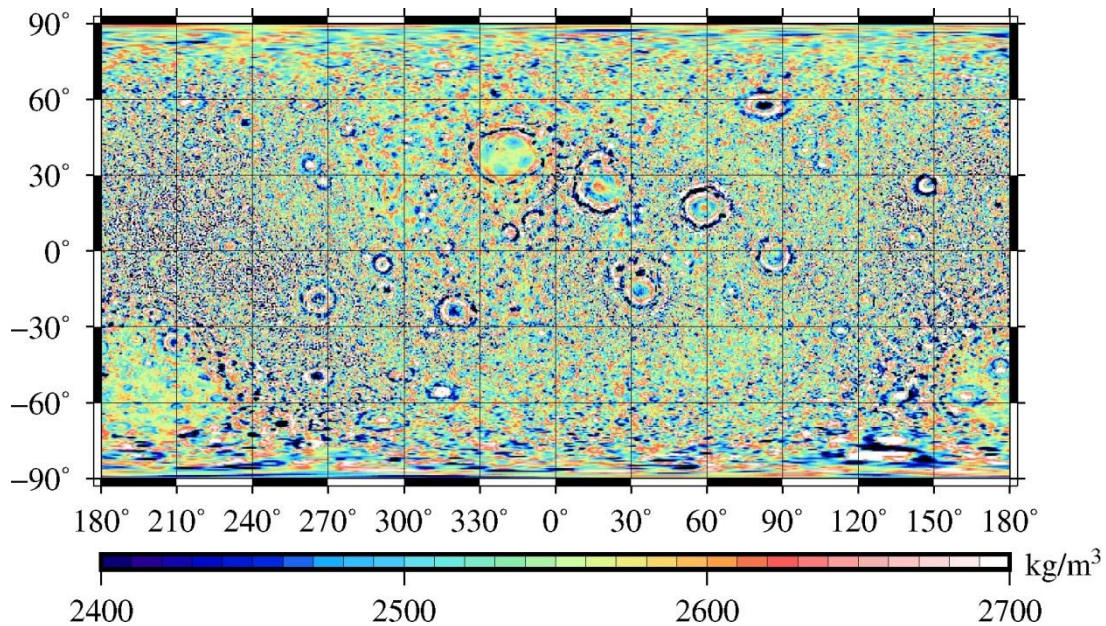
Všechny odhady hustoty byly učiněna pro střední sféru $r = 1737,4$ km. Pro maximální sférický harmonický stupeň 400 byly obdrženy hustoty na obrázcích 5.1 – 5.3. Průměrná hustota se může lišit v závislosti na volbě $\mu(r_s)$ ze vzorce (4.1). Vysoká hustota byla nalezena v oblasti South Pole-Aitken Basin, zatímco o přibližně 35 kg m^{-3} podprůměrná ve výšinách. Oblasti obklopující impaktní krátery vykazují nízké hustoty. Obecné charakteristiky výsledků modelu hustoty jsou tedy v souladu s [3] a [12]. Zřetelnost očekávaných anomálií hustoty postupně vymizí se zvyšujícím se nejmenším použitým sférickým harmonickým stupněm.



Obrázek 5.1: Odhad hustoty pro $r = 1737,4$ km s využitím sférických harmonických stupňů v rozmezí $1 \leq n \leq 400$.



Obrázek 5.2: Odhad hustoty pro $r = 1737,4$ km s využitím sférických harmonických stupňů v rozmezí $20 \leq n \leq 400$.



Obrázek 5.3: Odhad hustoty pro $r = 1737,4$ km s využitím sférických harmonických stupňů v rozmezí $50 \leq n \leq 400$.

KORELACE MEZI HUSTOTOU A DERIVACEMI GRAVITAČNÍHO POTENCIÁLU				
n_{min}	DERIVACE			
	0	1	2	3
1	0.174	0.377	0.866	0.940
20	0.010	0.136	0.713	0.961
50	0.000	0.046	0.460	0.924
100	0.000	0.016	0.268	0.797

Tabulka 5.1: Korelace mezi hustotou a rozdílem gravitačního potenciálu nebo jeho radiálních derivací mezi modely GL1500E a RFM_2519. Maximální sférický harmonický stupeň je vždy 400.

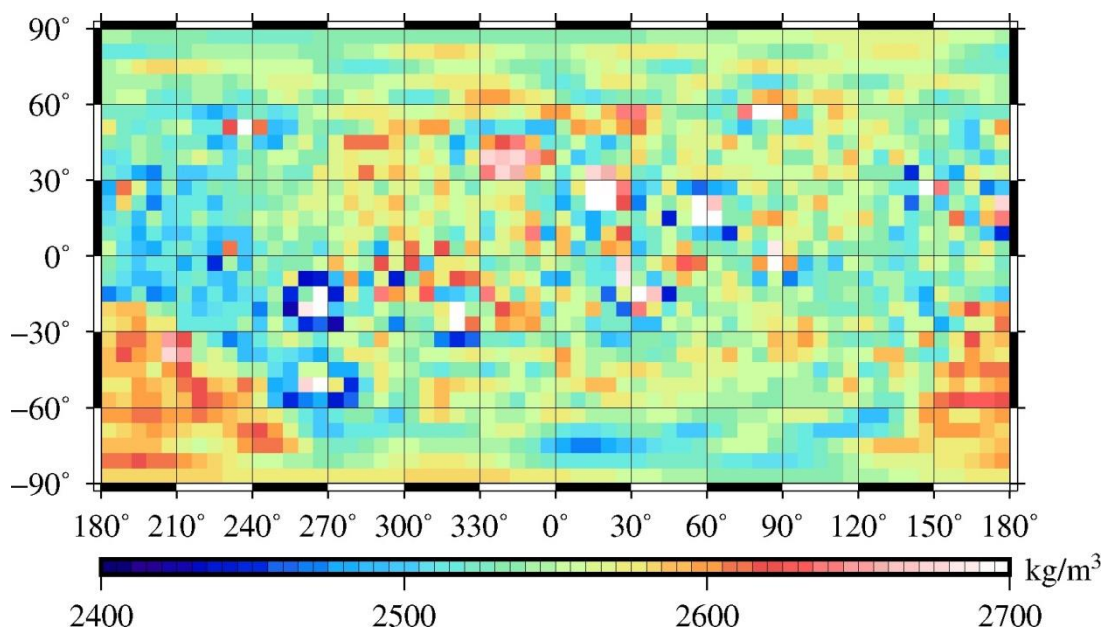
Byly vypočítány korelační koeficienty mezi povrchovou hustotou obdrženou z modelu hustoty využívající sférické harmonické koeficienty až do stupně 400 a gravitačním potenciálem a jeho první až třetí radiálními derivacemi pro $r = 1748,2$ km. Pro liché derivace byly hodnoty vynásobeny faktorem -1, aby se předešlo vlivu konvence, kde r roste směrem od těžiště tělesa.

Podle získaných dat je korelace větší pro vyšší radiální derivace gravitačního potenciálu. Výsledek se shoduje s očekáváním, neboť sférický harmonický rozvoj těchto derivací přiřazuje větší význam koeficientům korespondujícím s rozložením hmoty v oblastech blízkých povrchu tělesa. Určený model hustoty proto považují za vhodnou reprezentaci výsledků při zavedeném globálním předpokladu chování hustoty.

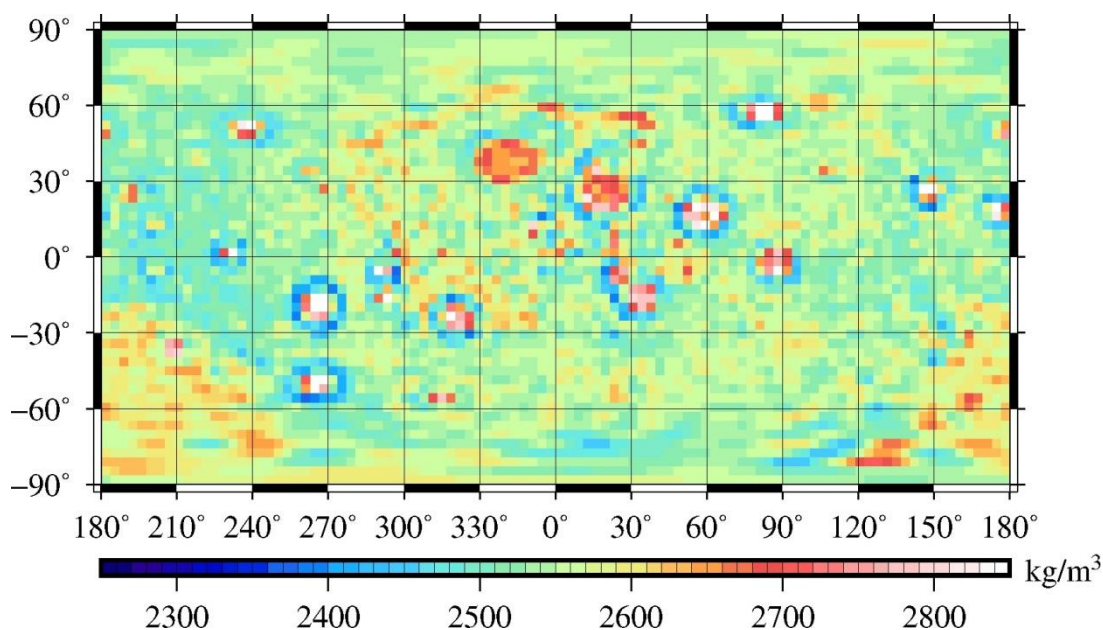
Zpravidla také platí, že korelace klesají s rostoucím nejnižším použitým sférickým harmonickým stupněm. Výjimkou je větší korelační koeficient mezi hustotou a třetí radiální derivací gravitačního potenciálu pro minimální stupeň 20 než pro stupeň 1. Potlačení koeficientů stupně nižšího než 20 zároveň zapříčiňuje ztrátu očekávané vysoké hustoty v oblasti South Pole-Aitken Basin a impaktních

krátěrech. Dále proto budu využívat odhady hustoty od minimálního sférického harmonického stupně 1.

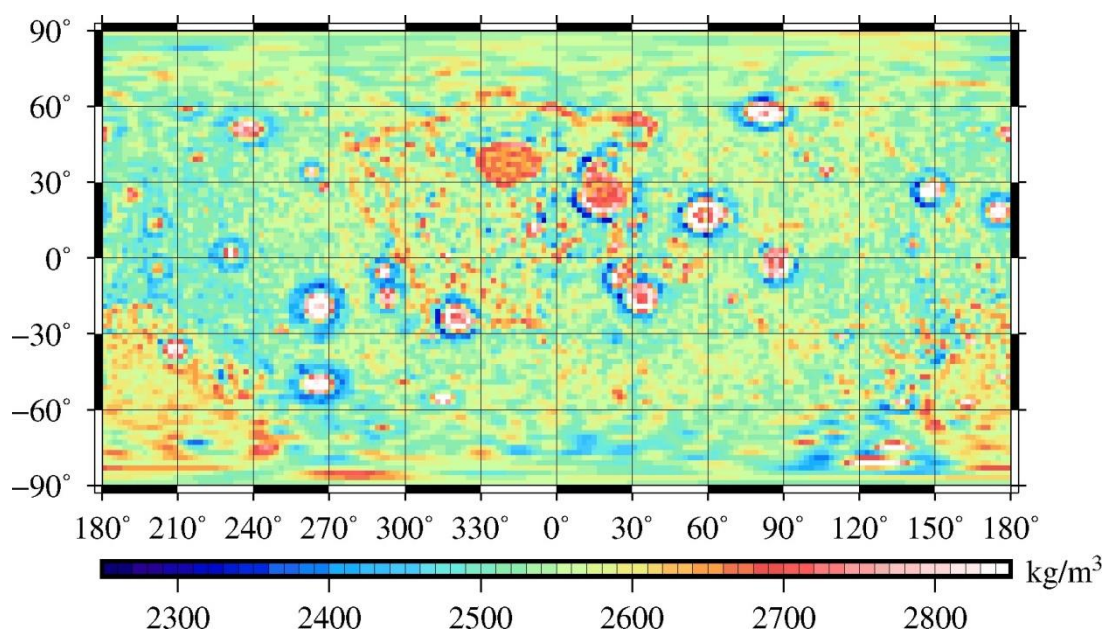
Po omezení maximálního sférického harmonického stupně na hodnoty 30, 50 a 90 byly obdrženy odhady hustoty na obrázcích 5.4 – 5.6. Z nich byly vypočítány průměrné hustoty v jednotlivých oblastech. Pro oblast South Pole-Aitken Basin byly zvoleny kromě stávajících hranic i nová ohraničení za účelem zkoumat hustotu v bodech vzdálenějších od okrajů oblasti, kde hustota nemusí být reprezentativní. Pro jednotlivé oblasti byly získány hodnoty v tabulce 5.3. Za míru nepřesnosti výpočtu je možno považovat odchylku globálních průměrných hustot od $2\,550\text{ kg m}^{-3}$.



Obrázek 5.4: Odhad hustoty pro $r = 1737,4\text{ km}$ s využitím sférických harmonických stupňů v rozmezí $1 \leq n \leq 30$.



Obrázek 5.5: Odhad hustoty pro $r = 1737,4\text{ km}$ s využitím sférických harmonických stupňů v rozmezí $1 \leq n \leq 50$.



Obrázek 5.6: Odhad hustoty pro $r = 1737,4$ km s využitím sférických harmonických stupňů v rozmezí $1 \leq n \leq 90$.

HRANICE OBLASTI SOUTH POLE-AITKEN BASIN					
OBLAST	HRANICE OBLASTI (°)				POVRCH
	λ_z	λ_v	φ_J	φ_s	
South Pole-Aitken Basin A	150.30	-119.70	-85.50	-29.70	6.46%
South Pole-Aitken Basin B	170.10	-150.30	-85.50	-29.70	2.85%

Tabulka 5.2: Dvě různá ohrazení oblasti South Pole-Aitken Basin. Nově definovaná oblast je podmnožinou původní. Formát tabulky je stejný jako pro tabulku 3.1.

PRŮMĚRNÁ HUSTOTA (kg m^{-3})				
OBLAST	MAXIMÁLNÍ SFÉRICKÝ HARMONICKÝ STUPEŇ			
	30	50	90	400
Globální	2551.0	2551.0	2551.0	2550.8
Výšiny	2514.4	2514.1	2514.5	2514.9
Nížiny	2564.4	2563.0	2563.1	2563.0
South Pole-Aitken Basin A	2582.4	2585.8	2586.0	2588.4
South Pole-Aitken Basin B	2593.6	2599.6	2598.5	2599.1

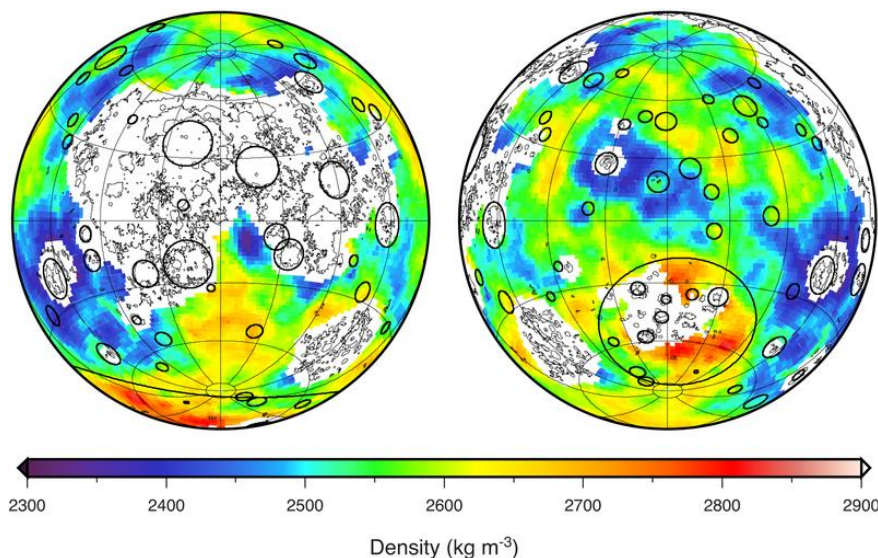
Tabulka 5.3: Průměrné hustoty v jednotlivých oblastech.

Ukazuje se, že průměrné hustoty v jednotlivých oblastech nejsou silně závislé na nejvyšším použitým sférickým harmonickým stupni. Nejvyšší průměrná hustota téměř $2\,600 \text{ kg m}^{-3}$ byla odhadnuta v South Pole-Aitken Basin. Porovnání s [12] ukazuje, že obdržená hodnota je podhodnocena o přibližně 100 - 200 kg m^{-3} . Protože volba konstanty $\mu(r_s)$ v modelu hustoty byla převzata z modelů založených na

jiných předpokladech, je vhodné chybu považovat za přibližně 100 – 200 %. Jak naznačují obrázky 5.1. – 5.3, hustota v South Pole-Aitken Basin koresponduje s členy nízkého sférického harmonického stupně rozvoje (4.2). Je tak podpořena hypotéza, že se původ nesrovnalostí nachází pod povrchem Měsíce. Hustota nižší než očekávaných $2\,550\text{ kg m}^{-3}$ [3] byla obdržena také pro oblast výšin.

6 DISKUZE

Model povrchové hustoty Měsíce využitý v této práci je založen na jednoduchých předpokladech, které nemusí být reprezentativní ve všech prostorových i spektrálních oblastech. Například důvěryhodnost odhadu v [3] je značně omezena zvláště v oblasti nížin. Indikována je také nepřesnost v kráteru South Pole-Aitken Basin (obrázek 6.1).



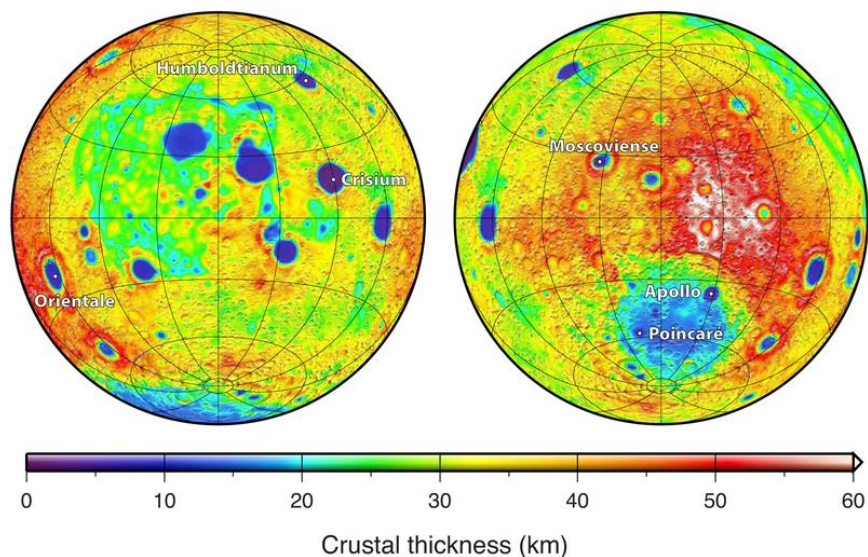
Obrázek 6.1: Odhad povrchové hustoty Měsíce. Levá část obrázku koresponduje s přivrácenou stranou, zatímco pravá s odvrácenou. Převzato z [3].

Mezi další nepřesnosti patří:

- Aproximace povrchu Měsíce pomocí sféry o konstantním poloměru při určování modelu hustoty. Nevylučují důsledek nadhodnocení ani podhodnocení hustoty v některých zkoumaných oblastech. Kombinace gravimetrických dat s topografickými upravující v závislosti na planetocentrické délce a šířce velikost objemu hmoty, ve které připouštíme výskyt nerovnoměrností hustoty, může přispět k upřesnění výsledků.
- Závislost na volbě předpisů popisujících chování odhadnuté hustoty. K prověření významu jevu může sloužit popis odhadu hustoty pomocí neortogonálních bázových funkcí při použití širší škály vstupních parametrů než v dodatku 8.3.2. Další přístupy mohou být založeny například na [21].
- Riziko, že nejistota odhadu v některých oblastech implikuje globální nepřesnosti modelu hustoty. Hustota je volena tak, aby poskytovala vysvětlení rozdílu polí generovaných modely GL1500E a RFM_2519. Jestliže je odhad v některých oblastech mylný, pak je pro vysvětlení nesrovnalostí zapotřebí odlišná hustota i v ostatních lokalitách. Protože však obrázky 5.1 – 5.3 poukazují na význam koeficientů nízkého sférického harmonického stupně pro odhad hustoty v South Pole-Aitken Basin, pak se lze domnívat, že v tomto případě vysvětlení této nesrovnalosti spočívá v podpovrchových nerovnoměrnostech hustoty.

Porovnání stávajících modelů hustoty s výsledky modelu zavedeného v této práci uskutečněné pro vyšší minimální sférický harmonický stupeň může poskytnout informaci o velikosti lokálních podpovrchových struktur korespondujících s různými oblastmi spektra gravitačního potenciálu. Bude tak moci být odhadnuta hloubka výskytu anomálií a jejich vliv na vypočtené korelace nejen pro minimální sférický harmonický stupeň roven 1.

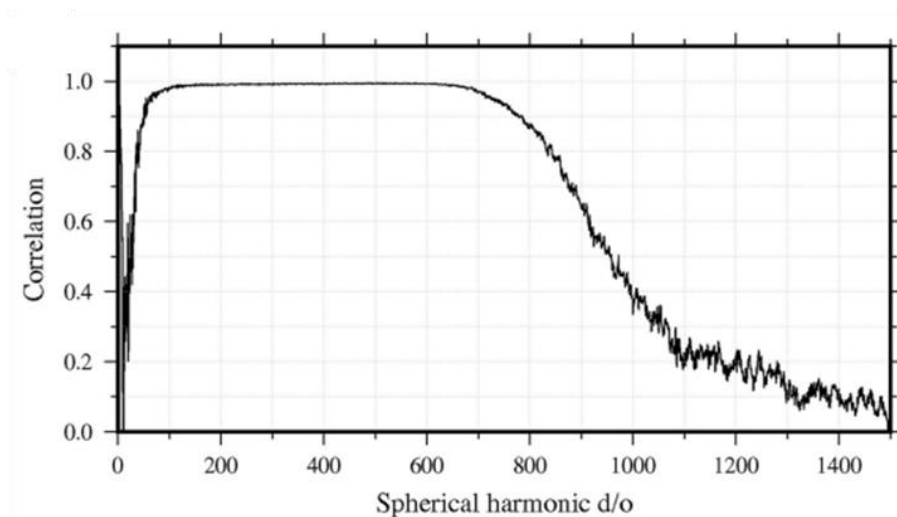
Tloušťka kůry v oblasti výšin přesahuje hodnotu v South Pole-Aitken Basin. Příčina výraznější neshody modelů hustoty v oblasti South Pole-Aitken Basin než ve výšinách může proto souviset s rozhraním měsíční kůry a pláště, které se v oblasti South Pole-Aitken Basin nachází v nižší hloubce pod podrchem.



Obrázek 6.2: Odhad tloušťky měsíčního pláště. Levá část obrázku koresponduje s přivrácenou stranou, zatímco pravá s odvrácenou. Převzato z [3].

V této práci byly také vypočítány prostorové korelace mezi modely GL1500E a RFM_2519 pro gravitační potenciál a jeho první tři radiální derivace. Zjištěnými společnými charakteristikami v oblastech výšin, nížin, South Pole-Aitken Basin i globálního výpočtu byl růst korelačního koeficientu s minimálním sférickým harmonickým stupněm v nízkofrekvenční oblasti spektra, postupné dosažení hodnot blízkých 1 a následný pokles při vysokých minimálních sférických harmonických stupních. Nevysvětlitelnou zůstává vyšší korelace gravitačního potenciálu v porovnání s jeho první radiální derivací v oblasti South Pole-Aitken Basin.

Podobné chování vykazují spektrální korelace gravitačního potenciálu generovaného modelem předpokládajícím konstantní hustotu a GL1500E vypočítané v [25] (obrázek 6.3). Za příčinu dřívějšího poklesu prostorové globální korelace gravitačního potenciálu (obrázek 3.2) obsažení oblasti spektra až do sférického harmonického stupně 1500 v prostorových korelacích. Zároveň je tak poskytnuto možné vysvětlení menších korelací pro nízké sférické harmonické stupně spektrální korelace vůči prostorové (obrázek 9.7). Nahrazením modelu GL1500E ve výpočtech za účelem vhodnější volby Kaulova pravidla by byla umožněna přesnější analýza výsledků ve vysokofrekvenční oblasti spektra gravitačního potenciálu.



Obrázek 6.3: Spektrální korelace gravitačního potenciálu generovaného modelem předpokládajícím konstantní hustotu a GL1500E. Převzato z [25].

Prostorová korelace gravitačního potenciálu a jeho radiálních derivací uplatněná v této práci umožnila oddělení výpočtů pro jednotlivé oblasti. Hodnoty obdržené pro jednotlivé minimální sférické harmonické stupně jsou ovlivněny vlastnostmi spektra gravitačního potenciálu vyšších frekvencí. Porovnání určeného modelu povrchové hustoty se stávajícími poskytuje odhad množství hmoty zapojené v lokálních podpovrchových nerovnoměrnostech hustoty, které nebyly zaznamenány globálními předpisy jejího chování.

7 ZÁVĚR

Cíl práce spočíval v analýze prostorových korelací modelů gravitačního pole Měsíce GL1500E a RFM_2519. Na odlišnosti obdržených globálních výsledků od hodnot v oblastech výšin, nížin a South Pole-Aitken Basin bylo nahlíženo také z perspektivy navrženého modelu hustoty.

Ukazuje se, že závislosti vypočítaných korelačních koeficientů na minimálním využitém sférickém harmonickém stupni v syntéze gravitačního potenciálu a jeho první, druhé a třetí radiální derivace podléhají lokalitě, která je předmětem zájmu. Nejvyšší podobnost polí vykazuje oblast výšin, zatímco v nížinách se pole odlišují nejvíce. Možnou příčinou závislosti na oblastí jsou podpovrchové nerovnoměrnosti rozložení hmoty.

Rozpor 100 – 200 % anomálie hustoty mezi vypočteným odhadem a dosavadními modely v regionu South Pole-Aitken Basin poukazuje na nerovnoměrnosti hustoty nezachycené globálními předpisy jejího očekávaného chování. O přibližně 35 kg m^{-3} je podhodnocen odhad hustoty ve výšinách. Je tak pro minimální sférický harmonický stupeň modelů roven 1 naznačena míra, do které zjištěné chování korelace mezi modely GL1500E a RFM_2519 koresponduje s místními podpovrchovými jevy. Z důvodu obtížnosti odhadu hustoty v oblasti nížin se zde neuskutečnilo porovnání se stávajícími odhady hustoty.

Práce zkoumá méně obvykle používanou prostorovou korelaci modelů gravitačního pole Měsíce. Užitečným k analýze výsledků se ukázal být i vlastní model hustoty. Numerické experimenty s normovanými Legendreovými přidruženými funkcemi 1. druhu pomohly zhodnotit důvěryhodnost některých aproximací v metodách odhadu hustoty a mohou být potenciálně přínosné i pro další, často používané a v této práci nezkoumané, metody modelování hustoty.

8 DODATKY

8.1 Legendreovy polynomy a přidružené funkce 1. druhu. Sférické harmonické funkce

Tento dodatek shrnuje vlastnosti Legendreových polynomů a přidružených funkcí 1. druhu a sférických harmonických funkcí zásadní pro metody použité ve zbytku práce. Jejich důkazy mohou být dohledány v mnoha zdrojích, v následujícím textu se proto omezím na [25] a [26].

Legendreův polynom 1. druhu stupně n je funkce s definičním oborem $(-1,1)$ daná Rodriguesovým vzorcem:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad (8.1)$$

kde n nabývá libovolné nezáporné celé hodnoty.

Legendreovy přidružené funkce 1. druhu stupně n a řádu m definujeme:

$$P_{n,m}(x) = (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x), \quad (8.2)$$

kde m je kladné celé číslo a zároveň $m \leq n$. Pro $m = 0$ budu v dalším textu používat konvenci, kde:

$$P_n(x) = P_{n,0}(x). \quad (8.3)$$

Legendreovy přidružené funkce 1. druhu mají na intervalu $(-1,1)$ právě $n - m$ různých nulových bodů.

Jestliže $n \neq n'$, pak jsou Legendreovy přidružené funkce 1. druhu stejného řádu m ortogonální:

$$\int_{-1}^1 P_{n,m}(x) P_{n',m}(x) dx = 0 \quad (8.4)$$

Druhá mocnina normy je dána vztahem:

$$\|P_{n,m}(x)\|^2 = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \quad (8.5)$$

Pro usnadnění numerických výpočtů budu využívat normalizované Legendreovy polynomy 1. druhu $\bar{P}_{n,m}(x)$:

$$\bar{P}_{n,m}(x) = \sqrt{\frac{2(2n+1)(n-m)!}{1 + \delta_{m,0} (n+m)!}} P_{n,m}(x), \quad (8.6)$$

kde $\delta_{m,0}$ označuje Kroneckovu deltu hodnot $m, 0$.

Vytvořující funkce Legendreových polynomů 1. druhu splňuje následující vztah:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n = (1 - 2xt + t^2)^{-\frac{1}{2}}. \quad (8.7)$$

Záruka rovnosti platí, jestliže $|t| < 1$ [6, s.743].

V numerických výpočtech se pro výpočty hodnot normalizovaných Legendreových funkcí 1. druhu využívají rekurzivní vztahy:

$$\begin{aligned} \bar{P}_{n,m}(x) = & \sqrt{\frac{(2n-1)(2n+1)}{(n-m)(n+m)}} x \bar{P}_{n-1,m}(x) \\ & - \sqrt{\frac{(2n+1)(n+m-1)(n-m-1)}{(n-m)(n+m)(2n-3)}} \bar{P}_{n-2,m}(x), \end{aligned} \quad (8.8)$$

$$\bar{P}_{n,m}(x) = \sqrt{\frac{(2n-1)(2n+1)}{(n-m)(n+m)}} x \bar{P}_{n-1,m}(x), \quad (8.9)$$

$$\bar{P}_{n,n}(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2n}} \sqrt{1-x^2} \bar{P}_{n-1,n-1}(x). \quad (8.10)$$

Explicitní vyjádření Legendreových funkcí 1. druhu nízkého stupně umožní pro libovolné $x \in \langle 1,1 \rangle$ výpočet funkcí až do stupňů dosahujících desítek tisíc [27].

Sférické harmonické funkce jsou funkcemi definovanými na sféře. Necht' Ω označuje bod na sféře, a tedy zastupuje za sférickou délku λ a šířku φ . Normovaná sférická harmonická funkce stupně n a řádu m je pak definována jako:

$$\bar{Y}_{n,m}(\Omega) = \bar{P}_{n,m}(\sin \varphi) \cos m\lambda, \quad \forall m \in \mathbb{Z}^+, \quad (8.11)$$

$$\bar{Y}_{n,m}(\Omega) = \bar{P}_{n,|m|}(\sin \varphi) \sin |m|\lambda, \quad \forall m \in \mathbb{Z}^-. \quad (8.12)$$

Ortogonalita platí pro každou dvojici různých sférických harmonických funkcí:

$$\int_{\varphi=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\lambda=0}^{2\pi} \bar{Y}_{n,m}(\Omega) \bar{Y}_{n',m'}(\Omega) \cos \varphi \, d\lambda d\varphi = 0 \quad (8.13)$$

Druhá mocnina normy sférických harmonických funkcí je dána následujícím vztahem:

$$\|\bar{Y}_{n,m}(\Omega)\|^2 = \int_{\varphi=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\lambda=0}^{2\pi} \bar{Y}_{n,m}(\Omega)^2 \cos \varphi \, d\lambda d\varphi = 4\pi. \quad (8.14)$$

Necht' θ označuje sférickou vzdálenost bodů Ω, Ω' na sféře o jednotkovém poloměru. Podle součtové věty pak platí následující vztah mezi Legendreovým polynomem 1. druhu a normovanými sférickými harmonickými funkcemi:

$$P_n(\cos \theta) = \frac{1}{2n+1} \sum_{m=-n}^n \bar{Y}_{n,m}(\Omega) \bar{Y}_{n,m}(\Omega'). \quad (8.15)$$

8.2 Korelační koeficient

Nesrovnalosti mezi modely byly vyjádřeny pomocí korelačního koeficientu gravitačního potenciálu a jeho radiálních derivací obdržených pomocí modelů GL1500E a RFM_2519. Korelační koeficient $\rho(X, Y)$ mezi dvěma soubory dat X, Y je dán následujícím vztahem:

$$\rho(X, Y) = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sigma_X \sigma_Y} \quad (8.16)$$

kde $E(X)$ označuje očekávanou hodnotu nějakého souboru dat X a σ_X označuje jeho směrodatnou odchylku. Hodnota korelačního koeficientu vždy leží na intervalu $\langle -1, 1 \rangle$. Vyšší hodnoty korelačního koeficientu odpovídají více korelované dvojici veličin. Jestliže je hodnota rovna 0, pak dvojice veličin nevykazuje korelaci. [28, s. 110]

8.3 Ortogonalita bázových funkcí rozvoje gravitačního potenciálu

Předpokládejme, že pro veličinu $\rho'(r, \Omega)$ ze vzorce (4.2) platí následující vztah:

$$\rho'(r, \Omega) = \int_{\Omega} \rho''(r, \Omega) v[g(\Omega, \Omega', r), r] \, d\Omega, \quad (8.17)$$

kde funkce $g(\Omega, \Omega', r)$ označuje nejkratší sférickou vzdálenost bodů r, Ω a r, Ω' a $v[g(\Omega, \Omega', r)]$ představuje bezrozměrnou vážící funkci splňující pro každou hodnotu r :

$$\int_{\Omega} v[g(\Omega, \Omega', r), r] \, d\Omega = 1. \quad (8.18)$$

Pak platí:

$$\int_{\Omega} \int_{r=0}^{r_s} \rho''(r, \Omega) \bar{Z}_{n,m}(r, \Omega) dr d\Omega = \bar{C}_{n,m}, \quad (8.19)$$

kde

$$\bar{Z}_{n,m}(r, \Omega) = \left(\frac{r}{r_s}\right)^{n+2} \int_{\Omega} v[g(\Omega, \Omega', r), r] \bar{Y}_{n,m}(\Omega) d\Omega. \quad (8.20)$$

Předpokládejme, že odhad hustoty můžeme vyjádřit pomocí bázových funkcí $\bar{Z}_{n,m}(r, \Omega)$. Pak je veličina $\rho''(r, \Omega)$ dána:

$$\rho''(r, \Omega) = \frac{\sum_j \bar{Z}_j(r, \Omega) \det A_j}{\det A}, \quad (8.21)$$

kde prvky matice A splňují:

$$a_{ij} = \int_{\Omega} \int_{r=0}^{r_s} \bar{Z}_i(r, \Omega) \bar{Z}_j(r, \Omega) dr d\Omega, \quad (8.22)$$

kde i a j zastupují za dvojici sférického harmonického stupně a řádu a matice A_j vznikne z matice A nahrazením j -tého sloupce sloupcovým vektorem koeficientů \bar{C}_i [29, s. 207].

Jestliže jsou funkce $\bar{Z}_i(r, \Omega)$ a $\bar{Z}_j(r, \Omega)$ ortogonální pro různá i, j , pak lze $\rho'(r, \Omega)$ aproximovat pomocí (4.2). V sekci 8.3.1 budou hledány neortogonální dvojice bázových funkcí $\bar{Z}_i(r, \Omega)$ a $\bar{Z}_j(r, \Omega)$ a numerické zjištění míry ztráty ortogonalit je předmětem sekce 8.3.2.

8.3.1 Bázové funkce ztrácející ortogonalitu

Pro výpočet funkcí $\bar{Z}_i(r, \Omega)$ byla zvolena množina vážících funkcí, kterou lze zapsat ve tvaru

$$v[g(\Omega, \Omega', r), r] = b(r)e^{-[g(\Omega, \Omega', r)k]^2}. \quad (8.23)$$

Konstanta k je vyjádřena v převrácených jednotkách vzdálenosti. S rostoucím k model připouští prudší změny hustoty. Z praktických důvodů zavádím i konstantu k' , vyjadřující k pomocí převrácené hodnoty odpovídajícího úhlu na sféře o poloměru $r = r_s = 1\,737,4$ km. Účel bezrozměrné funkce funkce $b(r)$ spočívá v normování vážící funkce tak, aby platila rovnost (8.18).

V úvahu připadá nespočetně mnoho různých vážících funkcí alternativních k (8.23). Předpokládám, že důsledky pro ztrátu ortogonalit závisí především na volbě konstanty k , a nikoliv na konkrétní funkci. Závislost na druhé mocnině vzdálenosti bodů umožňuje aproximaci pomocí nahrazení integrálu na pravé straně vzorce (8.20) součinem obdobných integrálů přes sférickou šířku a délku.

Pro funkce nahrazující sférické harmonické funkce $\bar{Z}_{n,m}(\varphi, \lambda)$ platí²:

$$\bar{Z}_{2n,m}(r, \varphi, \lambda) = +\bar{Z}_{2n,m}(r, -\varphi, \lambda), \quad (8.24)$$

$$\bar{Z}_{2n+1,m}(r, \varphi, \lambda) = -\bar{Z}_{2n+1,m}(r, -\varphi, \lambda), \quad (8.25)$$

Jestliže zanedbáme vliv zakřivení povrchu tělesa, pak se vyskytují též následující vlastnosti:

$$\bar{Z}_{n,m}(r, \varphi, \lambda) \approx \bar{Z}_{n,m}(r, \varphi, \lambda) \cos m\lambda, \quad \forall m \geq 0 \quad (8.26)$$

$$\bar{Z}_{n,|m|}(r, \varphi, \lambda) \approx \bar{Z}_{n,|m|}(r, \varphi, \lambda) \sin|m|\lambda, \quad \forall m < 0 \quad (8.27)$$

Předmětem zájmu zkoumání ztráty ortogonality proto budou pouze dvojice funkcí téhož řádu a stupně lišících se o sudé číslo, pro něž záruka ortogonality neplatí. Díky aproximacím (8.26) a (8.27) numerický experiment proběhne pro funkce vzniklé váženým aritmetickým průměrem hodnot normovaných Legendreových přidružených funkcí 1. druhu v okolních bodech, a nikoliv sférických harmonických funkcí.

8.3.2 Numerické vyhodnocení ztráty ortogonality

Numerické experimenty probíhaly diskretizací integrálů součinů zkoumaných funkcí na intervalu $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$. Krok mezi jednotlivými integračními body byl zvolen $0,125^\circ$ a maximální a minimální hodnoty nastaveny na hodnotu vzdálenou polovinu této velikosti kroku od okrajových bodů intervalu. Výpočet proběhl pro vybrané hodnoty k' .

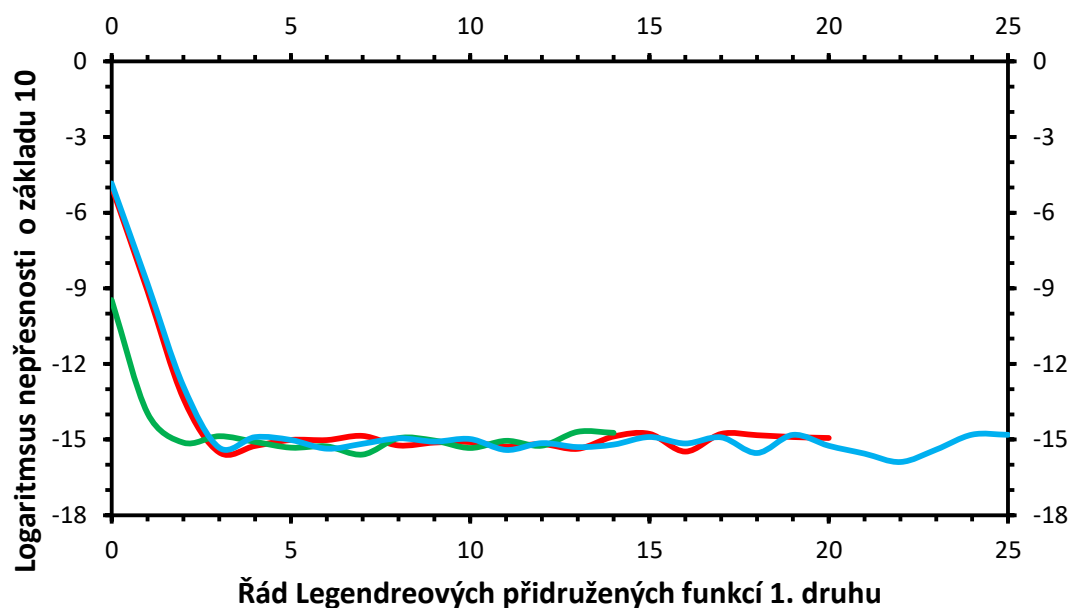
Před zkoumáním ztráty ortogonality došlo k prověření dostatečnosti přesnosti použitého programu. Výsledky obdržené pro normované Legendreovy přidružené funkce 1. druhu byly porovnány s hodnotami předpovězenými jejich matematickými vlastnostmi. Testována byla ortogonalita, norma, počet nulových bodů a hodnoty v bodě $\varphi \approx \frac{\pi}{2}$. Ve výpočtu byly uplatněny rekurze (8.8) – (8.10).

V průběhu testování programu byla první z dvojice vždy Legendreova přidružená funkce 1. druhu stupně n nabývajícího postupně hodnot 15, 20, 25 a všech přípustných řádů pro tyto stupně. Druhou funkcí z dvojice představovaly všechny Legendreovy přidružené funkce 1. druhu stejného řádu jako první funkce z dvojice a řádu $n' \leq n$ takového, že $n - n'$ je sudé číslo. Od výsledků byly odečteny jejich teoreticky předpovězené protějšky.

Obrázek 8.1 prezentuje odmocninu z aritmetického průměru druhých mocnin rozdílů obdržených a předpovězených hodnot v závislosti na stupni a řádu první funkce z dvojice. Počty nulových bodů a hodnot v bodě $\varphi \approx \frac{\pi}{2}$ se shodují s předpovědí (obrázek 8.2; červená křivka). Numerické nepřesnosti v důsledku využitého programu budu nadále zanedbávat.

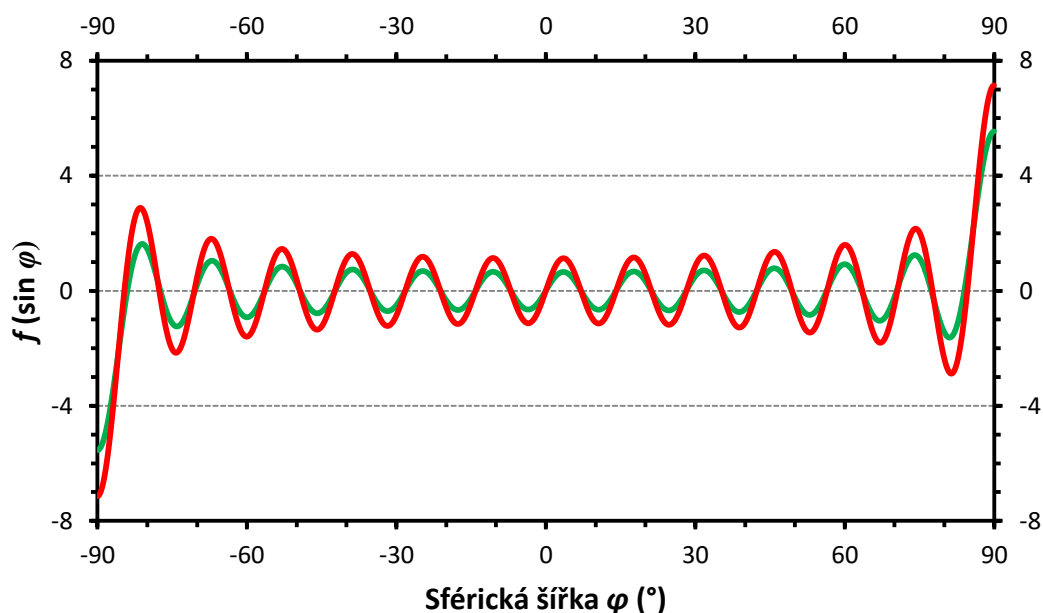
² Autorské odvození vzorců. Zdroj se nepodařilo dohledat.

Nepřesnost použitého programu



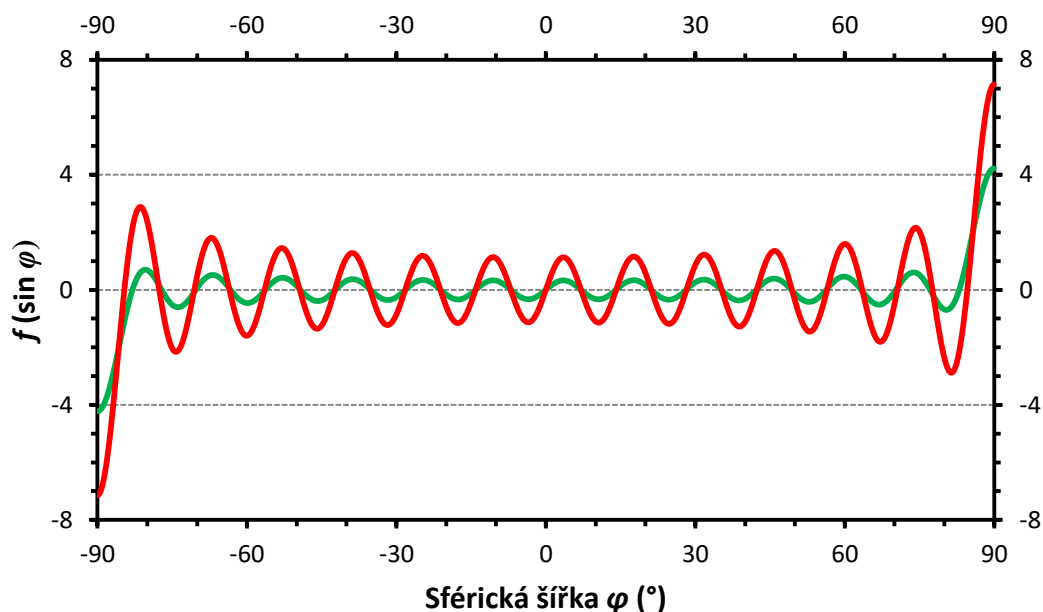
Obrázek 8.1: Nepřesnost použitého programu v závislosti na řádu Legendreových přidružených funkcí 1. druhu pro stupně 25 (modře), 20 (červeně) a 15 (zeleně). Na svislou osu je nanášen logaritmus zjištěných hodnot o základu 10.

Získané funkce stupně 25, řádu 0, $k = 0,3/1^\circ$



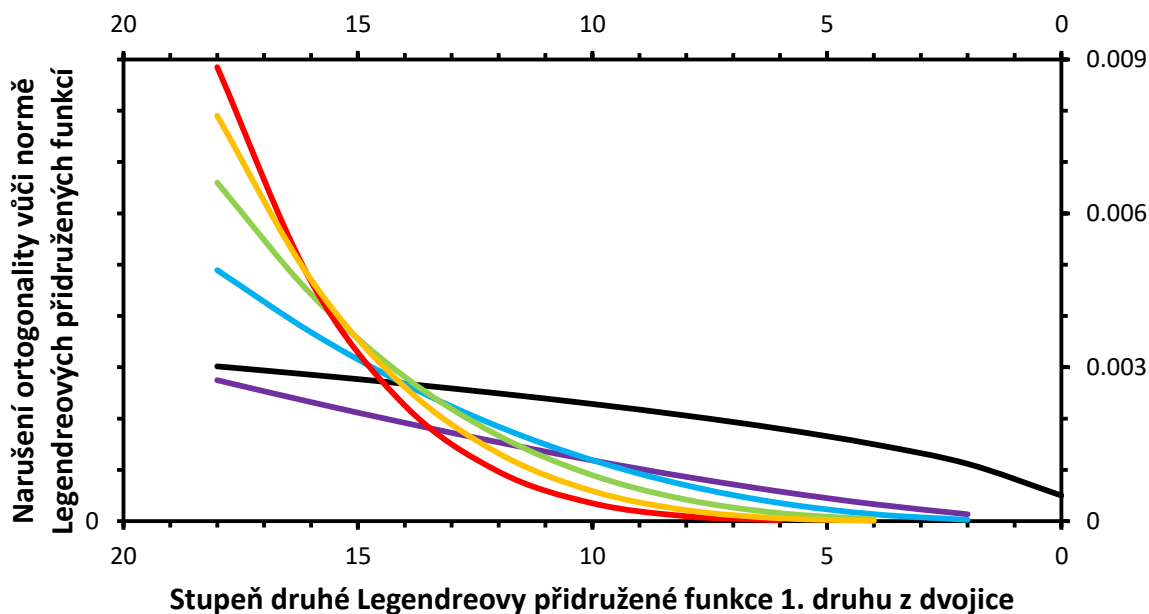
Obrázek 8.2: Normovaný Legendreův polynom stupně 25 (červeně) a funkce vzniklá vážením jejích hodnot v okolních vyhodnocených 120 bodech vzájemně vzdálených $0,125^\circ$ (zeleně). Konstanta k' byla nastavena na $0,3/1^\circ$.

Získané funkce stupně 25, řádu 0, $k = 0,2/1^\circ$



Obrázek 8.3: Normovaný Legendreův polynom stupně 25 (červeně) a funkce vzniklá vážením jejích hodnot v okolních vyhodnocených 300 bodech (zeleně). Konstanta k' byla nastavena na $0,2/1^\circ$.

Ztráta ortogonalitě vůči teoretické normě

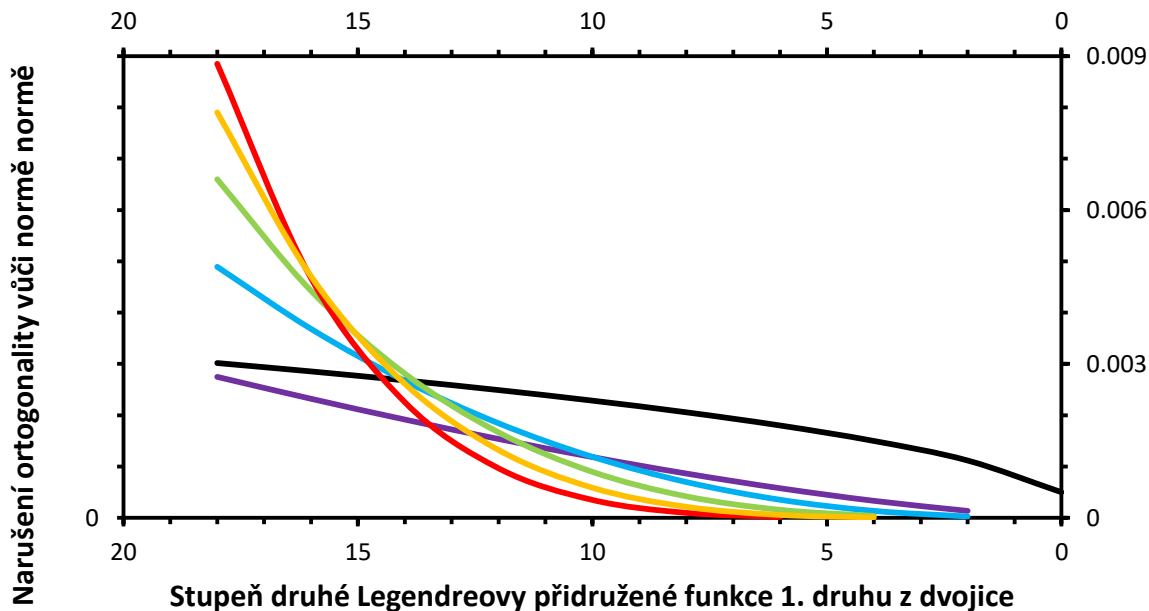


Obrázek 8.4: Míra neplatnosti ortogonalitě funkcí odvozených z Legendreových přidružených funkcí 1. druhu. Stupeň první z dvojice je 20 a řád 0 (černě), 1 (fialově), 2 (modře), 3 (zeleně), 4 (oranžově) a 5 (červeně). Stupeň druhé funkce odpovídá vodorovné ose a od 20 se liší vždy o sudé číslo. Řády obou funkcí se shodují. Konstanta k' byla nastavena na $1/1^\circ$. Hodnoty jsou děleny čtvercem normy normalizovaných Legendreových přidružených funkcí příslušného řádu.

Data po dosazení $k' = 1/1^\circ$ pro $n = 15, 20, 25$ a všechny příslušné řády se shodují, že k nejvýraznější ztrátě ortogonalitě nově získaných funkcí v porovnání s druhou mocninou normy

Legendreových přidružených funkcí 1. druhu dochází, jestliže se stupně obou funkcí liší pouze o 2 (obrázek 8.4). Ke stejnému závěru vedla data dělená součinem norem obou funkcí (obrázek 8.5). Dále proto budou předmětem zájmu pouze ty dvojice funkcí odvozených z normovaných Legendreových přidružených funkcí 1. druhu, jejichž stupně se liší o 2.

Ztráta ortogonality vůči reálné normě



Obrázek 8.5: Míra neplatnosti ortogonality funkcí odvozených z Legendreových přidružených funkcí 1. druhu. Formát grafu je stejný jako u obrázku 7.4. Hodnoty jsou děleny součinem norem obou zkoumaných funkcí.

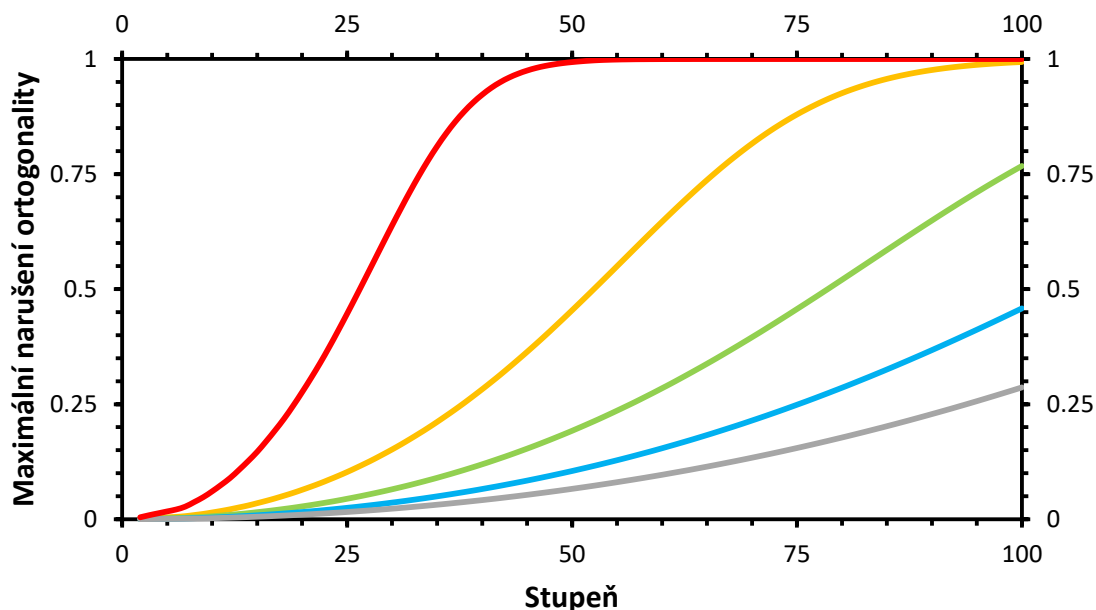
Pro každý stupeň byl nalezen nejvyšší poměr míry narušení ortogonality příslušné funkce a funkce stupně menšího o 2 se součinem norem zkoumaných funkcí. Výpočet proběhl postupně pro $k' = 1/1^\circ, 0,8/1^\circ, 0,6/1^\circ, 0,4/1^\circ, 0,2/1^\circ$. Nejvyšší sférické harmonické stupně, kde je míra porušení ortogonality pro jednotlivá k' menší než 0,05, 0,10 a 0,20, jsou prezentovány tabulkou 8.1.

BODY NADMĚRNÉHO NARUŠENÍ ORTOGONALITY				
k'	Tolerance narušení ortogonality			
	0.05	0.10	0.15	0.20
0.2	9	12	15	17
0.4	17	24	29	34
0.6	26	36	44	50
0.8	35	48	59	67
1.0	43	60	73	84

Tabulka 8.1: Nejvyšší stupně, pro které data na Obrázek 8.6 nabývají hodnot 0,05, 0,10, 0,15 a 0,20.

Obrázek 8.6 znázorňuje všechna data, z nichž byla zjištěna ta uvedená v tabulce 7.1.

Maximální narušení ortogonality podle k'



Obrázek 8.6: Míra neplatnosti ortogonality funkcí odvozených z Legendreových přidružených funkcí 1. druhu. Stupeň první z dvojice funkcí je vyjádřen na vodorovné ose, stupeň druhé funkce je o 2 menší. Hodnoty jsou děleny součinem norem obou zkoumaných funkcí a nanášeny jsou pro řády, kde nabývají pro jednotlivé stupně maxim. Konstanta k' je volena $1/1^\circ$ (šedě), $0,8/1^\circ$ (modře), $0,6/1^\circ$ (zeleně), $0,4/1^\circ$ (žlutě) a $0,2/1^\circ$ (červeně).

Jelikož obrázky 8.2 a 8.3 indikují značnou podobnost mezi normalizovanými Legendreovými přidruženými funkcemi a funkcemi z nich odvozených váženým průměrem okolních hodnot, interpretuji míru ztráty ortogonality jako pokles této podobnosti. Pozorovanému poklesu jejich norem nepřičítám význam, neboť příčinou jevu je očekávání podobné hustoty v bodech s odlišnými hodnotami sférických harmonických funkcí a ze stejného důvodu jev vymizí. Jako aproximace pak bude sloužit vzorec (4.2).

Data poukazují na značný význam volby parametru k' , resp. k a tolerance maximální míry narušení ortogonality funkcí odvozených z normalizovaných Legendreových přidružených funkcí 1. druhu na stanovení nejvyššího sférického harmonického stupně modelu hustoty. Odhad hustoty se proto uskutečnil s využitím maximálních stupňů 30, 50 a 90 ve vzorci (4.2). Výpočty byly doplněny o odhad hustoty nezohledňující diskutovanou ztrátu ortogonality, jehož maximální sférický harmonický stupeň je stanoven na základě chování síly signálu pro odhad hustoty (sekce 4.2).

REFERENCE

- [1] Torge W.: *Gravimetry*, 1989. De Gruyter, Berlin, New York, 465 p.
- [2] McSween H. Y. Jr., Moersch J. E., Burr D. M., Dunne W. M., Emery J. P., Kah L. C., McCanta M. C.: *Planetary geoscience*, 2020. Cambridge University Press, New York, USA. Dostupné z: <https://doi.org/10.1017/9781316535769>
- [3] Wieczorek M. A., Neumann G. A., Nimmo F., Kiefer W. S., Taylor G. J., Melosh H. J., Phillips R. J., Solomon S. C., Andrews-Hanna J. C., Asmar S. W., Konopliv A. S., Lemoine F. G., Smith D. E., Watkins M. M., Williams J. G., Zuber M. T.: *The crust of the Moon as seen by GRAIL*, 2013. Science, DOI: 10.1126/science.1231530
- [4] Moritz, H.: *The Figure of the Earth: Theoretical Geodesy and the Earth's Interior*, 1990. Wichmann, Karlsruhe, Germany. Dostupné z: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1990fetg.book.....M>
- [5] Barthelmes F.: *Definition of functionals of the geopotential and their calculation from spherical harmonic models. Theory and formulas used by the calculation service of the International Centre for Global Earth Models (ICGEM)*, 2013. Revised Edition, GFZ German Research Centre for Geosciences. Dostupné z: <https://doi.org/10.2312/GFZ.b103-09026>
- [6] Arfken G. B., Weber H. J.: *Mathematical methods for physicists*, 2005. 6. vydání. Elsevier Academic press. Dostupné z: <https://msashigri.files.wordpress.com/2016/11/methods-of-mathemacial-for-physicists.pdf>
- [7] Šprlák M, Han S.-C. *On the use of spherical harmonic series inside the minimum Brillouin sphere: theoretical review and evaluation by GRAIL and LOLA satellite data*, 2021. Earth-Science Reviews, 222. Dostupné z: <https://doi.org/10.1016/j.earscirev.2021.103739>
- [8] Sneeuw N.: Global spherical harmonic analysis by least-squares and numerical quadrature methods in historical perspective, 1994. *Geophysical Journal International*, 118, 707–716. Dostupné z: <https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1994.tb03995.x>
- [9] Kaula W. M.: *Determination of the Earth's gravitational field*, 1963, Reviews of Geophysics, 1(4), pp. 507–551. Dostupné z: <https://doi.org/10.1029/RG001i004p00507>
- [10] Smith. D. E., Zuber M. T., Neumann G. A., Mazarico E., Lemoine F. G., Head J. W. III, Lucey P. G., Aharonson O., Robinson M. S., Sun X., Torrence M. H., Barker M. K., Oberst J., Duxbury T. C., Mao D., Barnouin O. S., Jha K., Rowlands D. D., Goossens S., Baker D., Bauer S., Gläser P., Lemelin M., Rosenburg M., Sori M. M., Whitten J., McClanahan T.: *Summary of the results from the lunar orbiter laser altimeter after seven years in lunar orbit*, 2017. Icarus, 283, pp. 70–91. Dostupné z: <https://doi.org/10.1016/j.icarus.2016.06.006>
- [11] Konopliv A. S., Park R. S., Yuan D.-N., Asmar S. W., Watkins M. M., Williams J. G., Fahnestock E., Kruizinga G., Paik M., Strelakov D., Harvey N., Smith D. E., Zuber M. T.:

High-resolution lunar gravity fields from the GRAIL primary and extended missions, 2014. Geophysical Research Letters 41 (5), pp. 1452–1458. Dostupné z: <https://doi.org/10.1002/2013GL059066>

[12] Šprlák M., Han S.-C., Featherstone W. E.: *Crustal density and global gravitational field estimation of the Moon from GRAIL and LOLA satellite data*, 2020. Planetary and Space Science, 192, 105032. Dostupné z: <https://doi.org/10.1016/j.pss.2020.105032>

[13] Zuber M. T., Smith D. E., Lehman D. H., Hoffman T. L., Asmar S. W., Watkins M. M.: *Gravity Recovery and Interior Laboratory (GRAIL): Mapping the Lunar Interior from Crust to Core*, 2013. Space Science Reviews 178, no. 1: pp. 3–24. Dostupné z: <http://dx.doi.org/10.1007/s11214-012-9952-7>

[14] Klipstein W. M., Arnold B. W., Enzer D. G., Ruiz A. A., Tien J. Y., Wang R. T., Dunn C. E.: *The Lunar Gravity Ranging System for the Gravity Recovery and Interior Laboratory (GRAIL) Mission, 2013*. In: Zuber, M. T., Russell, C. T. (eds) *GRAIL: Mapping the Moon's Interior*. Springer, New York, NY. Dostupné z: https://doi.org/10.1007/978-1-4614-9584-0_4

[15] Lemoine F. G., Goossens S., Sabaka T. J., Nicholas J. B., Mazarico E., David D. Rowlands D. D., Loomis B. D., Chinn D. S., Caprette D. S., Neumann G. A., Smith D. E., Zuber M. T.: *High-degree gravity models from GRAIL primary mission data*, 2013. Journal of Geophysical Research: Planets, 118, pp. 1676–1698. Dostupné z: <https://doi.org/10.1002/jgre.20118>

[16] Šprlák M., Sebera J., Vařko M., Novák P.: *Spherical integral formulas for upward/downward continuation of gravitational gradients onto gravitational gradients*, 2014. Journal of Geodesy, 88(2), pp. 179–197, <https://doi.org/10.1007/s00190-013-0676-6>

[17] Wessel P., Luis J. F., Uieda L., Scharroo R., Wobbe F., Smith W. H. F., Tian D.: *The Generic Mapping Tools version 6. Geochemistry, Geophysics, Geosystems*, 2019. 20, pp. 5556–5564. Dostupné z: <https://doi.org/10.1029/2019GC008515>

[18] Vondrak R., Keller J., Chin G. et al.: *Lunar Reconnaissance Orbiter (LRO): Observations for Lunar Exploration and Science*, 2010. Space Science Reviews 150, pp. 7–22. Dostupné z: <https://doi.org/10.1007/s11214-010-9631-5>

[19] Tooley C.: *Lunar Reconnaissance Orbiter Spacecraft & Objectives*, 2006. NASA Goddard Space Flight Center. Dostupné z: <https://science.nasa.gov/wp-content/uploads/2024/01/tooley-scojectives-51906.pdf>

[20] Jansen J. C., Andrews-Hanna J. C., Li Y., Lucey P. G., Taylor G. J., Goossens S., Lemoine F. G., Mazarico E., Head J. W., Milbury C., Kiefer W. S., Soderblom J. M., Zuber M. T.: *Small-scale density variations in the lunar crust revealed by GRAIL*, 2017. Icarus, 291, pp. 107–123. Dostupné z: <https://doi.org/10.1016/j.icarus.2017.03.017>

[21] Moritz H.: *A set of continuous density distributions within a sphere compatible with a given external potential*, 1989. *Gerlands Beiträge zur Geophysik*, 98, pp. 185–192. ISSN: 0016-8696

[22] van Gelderen, M., Koop, R: *The use of degree variances in satellite gradiometry*, 1997. *Journal of Geodesy* 71, pp. 337–343. Dostupné z: <https://doi.org/10.1007/s001900050101>

[23] Han, S.-C.: *Determination and localized analysis of intersatellite line of sight gravity difference: Results from the GRAIL primary mission*, 2013. *Journal of Geophysical Research: Planets*, 118, pp. 2323–2337. Dostupné z: <https://doi.org/10.1002/2013JE004402>

[24] Nádeník Z.: *Kulové funkce pro geodézii, Matematická příprava ke studiu knihy W.A. Heiskanen – H. Moritz: Physical Geodesy, 1967*, 2000. Výzkumný ústav geodetický, topografický a kartografický, Zdiaby, Praha–východ.

[25] Šprlák M., Han S.-C., Featherstone W. E.: *Forward modelling of global gravity fields with 3D density structures and an application to the high-resolution (~ 2 km) gravity fields of the Moon*, 2017. *Journal of Geodesy* 92, pp. 847–862 (2018). Dostupné z: <https://doi.org/10.1007/s00190-017-1098-7>

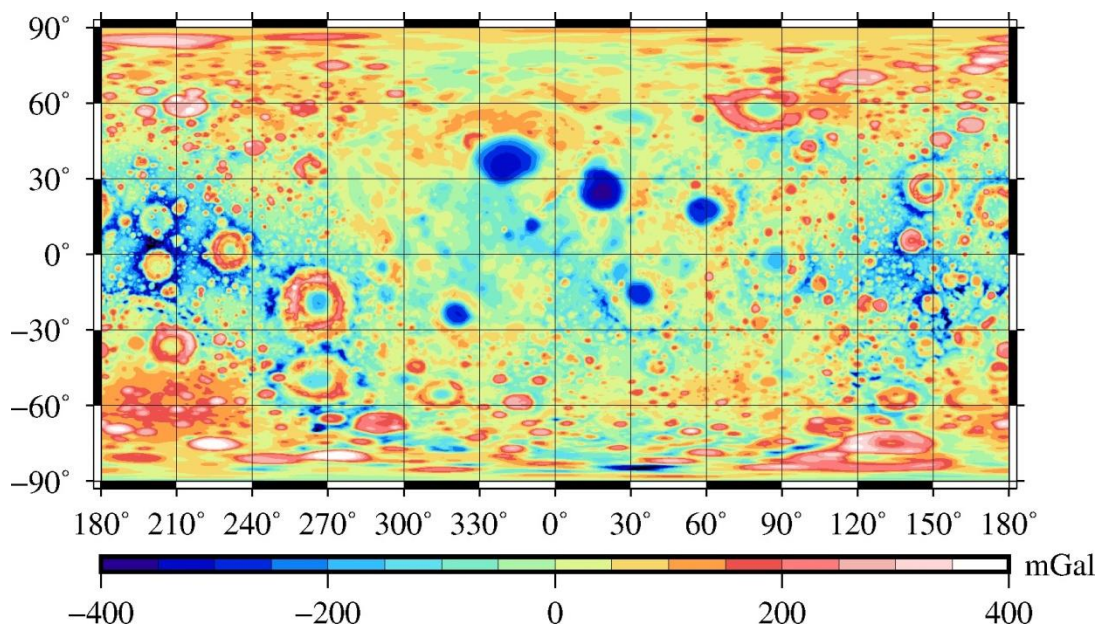
[26] Lima F. M. S.: *Lecture Notes on Legendre Polynomials: Their Origin and Main Properties*, 2022. arXiv. Dostupné z: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2210.10942>

[27] Fukushima T.: *Numerical computation of spherical harmonics of arbitrary degree and order by extending exponent of floating point numbers*, 2012. *Journal of Geodesy* 86, pp. 271–285. Dostupné z: <https://doi.org/10.1007/s00190-011-0519-2>

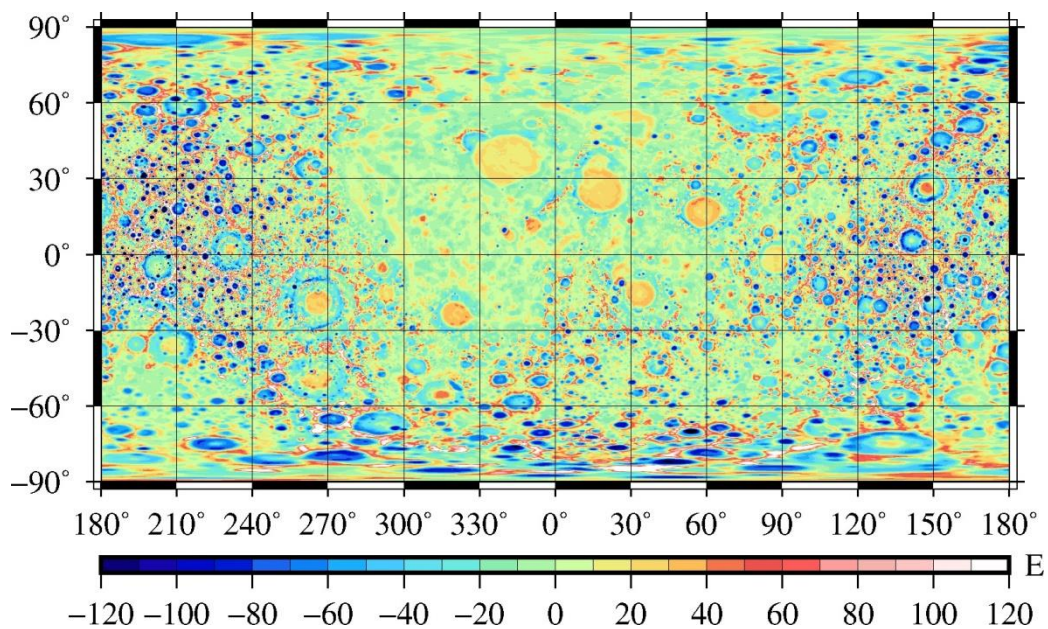
[28] Hebák P., Kahounová J.: *Počet pravděpodobnosti v příkladech*. Šesté, nezměněné vydání. Praha: Informatorium, 2010. ISBN: 978-80-7333-077-4

[29] Bartsch H.-J.: *Matematické vzorce*. Třetí, revidované vydání. Praha: Mladá fronta, 1996. ISBN: 80-204-0607-7

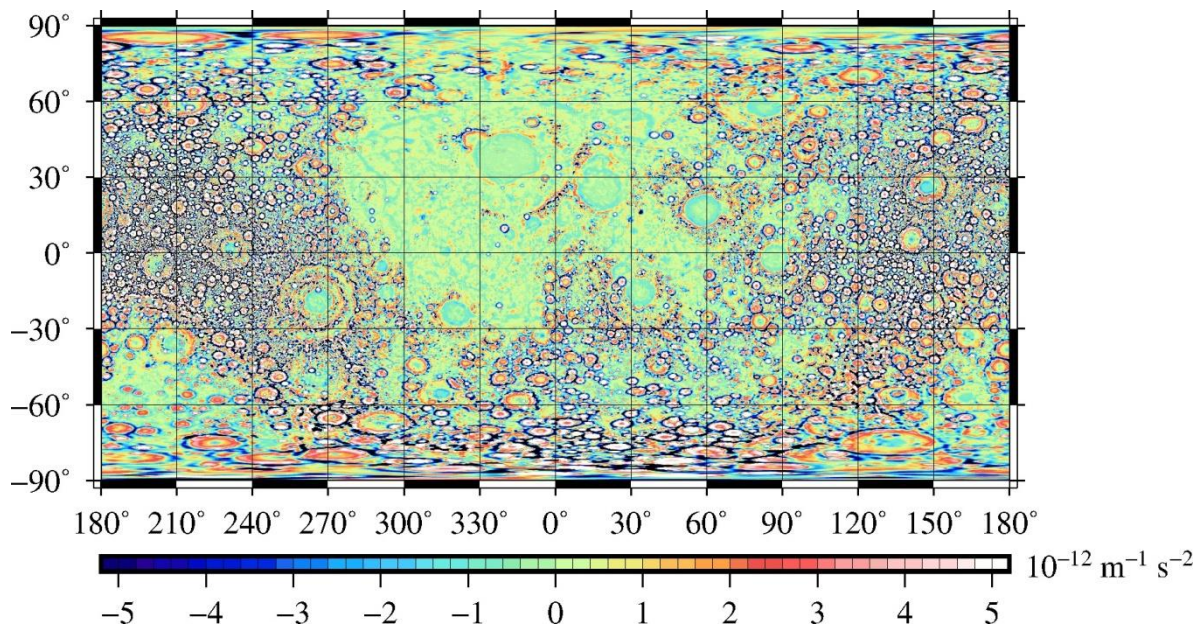
9 PŘÍLOHY



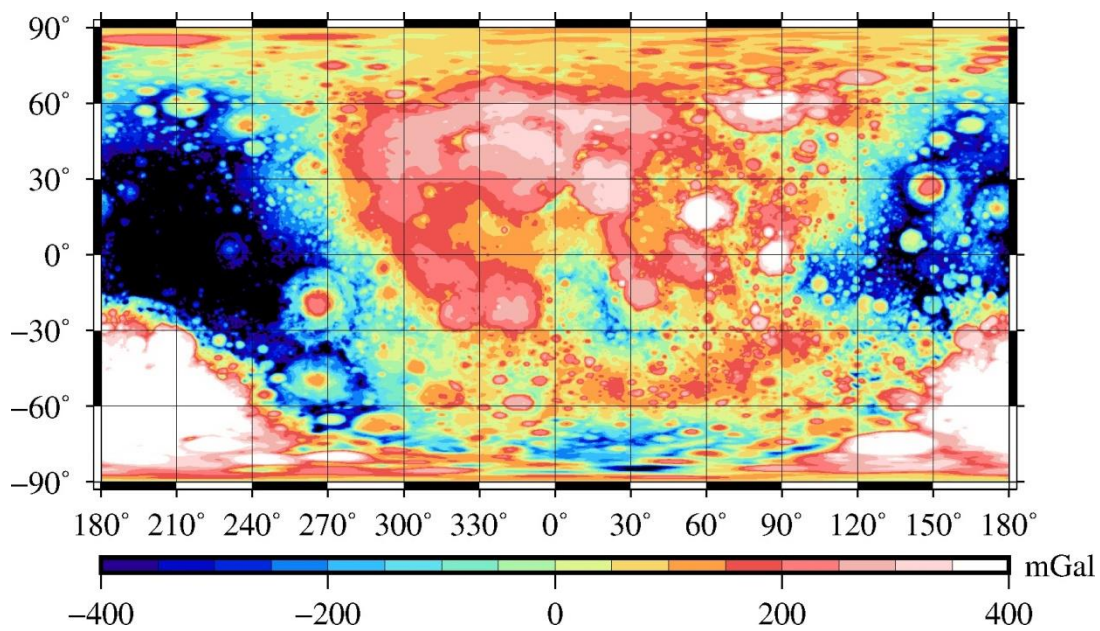
Obrázek 9.1: První radiální derivace gravitačního potenciálu z modelu GL1500E pro $r = 1748,2$ km.



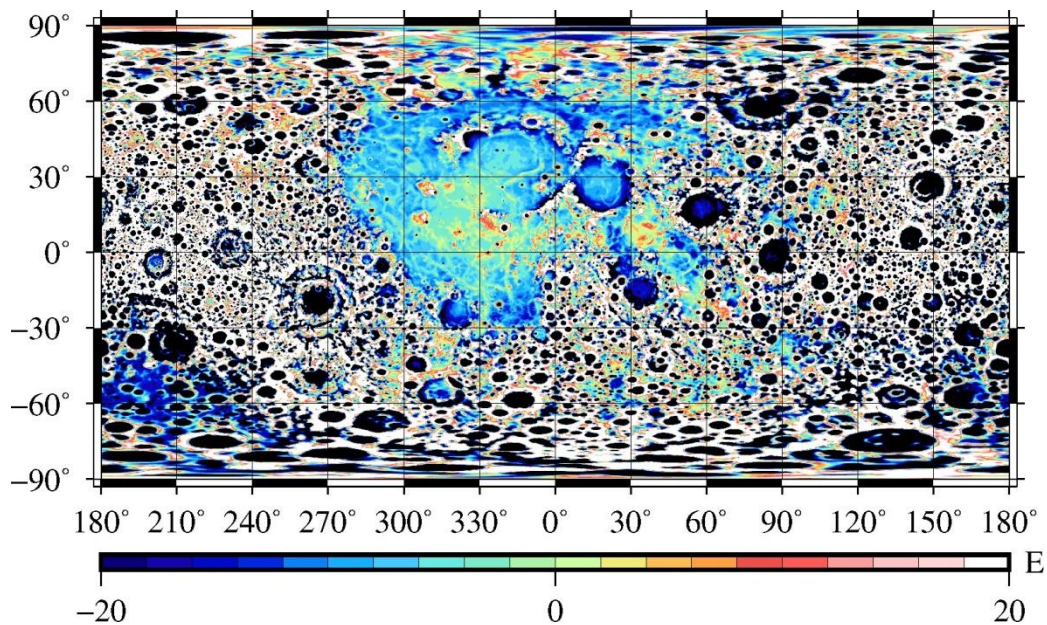
Obrázek 9.2: Druhá radiální derivace gravitačního potenciálu z modelu GL1500E pro $r = 1748,2$ km.



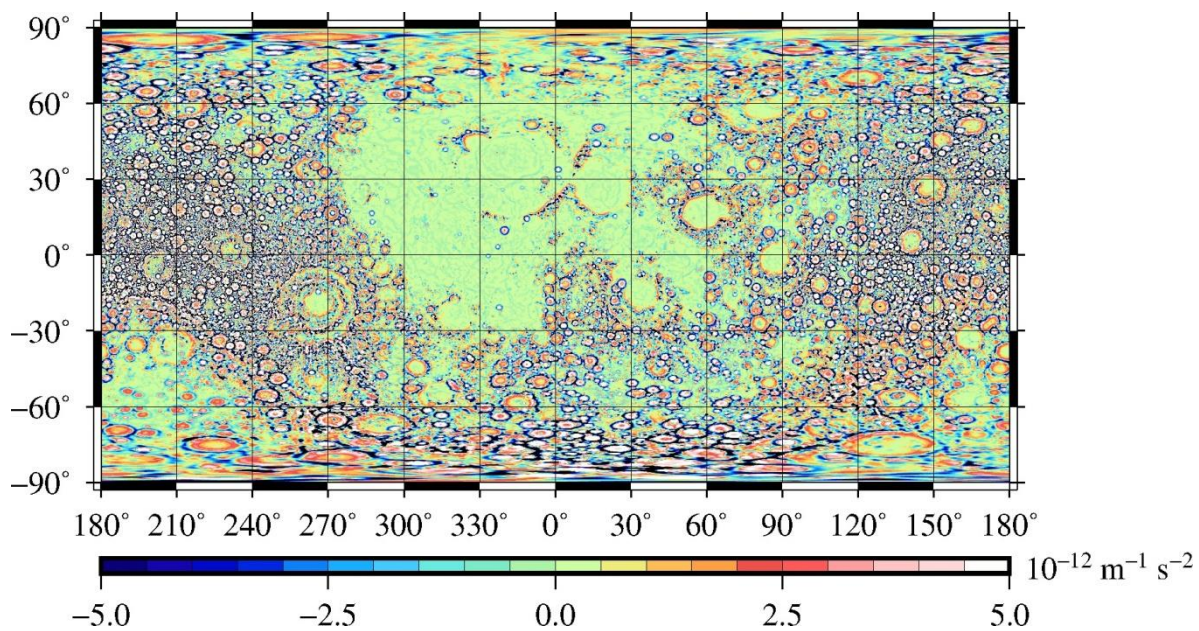
Obrázek 9.3: Třetí radiální derivace gravitačního potenciálu z modelu GL1500E pro $r = 1748,2$ km.



Obrázek 9.4: První radiální derivace gravitačního potenciálu z modelu RFM_2519 pro $r = 1748,2$ km.

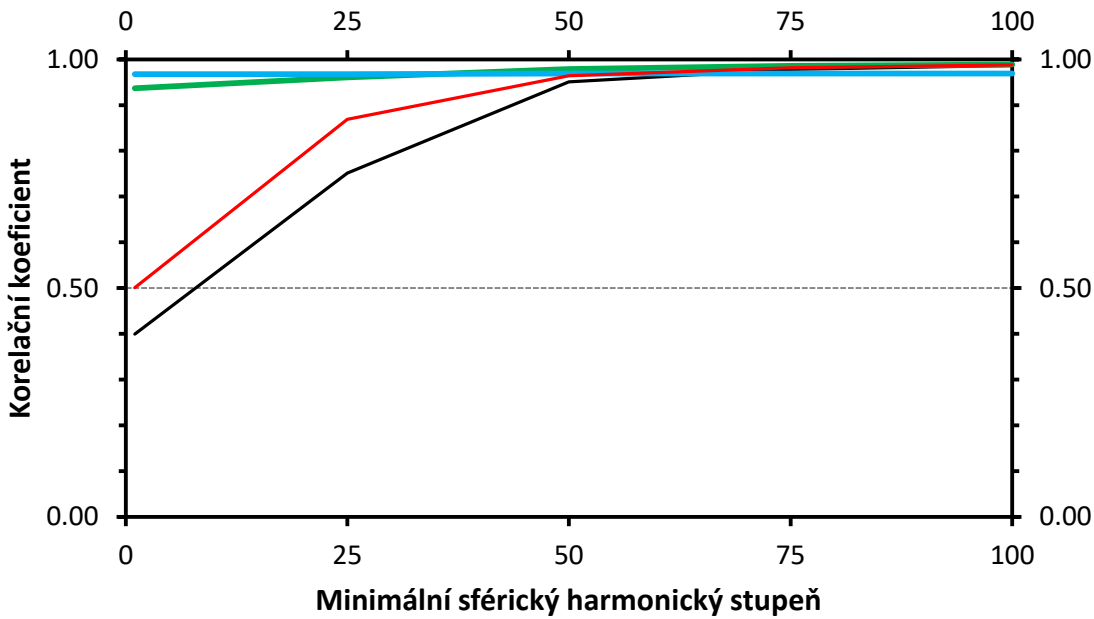


Obrázek 9.5: Druhá radiální derivace gravitačního potenciálu z modelu RFM_2519 pro $r = 1748,2$ km.



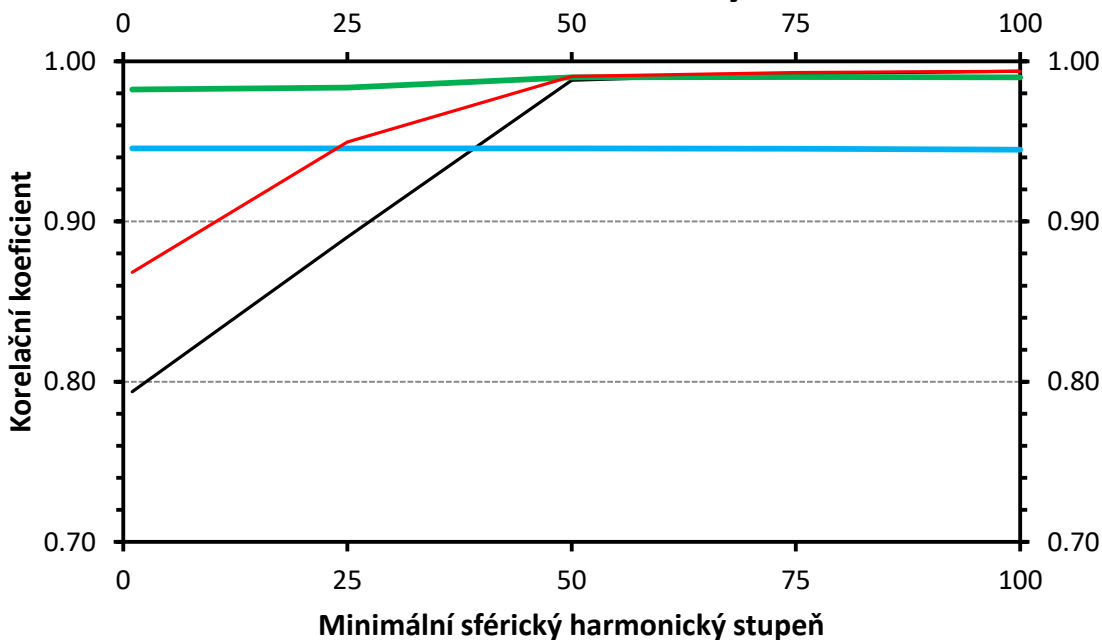
Obrázek 9.6: Třetí radiální derivace gravitačního potenciálu z modelu RFM_2519 pro $r = 1748,2$ km.

Globální korelace

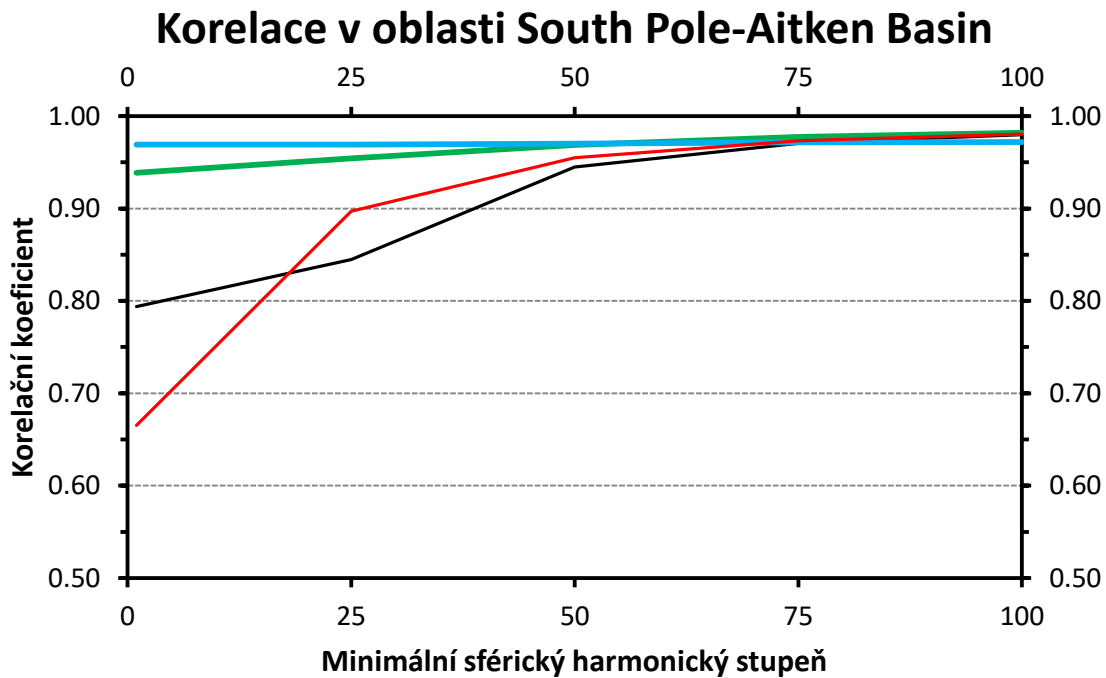


Obrázek 9.7: Globálně vypočítaný korelační koeficient mezi modely GL1500E a RFM_2519 pro minimální sférický harmonický stupeň 1, 25, 75, 100. Gravitační potenciál a jeho první 3 radiální derivace odpovídají postupně černé, červené, zelené a modré křivce.

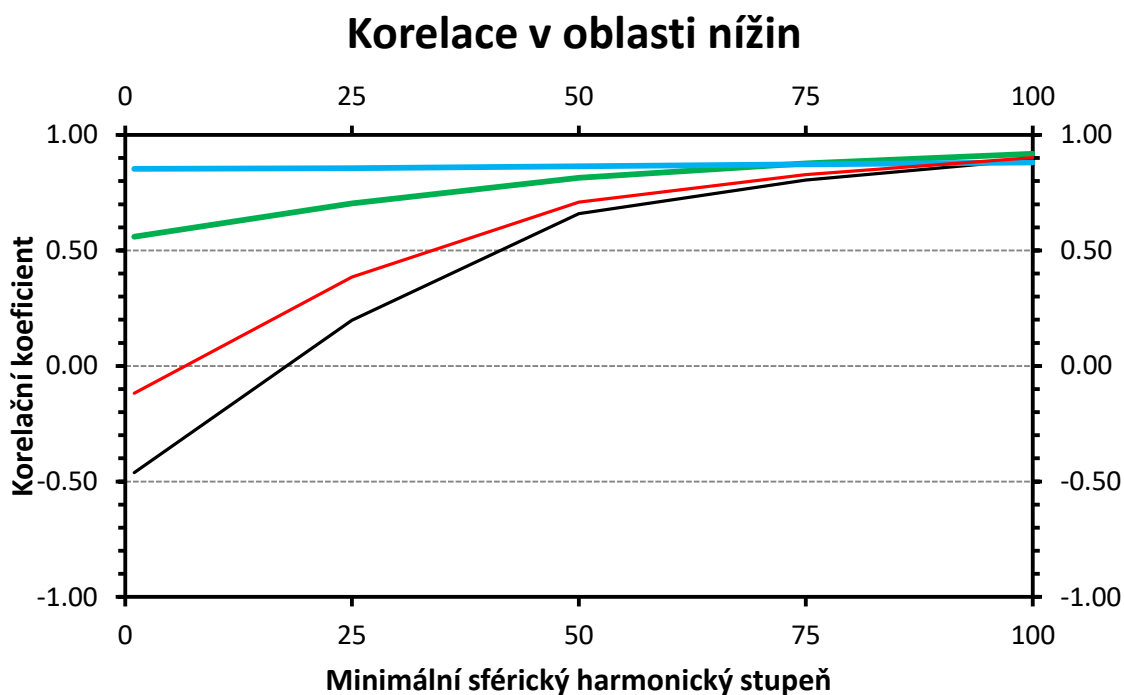
Korelace v oblasti výšin



Obrázek 9.8: Korelační koeficient mezi modely GL1500E a RFM_2519 v oblasti výšin pro minimální sférický harmonický stupeň 1, 25, 75, 100. Gravitační potenciál a jeho první 3 radiální derivace odpovídají postupně černé, červené, zelené a modré křivce.



Obrázek 9.9: Korelační koeficient mezi modely GL1500E a RFM_2519 v oblasti South Pole-Aitken Basin pro minimální sférický harmonický stupeň 1, 25, 75, 100. Gravitační potenciál a jeho první 3 radiální derivace odpovídají postupně černé, červené, zelené a modré křivce.



Obrázek 9.10: Korelační koeficient mezi modely GL1500E a RFM_2519 v oblasti nížin pro minimální sférický harmonický stupeň 1, 25, 75, 100. Gravitační potenciál a jeho první 3 radiální derivace odpovídají postupně černé, červené, zelené a modré křivce.