

# STŘEDOŠKOLSKÁ ODBORNÁ ČINNOST

Obor č. 2: Fyzika

## Výpočet poloh nebeských těles



GYMNÁZIUM ZLÍN  
LESNÍ ČTVRTĚ

Zlínský kraj

Lukáš Hrdý

Zlín, 2023

# STŘEDOŠKOLSKÁ ODBORNÁ ČINNOST

Obor č. 2: Fyzika

## Výpočet poloh nebeských těles

## Positions calculation of celestial bodies



**Autor:** Lukáš Hrdý

**Škola:** Gymnázium Zlín – Lesní čtvrť, Lesní čtvrť 1364, 760 01 Zlín

**Kraj:** Zlínský kraj

**Vedoucí:** Ing. Vratislav Zíka

Zlín 2023

## **Prohlášení**

Prohlašuji, že jsem svou práci SOČ vypracoval samostatně a použil jsem pouze prameny a literaturu uvedené v seznamu bibliografických záznamů.

Prohlašuji, že tištěná verze a elektronická verze soutěžní práce SOČ jsou shodné.

Nemám závažný důvod proti zpřístupňování této práce v souladu se zákonem č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon) ve znění pozdějších předpisů.

**Ve Zlíně dne 2. 3. 2023 Podpis: .....**

**Lukáš Hrdý**

## **Poděkování**

Na prvním místě bych chtěl poděkovat panu Vratislavu Zíkovi za odborné konzultace a trpělivost při vedení práce. Také bych chtěl poděkovat Nikole Kadlečkové za pomoc při realizaci praktické části na hvězdárně. Mé díky také patří panu Jaromíru Cieslovi, který mi velmi ochotně poskytl jedno z jeho pozorování.

## **Anotace**

Tato práce se zabývá výpočtem efemerid nebeských těles – tedy předpovědí poloh nebeských těles v předem definovaném čase. Cílem bylo vytvořit program v programovacím jazyce Pascal, který bude efemeridy schopen počítat. Součástí práce je také určení souřadnic komety C/2017 K2 (PanSTARRS) z vyfotografovaných snímků. Výsledkem je porovnání souřadnic spočítaných programem s polohou komety na vyfotografovaných snímcích.

## **Klíčová slova**

Efemeridy; kometa C/2017 K2 (PanSTARRS); Pascal programovací jazyk; astrometrie

## **Annotation**

This work deals with the calculation of celestial bodies ephemerides - i.e. the prediction of positions celestial bodies at a predefined time. The aim was to create a program in the Pascal programming language that will be able to calculate the ephemerides. The work also includes determining the coordinates of comet C/2017 K2 (PanSTARRS) from photographed images. The result is a comparison of the coordinates calculated by the program with the position of the comet in the photographed images.

## **Keywords**

Ephemeris; comet C/2017 K2 (PanSTARRS); Pascal programming language; astrometry

# Obsah

1	Úvod.....	7
2	Nebeská mechanika .....	8
	2.1 Keplerovy zákony .....	8
	2.2 Newtonův gravitační zákon.....	8
	2.3 Halleyova kometa.....	9
	2.4 Astronomické souřadnice.....	9
	2.4.1 Seznam pojmů ze sférické astronomie .....	9
	2.4.2 Obzorníkové souřadnice .....	10
	2.4.3 Rovníkové souřadnice I. druhu.....	11
	2.4.4 Rovníkové souřadnice II. druhu .....	11
	2.4.5 Ekliptikální souřadnice.....	11
	2.4.6 Transformace souřadnic .....	12
	2.4.7 Pravoúhlé souřadnice.....	13
3	Keplerova rovnice.....	15
	3.1 Elementy dráhy .....	15
	3.2 Odvození Keplerovy rovnice .....	16
	3.3 Řešení Keplerovy rovnice .....	19
	3.3.1 Metoda postupných aproximací .....	19
	3.3.2 Hartmannova rovnice .....	19
	3.3.3 Newtonova metoda tečen .....	20
4	Výpočet souřadnic tělesa .....	22
	4.1 Poloha tělesa na dráze .....	22
	4.1.1 Elipsa .....	22
	4.1.2 Parabola .....	23
	4.1.3 Hyperbola .....	23
	4.2 Pravoúhlé heliocentrické rovníkové souřadnice .....	24
	4.3 Pravoúhlé souřadnice Slunce .....	25
	4.4 Převod z občanského data na juliánské datum a naopak.....	29
	4.5 Geocentrické souřadnice .....	31
	4.6 Výpočet průvodičů .....	31
5	Program v programovacím jazyce Pascal .....	32
	5.1 Hlavní program .....	32
	5.2 Čtení elementů a zápis efemerid .....	34
	5.3 Obsluha programu .....	35
6	Fotografování komety a odečtení souřadnic ze snímku.....	37
7	Diskuse.....	42
	7.1 Refrakce .....	42
	7.1.1 Hvězdný čas.....	43

7.1.2	Vliv refrakce na ekvatoreální souřadnice .....	44
8	Závěr .....	46
9	Použitá literatura .....	48
10	Seznam obrázků .....	49
11	Seznam Tabulek.....	50

# 1 ÚVOD

Každý si jistě někdy říkal, jak bude svět vypadat v budoucnosti, bude všechno jinak, než jsme zvyklí? Jak budu vypadat za 20 let? Nejspíš vás zklamu, jelikož na toto v mé práci odpověď nedostanete. Co však můžeme předpovídat je poloha nebeských těles, která obíhají kolem Slunce. Výpočty efemerid pro nepříliš vzdálenou budoucnost jsou přesné. Problém nastává, kdybychom stejné přesnosti chtěli dosáhnout na větších časových škálách (stovky a více let). Na vesmírná tělesa totiž působí gravitace i jiných těles než pouze Slunce. Vlivem gravitace ostatních planet začnou tělesa, jako například komety, měnit parametry své dráhy a dlouhodobá předpověď je nemožná. Proto musíme aktivně sledovat, jak se parametry drah mění a postupem času je upravovat.

Úsilí mnoha géniů historie, kterými byli například Johannes Kepler, Isaac Newton nebo Carl Friedrich Gauss, vyústilo v možnost předpovídat polohy těles na obloze s velmi vysokou přesností. V astronomickém kroužku na Hvězdárně Zlín jsme se dlouhou dobu zabývali nebeskou mechanikou ze všech stran. Od slunečních hodin jsme se dostali ke Keplerovým a později Newtonovým zákonům, a nakonec k výpočtům efemerid. Od té doby mě výpočet předpovědi polohy nebeských těles nesmírně zaujal, jelikož v sobě skrývá mnoho zajímavých kapitol astronomie, matematiky a fyziky. Proto jsem si jej vybral jako téma své práce SOČ.

Na to, abychom pro každé datum počítali polohu nebeského tělesa (efemeridu) ručně, už nejspíš dnes nemá nikdo čas. Proto je mnohem výhodnější vytvořit program, který je schopen souřadnice ze zadaných parametrů dráhy spočítat. Předpovědi poloh nebeských těles nám nesmírně usnadňují jejich hledání. Díky měřením, která jsou v dnešní době volně k dispozici, si můžeme spočítat souřadnice kterékoli komety nebo planetky a najít si ji naším dalekohledem bez velkého úsilí. Když jsem vytvořil program, který dokáže počítat polohy nebeských těles, chtěl jsem potvrdit jeho správnost v praxi. Ve Hvězdářské ročence jsem našel nejjasnější kometu minulého roku. V roce 2022 to byla kometa C/2017 K2 (PanSTARRS). Na této kometě jsem chtěl potvrdit funkčnost programu, proto jsem ji nafotil v průběhu čtyř nocí a pomocí astrometrického programu určil její souřadnice. Nakonec jsem porovnal změřené a vypočtené souřadnice. V diskuzi zdůvodňuji příčiny rozdílu.

Mým cílem při sepisování této práce je také podat ucelený a srozumitelný výklad k výpočtu poloh nebeských těles. V české literatuře dostupné amatérům je většinou tato problematika popisována pouze okrajově a zdaleka ne pro tělesa pohybující se po všech možných kužellosečkách (elipsa, hyperbola a parabola). Nežřídka se také stává, že se v této literatuře nachází tiskové chyby ve hlavních vztazích. Proto jsem se každý vztah snažil uvést i s jeho odvozením.



## 2 NEBESKÁ MECHANIKA

Nebeská mechanika je odvětví astronomie zabývající se pohyby nebeských těles, jako jsou například planety, komety nebo planetky. Pomocí základních Newtonových a Keplerových zákonů vysvětluje důvody jejich pohybu a také jej popisuje.

### 2.1 Keplerovy zákony

Kepler roku 1609 vydává přelomové dílo *Nová astronomie* (*Astronomia nova*), ve kterém publikoval první dva ze svých tří zákonů. Třetí zákon uvedl až v roce 1619 v knize *Harmonie světů* (*Harmonices mundi*). K odvození těchto zákonů využil 12 opozic Marsu, které napozoroval Tycho Brahe, s nímž krátkou dobu od roku 1600 až do jeho úmrtí v roce 1601 spolupracoval. Kepler byl velkým zastáncem Koperníkova heliocentrismu. Jeho dílo znamenalo zásadní změnu v pohledu na nebeskou mechaniku. (1, s. 43)

1. Keplerův zákon byl nejspíš nejdůležitější částí díla. Kepler v něm totiž na pozorování Tychona Brahe matematicky zdůvodňuje, že Mars obíhá kolem Slunce po elipse a zjišťuje, že eliptickou dráhu se Sluncem v ohnisku mají i ostatní planety. Dnes víme, že nebeská tělesa neobíhají pouze po elipsách, nýbrž po kuželosečkách. Může se jednat o elipsu, parabolu nebo hyperbolu. Kometa, kterou jsem se rozhodl pozorovat (C/2017 K2 (PanSTARRS)), má dráhu hyperbolickou.

2. Keplerův zákon říká, že plocha opsaná průvodičem za jednotku času je konstantní. Také to znamená, že platí zákon zachování energie a součet kinetické a potenciální energie je konstantní. V přeneseném významu to znamená, že v periheliu (bod na dráze, který je nejbližší Slunci neboli ohnisku) se těleso pohybuje nejrychleji, a naopak v aféliu (bod na dráze, který je nejdále od Slunce neboli od ohniska) se těleso pohybuje nejpomaleji.

3. Keplerův zákon dává do poměru druhou mocninu periody oběhu a třetí mocninu hlavní poloosy dráhy. 3. Keplerův zákon vyjadřuje vztah (2.1.1):

$$\frac{a_1^3}{T_1^2} = \frac{a_2^3}{T_2^2}, \quad (2.1.1)$$

kde  $a_1$  znázorňuje hlavní poloosu prvního tělesa,  $a_2$  hlavní poloosu druhého tělesa,  $T_1$  periodu oběhu prvního tělesa a  $T_2$  periodu oběhu druhého tělesa.

V tomto tvaru však zákon platí pouze, když je hmotnost obíhajícího tělesa zanedbatelná vůči hmotnosti toho centrálního. V takovém případě se jedná o problém dvou těles a dráha je rovinná.

### 2.2 Newtonův gravitační zákon

Druhým géniem, který pomohl vytvořit zákony nebeské mechaniky, byl Isaac Newton. Historika o padajícím jablku a spojení této skutečnosti s oběhem Měsíce je známá určitě všem. Jestli je pravdivá nebo ne, to už nevíme. Víme však, že roku 1665 Newton odvodil svůj gravitační zákon, který znamenal další důležitou revoluci nejen v astronomii. Přitažlivou (gravitační) sílu mezi dvěma tělesy můžeme spočítat podle vztahu (2.2.1):

$$F_g = G \frac{M_1 M_2}{r^2}, \quad (2.2.1)$$

kde  $M_1$  vyjadřuje hmotnost prvního tělesa,  $M_2$  je hmotnost toho druhého,  $r$  je vzdálenost mezi jejich středy (mají-li kulový tvar) a  $G$  je gravitační konstanta.

Pomocí Newtonova gravitačního zákona je možné odvodit obecný tvar 3. Keplerova zákona. Ten vyjadřuje vztah (2.2.2):

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G(M_1 + M_2)}{4\pi^2} \quad (2.2.2)$$

## 2.3 Halleyova kometa

Do roku 1577 si lidé podle Aristotelova dogmatu mysleli, že jsou komety atmosférickými jevy. Dogma totiž říkalo, že všechno, co se nachází za dráhou Měsíce, je neměnné. Když se roku 1577 Tycho Brahe pokusil změřit paralaxu prolétající komety, byl neúspěšný. Jedná se o velmi důležitý okamžik v historii astronomie, jelikož paralaxu Měsíce v té době již bylo možné měřit. To znamenalo, že se kometa musí nacházet dále než Měsíc. Jedná se o vážné zpochybnění Aristotelova dogmatu.

Když Edmund Halley, Newtonův přítel, studoval komety, zjistil, že kometa, která se objevila roku 1682, měla téměř stejné parametry dráhy jako kometa, která se objevila roku 1607 a 1531. Edmund Halley si uvědomil, že všechny tři objekty jsou tatáž kometa, která se vrací s periodou zhruba 76 let a předpověděl, že další průlet kolem Země nastane roku 1758. Naštěstí Edmund Halley zemřel roku 1742, takže se již návratu nedočkal. Zjistil by totiž, že neměl úplnou pravdu. Kometa se sice vrátila, ale o 618 dní později, než předpověděl. Bylo to způsobené gravitačním působením Jupitera a Saturnu. I přes to se však jedná o první výpočet předpovědi návratu komety. Od té doby se tato kometa nazývá Halleyova (1P/Halley). Další předpokládaný průlet kolem Země bude roku 2061.

## 2.4 Astronomické souřadnice

Souřadnice nám usnadňují orientaci na obloze. Určují polohu těles na sféře. Rozlišujeme tyto základní typy souřadnicových systémů: obzorníkové souřadnice, rovníkové souřadnice I. a II. druhu a ekliptikální.

Při výpočtu efemerid nejprve počítáme polohu na dráze, poté se tuto polohu snažíme přepočítat na heliocentrické pravoúhlé souřadnice se Sluncem ve středu. Díky spočítaným souřadnicím Slunce můžeme tyto heliocentrické souřadnice převést na ekliptikální geocentrické sférické souřadnice a z ekliptikálních pomocí transformace vypočíst rovníkové II. druhu.

### 2.4.1 Seznam pojmů ze sférické astronomie

**Obzorník (horizont)** – vodorovná rovina

**Zenit** neboli nadhlavník – bod, který má výšku nad obzorníkem  $h = 90^\circ$ .

**Nadir** neboli podnožník – bod, který má výšku pod obzorníkem  $h = -90^\circ$ .

**Výšková kružnice (vertikál)** – kružnice kolmá k obzorníku, procházející zenitem a nadirem.

**Meridián** – rovina místního poledníku

**Jižní bod** – bod, ve kterém na jihu protíná meridián obzorník.

**Severní bod** – bod, ve kterém na severu protíná meridián obzorník.

**Nebeský rovník** – rovina, která je průmětem zemského rovníku na oblohu.

**Deklinační kružnice** – kružnice kolmá k nebeskému rovníku, procházející oběma nebeskými póly.

**Severní nebeský pól** – bod, ve kterém protíná zemská osa na severní polokouli nebeskou sféru.

**Ekliptika** – rovina, ve které se pohybuje Země kolem Slunce. Také rovina, která je na obloze průmětem zdánlivé dráhy Slunce v průběhu roku.

**Severní ekliptikální pól** – bod, který má na severní polokouli ekliptikální šířku  $\beta = +90^\circ$ .

(viz. 2.4.5)

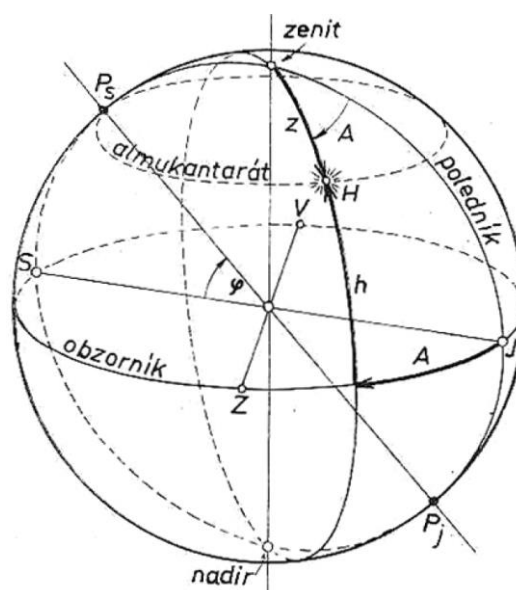
**Šířková kružnice** – kružnice kolmá na ekliptiku, procházející oběma ekliptikálními póly.

**Jarní bod** – jeden ze dvou bodů, ve kterém se protíná ekliptika a nebeský rovník. V jarním bodě se nachází Slunce při jarní rovnodennosti.

**Podzimní bod** – druhý bod, ve kterém se protíná ekliptika a nebeský rovník. V podzimním bodě se nachází Slunce při podzimní rovnodennosti.

## 2.4.2 Obzorníkové souřadnice

Základními rovinami jsou obzorníková rovina a rovina místního poledníku (*meridiánu*). Souřadnicemi jsou *astronomický azimut* ( $A$ ) a *výška* ( $h$ ). Tyto souřadnice se s časem mění. *Astronomický azimut*  $A$  je úhel, který se měří mezi rovinou místního poledníku a výškovou kružnicí procházející bodem  $H$  (viz obr. 1). Astronomický azimut nabývá hodnot na jihu  $A = 0^\circ$ , na západě  $A = 90^\circ$ , na severu  $A = 180^\circ$  a na východě  $A = 270^\circ$ . *Výška*  $h$  udává úhlovou vzdálenost bodu  $H$  od *obzorníku*. Nabývá hodnot  $h = 0^\circ$  (na *obzorníku*) směrem k *zenitu* je kladná a směrem k *nadiru* záporná. Nabývá hodnot  $+90^\circ$  až  $-90^\circ$ . Pro lepší představu jsou souřadnice vyznačeny na obrázku 1:



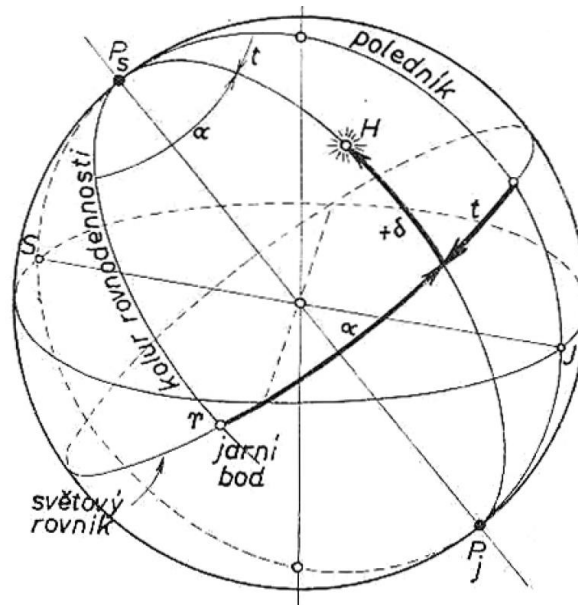
Obrázek 1: Obzorníkové souřadnice:  $A$ ,  $h$ , převzato z 1, s. 21

### 2.4.3 Rovníkové souřadnice I. druhu

Základními rovinami jsou *nebeský rovník* a *meridián*. Souřadnicemi jsou *hodinový úhel*  $t$  a *deklinace*  $\delta$ . *Hodinový úhel*  $t$  je úhel, který svírá rovina místního poledníku s deklinační rovinou procházející bodem  $H$  (viz obr. 2). Měří se od průsečíku jižní větve *meridiánu* s rovníkem směrem na západ. Udává se v časových jednotkách, v tom případě platí 24 hod = 360°. *Deklinace*  $\delta$  udává úhlovou vzdálenost bodu  $H$  od nebeského rovníku. Směrem k severu je kladná, směrem k jihu záporná. Nabývá tedy hodnot + 90° až – 90°.

### 2.4.4 Rovníkové souřadnice II. druhu

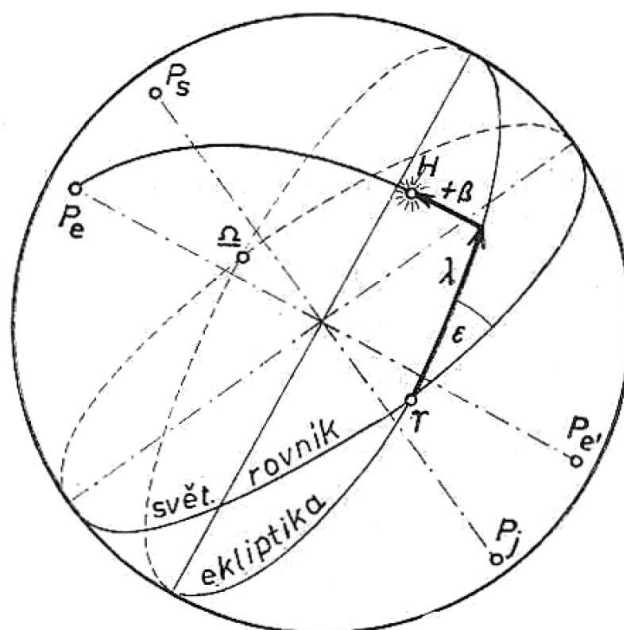
Základními rovinami je nebeský rovník a základním bodem na rovníku je *Jarní bod*. Souřadnicemi jsou *rektascenze*  $\alpha$  a *deklinace*. *Rektascenze*  $\alpha$  je úhel, jež svírá *deklinační kružnice* procházející *Jarním bodem* s *deklinační kružnicí* bodu  $H$  (viz obr. 2). Měří se od *Jarního bodu* po rovníku směrem na východ. Rektascenze se zpravidla udává v časové míře. Pro přepočítání do úhlové míry používáme převod 24 hod = 360°. *Deklinace*  $\delta$  udává úhlovou vzdálenost bodu  $H$  od nebeského rovníku. Nabývá tedy hodnot + 90° až – 90°. Pro lepší představu jsou rovníkové souřadnice I. i II. druhu znázorněny obrázkem 2.



Obrázek 2: Rovníkové souřadnice:  $\alpha$ ,  $\delta$  a  $t$ , převzato z 1, s. 21

### 2.4.5 Ekliptikální souřadnice

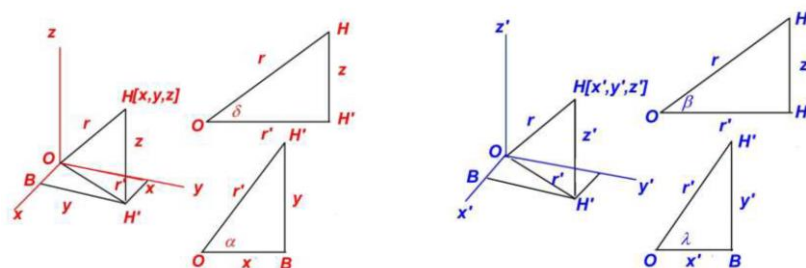
Základní rovinou je rovina ekliptiky a základním bodem na ní je *Jarní bod*. Souřadnicemi jsou *astronomická délka*  $\lambda$  a *astronomická šířka*  $\beta$  (také nazývané *ekliptikální délka* a *ekliptikální šířka*). *Astronomická délka*  $\lambda$  je úhel mezi *šířkovými kružnicemi* procházejícími *Jarním bodem* a bodem  $H$  (viz obr. 3). Měří se od *Jarního bodu* směrem na východ. Nabývá hodnot od 0° do 360°. *Astronomická šířka*  $\beta$  je úhel, který se měří od *ekliptiky* k bodu  $H$ , po *šířkové kružnici*. Může nabývat hodnot, které jsou směrem k severnímu pólu *ekliptiky* kladné a směrem k jižnímu záporné. Nabývá tedy hodnot mezi + 90° a – 90°. Pro lepší představu jsou ekliptikální souřadnice znázorněny na obrázku 3:



Obrázek 3: Ekliptikální souřadnice:  $\beta$ ,  $\lambda$ , převzato z 1, s. 24

## 2.4.6 Transformace souřadnic

Odvození transformace souřadnic je uvedeno na příkladu transformace z ekliptikálních souřadnic na rovníkové II. druhu, kterou využíváme v našem výpočtu. K odvození nám poslouží obrázek 4:



Obrázek 4: Odvození transformace souřadnic, převzato z [6].

Nejprve odvodíme, jaký je vztah mezi  $r'$  a  $r$  a jak pomocí  $r'$  můžeme vyjádřit souřadnice  $x$ ,  $y$ ,  $z$  bodu  $H$ . To vyjadřují vztahy (2.4.6.1):

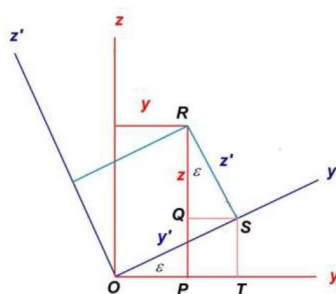
$$\begin{aligned}
 r' &= r \cos \delta \\
 x &\equiv r' \cos \alpha = r \cos \delta \cos \alpha \\
 y &\equiv r' \sin \alpha = r \cos \delta \sin \alpha \\
 z &\equiv r \sin \delta
 \end{aligned}
 \tag{2.4.6.1}$$

Nyní potřebujeme z obrázku 4 spočítat souřadnice  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ . To vyjadřují vztahy (2.4.6.2):

$$\begin{aligned}
r' &= r \cos \beta \\
x' &\equiv r' \cos \lambda = r \cos \beta \cos \lambda \\
y' &\equiv r' \sin \lambda = r \cos \beta \sin \lambda \\
z' &\equiv r \sin \beta
\end{aligned}
\tag{2.4.6.2}$$

*Výpočet rovníkových souřadnic II. druhu z ekliptikálních:*

Nyní musíme souřadnice otočit o úhel  $\varepsilon$  kolem osy  $x$ . Tento úhel vyjadřuje sklonění rovníku k ekliptice. Otočení je patrné na obrázku 5:



Obrázek 5: Transformace souřadnic z ekliptikálních na rovníkové, převzato z [6].

Osa  $x$  a  $y$  tvoří rovinu ekliptiky a osy  $x'$  a  $y'$  tvoří rovinu nebeského rovníku. Osa  $z$  směřuje k severnímu pólu ekliptiky a osa  $z'$  směřuje k nebeskému pólu. Souřadnicové soustavy otáčíme kolem os  $x$  a  $x'$ , které splývají a směřují k Jarnímu bodu. Souřadnice bodu  $R$  můžeme vyjádřit vztahy (2.4.6.3):

$$\begin{aligned}
x &\equiv x' \\
y &\equiv |OT| - |PT| = |OT| - |QS| = y' \cos \varepsilon - z' \sin \varepsilon \\
z &\equiv |RQ| + |QP| = |RQ| + |ST| = z' \cos \varepsilon + y' \sin \varepsilon
\end{aligned}
\tag{2.4.6.3}$$

Když nyní dosadíme vztahy (2.4.6.1) a (2.4.6.2) do (2.4.6.3), dostaneme vztahy (2.4.6.4), které vyjadřují transformaci z ekliptikálních souřadnic na rovníkové II. druhu. Jelikož každý člen na levé a pravé straně rovnic obsahuje vzdálenost  $r$ , můžeme ji vykrátit a tím získáme následující vztahy:

$$\begin{aligned}
\cos \delta \cos \alpha &= \cos \beta \cos \lambda \\
\cos \delta \sin \alpha &= \cos \beta \sin \lambda \cos \varepsilon - \sin \varepsilon \sin \beta \\
\sin \delta &= \sin \beta \cos \varepsilon + \sin \varepsilon \cos \beta \sin \lambda
\end{aligned}
\tag{2.4.6.4}$$

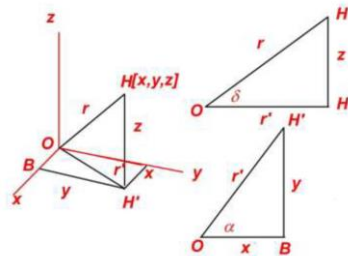
Obdobně bychom mohli odvodit vztahy pro vzájemné přepočty např. rovníkových a obzorníkových souřadnic. [6]

## 2.4.7 Pravoúhlé souřadnice

Pravoúhlé heliocentrické souřadnice mají svůj počátek ve středu Slunce a osa  $x$  míří k Jarnímu bodu. Osa  $y$  je od osy  $x$  odchýlena o  $90^\circ$  a osa  $z$  míří k severnímu ekliptikálnímu pólu. (2, s. 56) Pravoúhlé geocentrické souřadnice mají svůj počátek ve středu Země a osa  $x$  míří

k Jarnímu bodu. Osa  $y$  je od osy  $x$  odchýlena o  $90^\circ$  a osa  $z$  míří k severnímu nebeskému pólu. (2, s. 60)

Když se zaměříme na obrázek 6, můžeme z něj odvodit i vztah mezi sférickými a pravoúhlými souřadnicemi.



Obrázek 6: Vztah mezi pravoúhlými a sférickými souřadnicemi, převzato z [6]

Jestliže bychom nyní chtěli spočítat sférické souřadnice  $\delta$  a  $\alpha$  (deklinaci a rektascenzi), můžeme využít goniometrických funkcí a získáme vztahy (2.4.7.1):

$$\tan \delta = \frac{z}{r'} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (2.4.7.1)$$

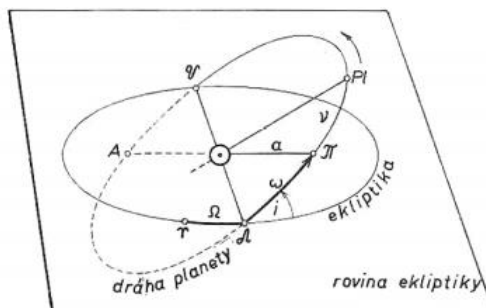
$$\tan \alpha = \frac{y}{x}$$

Stejný postup můžeme aplikovat pro všechny ostatní soustavy souřadnic.

### 3 KEPLEROVA ROVNICE

#### 3.1 Elementy dráhy

Pro spočítání souřadnic komety nám stačí 6 Keplerových elementů. Keplerovy elementy udávají vlastnosti dráhy, po které těleso obíhá. Pro lepší představu jsou elementy dráhy zobrazeny na obrázku 7.



Obrázek 7: Keplerovy elementy dráhy, převzato z 1, s. 45

Prvním elementem dráhy je hlavní poloosa. U hyperboly je hlavní poloosa vzdálenost vrcholu hyperboly od jejího středu a u elipsy je to vzdálenost hlavního vrcholu elipsy od jejího středu. U paraboly používáme vzdálenost v perihéliu neboli nejbližšího místa na dráze k ohnisku. Značíme ji  $q$ .

Druhým elementem dráhy je numerická excentricita  $e$ . Jestliže excentricita má hodnotu menší než 1, je dráha eliptická. Jestliže je rovna 1, je dráha parabolická a jestliže je větší než 1, je dráha hyperbolická. Vzdálenost středu elipsy od jejího ohniska se nazývá lineární excentricita a značí se v astronomii  $\varepsilon$ . Numerickou excentricitu  $e$  pro elipsu můžeme potom spočítat pomocí vztahu (3.1.1) (1, s. 44).

$$e = \frac{\varepsilon}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \quad (3.1.1)$$

Kde  $a$  značí hlavní poloosu a  $b$  vedlejší poloosu elipsy.

Numerickou excentricitu pro hyperbolu pak můžeme spočítat pomocí vztahu (3.1.2) (3, s. 439).

$$e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} \quad (3.1.2)$$

Třetím Keplerovým elementem je sklon dráhy vůči ekliptice a značí se  $i$ . Udává se ve stupních. (1, s. 46)

Čtvrtým Keplerovým elementem dráhy je délka výstupného uzlu  $\Omega$ . Výstupný uzel je místo na dráze, kde těleso prochází nad rovinu ekliptiky. Délka výstupného uzlu určuje jeho úhlovou vzdálenost od Jarního bodu. (1, s. 46)

Pátým elementem dráhy je argument šířky perihelia  $\omega$ , který udává úhlovou vzdálenost mezi perihéliem a výstupným uzlem (1, s. 46).



Šestým elementem dráhy je čas průchodu perihéliem  $T$ , který udává, kdy se těleso nacházelo na své dráze nejbližší Slunci (1, s. 46).

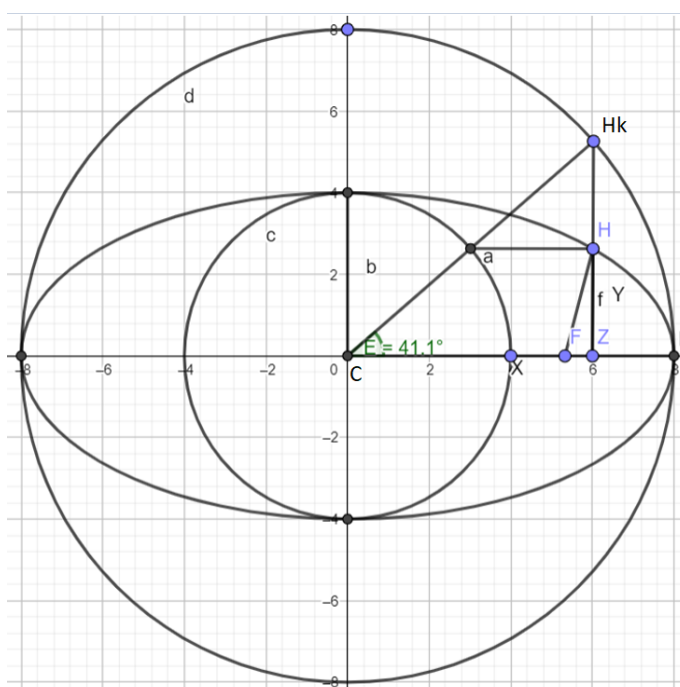
Posledním elementem dráhy je střední anomálie  $M$ . Pro tento element zavádíme fiktivní těleso, které se pohybuje rovnoměrně po kruhové dráze o poloměru rovném hlavní poloose elipsy. Střední anomálie je úhlová vzdálenost tohoto tělesa od perihélia. Jestliže známe datum průchodu perihéliem, můžeme střední anomálii položit rovnu nule. (1, s. 50)

Element, který není Keplerovým elementem dráhy, ale také se velmi často používá, je pravá anomálie  $v$ . Ta je definovaná jako úhel, který svírá průvodič a přímka spojující perihélium a afélium (přímka apsid). (1, s. 49)

### 3.2 Odvození Keplerovy rovnice

První popíšeme vlastnosti kružnice a poté pomocí nich odvodíme vlastnosti elipsy. Plochu kruhové výseče  $P_{KV}$  vyjadřuje vztah (3.2.1), kde úhel  $E$  je v radiánech:

$$P_{KV} = \frac{\pi a^2}{2\pi} E = \frac{a^2}{2} E \quad (3.2.1)$$



Obrázek 8: Polární souřadnice kružnice.  $E$  je excentrická anomálie a  $a$  je poloměr kružnice.<sup>1</sup>

Polární souřadnice  $[x, y]$  kružnice můžeme spočítat podle obrázku 8<sup>1</sup> z rovnic (3.2.2).

$$x = a \cos E \quad (3.2.2)$$

<sup>1</sup> Vytvořeno pomocí programu Geogebra: HOHENWARTER, Markus 2002. Geogebra Klasik 6. Paris Lodron University, Salzburg, Austria. [cit. 30. 1. 2023] Dostupné z: <https://www.geogebra.org/classic?lang=cs>

$$y = a \sin E$$

Také podle obrázku 8 platí pro kružnici:

$$a^2 = x^2 + y^2$$

Z toho vychází vztah (3.2.3):

$$y = y_k = \pm \sqrt{a^2 - x^2} \quad (3.2.3)$$

Plocha kruhové úseče  $P_{KU}$  je rozdíl plochy kruhové výseče  $P_{KV}$  a plochy trojúhelníku CZHK (3.2.4):

$$P_{KU} = \frac{a^2}{2} E - \frac{a^2 \cos E \sin E}{2} = \frac{a^2}{2} (E - \cos E \sin E) \quad (3.2.4)$$

Souřadnice na elipse ve středovém tvaru (osa  $y$  prochází středem elipsy) vyjadřují vztahy (3.2.5):

$$x = a \cos E \quad (3.2.5)$$

$$y = b \sin E$$

Potom musí platit:

$$\cos E = \frac{x}{a}$$

$$\sin E = \frac{y}{b}$$

Dosazením do známého vztahu:

$$\cos^2 E + \sin^2 E = 1$$

Získáme rovnici elipsy ve středovém tvaru vyjádřenou vztahem (3.2.6):

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

$$y = y_e = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \quad (3.2.6)$$

A podle vztahu (3.2.3) a (3.2.6) platí vztah (3.2.7):

$$y_e = \frac{b}{a} y_k \quad (3.2.7)$$

Pro plochu elipsy platí vztah (3.2.8):

$$P_E = \frac{b}{a} P_K = \frac{b}{a} \pi a^2 = \pi ab \quad (3.2.8)$$

Pro plochu eliptické úseče můžeme použít stejný postup a dostaneme vztah (3.2.9):

$$P_{EU} = \frac{b}{a} \frac{a^2}{2} (E - \cos E \sin E) = \frac{ab}{2} (E - \cos E \sin E) \quad (3.2.9)$$

Bude-li počátek souřadnicového systému umístěn do ohniska, můžeme spočítat obsah trojúhelníku FHZ (viz obr. 8), který potřebujeme pro výpočet obsahu eliptické výseče. Souřadnice bodu H vyjadřují vztahy (3.2.10).

$$\begin{aligned} x &= a \cos E - ae = a(\cos E - e) \\ y &= b \sin E \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

Obsah trojúhelníku FHZ je potom dán vztahem (3.2.11):

$$P_{FHZ} = \frac{xy}{2} = \frac{ab((\cos E - e) \sin E)}{2} \quad (3.2.11)$$

Abychom spočítali obsah eliptické výseče, musíme k eliptické úseči (3.2.9) připočíst trojúhelník FHZ (3.2.11). Takto získáme vztah (3.2.12), který vyjadřuje obsah eliptické výseče:

$$\begin{aligned} P_{EV} &= \frac{ab}{2} (E - \cos E \sin E + \cos E \sin E - e \sin E) = \frac{ab}{2} (E - e \sin E) \\ P_{EV} &= \frac{ab}{2} (E - e \sin E) \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

Jestliže známe čas, kdy těleso prošlo perihéliem ( $T$  – čas průchodu perihélia), můžeme psát vztah (3.2.13):

$$\frac{\pi ab}{P} (t - T) = \frac{ab}{2} (E - e \sin E), \quad (3.2.13)$$

kde  $t$  je čas, pro který počítáme polohu na dráze. Z tohoto vztahu po úpravě vzniká vztah (3.2.14), který nazýváme **Keplerova rovnice** [6]:

$$\frac{2\pi}{P} (t - T) = E - e \sin E \quad (3.2.14)$$

Zavedením nových proměnných  $n$  (střední denní pohyb [rad/den]) a  $M$  (střední anomálie) definovaných vztahy (3.2.15):

$$n = \frac{2\pi}{P} \quad (3.2.15)$$

$$M = n(t - T),$$

získáváme Keplerovu rovnici ve tvaru (3.2.16):

$$M = E - e \sin E \quad (3.2.16)$$

Při znalosti střední anomálie  $M$  a excentricity dráhy  $e$  potřebujeme spočítat excentrickou anomálii  $E$ . Keplerova rovnice se využívá právě k výpočtu excentrické anomálie  $E$ . Pro řešení této rovnice dosazujeme úhly  $E$  a  $M$  v radiánech. [6]

### 3.3 Řešení Keplerovy rovnice

Jedná se o transcendentní rovnici a pro výpočet musíme použít tzv. numerické iterační metody. Metod existuje celá řada. Já jsem se v této práci rozhodl popsat tři nejčastější.

#### 3.3.1 Metoda postupných aproximací

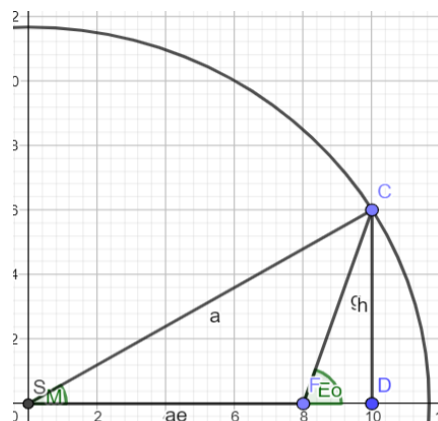
Pro nízké hodnoty excentricity  $e$  si vystačíme s metodou postupných aproximací. Rovnici (3.2.16) si nejdřív upravíme do tvaru (3.3.1.1):

$$E_{n+1} = M + e \sin E_n, \text{ pro } n = 0, 1, 2 \dots \quad (3.3.1.1)$$

Jako první aproximaci zvolíme  $E_0 = M$ . Opakovaným dosazováním výsledků na pravou stranu iteračního vzorce (3.3.1.1) získáváme postupně přesnější hodnoty excentrické anomálie, až dosáhneme požadované přesnosti. (1, s. 51)

#### 3.3.2 Hartmannova rovnice

Odhad pomocí Hartmannova vzorce se nejčastěji používá při nízkých hodnotách  $e$ . Odvození je patrné z obrázku 9<sup>2</sup>:



Obrázek 9: Hartmannova rovnice.<sup>2</sup>

<sup>2</sup> Vytvořeno pomocí Geogebra Klasik HOHENWARTER, Markus 2002. Geogebra Klasik 6. Paris Lodron University, Salzburg, Austria. [cit. 30. 1. 2023] Dostupné z: <https://www.geogebra.org/classic?lang=cs>

Jestliže za počátek souřadnicového systému zvolíme bod F, tak souřadnice  $x$  bodu C je rovna velikosti úsečky FD a souřadnice  $y$  bodu C je rovna velikosti úsečky DC. Souřadnice můžeme vyjádřit pomocí úhlu  $M$ . Vzdálenost od středu S elipsy po ohnisko F elipsy můžeme zapsat:

$$|SF| = ae$$

Vzdálenost od středu elipsy S po bod D, můžeme spočítat následovně:

$$|SD| = a \cos M$$

A vzdálenost  $|DC|$ , neboli souřadnici  $y$  bodu C, spočítáme pomocí vztahu (3.3.2.1):

$$y \equiv |DC| = a \sin M \quad (3.3.2.1)$$

Souřadnici  $x$  bodu C potom můžeme spočítat pomocí:

$$x \equiv |FD| = |SD| - |SF| = a(\cos M - e) \quad (3.3.2.2)$$

Úhel  $E_0$  potom můžeme spočítat pomocí vztahu (3.3.2.3) [6], kde  $E_0$  a  $M$  jsou také v radiánech:

$$E_0 = \arctan \frac{|DC|}{|FD|} = \arctan \frac{\sin M}{\cos M - e} \quad (3.3.2.3)$$

Bohumil Hacar (2, s. 55) uvádí vztah, který jsem upravil do podoby (3.3.2.3), jelikož vztah používá cotangens, který není standardní funkcí v programovacích jazycích.

V programu je Hartmannova rovnice vyjádřena funkcí Har\_E pro elipsu:

```
function Har_E(m,e:real):extended;
begin
    Har_E:=arctan(sin(m)/(cos(m)-e));
end; {Har_E}
```

### 3.3.3 Newtonova metoda tečen

Tato metoda se hodí pro výpočty drah s velkou excentricitou i proto, že se při každém dalším kroku počet platných míst zdvojnásobí (kvadratická konvergence) (3, s. 224). Odvození výpočetního vztahu pro získání  $E$  je rovnice (3.3.3.1):

$$E = E_0 + \Delta E \quad (3.3.3.1)$$

kde  $E_0$  znázorňuje odhad excentrické anomálie, za který můžeme považovat číslo vypočtené Hartmannovým vzorcem a k  $\Delta E$  se postupně dostaneme.

Do Keplerovy rovnice (3.2.16) můžeme dosadit vztah (3.3.3.1) a získáme:

$$M = E_0 + \Delta E - e \sin(E_0 + \Delta E)$$

Pomocí součtových vzorců můžeme vzniklý vztah dále upravovat.

$$M = E_0 + \Delta E - e(\sin E_0 \cos \Delta E + \cos E_0 \sin \Delta E)$$

Jelikož předpokládáme, že  $\Delta E$  je velmi malé, můžeme psát následující aproximaci:

$$\begin{aligned}\sin \Delta E &= \Delta E \\ \cos \Delta E &= 1\end{aligned}$$

A když tuto aproximaci aplikujeme na náš vztah, můžeme psát:

$$M = E_0 - e \sin E_0 + \Delta E(1 - e \cos E_0)$$

Když rovnici algebraicky upravíme, získáme konečný vztah (3.3.3.2) pro  $\Delta E$ :

$$\Delta E = \frac{M - (E_0 - e \sin E_0)}{1 - e \cos E_0} \quad (3.3.3.2)$$

A po dosazení vztahu (3.3.3.2) do vztahu (3.3.3.1) získám vztah (3.3.3.3), který vyjadřuje Newtonovu metodu tečen. (7, s. 62)

$$E_{n+1} = E_n + \frac{M - (E_n - e \sin E_n)}{1 - e \cos E_n}, \quad \text{pro } n = 0, 1, 2 \dots \quad (3.3.3.3)$$

Jako první aproximaci pokládáme  $E_0 = M$ , nebo lépe  $E_0$  z Hartmannovy rovnice. V programu vypadá řešení Newtonovy metody tečen následovně:

```
if e<1 then
  begin
    er:=Har_E(m,e);
    dal: ej:=er+(m-er+e*sin(er))/(1-e*cos(er));
      if abs(ej-er)>=1e-15 then
        begin
          er:=ej;
          goto dal;
        end
      else
        begin
          pp:=a*(cos(ej)-e);
          pq:=a*sqrt(1-e*e)*sin(ej);
          Ea:=ej;
          ny:=2*arctan(sqrt((1+e)/(1-e))*tan(Ea*0.5));
          rk:=ak*(1-ek*cos(Ea));
        end
      end
end;
```

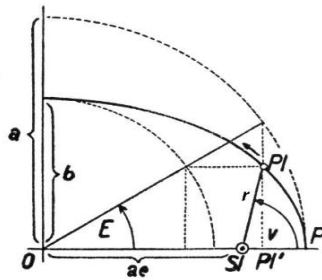
## 4 VÝPOČET SOUŘADNIC TĚLESA

### 4.1 Poloha tělesa na dráze

#### 4.1.1 Elipsa

Řešením Keplerovy rovnice jsme získali excentrickou anomálii  $E$ , a pomocí ní můžeme získat souřadnice tělesa  $(x, y)$  na elipse, které budeme označovat  $PP$  a  $PQ$ .

Podle obrázku 10, můžeme odvodit souřadnice  $PP$  a  $PQ$  na elipse a vztah mezi pravou a excentrickou anomálií. Souřadnici  $PP$  na obrázku znázorňuje vzdálenost  $|Sl Pl'|$ . Můžeme pro ni psát vztah (4.1.1.1):



Obrázek 10.: Vztah mezi pravou a excentrickou anomálií, převzato z 7, s. 58

$$PP \equiv |Sl Pl'| = r \cos v = a(\cos E - e) \quad (4.1.1.1)$$

Vzdálenost  $|Pl' Pl|$  vyjadřuje souřadnici  $PQ$ . Můžeme pro ni psát vztah (4.1.1.2):

$$PQ \equiv |Pl' Pl| = r \sin v = b \sin E = a\sqrt{1 - e^2} \sin E \quad (4.1.1.2)$$

Pomocí Pythagorovy věty můžeme sečíst druhé mocniny vztahů (4.1.1.1) a (4.1.1.2). Takto získáme vztah (4.1.1.3), který vyjadřuje  $r$  neboli vzdálenost tělesa od ohniska. (7, s. 58)

$$r = a(1 - e \cos E) \quad (4.1.1.3)$$

Nyní musíme od vztahu (4.1.1.3) nejprve odečíst a poté k tomuto vztahu přičíst vztah (4.1.1.1). Tímto získáme vztahy (4.1.1.4), které jsou ještě upraveny pomocí součtových vzorců:

$$\begin{aligned} 2r \sin^2 \frac{v}{2} &= 2a(1 + e) \sin^2 \frac{E}{2} \\ 2r \cos^2 \frac{v}{2} &= 2a(1 - e) \cos^2 \frac{E}{2} \end{aligned} \quad (4.1.1.4)$$

Když tyto vztahy podělíme a odmocníme, získáváme vztah mezi pravou a excentrickou anomálií (4.1.1.5) (7, s. 59):

$$\operatorname{tg} \frac{\nu}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2} \quad (4.1.1.5)$$

### 4.1.2 Parabola

Nejprve spočítáme parametr  $s$  pomocí vztahu (4.1.2.1), kde  $T$  je čas průchodu perihéliem a  $t$  je čas, pro který efemeridu počítáme,  $q$  značí vzdálenost v perihéliu:

$$s = \frac{54,80779084 \cdot \sqrt{q^3}}{|t - T|} \quad (4.1.2.1)$$

Parametr  $s$  souvisí s pravou anomálií vztahem (4.1.2.2):

$$\operatorname{tg} \frac{\nu}{2} = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{\sqrt{s^2+1}-1}{s}}} - \sqrt[3]{\frac{\sqrt{s^2+1}-1}{s}} \quad (4.1.2.2)$$

Průvodič  $r$  (Slunce – těleso) můžeme spočítat pomocí vztahu (4.1.2.3):

$$r = q \left( 1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\nu}{2} \right) \quad (4.1.2.3)$$

A souřadnice tělesa ( $x, y$ ) na parabolické dráze označíme  $PP$  a  $PQ$  a spočítáme je ze vztahů (4.1.2.4): [6]

$$PP \equiv x = q \left( 1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\nu}{2} \right) \quad (4.1.2.4)$$

$$PQ \equiv y = 2q \operatorname{tg} \frac{\nu}{2}$$

### 4.1.3 Hyperbola

U hyperboly počítáme hyperbolickou anomálii  $H$ . Goniometrické funkce jsou nahrazeny hyperbolickými funkcemi. Newtonovu metodu tečen pro hyperbolu vyjadřuje vztah (4.1.3.1):

$$H_{n+1} = H_n + \frac{M + H_n - e \sinh H_n}{e \cosh H_n - 1} \quad (4.1.3.1)$$

Podoba Hartmannovy rovnice je také pozměněna na vztah (4.1.3.2):

$$H_0 = \operatorname{arctgh} \left( \frac{\sinh M}{e - \cosh M} \right) \quad (4.1.3.2)$$



Potom parametry  $PP$  a  $PQ$  můžeme spočítat podle vztahu (4.1.3.3):

$$PP = a (\cosh H - e) \quad (4.1.3.3)$$

$$PQ = -a\sqrt{e^2 - 1} \sinh H$$

Průvodič těleso – Slunce potom můžeme spočítat jako vztah (4.1.3.4): [6]

$$r = a(1 - e \cosh H) \quad (4.1.3.4)$$

Mezi pravou a hyperbolickou anomálií platí vztah (4.1.3.5):

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{e-1}} \operatorname{tgh} \frac{H}{2} \quad (4.1.3.5)$$

## 4.2 Pravoúhlé heliocentrické rovníkové souřadnice

Pravoúhlé heliocentrické rovníkové souřadnice vypočteme pomocí rovnic (4.2.1), které byly v roce 1877 v díle *Theria motus* od C. F. Gausse upraveny do následující podoby (1, s. 75):

$$x = PP \cdot P_x + PQ \cdot Q_x,$$

$$y = PP \cdot P_y + PQ \cdot Q_y, \quad (4.2.1)$$

$$z = PP \cdot P_z + PQ \cdot Q_z,$$

kde

$$P_x = A_1 \cos \omega + A_2 \sin \omega$$

$$P_y = B_1 \cos \omega + B_2 \sin \omega$$

$$P_z = C_1 \cos \omega + C_2 \sin \omega$$

a

(4.2.2)

$$Q_x = A_2 \cos \omega - A_1 \sin \omega$$

$$Q_y = B_2 \cos \omega - B_1 \sin \omega$$

$$Q_z = C_2 \cos \omega - C_1 \sin \omega$$

v nichž značí:

$$A_1 = \cos \Omega$$

$$A_2 = -\cos i \sin \Omega$$

$$B_1 = \sin \Omega \cos \varepsilon$$

(4.2.3)

$$B_2 = \cos i \cos \Omega \cos \varepsilon - \sin i \sin \varepsilon$$

$$C_1 = \sin \Omega \sin \varepsilon$$

$$C_2 = \cos i \cos \Omega \sin \varepsilon + \sin i \cos \varepsilon$$

Kde  $\varepsilon$  je sklon ekliptiky k rovníku, který vypočteme pomocí vztahu (4.2.4) (4, s. 17):

$$\varepsilon = 23,43929111 + T(-1,3004166 \cdot 10^{-2} - 1,638888889 \cdot 10^{-7}T +) + 5,036111111 \cdot 10^{-7}T^2 \quad (4.2.4)$$

Kde  $T$  je čas v juliánských stoletích od standardní epochy J2000,0, tedy  $T = \frac{JD-2451545}{36525}$ .

Pro kontrolu můžeme použít následující vztahy (4.2.5) (1, s. 75):

$$P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 = 1$$

$$Q_x^2 + Q_y^2 + Q_z^2 = 1 \quad (4.2.5)$$

$$P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z = 0$$

Výpočet parametrů  $PP$  a  $PQ$  se liší podle toho, jestli se těleso pohybuje po eliptické, parabolické nebo hyperbolické dráze (viz kap. 4.1).

### 4.3 Pravoúhlé souřadnice Slunce

Pro výpočet efemeridy Slunce použijeme následující elementy dráhy:

$a$  – velká poloosa dráhy

$L$  – střední délka Slunce

$$k = e \sin \varpi \quad (4.3.1)$$

$$h = e \sin \varpi \quad (4.3.2)$$

Kde  $e$  je excentricita dráhy a  $\varpi$  je délka perihélia:

$$q = \sin\left(\frac{i}{2}\right) \cos \Omega \quad (4.3.3)$$

$$p = \sin\left(\frac{i}{2}\right) \sin \Omega \quad (4.3.4)$$

Kde  $i$  je sklon dráhy a  $\Omega$  je délka výstupného úhlu. (4, s. 28)

Tyto elementy nemají (na rozdíl od Keplerových) singulární body ani pro kruhovou dráhu, ani pro dráhu s nulovým sklonem vůči ekliptice. Pro každou planetu jsou udány vždy střední hodnoty elementů s indexem nula (např.  $a_0$ ). K těmto středním hodnotám musíme ještě přičíst součet všech periodických poruch. Z těchto elementů dráhy spočítáme oskulační Keplerovy elementy dráhy pomocí vztahů (4.3.5): (4, s. 29)

$$e = \sqrt{k^2 + h^2}$$

$$\varpi = \arctan \frac{h}{k}$$

$$i = 2 \arcsin \sqrt{q^2 + p^2} \quad (4.3.5)$$

$$\Omega = \arctan \frac{p}{q}$$

$$M = L - \varpi$$

Pro Slunce jsou střední hodnoty těchto výrazů rovny (4, s. 32):

$$a_0 = 1,000001 \text{ au}$$

$$L_0 = 1,7534703 + 628,3075849T - 0,0000001T^2$$

$$k_0 = -0,0037408 - 0,0000823T + 0,0000003T^2$$

$$h_0 = 0,0162845 - 0,0000620T - 0,0000003T^2$$

$$q_0 = -0,0001135T + 0,0000001T^2$$

$$p_0 = 0,0000102T + 0,0000005T^2$$

Kde  $T$  je čas v juliánských stoletích od standardní epochy J2000,0, tedy  $T = \frac{JD-2451545}{36525}$  (4, s. 32).

Největší poruchy elementů dráhy Země kolem Slunce se spočítají následovně. Například  $\Delta a$  se spočítá následovně:

Když se podíváme na tabulku 1 (viz str. 28), tak pod  $\Delta a$  jsou funkce  $\sin$  a  $\cos$ . Jestliže jsou obě čísla pod sloupcem funkcí rovna nule, přecházíme na další řádek. Pokud je alespoň

jedno číslo nenulové, napíšeme dané číslo násobené  $10^{-7}$ . Dále násobíme funkcí, pod kterou se číslo nachází. Argument těchto funkcí je tvořen součinem koeficientu a středních délek  $l_i$ .

$$\Delta\alpha = 15 \cdot 10^{-7} \sin(2l_2 - 3l_3) + 6 \cdot 10^{-7} \sin(l_3 - 2l_5) + 3 \cdot 10^{-7} \cos(l_3 - 2l_5) \dots$$

Tyto střední délky  $l_i$  spočítáme pomocí vztahů (4.3.6): (4, s. 28)

$$l_1 = 4,4026 + 2608,7903T$$

$$l_2 = 3,1761 + 1021,3286T$$

$$l_3 = 1,7535 + 628,3076T$$

$$l_4 = 6,2035 + 334,0612T$$

$$l_5 = 0,5995 + 52,9691T \tag{4.3.6}$$

$$l_6 = 0,8740 + 21,3299T$$

$$l_7 = 5,4813 + 7,4782T$$

$$l_8 = 5,3119 + 3,8133T$$

Kde  $T$  je čas v juliánských stoletích od standardní epochy J2000,0, tedy  $T = \frac{JD-2451545}{36525}$ .

Pravoúhlé souřadnice Slunce  $X_s$ ,  $Y_s$ ,  $Z_s$  potom spočítáme pomocí vypočtených Keplerových elementů tak, jak uvádí kapitoly 4.1 a 4.2.

Tabulka 1: Největší poruchy elementů dráhy Země kolem Slunce, převzato z 4, s. 33

ARGUMENT				$\Delta a$		$\Delta L$		$\Delta k$		$\Delta h$	
$l_2$	$l_3$	$l_4$	$l_5$	sin	cos	sin	cos	sin	cos	sin	cos
				$10^{-7}$		$10^{-7}$		$10^{-7}$		$10^{-7}$	
0	4	-8	3	0	0	-97	322	0	0	0	0
2	-3	0	0	15	0	-2	109	0	-199	199	0
0	1	0	-2	6	3	-13	20	0	186	-186	0
0	0	0	1	0	0	-125	17	-3	-150	-151	1
0	2	0	-2	0	112	-206	0	0	0	0	0
1	-1	0	0	0	76	166	0	-2	0	0	0
1	-2	0	0	-3	1	3	-1	0	82	-82	0
2	-2	0	0	0	-41	127	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	48	48	0
3	-4	0	0	5	0	0	14	0	-48	48	0
0	1	-2	0	-3	-3	-65	56	1	-44	45	0
8	-13	0	0	0	0	49	76	-1	-2	2	-1
0	1	0	-3	0	0	-3	4	-6	35	-35	-6
3	-3	0	0	0	-25	60	0	0	0	0	0
0	1	0	-1	0	11	-51	-1	-1	-7	1	-2
3	-5	0	0	-1	-4	-46	12	-29	-1	1	-29
0	0	0	2	0	0	-4	1	22	-16	-17	-22

#### 4.4 Převod z občanského data na juliánské datum a naopak

Při výpočtu efemerid se nejčastěji používá juliánské datum, které nám umožňuje určit počet středních slunečních dní, uplynulých mezi dvěma daty. Juliánské datum určuje počet dní uplynulých od 1. ledna roku 4713 před naším letopočtem. Důležité je zmínit, že počátek každého juliánského dne se počítá od středního greenwichského poledne. Gregoriánský kalendář začíná 15. 10. 1582. (5, s. 7)

Postup výpočtu juliánského data:

Označme  $RRRR$  rok,  $MM$  měsíc a  $DD$  den. Den může být i desetinným číslem. Je-li  $MM$  větší než 2, položíme  $y = RRRR$  a  $m = MM$ . Je-li  $MM$  1 nebo 2, položíme  $y = RRRR - 1$  a  $m = MM + 12$ . Jestliže je občanské datum v gregoriánském kalendáři, spočítáme parametry  $A$  a  $B$  pomocí vztahů (4.4.1): (5, s. 7)

$$A = \text{int}\left(\frac{y}{100}\right) \tag{4.4.1}$$

$$B = 2 - A + \text{int}\left(\frac{A}{4}\right)$$

$\text{int}$  znamená, že dělíme celočíselně, beze zbytku. Hledané juliánské datum potom spočítáme jako:

$$JD = \text{int}(365,25y) + \text{int}(30,6001(m + 1)) + DD + 1720994,5$$

K tomuto výsledku ještě přičteme hodnotu  $B$ , je-li datum v gregoriánském kalendáři.

V programu výpočet juliánského z občanského data vypadá následovně:

```
function JD(den,mes,rok:real):real;
var
  z,b,c,d,f,j,JD0 :real;
Begin
  z:=int(1/mes+0.6);
  b:=12*z+mes;
  c:=rok-z;
  d:=den;
  f:=int(c/100);
  j:=int(365.25*c)+int(30.6001*(b+1))+d+1720994.5;
  if j>2299159.5 then JD0:=j+2-f+int(f/4)
                    else JD0:=j;
  JD:=JD0;
  if rok<1 then JD:=JD0-1;
End;{JD}
```

Ve výpočtu efemeridy používáme i opačný převod z juliánského na občanské datum: K juliánskému datu přičteme 0,5 a jako  $Z$  označíme celočíselnou část a  $F$  zlomkovou (desetinou) část výsledku. Jestliže  $Z$  je menší než 2 299 161, tak položíme  $A = Z$ . Jestliže je  $Z$  větší nebo rovno 2 299 161, vypočítáme parametry  $K$  a  $A$  pomocí vztahů (4.4.2): (5, s. 8)

$$K = \text{int}\left(\frac{Z - 1\,867\,216,25}{36524,25}\right) \quad (4.4.2)$$

$$A = Z + 1 + K - \text{int}\left(\frac{K}{4}\right)$$

Potom vypočítáme parametry  $B$ ,  $C$ ,  $D$  a  $E$  pomocí vztahů (4.4.3):

$$B = A + 1524$$

$$C = \text{int}\left(\frac{B - 122,1}{365,25}\right) \quad (4.4.3)$$

$$D = \text{int}(365,25 \cdot C)$$

$$E = \text{int}\left(\frac{B - D}{30,6001}\right)$$

Den v měsíci je potom (s desetinnými místy) vztah (4.4.4):

$$DD = B - D - \text{int}(30,6001 E) + F \quad (4.4.4)$$

Číslo měsíce  $m$  je potom:

$$m = E - 1, \text{ je-li } E < 13,5 \text{ nebo } m = E - 13, \text{ je-li } E > 13,5.$$

Rok potom spočítám:

$$y = C - 4716, \text{ je-li } m > 2,5 \text{ a } y = C - 4715, \text{ je-li } m < 2,5. \text{ (5, s. 9)}$$

V programu vypadá výpočet občanského data z juliánského následovně:

```

procedure OD(JDv:real;var d,m,yod:real);
var
  z,a,b,c,x,e,alfa,f      :real;
Begin
  z:=int(JDv+0.5);
  f:=frac(JDv+0.5);
  if Z<2299163 then A:=Z
    else alfa:=int((z-1867216.25)/36524.25);
  a:=Z+1+alfa-int(alfa/4);
  b:=a+1524;
  c:=int((b-122.1)/365.25);
  x:=int(365.25*c);
  e:=int((b-x)/30.6001);
  d:=b-x-int(30.6001*e)+f;
  if E<=13 then m:=e-1
    else m:=e-13;
  if M>=3 then yod:=c-4716
    else yod:=c-4715;
end; {OD}

```

## 4.5 Geocentrické souřadnice

Geocentrické pravouhlé souřadnice tělesa  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  spočítáme součtem pravouhlých souřadnic Slunce a heliocentrických pravouhlých souřadnic tělesa (1, s. 76):

$$\begin{aligned}X &= x + X_s \\Y &= y + Y_s \\Z &= z + Z_s\end{aligned}\tag{4.5.1}$$

Z těchto tří souřadnic již můžeme spočítat rovníkové souřadnice II. typu – rektascenzi a deklinaci tělesa (viz kapitola 2.4.7) (1, s. 76):

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{Y}{X}\tag{4.5.2}$$

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}}\tag{4.5.3}$$

## 4.6 Výpočet průvodičů

Z vypočtených pravouhlých souřadnic můžeme spočítat vzdálenosti v astronomických jednotkách. Z heliocentrických pravouhlých souřadnic  $x$ ,  $y$ ,  $z$  můžeme spočítat vzdálenost mezi Sluncem a tělesem vyjádřenou vztahem (4.6.1) (2, s. 43):

$$d_{ST} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\tag{4.6.1}$$

Z geocentrických pravouhlých souřadnic  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  můžeme spočítat vzdálenost mezi tělesem a Zemí vyjádřenou vztahem (4.6.2.) (2, s. 43):

$$d_{TZ} = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}\tag{4.6.2}$$

Z pravouhlých souřadnic Slunce  $X_s$ ,  $Y_s$ ,  $Z_s$  můžeme spočítat vzdálenost mezi Sluncem a Zemí vyjádřenou vztahem (4.6.3) (2, s. 43):

$$d_{ZS} = \sqrt{X_s^2 + Y_s^2 + Z_s^2}\tag{4.6.3}$$



## 5 PROGRAM V PROGRAMOVACÍM JAZYCE PASCAL

V dnešní době se už efemeridy ručně nepočítají, jelikož jejich výpočet je velmi časově náročný. Proto jsem se rozhodl vytvořit program, který efemeridy bude počítat. V následující kapitole popíši pojmenování veličin v programu a některé procedury a funkce.

Pojmenování veličin v mém programu je intuitivní a je znázorněno tabulkou 2:

Kometa	<i>ak</i>	Hlavní poloosa komety
	<i>qk</i>	Vzdálenost komety v perihéliu
	<i>ek</i>	Excentricita komety
	<i>ik</i>	Sklon dráhy komety
	<i>vomk</i>	Délka výstupného uzlu komety
	<i>momk</i>	Argument šířky perihelia
	<i>Mk</i>	Střední anomálie komety
	<i>Cask</i>	Čas průchodu komety perihéliem
	<i>Denk</i>	Den průchodu komety perihéliem
	<i>mesk</i>	Měsíc průchodu komety perihéliem
<i>rokk</i>	Rok průchodu komety perihéliem	
Deklinace	<i>dek</i>	Deklinace (desetinné číslo)
	<i>dekS</i>	Stupně deklinace
	<i>dekM</i>	Minuty deklinace
	<i>dekV</i>	Vteřiny deklinace
Rektascenze	<i>rec</i>	Rektascenze (desetinné číslo)
	<i>recH</i>	Hodiny rektascenze
	<i>recM</i>	Minuty rektascenze
	<i>recV</i>	Sekundy rektascenze
Čtení ze souboru	<i>Strin</i>	String, do kterého přepisují hodnoty veličin
	<i>posi</i>	Pozice znaku v řetězci

Tabulka 2: Pojmenování veličin v programu.

### 5.1 Hlavní program

Na začátku hlavního programu je nadefinovaný design zápisu do TXT souboru. Také se zde počítá pomocí funkce *JD* juliánské datum ze zadaného občanského data.

V další části programu jsou spočítány souřadnice Slunce, podle postupu uvedeného v kapitole 4.3. Pro tento výpočet je využita procedura *Kuzelosec*, která počítá excentrickou a pravou anomálii a souřadnice *PP* a *PQ* pro dané datum.

V následující části se již počítají souřadnice komety pomocí procedury *Excentricita*, která rozhoduje, zda se jedná o eliptickou, parabolickou, či hyperbolickou dráhu. Tato procedura také spočítá střední anomálii a pro eliptickou dráhu spočítá vzdálenost v perihéliu. Procedura *Vektor\_elm* počítá vektorové elementy popsané v kapitole 4.2. Procedura *Kuzelosec* poté počítá souřadnice *PP* a *PQ* pro kometu. Procedura *DMS* převádí stupně z desetinného tvaru na stupně, minuty a vteřiny pro deklinaci a pro rektascenzi na hodiny minuty a sekundy. Procedura

Elongace poté pro danou efemeridu zjišťuje, zda se jedná o východní nebo západní elongaci. Pomocí elongace můžeme určit, kdy bude nebeské těleso pozorovatelné. Jestliže se těleso nachází ve východní elongaci, nachází se východně od Slunce a je pozorovatelné po západu Slunce. Jestliže je v západní elongaci, nachází se západně od Slunce a můžeme jej pozorovat před východem Slunce.

Ukázka části procedury Kuzelosec, která počítá eliptickou dráhu:

```

procedure kuzelosec(a,e,m,q:real);
  var er,ej,ehr,ehj,x :extended;
  label dal,znovu;
begin
  if e<1 then
  begin
    er:=Har_E(m,e);
    dal: ej:=er+((m-er+e*sin(er))/(1-e*cos(er)));
      if abs(ej-er)>=1e-15 then
      begin
        er:=ej;
        goto dal;
      end
    else
    begin
      pp:=a*(cos(ej)-e);
      pq:=a*sqrt(1-e*e)*sin(ej);
      Ea:=ej;
      ny:=2*arctan(sqrt((1+e)/(1-e))*tan(Ea*0.5));
      rk:=ak*(1-ek*cos(Ea));
    end
  end;{elipsa}

```

Na konci hlavního programu je k juliánskému datu přičten počet dní v jednom kroku a z juliánského data je spočítáno datum občanské, aby se hlavní program mohl opakovat podle počtu požadovaných opakování.

V průběhu celého programu si můžeme všimnout specifických funkcí Dmod a Atan2. Funkce Atan2 počítá správný kvadrant pro úhly ze souřadnic  $x$ ,  $y$ . Funkce Dmod převádí například úhly do určitého žádaného intervalu. Ukázka z programu funkce Atan2:

```

function atan2(x,y:real):real;
begin
  if ((x<0) and (y<0)) then atan2:=pi+arctan(y/x)
  else if ((x>0) and (y<0)) then
  atan2:=(arctan(y/x)+2*pi)
  else if ((x<0) and (y>0)) then
  atan2:=(arctan(y/x)+pi)
  else if ((x=0) and (y<>0)) then atan2:=0
  else if ((x>0) and (y=0)) then atan2:=0
  else if ((x=0) and (y=0)) then atan2:=0
  else atan2:=arctan(y/x);
end;{atan2}

```

## 5.2 Čtení elementů a zápis efemerid

Pro zápis elementů jsem využil textový dokument, pro který jsem zvolil specifickou koncovku ORB. Do textového souboru stejného jména (avšak s koncovkou TXT) jsou zapsány vypočtené efemeridy. Obrázek 11 znázorňuje značení do souboru například elementů dráhy komety C2017 K2 (PanSTARRS):

```
C/2017K2 (PANSTARRS)
T=19.12.2022+0.85340
EQN=2000
mom=236.1787931
vom=88.2542737
i =87.5474937
e =1.0004632
q =1.7983034|
m0 =0.0
https://theskylive.com/c2017k2-info
```

Obrázek 11: Zápis elementů v textovém souboru ORB.

Na prvním řádku se nachází jméno komety na druhém čas průchodu perihéliem, na třetím řádku ekvinociem, na čtvrtém řádku je argument šířky perihélia, na pátém délka výstupného uzlu, na šestém sklon dráhy k ekliptice, na sedmém excentricita dráhy, na osmém je vzdálenost v perihéliu (u eliptické dráhy velikost hlavní poloosy  $a$ ), na devátém je střední anomálie a na posledním je zdroj elementů.

Během mé práce na SOČ se elementy třikrát změnily. Na obrázku 11 se nachází elementy nejnovější. Za zdroj jsem používal stránky Theskylive<sup>3</sup>. V příloze 1 jsou uvedeny všechny minulé hodnoty elementů.

Při čtení ze souboru ORB si nejdříve program načte do stringů r1...r10 všechny řádky souboru a poté pomocí funkce Pos hledal u každého číselného řádku pozici znaku =, abych mohl vždy vyseparovat ze stringů pouze čísla, která jsem potřeboval. Ta jsem poté přiřadil příslušným veličinám. U hlavní poloosy jsem ještě musel rozlišit, jestli se jedná o parabolu, elipsu nebo hyperbolu, jelikož u paraboly je Keplerovým elementem vzdálenost v perihéliu. Ukázka z programu:

```
if ek<1 then
  begin
    akn:=pos( '=', r8 );
    len:=length(r8);
    aks:=copy(r8, akn+1, len-akn);
    val(aks, ak, code);
    writeln(wtx, ' a =', ak:12:7);
  end
else
  if ((ek>1) or (ek=1)) then
    begin
      qkn:=pos( '=', r8 );
      len:=length(r8);
      qks:=copy(r8, qkn+1, len-qkn);
      val(qks, qk, code);
      writeln(wtx, ' q =', qk:12:7);
    end;
end;
```

---

<sup>3</sup>SASSARINI, Iacopo 2013. The Sky Live.com, [cit. 30. 1. 2023] Dostupné z: <https://theskylive.com/c2017k2-info>

Výstupní textový soubor je znázorněn obrázkem 12. Na prvním až osmém řádku jsou zopakovány údaje z ORB souboru s elementy (obrázek 11). Pod výpisem elementů je tabulka efemerid, kde v prvním sloupci je občanské datum, pro které efemeridu počítáme. Ve druhém sloupci je příslušné juliánské datum. V dalších čtyřech sloupcích jsou rektascenze a deklinace (rovníkové souřadnice II. druhu) komety s přesností na desetiny minut. V dalších třech jsou průvodiče v astronomických jednotkách. První je vzdálenost Slunce-těleso, další je vzdálenost Země-těleso a poslední je vzdálenost Země-Slunce. V předposledním sloupci je elongace neboli úhel mezi Sluncem a tělesem na obloze a v posledním sloupci je určeno, jestli se jedná o východní (V) nebo západní (Z) elongaci.

```

C/2017K2 (PANSTARRS) zdroj: https://theskylive.com/c2017k2-info
EQN= 2000.0
mom= 236.1787931
Vom= 88.2542737
i = 87.5474937
e = 1.0004632
q = 1.7983034
T =19.12.2022+0.85340
=====
Datum      JD      rec      dec      DST      DZT      DZS      Elong
          hod min  stu min  AU      AU      AU      stu
=====
24. 7.2022 2459784.5 16 40.4  -7 20.3  2.574  1.828  1.016  127.3 V
25. 7.2022 2459785.5 16 38.7  -7 45.8  2.565  1.832  1.016  126.1 V
26. 7.2022 2459786.5 16 36.9  -8 11.4  2.557  1.836  1.016  124.9 V
27. 7.2022 2459787.5 16 35.3  -8 36.9  2.549  1.841  1.016  123.7 V
28. 7.2022 2459788.5 16 33.6  -9  2.4  2.541  1.845  1.015  122.6 V

```

Obrázek 12: Výstupní textový soubor s elementy dráhy a efemeridami.

### 5.3 Obsluha programu

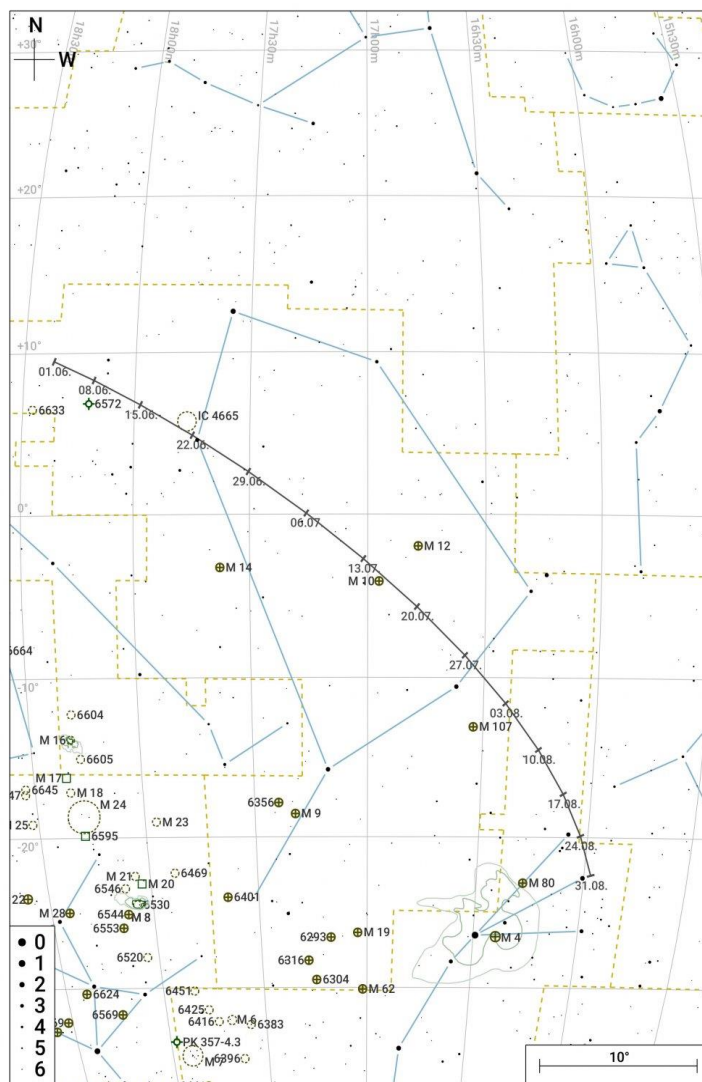
Využil jsem nabídky vedoucího této práce, abych se naučil programovat v jazyce PASCAL. Z internetu jsem si stáhl a nainstaloval bezplatnou verzi tohoto jazyka s názvem FREE PASCAL (version 1.0.12 2011/12/25, Compiler Version 2.6.0, Debugger GDB 7.2, Copyright (C) 1998-2011 by Bérczi Gábor, Pierre Muller and Peter Vreman). Programovací prostředí (IDE) FREE PASCALu umožňuje vytvářet a editovat zdrojový kód uživatelského programu, při kompilaci upozorňuje na syntaktické chyby a poskytuje kompilovanou (.EXE), verzi programu, přenositelnou na jiné počítače. Můj program není uživatelsky komfortní, obsahuje jen nutné minimum pokynů pro uživatele. Uživatel musí nejdříve zadat jméno souboru s elementy orbity (soubor s koncovkou .ORB). Program se ptá na den, pro který chceme efemeridu spočítat, krok a počet kroků. Krok určuje časový rozestup mezi dvěma po sobě jdoucími výpočty a počet kroků určuje množství výpočtů. Na obrázku 13 je znázorněno, jak vypadá zadávání vstupních dat do programu:

```
Zadej den mesic rok (bez tecek, pouze s mezerami):  
18 6 2022  
Zadej krok a pocet kroku  
1 5  
Zadej jmeno souboru s elementy drahy :C2017K2.ORB
```

Obrázek 13: Zadávání vstupních dat do programu.

## 6 FOTOGRAFOVÁNÍ KOMETY A ODEČTENÍ SOUŘADNIC ZE SNÍMKU

K ověření funkčnosti programu jsem porovnal vypočtené souřadnice se souřadnicemi určenými astrometricky z fotografií. Kometu jsem třikrát fotil na Zlínské hvězdárně. Svá pozorování jsem doplnil o fotografii a informace získané od pana Jaromíra Ciesly, který je velmi ochotně poskytl. Jedná se o fotografii ze 3. 7. 2022. Všechna pozorování zahrnují časové rozmezí měsíce a jednoho týdne. Efemeridy jsem spočítal pro všechny elementy dráhy, které byly v průběhu mé práce dostupné, aby bylo patrné, jak se vlivem změny elementů mění předpověď polohy. Pro orientaci uvádím vyhledávací mapku, aby bylo patrné, kde se přibližně kometa v průběhu fotografování nacházela.<sup>4</sup>



Obrázek 14: Vyhledávací mapka komety C/2017 K2 (PanSTARRS) v průběhu června až začátku října.<sup>4</sup>

<sup>4</sup> DVOŘÁK Vladimír, czsky.cz, [cit. 30.01.2023], Dostupné z: <https://www.czsky.cz/comet/K17K020/info?ra=0.6836111207407274&dec=-0.930743675713707&fsz=100>

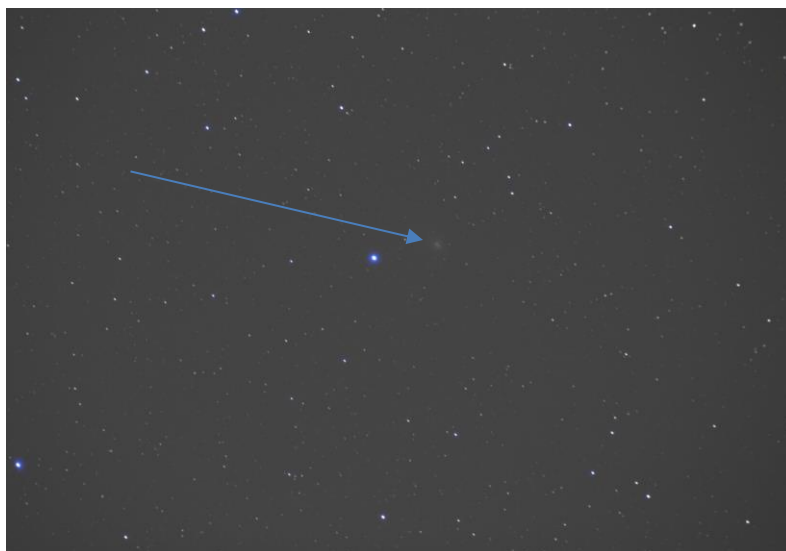
Používal jsem fotoaparát Canon EOS 1300 d. Použil jsem dalekohled s ohniskovou vzdáleností 600 mm, průměrem objektivu 120 mm a světelností f/5. Tento přístroj stál na motorizované montáži HEQ Pro 5. Fotografie mého set-upu před focením je na obrázku 15:



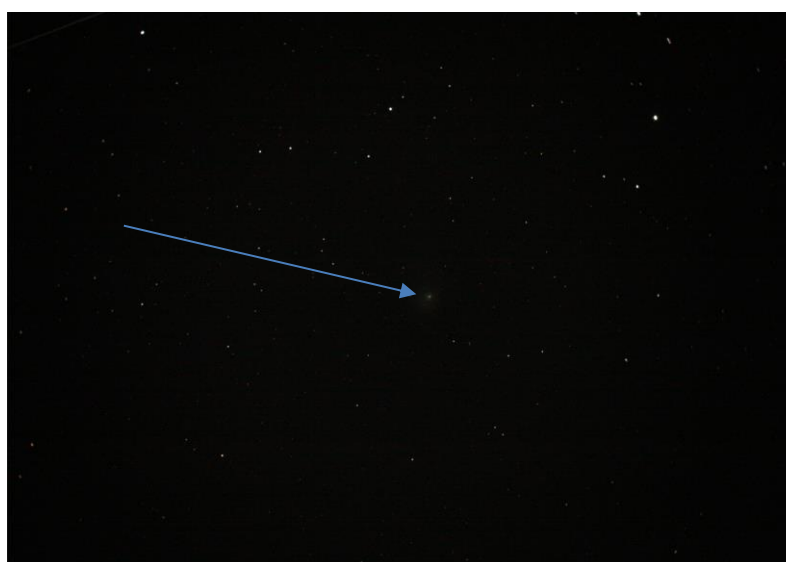
Obrázek 15: Set-up, se kterým jsem prováděl fotografování.



Obrázek 16: Fotografie z 20. 6. 2022 1:46 SELČ. ISO 800, expozice 70 s. Foto autor.



Obrázek 19: Fotografie z 18. 6. 2022 1:05 SELČ. ISO 1600, expozice 61 s. Foto autor.



Obrázek 18: Fotografie z 3. 7. 0:35 SELČ. ISO 1600, expozice 10 s. Foto autor.



Obrázek 17: Fotografie z 24. 7. 2022 23:23 SELČ. ISO 1600, expozice 15 s. Foto autor.



Fotky nejsou skládané ani nijak zvlášť upravované. Upravená a poskládaná fotka je na druhé straně této práce. Astrometrii snímků jsem prováděl pomocí webové stránky Astrometry.net<sup>5</sup>. Snímky jsem vždy ořízl pomocí programu Malování tak, aby kometa byla co nejpřesněji ve středu, jelikož Astrometry.net počítá souřadnice středu snímku. V okolí komety si program najde několik hvězd (nejméně 3), jejichž souřadnice zná a pomocí metody nejmenších čtverců určí souřadnice středu snímku. Snímek oříznutý na střed je zobrazen na obrázku 20:



Obrázek 20: Fotografie komety oříznutá na střed.

V tabulce 3 jsou uvedeny efemeridy pro nejnovější elementy dráhy platné od 29. 11. 2022. V tabulce 4 jsou uvedeny co nejpřesnější předpovědi lineárně interpolované k času fotografování.

Den měření pro 0 h UT	Spočítaná poloha	
	$\alpha$	$\delta$
17. 6. 2022	17 h 54,7 m	6° 15,7'
18. 6. 2022	17 h 52,8 m	5° 59,9'
19. 6. 2022	17 h 50,8 m	5° 43,6'
20. 6. 2022	17 h 48,8 m	5° 26,9'
21. 6. 2022	17 h 46,9 m	5° 9,8'
2. 7. 2022	17 h 24,1 m	1° 33,7'
3. 7. 2022	17 h 22,0 m	1° 11,8'
4. 7. 2022	17 h 19,9 m	0° 49,6'
23. 7. 2022	16 h 42,2 m	-6° 54,7'
24. 7. 2022	16 h 40,4 m	-7° 20,3'
25. 7. 2022	16 h 38,7 m	-7° 45,8'

Tabulka 3: Efemeridy spočítané pro dny fotografování, ale také pro dny kolem data fotografování, pro možnost spočítání přesné polohy pro daný čas.

<sup>5</sup> LANG et al 2010, Astrometry.net [on-line], [cit. 30.01.2023], Dostupné z: <https://nova.astrometry.net/upload>

Den a čas měření (UT)	Interpolovaná poloha		Souřadnice na fotce	
	$\alpha$	$\delta$	$\alpha$	$\delta$
17.06.2022 23:05	17 h 52,9 m	6° 0,5'	17 h 52,8 m	6° 00'
19.06.2022 22:46	17 h 48,9 m	5° 27,8'	17 h 48,9 m	5° 27,4'
02.07.2022 22:35	17 h 22,1 m	1° 13,1'	17 h 22,1 m	1° 13,4'
24.07.2022 21:23	16 h 38,9 m	-7° 43,0'	16 h 38,6 m	-7° 45,4'

Tabulka 4: Interpolovaná efemerida komety k přesnému času fotografování.

Den měření pro 0 h UT	Spočítaná poloha	
	$\alpha$	$\delta$
18. 6. 2022	17 h 52,7 m	5° 51,2'
20. 6. 2022	17 h 48,8 m	5° 18,0'
3. 7. 2022	17 h 21,8 m	1° 23,5'
24. 7. 2022	16 h 40,0 m	-7° 32,4'

Tabulka 5: Efemeridy spočítané pomocí elementů platných do dne 29. 11. 2022.

Den měření pro 0 h UT	Spočítaná poloha	
	$\alpha$	$\delta$
18. 6. 2022	17 h 52,7 m	5° 59,6'
20. 6. 2022	17 h 48,8 m	5° 26,6'
3. 7. 2022	17 h 21,9 m	1° 11,3'
24. 7. 2022	16 h 40,3 m	-7° 21,2'

Tabulka 6: Efemeridy spočítané pomocí elementů platných do dne 23. 9. 2022

Den měření pro 0 h UT	Spočítaná poloha	
	$\alpha$	$\delta$
18. 6. 2022	17 h 52,7 m	5° 59,6'
20. 6. 2022	17 h 48,8 m	5° 26,6'
3. 7. 2022	17 h 21,9 m	1° 11,3'
24. 7. 2022	16 h 40,3 m	-7° 21,2'

Tabulka 7: Efemeridy počítané pomocí elementů z Hvězdářské ročenky [8].

Datum	$T$			$q$	$e$	$\omega$	$\Omega$	$i$
	den	měs	rok	AU		°	°	°
HR 2022	19,7111	12	2022	1,797193	1,000634	236,1936	88,2399	87,5559
Do 23. 9.	19,6829	12	2022	1,796966	1,000775	236,196	88,2357	87,5606
Do 29. 11.	19,1829	12	2022	1,796904	1,000795	236,1979	88,2351	87,5621
Od 29. 11.	19,8534	12	2022	1,798303	1,000463	236,178793	88,25427	87,54749

Tabulka 8: Změny elementů dráhy komety v průběhu práce na SOČ.

## 7 DISKUSE

V této kapitole bych chtěl diskutovat o rozdílech mezi vypočtenými a naměřenými souřadnicemi a příčinách těchto rozdílů. Polohy komety jsem počítal pro všechny změny elementů uvedené v tabulce 8. Mezi nejstaršími elementy (HR 2022) a elementy platnými do 23. 9. byly tak malé rozdíly, že výsledky výpočtů byly stejné (viz Tabulky 6 a 7). Výsledky získané z nejnovějších elementů (viz Tab. 3) jsem použil pro srovnání. Ve výpočtech efemerid není zvykem zahrnovat pozorovací vlivy (např. refrakci, aberaci, topocentrické stanoviště... atd.) do výpočtů. O tyto vlivy (korekce) vypočítané efemeridy můžeme až následně opravit.

Do této práce jsem se rozhodl zahrnout pouze refrakci. Aberace je jev způsobený konečnou rychlostí světla a pohybem pozorovaného tělesa a pozorovatele (1, s. 29). Jelikož však tento jev nabývá velkého významu na velkých vzdálenostech, tak jej v našem výpočtu můžeme zanedbat. V mém programu je počátek geocentrické soustavy souřadnic ve středu Země. My se však nacházíme na povrchu Země a na určité rovnoběžce. Tento faktor (topocentrické stanoviště) má velký vliv na změnu polohy pouze v případě, když se těleso nachází velmi blízko Zemi. Dalším faktorem je samotné fotografování. Jelikož při něm dochází k projekci sféry do tečné roviny, projevují se při tom geometrické nepřesnosti čipu, optiky fotoaparátu i dalekohledu. Tyto vlivy se odstraňují astrometrickým zpracováním snímku. Velká chyba je způsobena už samotnou povahou objektu (komety), který je difúzní a musíme subjektivně určovat jeho střed.

### 7.1 Refrakce

Na polohu těles na nebeské sféře má velký vliv atmosféra a jevy, které se v ní odehrávají. Refrakce je způsobena lomem světelných paprsků procházejících prostředím s rozdílnou hustotou. Atmosféra je oproti vakuu prostředím hustší, proto dochází k lámání světelného paprsku ke kolmici. Refrakce stoupá směrem od zenitu k horizontu, kde může nabývat až 36' 36". (2, s. 248)

K výpočtu tohoto jevu je potřebné znát teplotu a tlak v době měření. V tabulce 9 jsou uvedeny hodnoty těchto dvou veličin v době našeho měření:

Den a čas měření (UT)	tlak [torr]	Teplota [°C]
17.06.2022 23:05	766,563	10
19.06.2022 22:46	756,812	16
02.07.2022 22:35	764,313	11
24.07.2022 21:23	762,813	18

Tabulka 9: Tlaky a teploty v čase měření.<sup>6</sup>

Jelikož jsem v čase měření neměl na místě pozorování barometr, musel jsem si meteorologické veličiny zpětně dohledat na stránce in-počasí.cz<sup>6</sup>.

---

<sup>6</sup>PRANTL, David 2012. Počasí – předpověď počasí, aktuální informace | In-počasí [online]. Dostupné z: <https://www.in-pocasi.cz/archiv/archiv.php?historie=2022-06-23@ion=13>

Pomocí vztahu (7.1.1) jsem poté spočítal refrakci (1, s. 26):

$$R = 60,2'' \frac{p}{101325} \cdot \frac{273}{273 + t} \tan z' \quad (7.1.1)$$

Vztah (7.1.1) jsem upravil do následujícího tvaru (7.1.2):

$$R = 0,00270328152' \cdot \frac{p \tan z'}{273 + t} \quad (7.1.2)$$

Kde  $p$  značí tlak v pascálech,  $t$  teplotu v °C a  $z'$  je zdánlivá (naměřená) zenitová vzdálenost. Výsledek vychází v úhlových minutách.

K výpočtu refrakce je potřebné znát zenitovou vzdálenost. Zenitová vzdálenost je dána vztahem (7.1.3):

$$z = 90^\circ - h \quad (7.1.3)$$

Z tohoto vztahu tedy plyne, že potřebujeme spočítat výšku komety v čase pozorování.

Výška objektu je dána vztahem (7.1.4) (1, s. 22):

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t \quad (7.1.4)$$

Tento vztah je možné odvodit z přepočtu rovníkových souřadnic I. druhu na obzorníkové. Můžeme si všimnout, že ve výpočtu figuruje hodinový úhel  $t$ . Ten můžeme spočítat pomocí místního hvězdného času a rektascenze, za pomoci vztahu (7.1.5) (1, s. 22):

$$t = \theta - \alpha \quad (7.1.5)$$

K výpočtu podle (7.1.5) však potřebujeme znát místní hvězdný čas. Hvězdný čas můžeme spočítat několika způsoby.

### 7.1.1 Hvězdný čas

Protože v době pozorování platil letní čas (SELČ), odečteme 2 h a získáme tak čas světový. Tento čas převedeme na hodiny a získanou hodnotu (UT), násobíme konstantou  $k = 1,002737909$ . Při oběhu Země kolem Slunce, Země vykoná 365,2422 otáček vůči Slunci. Vůči hvězdám vykoná Země ještě jednu otočku navíc, tedy 366,2422. Převodní konstantou je poměr těchto dvou čísel vztah (7.1.1.1):

$$k = \frac{366,2422}{365,2422} = 1,002737909 \quad (7.1.1.1)$$

K této hodnotě přičteme hvězdný čas pro předcházející půlnoc v Greenwichi. Tento čas můžeme najít v Hvězdářské ročence. [8] K získanému času ještě přičteme zeměpisnou délku

vyjádřenou v hodinách. Jestliže při výpočtu překročíme 24 hodin, musíme od výsledku ještě odečíst 24 h. Vypočtení místního hvězdného času tedy můžeme zapsat pomocí vztahu (7.1.1.2):

$$\theta = \theta_0 + k \cdot UT + \lambda \quad (7.1.1.2)$$

Kde  $\theta_0$  značí střední greenwichský hvězdný čas,  $\lambda$  zeměpisnou délku a  $UT$  světový čas ve chvíli pozorování. (4, s. 10)

Zeměpisné souřadnice zlínské hvězdárny, na které probíhalo 1., 2. a 4. pozorování jsou:

$$\lambda = 17^\circ 41' 34,44'' = 1,1795267 \text{ h}$$

$$\varphi = 49^\circ 13' 03,18'' = 49,21756^\circ$$

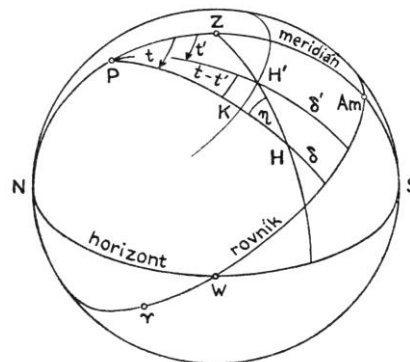
Souřadnice pozorovatelny pana Jaromíra Ciesly, od kterého mám 3. pozorování jsou:

$$\lambda = 17 \text{ h } 59' = 1,19888889 \text{ h}$$

$$\varphi = 49^\circ 57' = 49,95^\circ$$

### 7.1.2 Vliv refrakce na ekvatoreální souřadnice

Pro odvození vlivu refrakce na ekvatoreální souřadnice můžeme vyjít z obrázku 21:



Obrázek 21: Nautický trojúhelník pro výpočet vlivu refrakce na ekvatoreální souřadnice, převzato z 7, s. 43.

Z nautického trojúhelníku PZH, kde bod P je nebeský pól, Z zenit a H poloha komety opravená o refrakci. V tomto trojúhelníku platí, že úhel PZH je  $(180^\circ - A)$ . Vzdálenost ZH' je zdánlivá zenitová vzdálenost ( $z'$ ) a vzdálenost H'H je refrakce R. Vzdálenost PZ je rovna  $(90^\circ - \varphi)$ . Pomocí cosinové věty pro sférický trojúhelník můžeme spočítat stranu PH, která je rovna  $(90^\circ - \delta)$ . Výpočet je dán vztahem:

$$\cos(90^\circ - \delta) = \cos(z' + R) \cos(90^\circ - \varphi) + \sin(z' + R) \sin(90^\circ - \varphi) \cos(180^\circ - A)$$

Tento vztah však můžeme upravit do podoby (7.1.2.1):

$$\sin \delta = \cos(z' + R) \sin \varphi - \sin(z' + R) \cos \varphi \cos A \quad (7.1.2.1)$$

V tomto výpočtu figuruje azimut. Azimut se refrakcí nemění, takže jej můžeme spočítat z trojúhelníku PZH'. V tomto trojúhelníku je ZH' rovno ( $90^\circ - \delta'$ ) neboli deklinace, kterou jsem interpoloval pro čas pozorování z hodnot vypočtených programem. Vztah pro výpočet azimutu můžeme odvodit z přepočtu rovníkových souřadnic I. druhu na obzorníkové – vztah (7.1.2.2).

$$\tan A = \frac{\cos \delta' \sin t'}{\sin \varphi \cos \delta' \cos t' - \cos \varphi \sin \delta'} \quad (7.1.2.2)$$

Rektascenzi spočítáme pomocí místního hvězdného času a hodinového úhlu upravením vztahu (7.1.5):

$$\alpha = \theta - t$$

Hodinový úhel můžeme spočítat z trojúhelníku PZH pomocí sinové věty pro sférický trojúhelník:

$$\frac{\sin(180^\circ - A)}{\sin(90^\circ - \delta)} = \frac{\sin t}{\sin(z' + R)}$$

Tuto rovnost můžeme upravit do vztahu (7.1.2.3):

$$\sin t = \frac{\sin A \sin(z' + R)}{\cos \delta} \quad (7.1.2.3)$$

Den a čas měření (UT)	Hvězdný čas [h:min]	Azimut [°]	Zdánlivá zenitová vz. [°]	Zenitová vz. [°]
17.06.2022 23:05	18:00	2,789	43,248	43,233
19.06.2022 22:46	17:49	0,1498	43,761	43,746
02.07.2022 22:35	18:31	22,336	50,873	50,853
24.07.2022 21:23	18:44	35,290	63,230	63,199

Tabulka 10: Výpočet obzorníkových souřadnic a zenitová vzdálenosti z astrometricky určených rovníkových.

Den a čas měření (UT)	Hvězdný čas [h:min]	Souřadnice komety	
		$\alpha$	$\delta$
17.06.2022 23:05	18:00	17 h 52,8 m	5° 59,1'
19.06.2022 22:46	17:49	17 h 48,9 m	5° 26,5'
02.07.2022 22:35	18:31	17 h 22,1 m	1° 12,2'
24.07.2022 21:23	17:44	16 h 38,6 m	-7° 44,0'

Tabulka 11: Poloha komety opravená o refrakci.

Den a čas měření (UT)	Interpolovaná poloha		Souřadnice na fotce	
	$\alpha$	$\delta$	$\alpha$	$\delta$
17.06.2022 23:05	17 h 52,9 m	6° 0,5'	17 h 52,8 m	5° 59,1'
19.06.2022 22:46	17 h 48,9 m	5° 27,8'	17 h 48,9 m	5° 26,5'
02.07.2022 22:35	17 h 22,1 m	1° 13,1'	17 h 22,1 m	1° 12,2'
24.07.2022 21:23	16 h 38,9 m	-7° 43,0'	16 h 38,6 m	-7° 44,0'

Tabulka 12: Porovnání polohy komety opravené o refrakci s polohou astrometricky určenou ze snímku.

## 8 ZÁVĚR

V této práci jsem popsal výpočet polohy nebeského tělesa na nebeské sféře. Součástí bylo také vytvoření programu v programovacím jazyce Pascal a fotografování komety. V tabulce 13 je znázorněn rozdíl mezi vypočtenou a změřenou polohou obou souřadnic. Ve čtvrtém sloupci je deklinace opravená o refrakci. Rektascenze se po započtení refrakce nezměnila. Rozdíl je určen v úhlových minutách:

Den a čas měření (UT)	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	$\Delta\delta_r$
17.06.2022 23:05	1,5'	0,5'	1,4'
19.06.2022 22:46	0'	0,4'	1,3'
02.07.2022 22:35	0'	0,3'	1,1'
24.07.2022 21:23	4,5'	2,4'	1,0'
$\bar{x}$	$1,5' \pm 3,4'$	$0,9' \pm 1,6'$	$1,2' \pm 0,3'$

Tabulka 13: Rozdíl naměřené a vypočtené polohy.

Aritmetický průměr můžeme spočítat pomocí vztahu (8.1):

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} \quad (8.1)$$

Pro tyto hodnoty můžeme spočítat směrodatnou odchylku pomocí vztahu (8.2):

$$s = \sqrt{\frac{\sum x^2 - (\sum x)^2 / n}{n - 1}} \quad (8.2)$$

Pro rektascenzi vychází směrodatná odchylka:

$$s_{rec} = 2,121$$

Pro deklinaci:

$$s_{dec} = 1,003$$

Po započtení refrakce směrodatná odchylka vychází pro rektascenzi stejně, ale pro deklinaci je nižší:

$$s_{dec} = 0,181$$

Interval spolehlivosti můžeme spočítat pomocí tzv. studentova rozdělení, které vyjadřuje vztah (8.3) (9, s. 18):

$$\bar{x} \pm t_\alpha(n - 1) \frac{s}{\sqrt{n}} \quad (8.3)$$

Kde  $t_\alpha$  značí kritickou hodnotu rozdělení na hladině 5 %. Tuto hodnotu můžeme spočítat např. v Excelu pomocí funkce TINV pro  $(n - 1)$  dostaneme  $TINV(0,05;3)= 3,18245$ . Když nyní dosadíme do vztahu (8.3) získáme hodnoty, které jsou uvedené v posledním řádku tabulky 13.

Jak je z výše uvedeného patrné, přesnost výpočtu dalece přesahuje požadavek na to, abychom po nasměrování dalekohledu na místo spočítané programem, kometu nebo jiné nebeské těleso bez problému našli. Mým cílem při sepisování této práce bylo také podat ucelený a srozumitelný výklad k výpočtu poloh nebeských těles. V české literatuře dostupné amatérům je většinou tato problematika popisována pouze okrajově a zdaleka ne pro tělesa pohybující se po všech možných kuželosečkách (elipsa, hyperbola a parabola). Nežřídka se také stává, že se v této literatuře nachází tiskové chyby ve hlavních vztazích. Proto jsem se každý vztah snažil uvést i s jeho odvozením.

Logickým pokračováním této práce by bylo vytvořit další program, který by byl schopen určit elementy drah komet (nebo jiných těles). Elementy drah je možné spočítat pomocí souřadnic ze tří a více pozorování. Astrometrické zpracování snímků vlastními silami je také možné počítat. Dalším krokem by tedy mohlo být vytvoření programu pro výpočet astrometricky určených souřadnic. V budoucnosti také plánuji práci publikovat na internetu, aby bylo možné z ní dále vycházet. Uvažuji o vytvoření webových stránek, které by poskytovaly kompletní přehled postupu výpočtu efemerid. Pro tento účel bych na stránkách zveřejnil i samotný program.



## 9 POUŽITÁ LITERATURA

- [1] ŠIROKÝ, Jaromír a Miroslava ŠIROKÁ. Základy astronomie v příkladech. 3. vyd. Praha: SPN, 1977. Vysokoškolské příručky.
- [2] HACAR, Bohumil. Mechanika sluneční soustavy. V Praze: Jednota československých matematiků a fyziků, 1948. Cestou k vědě.
- [3] BARTSCH, Hans-Jochen. Matematické vzorce. 3., nezm. vyd. Přeložil Vladimír MALÝ. Praha: SNTL, 1971.
- [4] HOLLAN, Jan, WOLF, Marek, ed. Astronomická příručka. Praha: Academia, 1992. ISBN 80-200-0467-X.
- [5] POKORNÝ, Zdeněk. Astronomické algoritmy pro kalkulátory. V Praze: Hvězdárna a planetária hlavního města Prahy, 1988. Vysokoškolské příručky.
- [6] ZÍKA, Vratislav. Interní materiály Astronomického kroužku Hvězdárny Zlín. [cit. 30. 1. 2022]
- [7] PROCHÁZKA, Jaroslav. Sférická astronomie. Praha: Naše vojsko, 1953. Velká vojenská knihovna.
- [8] Hvězdářská ročenka. Praha: Hvězdárna a planetárium hl. m. Prahy v koedici s Astronomickým ústavem AV ČR Praha 2021. ISSN 0373-8280.
- [9] Brož, J. at al.: Základy fyzikálních měření, I. díl. SPN, Praha 1967.

## 10 SEZNAM OBRÁZKŮ

Obrázek 1: Obzorníkové souřadnice: $A, h$ , převzato z 1, s. 21 .....	10
Obrázek 2: Rovníkové souřadnice: $\alpha, \delta$ a $t$ , převzato z 1, s. 21 .....	11
Obrázek 3: Ekliptikální souřadnice: $\beta, \lambda$ , převzato z 1, s. 24.....	12
Obrázek 4: Odvození transformace souřadnic, převzato z [6].....	12
Obrázek 5: Transformace souřadnic z ekliptikálních na rovníkové, převzato z [6]. .....	13
Obrázek 6: Vztah mezi pravoúhlými a sférickými souřadnicemi, převzato z [6] .....	14
Obrázek 7: Keplerovy elementy dráhy, převzato z 1, s. 45 .....	15
Obrázek 8: Polární souřadnice kružnice. $E$ je excentrická anomálie a $a$ je poloměr kružnice. <sup>1</sup> .....	16
Obrázek 9: Hartmannova rovnice. <sup>2</sup> .....	19
Obrázek 10.: Vztah mezi pravou a excentrickou anomálií, převzato z 7, s. 58.....	22
Obrázek 11: Zápis elementů v textovém souboru ORB. ....	34
Obrázek 12: Výstupní textový soubor s elementy dráhy a efemeridami. ....	35
Obrázek 13: Zadávání vstupních dat do programu. ....	36
Obrázek 14: Vyhledávací mapka komety C/2017 K2 (PanSTARRS) v průběhu června až začátku října. <sup>4</sup> .....	37
Obrázek 15: Set-up, se kterým jsem prováděl fotografování. ....	38
Obrázek 16: Fotografie z 20. 6. 2022 1:46 SELČ. ISO 800, expozice 70 s. Foto autor. ....	38
Obrázek 19: Fotografie z 24. 7. 2022 23:23 SELČ. ISO 1600, expozice 15 s. Foto autor. ....	39
Obrázek 18: Fotografie z 3. 7. 0:35 SELČ. ISO 1600, expozice 10 s. Foto autor. ....	39
Obrázek 17: Fotografie z 18. 6. 2022 1:05 SELČ. ISO 1600, expozice 61 s. Foto autor. ....	39
Obrázek 20: Fotografie komety oříznutá na střed. ....	40
Obrázek 21: Nautický trojúhelník pro výpočet vlivu refrakce na ekvatoreální souřadnice, převzato z 7, s. 43. ....	44

## 11 SEZNAM TABULEK

Tabulka 1: Největší poruchy elementů dráhy Země kolem Slunce, převzato z 4, s. 33 .....	28
Tabulka 2: Pojmenování veličin v programu.....	32
Tabulka 3: Efemeridy spočítané pro dny fotografování, ale také pro dny kolem data fotografování, pro možnost spočítání přesné polohy pro daný čas.....	40
Tabulka 4: Interpolovaná efemerida komety k přesnému času fotografování.....	41
Tabulka 5: Efemeridy spočítané pomocí elementů platných do dne 29. 11. 2022.....	41
Tabulka 6: Efemeridy spočítané pomocí elementů platných do dne 23. 9. 2022.....	41
Tabulka 7: Efemeridy počítané pomocí elementů z Hvězdářské ročenky [8].....	41
Tabulka 8: Změny elementů dráhy komety v průběhu práce na SOČ.....	41
Tabulka 9: Tlaky a teploty v čase měření. <sup>6</sup> .....	42
Tabulka 10: Výpočet obzorníkových souřadnic a zenitová vzdálenosti z astrometricky určených rovníkových.....	45
Tabulka 11: Poloha komety opravená o refrakci.....	45
Tabulka 12: Porovnání polohy komety opravené o refrakci s polohou astrometricky určenou ze snímku.....	45
Tabulka 13: Rozdíl naměřené a vypočtené polohy.....	46