

STŘEDOŠKOLSKÁ ODBORNÁ ČINNOST

Obor 01 – Matematika

Barevná variace hry Výhonky

Terezie Kladivová

Pardubický kraj

Litomyšl 2023

STŘEDOŠKOLSKÁ ODBORNÁ ČINNOST

Obor 01 – Matematika

Barevná variace hry Výhonky

Colorful extension of the Sprouts game

Autor práce: Terezie Kladivová
Gymnázium Aloise Jiráska Litomyšl
T. G. Masaryka 590
570 01 Litomyšl, septima

Konzultanti:

Mgr. Petr Kovář, Ph.D.
Katedra aplikované matematiky FEI VŠB-TUO
17. listopadu 2172/15
708 00 Ostrava – Poruba

Mgr. Markéta Bartošová
Gymnázium Aloise Jiráska Litomyšl
T. G. Masaryka 590
570 01 Litomyšl

Prohlášení

Prohlašuji tímto, že jsem soutěžní práci vypracovala samostatně pod vedením pana Mgr. Petra Kováře, Ph.D. a jako podklady jsou použita pouze literaturu, internetové zdroje, a jiné uvedené v seznamu bibliografických záznamů.

Prohlašuji rovněž, že tištěná a elektronická verze této práce jsou shodné.

Nemám závažný důvod, který by bránil zpřístupnění této práce v souladu se zákonem č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon), ve znění pozdějších předpisů.

V Litomyšli dne

Podpis autora

Poděkování

Chtěla bych touto cestou poděkovat svému konzultantovi panu Mgr. Petru Kovářovi Ph. D. za milé vedení, podnětné připomínky a cenné rady ohledně struktury práce. Mé poděkování patří také paní Mgr. Markétě Bartošové, díky níž se pro mě práce s programem LaTeX stala podstatně jednodušší. A v neposlední řadě bych ráda poděkovala své rodině, která láskyplně tolerovala mé slabší nasazení v domácích povinnostech způsobené prací na tomto projektu.

Anotace

Tento projekt se zabývá rozborem hry Výhonky, zejména pak její vlastní nově vymyšlenou variantou. Cílem práce bylo pomocí teorie grafů podrobně popsat vlastnosti nové hry. Nemalý důraz je kladen na spodní hranici počtu tahů potřebného k ukončení hry a to například i za podmínek, že konečný graf bude 1- nebo 2-souvislý. K odvození je využíváno jak úvah o druzích vrcholů, tak Eulerova vzorce. Výsledkem práce je (kromě co nejdůkladnějšího popisu pozměněných vlastností hry) nejnižší možná hodnota počtu tahů s důkazem, že pro jiné než uvedené výchozí hodnoty ji nebude možné dosáhnout, a pak také jistě dosažitelné počty tahů pro různé výchozí stavy hry včetně jistě dosažitelných hodnot v závislosti na požadavku souvislosti konečného grafu.

Klíčová slova

graf, hra na grafech, oblast grafu, počet tahů, stupeň vrcholu, vrchol

Anotation

This project deals with the analysis of the Sprouts game, in particular my own reinvented version of it. The aim of the work was to use graph theory to describe the properties of the new game in detail. Considerable emphasis is given to a lower limit of the number of moves needed to complete the game, for example, even under the conditions that the final graph is 1- or 2-connected. Both vertex type considerations and Euler's formula are used for its derivation. The result of the work is (in addition to describing the modified properties of the game as carefully as possible) the lowest possible value of the number of moves, with a proof that for other than the listed initial values it cannot be achieved, and then the surely achievable number of moves for different initial states of the game, including surely achievable values depending on the contiguity requirement of the finite graph.

Key words

degree of a vertex, graph, graph game, number of moves, region of a graph, vertex

Obsah

Úvod	8
1 Základy teorie grafů	9
1.1 Graf	10
1.2 Stupeň vrcholu	13
1.3 Planarita grafu	14
1.4 Souvislost grafu	15
1.5 Obecný Eulerův vzorec	17
1.6 Hranové barvení grafu	17
2 Klasická hra	19
2.1 Hra výhonky a její pravidla	19
2.2 Obecná zjištění	19
2.3 Konec hry	20
2.4 Maximální počet tahů	21
2.5 Minimální počet tahů	21
2.6 Maximální počet oblastí	23
3 Varianta hry rozšířená o barvy	24
3.1 Zavedení nových pravidel pro barevně modifikovanou hru	24
3.2 Pozorování	25
3.3 Maximální počet tahů pro barevnou variantu	28
3.4 Minimální počet tahů pro barevnou variantu	28
3.4.1 Obecné odvození pomocí druhů vrcholů	29
3.4.2 Odvození pro 2-souvislé grafy pomocí Eulerova vzorce	37
3.4.3 Odvození pro 1-souvislé grafy pomocí Eulerova vzorce	47

Závěrem	56
Literatura	58

Úvod

Existuje nesčetné množství her pro dva hráče, k jejichž hraní postačí pouze tužka a papír. Příkladem mohou být například často hrané piškvorky, lodě nebo šibenice. Jednou z těchto her jsou i veřejnosti méně známé Výhonky. Ačkoli se jedná o hru na grafech, nevyžadují Výhonky žádné znalosti z této oblasti a hrát je může každý, kdo je obeznámen s pravidly. Na první pohled se hra může zdát nezajímavá, pokud se jí ale začneme podrobněji zabírat, zjistíme, že nabízí více, než bychom čekali. Navíc existují i určité úpravy hry, které mnohdy významně mění její vlastnosti. Například varianta hry jménem Podvodné Výhonky (jinak také Podvodní Šprouti) má tu vlastnost, že bez ohledu na strategie hráčů je již na začátku každé hry jasné, který z hráčů vyhraje. Výherce určí pouze výchozí stav hry.

Jen poté, co vysvětlíme potřebné pojmy, se budeme v práci nejprve věnovat klasické hře Výhonky, u které popíšeme známé vlastnosti a vztahy, jakými jsou například počet hran a vrcholů grafu v průběhu hry, konečnost hry, stupně vrcholu na konci hry, dolní a horní hranice počtu tahů pro ukončení hry v závislosti na počátečním stavu anebo počet oblastí.

Posléze zavedeme nová pravidla pro vlastní rozšířenou variantu Výhonků, kdy do hry přidáme barvy a stanovíme přísnější podmínky uskutečnění hráčova tahu. Budeme očekávat pozměněné vlastnosti hry, jejichž zkoumání se stane hlavním předmětem této práce. Podíváme se na vlastnosti vrcholů, oblastí, nebo na to, jestli a jak se změjí dolní a horní hranice pro počet tahů. Pro odvození budeme využívat jak známého Eulerova vzorce, tak alternativnějších, řekněme méně zaběhlých pohledů na věc. Zároveň se pokusíme realizovat takové hry, kterými bychom teoretická zjištění potvrdili.

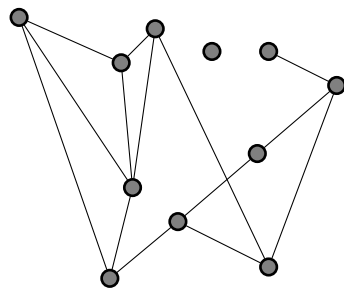
Kapitola 1

Základy teorie grafů

Ještě než čtenáře seznámíme se hrou Výhonky a jejími vlastnostmi, považujeme za nezbytné nastínit podstatu teorie grafů a vysvětlit několik základních pojmů nutných k pochopení tématu.

Teorie grafů se začala rozvíjet ve 30. letech 18. století, jedná se tedy o mladší matematickou disciplínu. Tehdy se švýcarský matematik Leonard Euler zabýval takzvaným „Problémem sedmi mostů města Královce“, při jehož řešení využil dosud neznámý pohled na tento problém [1]. Jeho důkaz, že sedm mostů v úloze nelze projít souvislou cestou bez nutnosti projít některého z mostů dvakrát, a následné zobecnění problému se staly základem pro topologii a teorii grafů [2]. Svou metodu nazval „geometrií pozic“, tedy dnešní teorii grafů [1]. Přestože motivací pro její vznik byly spíše rekreační problémy, dnes nalézá využití v širokém spektru oborů – její aplikace najdeme v různých odvětvích chemie, v operační analýze, společenských vědách a v neposlední řadě také v matematické informatice [2].

Samotný pojem *graf* je mnohoznačný. V teorii grafů se nejedná o grafy funkcí, ani o sloupcové nebo kruhové diagramy, jak by si široká veřejnost zřejmě pod tímto pojmem představovala. Grafy, o kterých budeme v textu mluvit, jsou tvořeny „puntíky“ (vrcholy) a „čárkami“ (hranami), které puntíky propojují. S takovou definicí bychom ale nevystačili, proto v následujících řádcích řádněji vysvětlíme některé z pojmů, které budeme dále v textu potřebovat.



Obrázek 1.1: Obecný graf

1.1 Graf

Graf G je uspořádaná dvojice (V, E) , kde V je nějakou neprázdnou množinou a E je množinou dvoubodových podmnožin množiny V . Prvky množiny V nazýváme vrcholy grafu G a prvky množiny E nazýváme hrany grafu G .

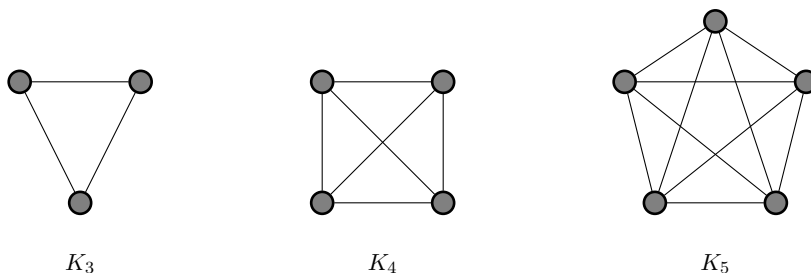
Značením $G = (V, E)$ rozumíme graf G , který má množinu vrcholů V a množinu hran E . Grafy znázorňujeme kreslením do roviny, kdy jednotlivým vrcholům přiřazujeme body v rovině (zpravidla puntíky) a hrany vyjadřujeme propojováním dvojic puntíků souvislými čarami tak, aby neprocházely žádným dalším puntíkem. Přitom mohou být čáry jakkoli zakřivené [4].

Některé druhy grafů

V práci budeme pro názornější vysvětlení odkazovat na některé typy grafů, pro něž je zavedeno obecné označení, neboť se v teorii grafů vyskytují často.

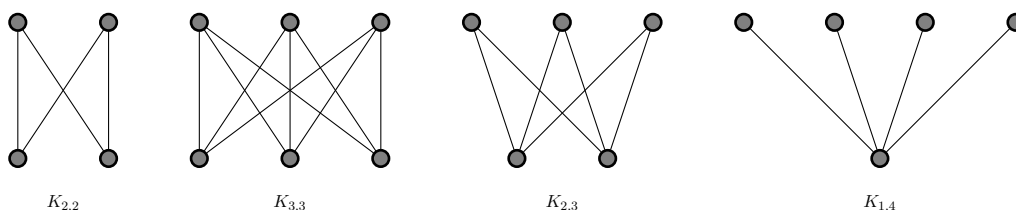
Úplný graf

O úplném grafu na n vrcholech hovoříme, pokud je každá dvojice z n vrcholů propojena hranou. Takových hran je poté v úplném grafu $\binom{V}{2}$. Značíme K_n .



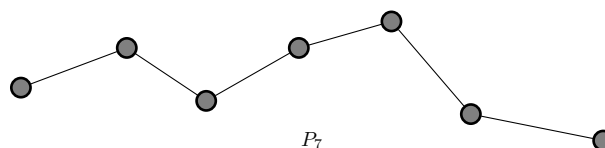
Úplný bipartní graf

Množinu vrcholů lze v úplném bipartním grafu rozdělit na dvě disjunktní množiny A , B , $|A| = n$, $|B| = m$, kdy mezi vrcholy příslušícími do jedné množiny nenajdeme žádné hrany. Naopak mezi každými dvěma vrcholy $v_a \in A$ a $v_b \in B$ existuje hrana. Takový graf značíme $K_{n,m}$.



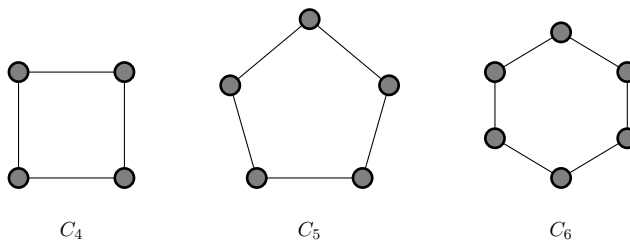
Cesta

Graf s množinou vrcholů $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ a množinou hran $E = \{v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n\}$ nazýváme cesta [5]. Cestu značíme P_n .



Kružnice

Pro definici kružnice se omezíme na zápis $V = \{1, 2, \dots, n\}$, $E = \{\{i, i + 1\}; i = 1, 2, \dots, n\} \cup \{1, n\}$ [4]. Grafem tvořícím kružnici lze tak souvisle projít všechny jeho vrcholy a hrany bez toho, abychom nějakým vrcholem či hranou prošli dvakrát. Přitom procházení zakončíme v počátečním vrcholu. Kružnici značíme C_n .

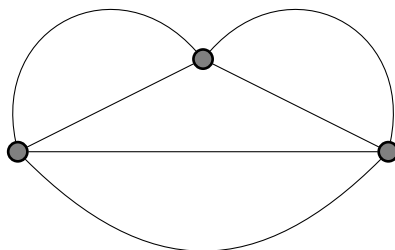


Multigraf

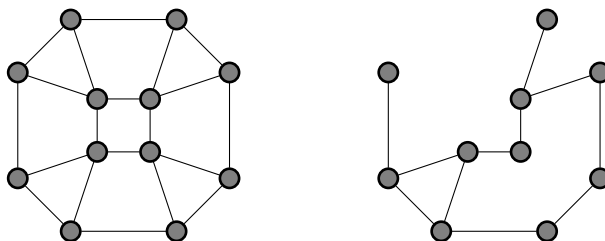
Z výše uvedené definice grafu vyplývá, že dva dané vrcholy mohou být spojeny nejvýše jednou hranou. V teorii grafů (a i rovněž v naší hře na grafech) je ale nezbytné připustit i situace, kdy jsou dva vrcholy v grafu propojeny více než jednou hranou. O takovém grafu pak hovoříme jako o *grafu s násobnými hranami*, jinak zvanému *multigraf*.

Počet hran spojujících dva vrcholy v_1, v_2 vyjadřuje *násobnost hrany*, která je nezáporným celým číslem [4].

V této práci budeme někdy méně přesně označovat multigrafy pouze jako grafy. Podotkneme ale, že například Eulerův vzorec či princip sudosti (vysvětleno dále v textu) platí pro multigraf stejně jako pro prostý graf.



Obrázek 1.2: Multigraf s násobnými hranami při všech vrcholech



Obrázek 1.3: Graf G a jeho podgraf F

Podgraf

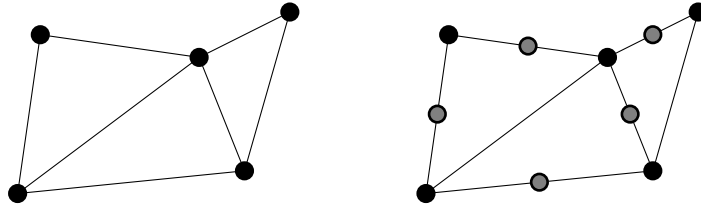
Graf $F = (V', E')$ je *podgrafem* grafu $G = (V, E)$ právě tehdy, když platí $V' \subseteq V$ a zároveň $E' \subseteq E$. Pro představu také můžeme uvést, že podgraf F může z grafu G vzniknout odebráním libovolné kombinace jeho hran nebo vrcholů (a tedy hran i s nimi incidentních). Z toho tedy vyplývá, že každý graf je zároveň sám sobě podgrafem, neboť nemusíme odebrat žádné hrany ani vrcholy.

Pokud graf F nazýváme jako podgraf grafu G , pak také graf G označujeme pojmem *nadgraf* grafu F [5].

Subdivize

Pokud hranu planárního grafu G „rozdělíme“ na dvě hrany přidáním nového vrcholu za vzniku grafu G' , zůstane planarita zachována i u grafu G' . Obdobně pokud původní graf G planární není, nebude planárním ani graf G' .

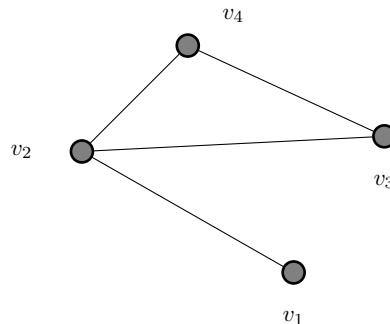
Formálně se vznik subdivize definuje následovně. Mějme v grafu G danou hranu uv a vrchol x , jenž do grafu nepatří. Graf G' vznikne z grafu G *rozdělením hrany uv* , jestliže kamkoli na hranu uv přidáme nový vrchol x . Tedy $V(G') = V(G) \cup \{x\}$ a $E(G') = E(G) \setminus uv \cup \{ux, xv\}$ [5].



Obrázek 1.4: Graf G a jeho subdivize G'

1.2 Stupeň vrcholu

Stupněm vrcholu rozumíme počet hran, jež jsou s vrcholem incidentní (vychází z něho). Stupeň vrcholu značíme $deg_G(v)$ [5]. Například v úplném bipartním grafu je stupeň vrcholu v_a z množiny A vždy roven mohutnosti množiny B a naopak.



Obrázek 1.5: Příklad stupně vrcholu; $deg_G v_1 = 1$, $deg_G v_2 = 3$, $deg_G v_3 = 2$, $deg_G v_4 = 2$

Princip sudosti

Každá hrana v grafu navyšuje o jedno stupeň dvěma vrcholům, které spojuje, jinak řečeno každá hrana v grafu znamená navýšení celkového součtu stupňů vrcholu o dva. Tedy můžeme zapsat

$$\sum_{i=1}^n \deg_G v_i = 2|E|.$$

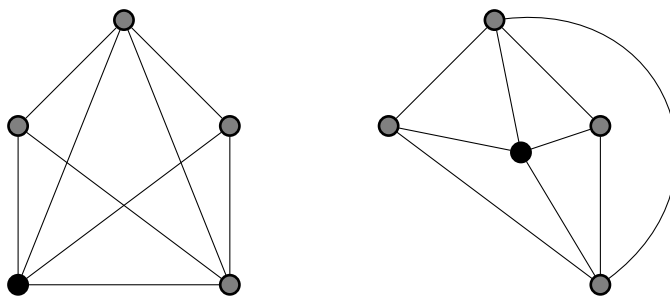
Důsledkem je důležitá vlastnost grafu a sice, že počet vrcholů lichého stupně je v grafu vždy sudý. Pro lepší představu si dovolíme zmínit známý problém s podáváním rukou na večírku, u kterého díky znalosti principu sudosti můžeme tvrdit, že počet lidí na večírku, kteří si podali ruku s lichým počtem osob, je vždy sudý.

1.3 Planarita grafu

Planarita grafu je taková kvalitativní vlastnost, která určuje, je-li možné graf nakreslit v rovině bez nutnosti křížení hran. Pakliže je to možné, říkáme, že graf je planární.

Rovinný graf

Graf je ve svém nakreslení rovinný, je-li planární a nekříží-li se mu v daném nakreslení žádné dvě hrany. Pokud je totiž graf planární, nemusí to ještě nutně znamenat, že se žádné z jeho dvou hran vzájemně nekříží.

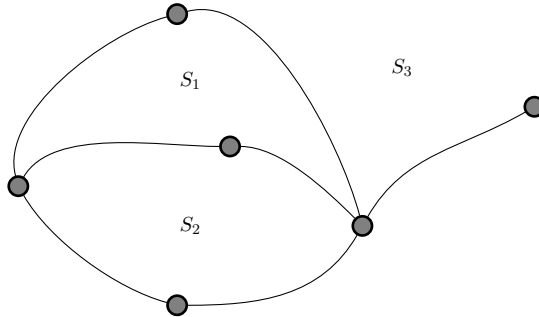


Obrázek 1.6: Nerovinné (nalevo) a rovinné (napravo) nakreslení planárního grafu G

Oblast

O oblastech (v literatuře často označovaných jako stěny) má smysl mluvit v případě rovinného nakreslení grafu. Uvažujme nakreslený rovinný graf G a množinu všech bodů roviny, které neleží v jeho vrcholech nebo hranách. Tuto množinu lze dále rozdělit na

disjunktní podmnožiny bodů, mezi kterými lze vést spojnicí bez nutnosti zkrřížení nějaké hrany. Tyto podmnožiny nazýváme oblasti a značíme je S . Jako vnější oblast označíme oblast s nekonečným obsahem. Ostatní oblasti nazveme vnitřní [4].



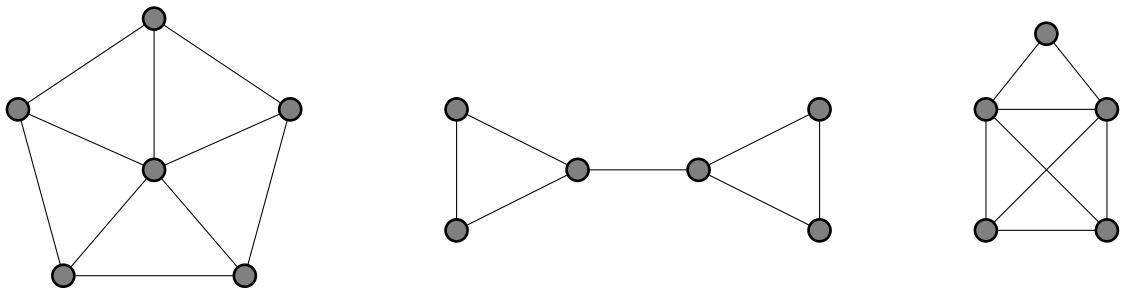
Obrázek 1.7: Grafu se třemi oblastmi

1.4 Souvislost grafu

Graf G je souvislý, existuje-li mezi každými jeho dvěma vrcholy x, y cesta z x do y [4]. Pakliže taková cesta pro nějaké dva vrcholy grafu G neexistuje, je graf G nesouvislý.

Hranová k -souvislost

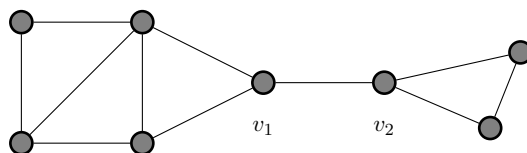
Graf, který je *hranově k -souvislý*, má alespoň $k+1$ vrcholů a odebráním jeho libovolných nejvýše $k-1$ hran zůstane zachována jeho souvislost [5]. Snadno si domyslíme, že je-li graf k -souvislý, pak je také $(k-1)$ -souvislý, $(k-2)$ -souvislý, až nakonec i 1-souvislý.



Obrázek 1.8: Grafy po řadě zleva 3-souvislý, 1-souvislý a 2-souvislý

1-souvislý graf

Graf je hranově nejvýše *1-souvislý*, pokud je souvislý a zároveň v něm existuje alespoň jedna hrana, jejíž odebráním by se graf stal nesouvislým.



Obrázek 1.9: 1-souvislý graf s jedinou cestou mezi vrcholy v_1 a v_2

2-souvislý graf

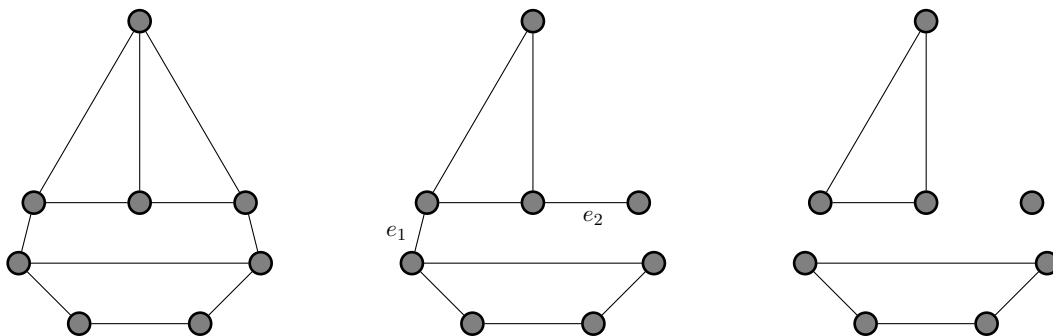
Graf je hranově nejvýše 2-souvislý, je-li souvislý a lze-li odebráním nějakých jeho dvou hran dosáhnout nesouvislého grafu. Přitom odebráním libovolné jedné z jeho hran nesouvislého grafu dosáhnout nelze.

Komponenty

Mějme dán graf G . Jeho podgraf T je komponentou grafu G , jestliže T je souvislý podgraf grafu G a zároveň každý další souvislý podgraf U je buď podgrafem T nebo jsou množiny vrcholů podgrafů T a U disjunktní. Počet komponent grafu G značíme jako ω_G [5]. Souvislé grafy mají proto pouze jednu komponentu.

Most

Jako most označujeme hranu e souvislého grafu G právě tehdy, pokud $G - e$ je nesouvislý graf s právě dvěma komponentami [5]. Také stojí za povšimnutí, že mosty náležejí vždy pouze jedné oblasti grafu, zatímco hrany, které mosty nepředstavují, jsou incidentní se dvěma oblastmi grafu.



Obrázek 1.10: Souvislý graf bez mostů (nalevo), souvislý graf se dvěma mosty e_1 , e_2 (uprostřed) a nesouvislý graf se třemi komponentami po odstranění obou mostů (napravo)

1.5 Obecný Eulerův vzorec

Pro rovinný graf $G = (V, E)$ platí obecný Eulerův vzorec $|V| - |E| + |S| = 1 + \omega$.

Pro důkaz si představme, že máme na papíře nakresleno n vrcholů a žádné hrany. Přeskládáním zmíněného vzorce dostaneme rovnost $|E| + \omega - |S| = |V| - 1$. Všimněme si, že ať nakreslíme do grafu jakoukoli hranu, hodnota $|V| - 1$ zůstane konstantní a tedy i $|E| + \omega - |S|$ bude muset setrvat konstantní, jak dokážeme. Spojením dvou vrcholů (za předpokladu zachování rovinného nakreslení) vždy buď ubude jedna komponenta (v případě, že se nově nakreslená hrana stane mostem) nebo přibude jedna oblast (v případě, že nově nakreslená hrana není mostem). Tedy s každou nově nakreslenou hranou se hodnota $|E|$ o jedno zvýší a hodnota $\omega - |S|$ naopak o jedno sníží. Tedy také $|E| + \omega - |S|$ je konstantní.

Zbývá dokázat, že se obě strany rovnají. Pokud graf nebude mít žádné hrany, pak bude mít pouze jednu stěnu a bude platit $\omega - 1 = |V| - 1$. Jelikož tento graf nemá hrany, bude počet komponent roven počtu vrcholů a tedy platí i naše rovnost. Tím jsme s důkazem hotovi.

Eulerův vzorec pro souvislé grafy

Souvislé grafy sestávají pouze z jedné komponenty a proto pro ně platí Eulerův vzorec $|V| - |E| + |S| = 2$.

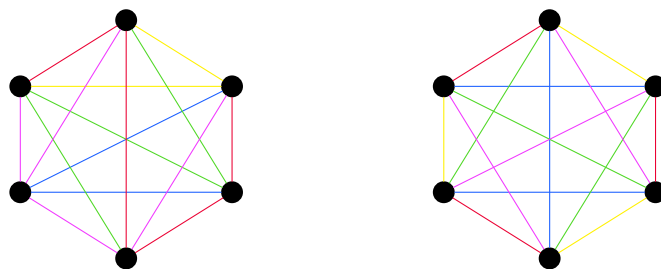
Eulerův vzorec (také Eulerův vztah) je v podstatě jediný základní kvantitativní vzorec pro rovinné grafy. Už v roce 1752 ho znal švýcarský matematik Leonhard Euler a nelze vyloučit, že pochází již od Descarta z roku 1640 [4].

1.6 Hranové barvení grafu

Hranové barvení grafu G je zobrazení c hranové množiny $E(G)$ do množiny barev B . Prvky množiny barev B značíme obvykle $1, 2, 3, \dots, k$. Je-li $|B| = k$, pak zobrazení c nazveme *hranové k -barvení grafu G* , přičemž předpokládáme, že všechny prvky množiny B jsou v zobrazení užity, neboť kdyby užity nebyly, tak by nemělo smysl je do množiny B zahrnovat.

Jestliže $c(e) = i$, pak říkáme, že hrana e je obarvena barvou i . Číslo i nazýváme barva hrany. Hranové barvení je *dobré*, pokud po užití zobrazení c z každého vrcholu vycházejí hrany navzájem různé barvy, tj. žádné dvě závislé hrany v grafu G nejsou

obarveny stejnou barou [5].



Obrázek 1.11: Hranové barvení grafu K_6 (nalevo) a dobré hranové barvení grafu K_6 (napravo)

Kapitola 2

Klasická hra

2.1 Hra výhonky a její pravidla

Hru Výhonky (jinak nazývanou i Šprouti z anglického Sprouts) vymysleli roku 1967 matematici John H. Conway a Michael S. Paterson z Cambridžské univerzity [3]. Hra je určena pro dva hráče, kteří se střídají ve svých tazích. Ke hraní jim postačí tužka a papír.

Ze začátku je na papíru nakreslen předem domluvený počet puntíků (vrcholů). Jeden ze hráčů zahájí svůj tah. Provedení tahu sestává ze dvou kroků: hráč propojí za vzniku nové hrany dva vrcholy tak, aby nově vzniklá hrana žádnou další nekřížila (ani sama sebe) a nebyla incidentní s jiným vrcholem, přičemž může být libovolně zakřivená. Není zakázáno hranu započít i ukončit ve stejném vrcholu. Zároveň však hráči musí dodržet pravidlo, aby z každého vrcholu vycházely vždy nejvýše 3 hrany. Tedy vrcholy stupně tři již nelze využít pro tvorbu nové hrany. Svůj tah hráč zakončí nakreslením nového vrcholu kamkoli na právě vzniklou hranu.

Hráč, který podle pravidel nemůže udělat další tah, prohrává. Pravidla převzata z [3].

2.2 Obecná zjištění

Nakreslené tahy tvoří společně s původními vrcholy graf $G = (V, E)$. Označme počet tahů jako t a počet původních vrcholů jako n . Počet hran stoupá s dvojnásobkem počtu tahů, navlečením vrcholu na nově nakreselnou hranu totiž vzniknou dvě hrany. Tedy v jakémkoli okamžiku hry platí $|E| = 2t$. Protože každý tah znamená nový vrchol,

můžeme jednoduše vyjádřit i počet vrcholů jako $|V| = n + t$. Ukážeme, že hra má omezený počet tahů a také odvodíme jejich nejmenší a největší možný počet.

2.3 Konec hry

Je zřejmé, že hra s daným počtem počátečních vrcholů musí nutně někdy skončit. Jako argument nám může posloužit následující úvaha: Před začátkem hry umíme počet možných připojení popsat jako $3n$, neboť z každého vrcholu mohou vycházet až 3 hrany. S každým tahem snížíme pomocí nové hrany počet možných připojení o dva (hrana je incidentní se dvěma vrcholy) a přibude naopak pouze jedno nové připojení (díky nově nakreslenému vrcholu, který je již stupně dva). Po každém tahu proto ubude jedno možné připojení a nakonec nebudeme schopni najít žádné další dva vrcholy, které bychom dle pravidel mohli spojit. Poslední tah přidá vrchol s jedním možným připojením, z čehož plyne, že nikdy nedosáhneme $3n$ tahů.

Popišme situaci, kdy ve hře již nelze provést žádný další tah. V tu chvíli se v grafu nenachází žádný vrchol stupně nula ani jedna, v opačném případě by nad tímto vrcholem šlo vytvořit smyčku a přidat nový vrchol (další tah). Můžeme napsat

$$2 \leq \deg(v) \leq 3$$

Počet vrcholů stupně dva proto bude na konci hry roven počtu nevyužitých připojení, kterých je $3n - t$. Tedy:

$$|V_{deg2}| = 3n - t$$

Z principu sudosti $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$ také plyne, že na konci hry musí být počet vrcholů stupně tři sudý.

Můžeme říci, že součet počtu vrcholů stupně 2 a stupně 3 je na konci hry roven celkovému počtu vrcholů.

$$|V_{deg2}| + |V_{deg3}| = n + t$$

Když dosadíme předešlou rovnici pro $|V_{deg2}|$, dostaneme:

$$3n - t + |V_{deg3}| = n + t$$

$$|V_{deg3}| = 2(t - n)$$

To jednak potvrzuje princip sudosti a můžeme z toho zjistit, že $t \geq n$ (protože počet vrcholů stupně tři nemůže být záporný). Díky této znalosti bude na konci hry platit $|V(G)| \geq 2n$ a také $|V(G)| \leq 2t$. Shrnutí do jedné nerovnice: $2n \leq |V(G)| \leq 2t$.

2.4 Maximální počet tahů

Z úvahy v sekci 2.3 víme, že počet možných připojení na začátku hry je roven $3n$ a zároveň s každým tahem jedno takové připojení ubude.

Tah hráče končí nakreslením nového vrcholu, jenž nabízí jedno nové připojení. Na konci hry tedy musí zůstat alespoň jeden vrchol stupně dva, neboli jedno možné připojení.

Můžeme zapsat:

$$\begin{aligned}3n - t &\geq 1 \\ t &\leq 3n - 1\end{aligned}$$

Dokázali jsme, že počet tahů nikdy nepřesáhne hodnotu $3n - 1$. Vskutku existují hry, které mají $3n - 1$ tahů.

Uvedené maximum můžeme demonstrovat na jakémkoli počtu n , stačí se jen vyvarovat situaci, kdy by vrchol stupně dva zůstal sám v oblastech, kde není možno nalézt další připojení (samozřejmě vyjma posledního tahu).

2.5 Minimální počet tahů

Připomeňme, že na konci hry zůstávají vrcholy stupně dva a stupně tři. Pro odvození minimálního počtu tahů si rozdělme vrcholy na konci hry do tří kategorií [3]. Jednou takovou skupinou jsou vrcholy stupně dva – označme je jako přeživší (jejich počet označíme p). Jak jsme navíc dříve odvodili, platí $p = 3n - t$. Každý takový přeživší vrchol je incidentní se dvěma dalšími vrcholy – nazvěme je strážci (jejich počet označíme s). Každý strážce je na konci hry zřejmě vrcholem stupně tři, jak nyní ukážeme.

Přeživší vrchol leží společně se svými strážci vždy na hranici dvou oblastí, tedy je možné vést křivku podél existující hrany z přeživšího vrcholu k libovolnému z jeho dvou strážců tak, aby neporušila rovinné nakreslení grafu. Kdyby byl tedy jeden ze strážců stupně dva, mohli bychom nakreslit dle pravidel hry novou hranu spojující přeživší vrchol a strážce, což při naší úvaze konce hry nepřipadá v úvahu.

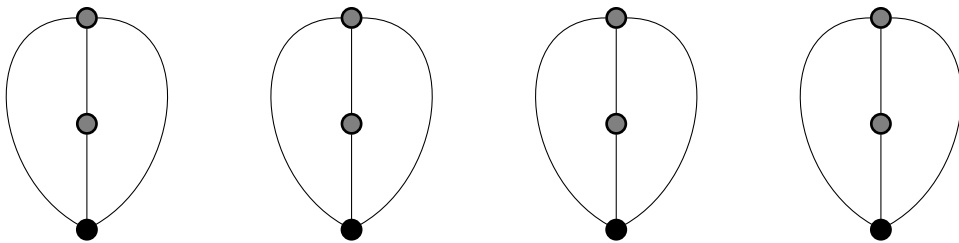
Pro výpočet minimálního počtu tahů budeme očekávat co nejvyšší podíl z celkového počtu přeživších vrcholů. Je důležité vzít v úvahu, že každý strážce je strážcem pouze pro jeden přeživší vrchol. Jak jsme již uvedli, přeživší vrchol sdílí s oběma svými strážci právě dvě oblasti, přičemž jeden strážce náleží do právě tří oblastí. Pro strážce konkrétního přeživšího vrcholu proto existuje pouze jedna oblast, na jejíž hranici

onen přeživší vrchol neleží. Pomocí známého Dirichletova principu si jistě lze snadno uvědomit, že nejsme schopni přiřadit dvěma různým přeživším vrcholům oblasti incidentní s jedním strážcem tak, aby přeživší vrcholy neležely na hranici stejné oblasti. Pro takové rozmístění bychom oblasti příslušící jednomu strážci potřebovali alespoň čtyři, což ale pravidla hry neumožňují. Můžeme tedy zapsat, že $s = 2p$.

Jako třetí a poslední typ vrcholů zavedme farizeje (jejich počet označíme f). Farizejem je vrchol, který není ani přeživším vrcholem ani strážcem, tedy je vrcholem stupně tři a sousedí s vrcholy stupně tři. Nyní už se nabízí zapsat celkový počet vrcholů na konci hry. Dosazením dříve odvozených vztahů dostaneme

$$\begin{aligned} |V(G)| &= p + s + f \\ n + t &= p + 2p + f \\ n + t &= 3(3n - t) + f \\ 4t &= 8n + f \\ t &= 2n + \frac{f}{4} \end{aligned}$$

Dostali jsme rovnici pro celkový počet tahů na konci hry, z níž lze vyvodit, že počet tahů bude vždy alespoň $t \geq 2n$, neboť počet farizejů nemůže být záporný. Hra skutečně může při libovolném n vždy skončit již po $2n$ tazích. Utvořme nad každým původním vrcholem vždy smyčku tak, aby v jedné ze dvou oblastí smyčkou vyřatých neležel žádný další původní vrchol. Následně touto oblastí vedme novou hranu za spojení nově vzniklého vrcholu s vrcholem původním. Tím dostaneme komponentu grafu, kterou již není možné dle pravidel nijak navázat na zbylé vrcholy. Na vytvoření takové komponenty nad jedním původním vrcholem spotřebujeme vždy po dvou tazích a tedy celkový počet tahů při tomto stylu hry bude roven $2n$. Tedy můžeme říci $t \geq 2n$.



Obrázek 2.1: Příklad hry s $2n$ tahy pro $n = 4$

Dostáváme rozsah pro počet tahů

$$2n \leq t \leq 3n - 1$$

2.6 Maximální počet oblastí

Tahy zahrané ve hře můžeme rozdělit do dvou kategorií. Jednu kategorii tvoří tahy, které spojí dvě komponenty v jednu komponentu, a druhou kategorii zase tvoří tahy v rámci jedné komponenty, jejichž zahráním hráč rozdělí jednu oblast na dvě oblasti. [3]. V každém tahu tak buď přibude oblast, nebo ubude komponenta. Jinak řečeno $S - \omega$ se s každým tahem zvýší o 1 a tedy $S - \omega - t$ je konstantní. Na začátku hry je $S = 1$, $\omega = n$ a $t = 0$, proto bude vždy platit $S - \omega - t = 1 - n$ [3]. Dokazuje to i obecný Eulerův vzorec

$$\begin{aligned}V - E + S &= 1 + \omega \\n + t - 2t + S &= 1 + \omega \\S - \omega - t &= 1 - n,\end{aligned}$$

který dřívější odvození potvrzuje. Přeskládáním rovnice dostaneme

$$S = 1 - n + \omega + t,$$

přičemž ze sekce 2.3 víme, že počet tahů na konci hry je také roven $t = 3n - |V_{deg2}|$

$$\begin{aligned}S &= 1 - n + \omega + 3n - |V_{deg2}| \\S &= 2n + 1 + \omega - |V_{deg2}|\end{aligned}$$

V každé komponentě musí být alespoň jeden vrchol stupně dva, tedy $\omega \leq |V_{deg2}|$ a tedy $\omega - |V_{deg2}| \leq 0$. Proto bude také platit

$$S \leq 2n + 1$$

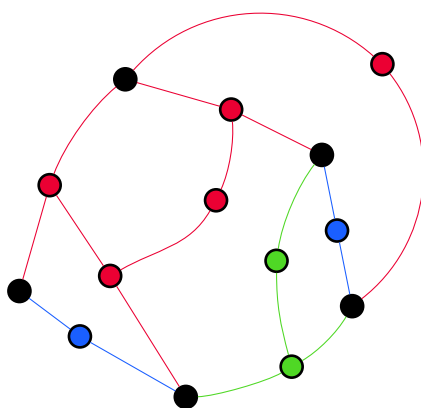
a počet oblastí na konci hry nikdy nebude vyšší než $2n + 1$. Toto maximum můžeme demonstrovat na obrázku výše (2.1), kdy je na začátku hry jedna oblast a s každým tahem přibude oblast nová, přičemž tahů je $2n$. Z toho také vyplývá, že maximálního počtu oblastí lze dosáhnout pro libovolné n .

Kapitola 3

Varianta hry rozšířená o barvy

3.1 Zavedení nových pravidel pro barevně modifikovanou hru

Cílem této práce bylo podívat se na modifikovanou verzi hry. V naší hře obohacené o barvy zavedeme následující pravidla. K nakreslení nové hrany budeme volit vždy jednu ze tří barev: červenou, zelenou nebo modrou. Stejně jako v klasické hře spojíme touto novou hranou dva vrcholy a „navlečeme“ na ni nový vrchol. Přitom musíme dodržovat pravidlo, že z každého vrcholu mohou buď vycházet tři hrany navzájem různých barev, nebo tři hrany stejné barvy. Jinak platí ve hře stejná pravidla, jako v klasické verzi. Nově definovaná varianta hry pak může vypadat například následovně:



Obrázek 3.1: Příklad hry hrané s rozšířenými pravidly

3.2 Pozorování

Nová pravidla mění vlastnosti hry. Je více omezení, proto budeme očekávat nižší minimum tahů. Označme počet hran červené barvy r , zelené barvy g a modré barvy b . Po každém tahu můžeme říct, že přibudou 2 hrany stejné barvy. Počet hran každé barvy bude tedy v grafu vždy sudý. Bez složitého vysvětlování platí: $r + g + b = |E| = 2t$.

Druhy vrcholů a jejich vlastnosti

Nazvěme vrchol *monochromatickým*, vychází-li z něj hrany stejné barvy a *duhovým*, jsou-li barvy z něho vycházející navzájem různých barev. Počet monochromatických vrcholů označme m , počet duhových vrcholů d . Za zmínku stojí, že druh vrcholu je určen již dvěma hranami (buď jsou obě stejné barvy, pak můžeme mluvit o monochromatickém vrcholu, nebo jsou různé barvy a vrchol proto musí být nutně duhový). Na vrcholy stupně dva je tedy možné v závislosti na druhu napojit zbývající hranu pouze jedné možné barvy. K monochromatickému vrcholu stupně dva můžeme dle pravidel připojit třetí hranu jen ve barvě shodné se zbývajícími napojenými hranami, obdobně smíme na duhový vrchol stupně dva doplnit jenom hranu ještě nevyužitě barvy.

Z výše popsaných skutečností je zřejmé, že všechny nově přidané vrcholy musí být monochromatické, jelikož z nich už při vzniku vždy vychází dvě hrany stejné barvy. Po každém tahu přibude vždy alespoň 1 monochromatický vrchol (mohly by být dva až tři, kdybychom novou hranu navázali na vrcholy, z nichž by z každého vycházela 1 hrana stejné barvy, jako naše nově navázaná, tím bychom je omezili na monochromatické):



Díky tomu platí nerovnost $m \geq t$. Duhových vrcholů může proto být maximálně tolik, kolik bylo původně vrcholů (tedy n), žádným tahem totiž další duhový přidat nemůžeme a platí tedy nerovnost $d \leq n$.

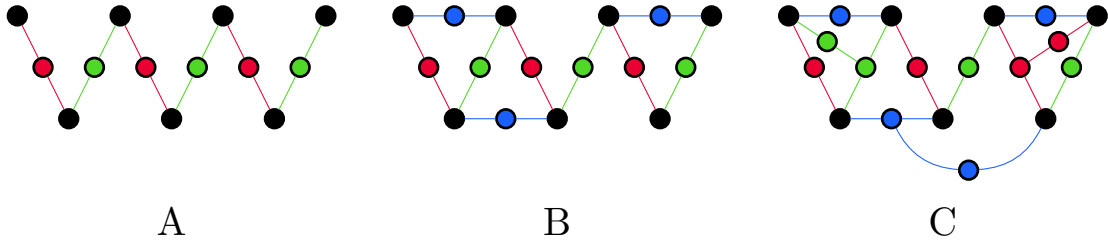
Zapišme některé další skutečnosti.

$$m + d = t + n = |V(G)|$$

$$t \leq m \leq n + t$$

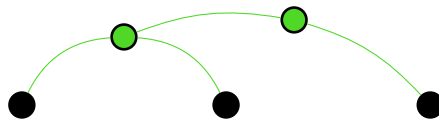
Počet duhových vrcholů stupně tři na konci hry

Počet duhových vrcholů stupně tři může být na konci hry vždy nejvýše roven n . Ukážeme, pro která n může taková situace nastat. Uvažme situaci pro $n \geq 4$: Mezi původními vrcholy lze vytvořit střídáním hran dvou barev cestu (obrázek 3.2 A) a poté hranami třetí barvy šikově vytvářet trojúhelníky tak, abychom touto barvou obsáhli co nejvíce původních vrcholů (3.2 B). Nekompletně duhové nám zbydou oba koncové vrcholy původní cesty a jeden až dva další (v některých případech zbydou pouze 2 nekompletní na konci cesty – to platí pro $n = 4k$, kdy $k \in \mathbb{Z}^+$). Těmto vrcholům pak již není nikterak náročné doplnit zbývající hrany tak, aby byly duhové a zároveň stupně tři (3.2 C).



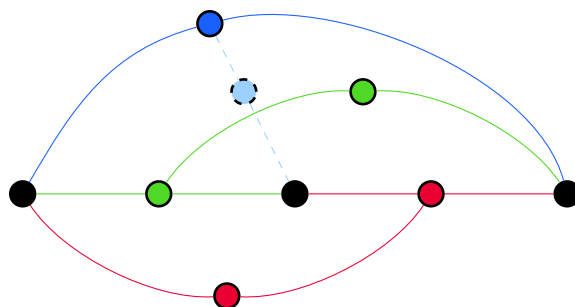
Obrázek 3.2: Postup k dosažení n duhových vrcholů

Pro $n = 3$ nebude možné dosáhnout n kompletních duhových vrcholů. Pro důkaz použijeme následující úvahu: z každého původního černě vybarveného vrcholu by měly vycházet hrany různých barev. Hrana určité barvy vznikne spojením dvou původních vrcholů. Pokud budeme chtít, aby ze třetího z původních vrcholů také vycházela hrana této barvy a zároveň aby byl tento vrchol duhový, musíme hranou spojit nově vzniklý monochromatický vrchol se třetím původním vrcholem.

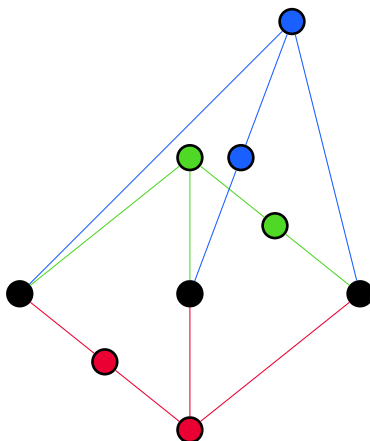


Takový postup musíme použít pro všechny tři barvy, respektive pro hrany zelené, modré i červené barvy. V rámci pravidel hry si graf musí zachovat planaritu,

což, jak ukážeme, nemůže v případě kompletních duhových vrcholů pro $n = 3$ nastat. Potřebujeme, aby každá dvojice utvořená z původních tří vrcholů byla spojena hranou jiné barvy a aby z nově vzniklého monochromatického vrcholu náležícího této hraně byla vždy vedena druhá hrana stejné barvy do třetího vrcholu.



Pro účely důkazu zanedbejme vzniklé monochromatické vrcholy stupně dva. Tím dostáváme bipartní graf $K_{3,3}$ (respektive částečnou subdivizi grafu $K_{3,3}$, který není planární).



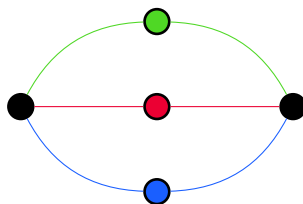
Obrázek 3.3: Subdivize grafu $K_{3,3}$

Tím jsme dokázali, že pro $n = 3$ nebude možné dosáhnout n duhových vrcholů stupně tři.

Pro $n = 1$ to logicky také nejde – maximální počet tahů je $t_{max} = 3n - 1 = 2$ (bude zdůvodněno v následující sekci), tedy nejsme schopni vytvořit hrany tří různých barev. Navíc je již po prvním tahu jasné, že původní vrchol bude monochromatický.

Naopak pro $n = 2$ řešení existuje a je triviální:

Z toho plyne závěr, že n duhových vrcholů stupně tři lze dosáhnout pro $n = 2$ a $n \geq 4$, naopak pro $n = 1$ a $n = 3$ jistě n duhových vrcholů stupně tři dosáhnout



Obrázek 3.4: n duhových vrcholů pro $n = 2$

nelze. Na druhou stranu můžeme ve hře duhové vrcholy úplně vynechat a přidávat pouze hrany jedné barvy. Proto platí $0 \leq d \leq n$.

3.3 Maximální počet tahů pro barevnou variantu

Maximální počet tahů v rozšířené variantě se bude shodovat s původní hrou – v sekci 3.2 jsme naznačili, že v rámci pravidel se můžeme omezit na přidávání hran výhradně jedné barvy. To pak funguje úplně stejně jako klasická hra a tímto stylem lze určitě dosáhnout $3n - 1$ tahů.

Pokud bychom ale trvali na tom, aby se ve hře vyskytla hrana každé barvy alespoň jednou, pak by na konci hry určitě zůstaly alespoň 3 monochromatické vrcholy stupně dva (tedy 3 možná připojení) a to každý od jiné barvy. Taková hra by pak neměla nikdy více než $3n - 3$ tahů.

3.4 Minimální počet tahů pro barevnou variantu

Pro odvození minimálního počtu tahů ve variantě hry rozšířené o barvy využijeme dva různé postupy. V obou postupech budeme využívat potenciál myšlenky maximálního počtu dvoustupňových vrcholů. Nejdříve se podíváme na obecnou dolní hranici počtu tahů bez ohledu na souvislost konečného grafu. K tomu využijeme úvahy o různých druzích vrcholů obdobně, jako jsme učinili u odvození pro klasickou hru. Dále se pokusíme odvodit nejnižší možný počet tahů pro hry, které končí 1-souvislým a 2-souvislým grafem. Pro tyto hry budeme naopak vycházet z Eulerova vzorce.

K odvozeným teoretickým hodnotám se budeme snažit hledat grafy, které tyto hodnoty potvrdí, a pokud takový graf pro nějaké n nenalezneme, pokusíme se pro konečnou hru alespoň realizovat konstrukci grafu pomocí malého počtu tahů.

3.4.1 Obecné odvození pomocí druhů vrcholů

Připomeňme odvození pro klasickou variantu hry (sekce 2.5). Vrcholy jsme rozdělili na přeživší, strážce a farizeje. Stejný postup zkusíme aplikovat i na hru s barvami.

U klasické hry mohl jeden strážce příslušet pouze jednomu přeživšímu vrcholu (kdyby byl strážcem pro dva přeživší, nemohl by je oddělit do různých oblastí a přeživší vrcholy by pak na sebe mohly být napojeny). V barevné variantě může jeden strážce příslušet až třem přeživším vrcholům, jestliže u každého jeho přeživšího vrcholu chybí hrana jiné barvy. Každý ze strážců (s) přísluší až třem přeživším (p) a přeživší vrchol má vždy dva strážce, proto:

$$\begin{aligned} p &\leq \frac{3s}{2} \\ s &\geq \frac{2p}{3} \end{aligned}$$

Opět využijeme faktu, že celkový počet vrcholů je roven součtu počtů jednotlivých druhů vrcholů:

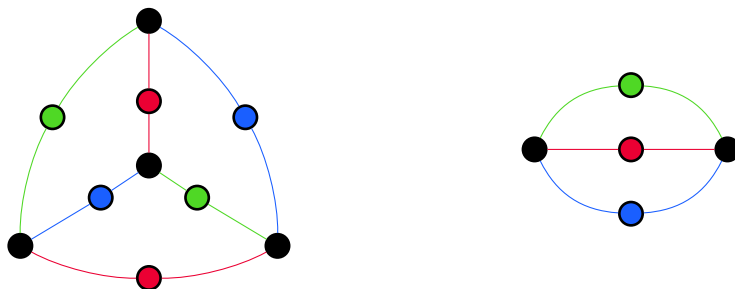
$$\begin{aligned} n + t &= p + s + f \\ n + t &\geq p + \frac{2p}{3} + f \\ 3n + 3t &\geq 5p + 3f \\ 3n + 3t &\geq 5(3n - t) + 3f \\ 8t &\geq 12n + 3f \\ t &\geq \frac{3n}{2} + \frac{3f}{8} \end{aligned}$$

Z výsledku je zřejmé, že ve hře nebude možné realizovat menší počet tahů než $\frac{3n}{2}$, neboť počet farizejů nemůže být záporný.

Hra s $\frac{3n}{2}$ tahy

Absolutního minima $\frac{3n}{2}$ lze docílit pouze za situace, že se ve hře nevyskytnou žádní farizejové a že každý strážce bude příslušet právě třem přeživším vrcholům. Další nezbytnou podmínkou pro hru s $\frac{3n}{2}$ tahy je, jak vyplývá ze vzorce, aby byl počet původních vrcholů sudý. Počet tahů musí být totiž přirozené číslo. To lze demonstrovat na subdivizi K_4 nebo bipartním grafu $K_{2,3}$, kde jsou tyto podmínky splněny (obrázek 3.5).

Požadovaným strážcem (příslušícím třem přeživším vrcholům) může být pouze původní vrchol (aby z něho mohly vycházet hrany různých barev). Z nově vytvořených



Obrázek 3.5: Subdivize K_4 a bipartní graf $K_{2,3}$ jako grafy konečné hry s $\frac{3n}{2}$ tahy

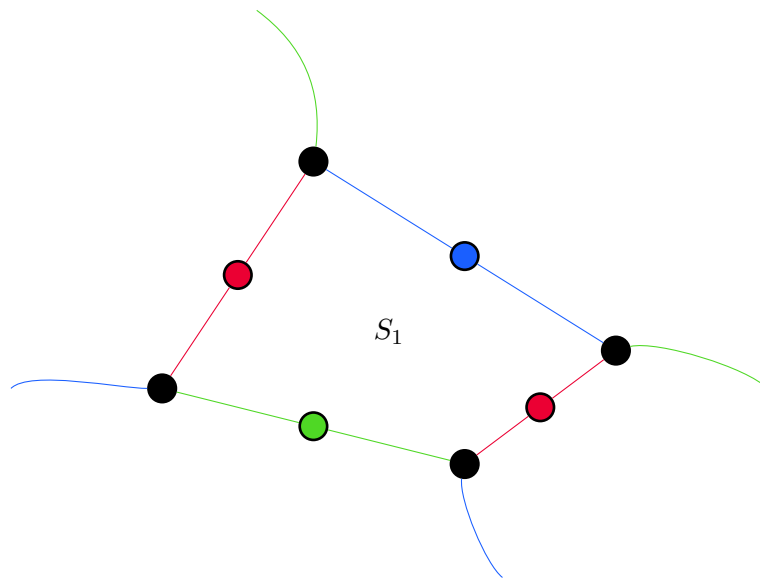
vrcholů totiž vychází dvě hrany stejné barvy a tudíž tento vrchol nemůže být strážcem příslušícím třem přeživším vrcholům. Díky této znalosti můžeme jiným způsobem z principu sudosti dokázat, že $\frac{3n}{2}$ tahů je možno dosáhnout jen pro sudá n , neboť počet vrcholů lichého stupně musí být sudý. My bychom ale požadovali lichý počet strážců příslušících třem přeživším lichý, což je spor.

Ze výše uvedených poznatků (hra je bez farizejů a strážcem může být pouze původní vrchol) dále plyne, že ve hře s $\frac{3n}{2}$ tahy je každý nově vzniklý vrchol přeživším vrcholem (vrcholem stupně dva) a naopak každý původní vrchol je strážcem. Tvrzení lze také podpořit převedením vztahu $t = \frac{3n}{2}$ na $t = 3n - t$, přičemž zároveň platí $p = 3n - t$ (ze sekce 2.3) a tudíž také $p = t$ a $s = n$.

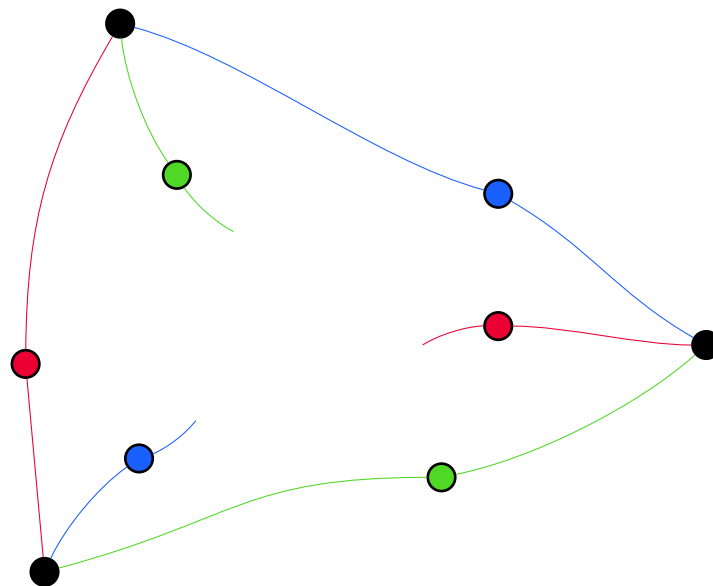
Každým tahem vznikne nový monochromatický vrchol, který musí v případě hry o $\frac{3n}{2}$ tazích zůstat stupně dva, jak jsme vysvětlili. Tahy v takové hře vždy začínají a končí v původních vrcholech, hranu nelze započít v monochromatickém vrcholu, neboť by se tím zvýšil jeho stupeň. Na konci hry proto nenalezneme žádnou oblast, jejíž hranici by tvořilo více než 6 hran (respektive 3 hrany po zanedbání monochromatických vrcholů stupně dva). Kdyby taková situace nastala, mohli bychom v rámci oblasti s více hranami určitě hrát další tah spojením dvou monochromatických vrcholů, což by ale už nebyla hra o $\frac{3n}{2}$ tazích (obrázek 3.6).

Proto i vnější oblast musí být vymezena nejvýše šesti (respektive třemi rozdělenými) hranami, které by společně se třemi různě barevnými monochromatickými vrcholy a se třemi původními (duhovými) vrcholy tvořily subdivizi C_3 . Bez újmy na obecnosti vyzobrazme hranici vnější oblasti pro případ, kdy je tato oblast vymezena šesti (třemi „rozdělenými“) hranami (obrázek 3.7).

Jelikož uvažujeme vnější oblast, hrany zbývajících barev budou směřovat dovnitř kružnice. Aby ve vnitřní části nevznikla oblast s více než 6 hranami na své hranici, je



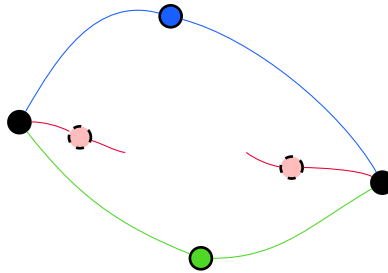
Obrázek 3.6: Oblast, ve které lze provést další tah



Obrázek 3.7: Vnější oblast ohraničená subdivizí C_3

nutné spojit každé dvě ze hran směřujících do středu v jednom bodě. Takovým bodem je pro všechny tři dvojice nutně čtvrtý původní vrchol a my dostáváme subdivizi K_4 sestavenou pomocí $\frac{3n}{2} = 6$ tahů.

Nyní uvažme situaci, kdy je vnější oblast ohraničená čtyřmi (respektive dvěma rozdělenými) hranami. Hranice vnější oblasti je přitom tvořena dvěma původními vrcholy, které jsou duhové, a dvěma monochromatickými vrcholy různé barvy. Bez újmy na obecnosti zvolíme dvě barvy pro hrany příslušící hranici vnější oblasti. Hrany směřující do středu tak budou muset mít hranu zbývající barvy (řekněme, že bude červená).



Obrázek 3.8: Vnější oblast ohraničená subdivizí C_2

Pokud bychom červené hrany navázali obě na stejný původní vrchol ve vnitřní oblasti, rázem bychom z původního vrcholu získali vrchol monochromatický, což by pro hru s $\frac{3n}{2}$ tahy bylo nežádoucí. Navázáním červených hran na různé původní vrcholy ve vnitřní oblasti bychom také nemohli dosáhnout požadovaného množství tahů. Na červených hranách by nám vznikly dva monochromatické vrcholy, které bychom ale nebyli schopni oddělit do různých oblastí. Aby měla totiž hra $\frac{3n}{2}$ tahů, nesmíme k napojení využít žádné nově vzniklé vrcholy, tedy ani modrý a zelený na hranici vnější oblasti. K oddělení vzniklých červených vrcholů bychom ale museli pro napojení dělicí hrany využít modrý a zelený monochromatický vrchol, což by znemožnilo hru s $\frac{3n}{2}$ tahy.

Jediným východiskem je tedy vedení červené hrany mezi oběma původními vrcholy za vzniku jediného červeného monochromatického vrcholu stupně dva. Tím dosáhneme hry o $\frac{3n}{2} = 3$ tazích a výsledkem je bipartní graf $K_{2,3}$.

Čtenář si jistě umí představit, že pro nesouvislé grafy nebude možné $\frac{3n}{2}$ počtu tahů dosáhnout, protože pro hranice vnějších oblastí různých komponent není možné rozdělit tři různé monochromatické vrcholy tak, aby všechny zůstaly na konci hry stupně dva.

Ukázali jsme, že dolní hranice $\frac{3n}{2}$ tahů lze na konci hry dosáhnout pouze pro $n = 4$ a $n = 2$, neboť vyšší n jsme vyloučili úvahou o maximálním počtu hran na hranici vnější

oblasti a pro $n = 3$ a $n = 1$ takovou hru nelze realizovat, protože to jsou lichá čísla.

Konstrukce grafů konečných her s co nejmenším počtem tahů

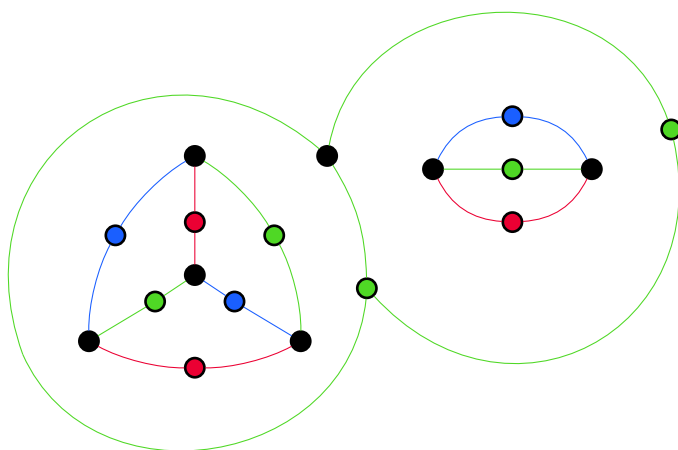
Již víme, že absolutní spodní hranice počtu tahů lze dosáhnout jen pro $n = 2$ a $n = 4$. Můžeme tedy tvrdit, že pro ostatní n bude počet tahů na konci hry alespoň $t \geq \lfloor \frac{3n}{2} \rfloor + 1$. Sestavíme tabulku teoreticky dosažitelného počtů tahů a počtu tahů, který se podařilo realizovat konstrukcí, pro n od jedné do dvaceti.

n	$\frac{3n}{2}$	Předpokládaná spodní hranice tahů	Počet tahů dosažený konstrukcí
1	1,5	2	2
2	3	3	3
3	4,5	5	5
4	6	6	6
5	7,5	8	8
6	9	10	10
7	10,5	11	11
8	12	13	13
9	13,5	14	14
10	15	16	16
11	16,5	17	18
12	18	19	19
13	19,5	20	21
14	21	22	22
15	22,5	23	24
16	24	25	25
17	25,5	26	27
18	27	28	29
19	28,5	29	30
20	30	31	32

Tabulka 3.1: Tabulka minimálního počtu tahů – obecně

Pro hodnoty n od jedné do deseti se skutečně podařilo nalézt vhodnou konstrukci potvrzující spodní hranici počtu tahů. Dále jsme teoretickou hodnotu potvrdili také pro $n = 12$, $n = 14$ a $n = 16$.

Protože s jistotou neumíme určit skutečný realizovatelný minimální počet tahů pro všechna n , dovolíme si alespoň předložit vzorce pro jistě dosažitelné počty tahů. Využijeme k tomu konstrukci na sedmi původních vrcholech (označíme ji J , která má tu výhodu, že má ve na hranici vnější oblasti pouze jeden vrchol stupně dva, tudíž ji bez nutnosti provést další tah můžeme umístit do oblasti se dvěma vrcholy stupně dva s chybějícími hranami jiných barev. Tedy můžeme neustále opakovaně vkládat tuto konstrukci samu do sebe, neboť i zde je oblast se dvěma dvoustupňovými vrcholy. Za tímto účelem rozdělíme počty n do zbytkových tříd po dělení sedmi.



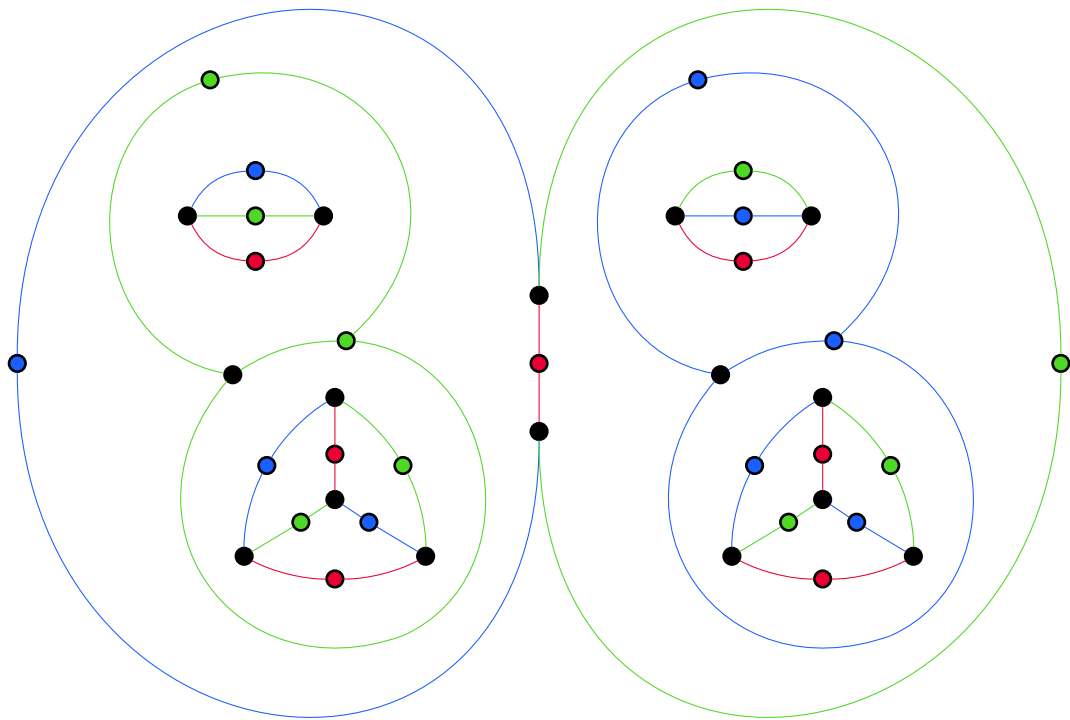
Obrázek 3.9: Hra pro $n = 7$ s 11 tahy, výhodná konstrukce J pro tvoření grafů malým počtem tahů pro jiná n

Není od věci si uvědomit, že odebráním po řadě subdivize K_4 nebo komponenty na dvou původních vrcholech z konstrukce J na obrázku 3.9 dosáhneme minimálního počtu tahů pro $n = 3$ nebo $n = 5$. Pro příklad ukážeme realizaci minimálního počtu tahů na šesnácti původních vrcholech. Odebíráním vhodných částí takto zkonstruovaného grafu (obrázek 3.10) totiž dosáhneme minimálních počtů tahů pro všechna $n < 16$ kromě $n = 11, 13$ a 15 .

Podívejme se na dosažitelné počty tahů z hlediska kongruencí.

Případ $n \equiv 0 \pmod{7}$

Pro případ $n = 7$ jsme ukázali graf pro hru o 11 tazích. Protože v takovém grafu existuje oblast se dvěma a méně vrcholy stupně dva, můžeme do takových oblastí opakovaně



Obrázek 3.10: Hra pro $n = 16$ s 25 tahy

přidávat konstrukce J a tím dosáhneme pro jakékoli $n \equiv 0 \pmod{7}$ následující počet tahů.

$$t = \frac{n-7}{7} \cdot 11 + 11$$

$$t = \frac{11n}{7}$$

Případ $n \equiv 1 \pmod{7}$

Hra na jednom původním vrcholu má jasně daný počet tahů, totiž dva. Splňuje zároveň podmínku pro potřebnou oblast a tudíž pro tuto zbytkovou třídu umíme dosáhnout

$$t = \frac{n-1}{7} \cdot 11 + 2$$

$$t = \frac{11n+3}{7}$$

tahů.

Případ $n \equiv 2 \pmod{7}$

Zde odvodíme jistě dosažitelný počet tahů obdobně, protože graf s minimálním počtem tahů na dvou původních vrcholech obsahuje vyhovující oblast.

$$t = \frac{n-2}{7} \cdot 11 + 3$$

$$t = \frac{11n-1}{7}$$

Případ $n \equiv 3 \pmod{7}$

Taktéž pro tento příklad nenarazíme na problém s potřebnou oblastí a proto budeme umět dosáhnout následujícího počtu tahů.

$$t = \frac{n-3}{7} \cdot 11 + 5$$

$$t = \frac{11n+2}{7}$$

Případ $n \equiv 4 \pmod{7}$

V tomto případě neexistuje v grafu s minimálním počtem tahů na čtyřech původních vrcholech oblast, ve které by nebyly tři vrcholy stupně dva. Proto po přidání naší výhodné konstrukce J musíme nutně hrát jeden tah navíc a pro každé $n \neq 4$ z této zbytkové třídy budeme umět dosáhnout

$$t = \frac{n-4}{7} \cdot 11 + 6 + 1$$

$$t = \frac{11n+5}{7}$$

tahů. Pro $n = 4$ pak umíme hrát hru pouze šesti tahy.

Zbývající dva případy ponecháme bez popisu, neboť odvozování jistě dosažitelných počtů tahů je již lehce rutinní záležitostí.

Případ $n \equiv 5 \pmod{7}$

$$t = \frac{n-5}{7} \cdot 11 + 8$$

$$t = \frac{11n+1}{7}$$

Případ $n \equiv 6 \pmod{7}$

$$t = \frac{n-6}{7} \cdot 11 + 10$$

$$t = \frac{11n+4}{7}$$

Vidíme, že pro jakékoli n umíme dosáhnout poměrně malého počtu tahů, nicméně v žádném případě nevíme, jsou-li tyto hodnoty absolutní dolní hranicí počtu tahů, či nikoli. Obecnější řešení jsme nenalezli, každopádně můžeme tvrdit, že pro každé n vyjma $n = 2$ a $n = 4$ leží nejnižší možný počet tahů mezi hodnotou $\lfloor \frac{3n}{2} \rfloor + 1$ a odvozeným jistě dosažitelným počtem tahů pro dané n na základě zbytkové třídy.

3.4.2 Odvození pro 2-souvislé grafy pomocí Eulerova vzorce

Uvažujme nyní případ, kdy je vzniklý graf na konci hry 2-souvislý. V naší barevné variantě se narozdíl od klasické hry mohou na hranici každé oblasti vyskytovat až 3 vrcholy stupně dva – každý s jinou chybějící barvou, přičemž nezáleží, je-li vrchol monochromatický nebo duhový. Využijme tohoto poznatku k vyjádření počtu vrcholů stupně dva na konci hry pomocí počtu oblastí

$$|V_{deg2}| \leq \frac{3S}{2}$$

$$3n - t \leq \frac{3S}{2},$$

neboť v každé oblasti najdeme maximálně 3 takové vrcholy a každý takový vrchol je s ohlednutím na 2-souvislost ve dvou oblastech (na konci uvažované hry nemůže nastat situace, kdy by vrchol stupně dva ležel pouze v jedné oblasti; takový vrchol by totiž nutně dělil hranu, jež by byla mostem). Jak jsme již uvedli v sekci 2.3, počet vrcholů stupně dva na konci hry lze vyjádřit jako $3n - t$, což platí i pro barevnou variantu.

Vyjádříme S

$$S \geq \frac{6n - 2t}{3}.$$

Pro hry na 2-souvislých grafech je na konci hry po t tazích počet oblastí roven alespoň $\frac{6n-2t}{3}$, pro tyto hry potom z Eulerova vzorce platí

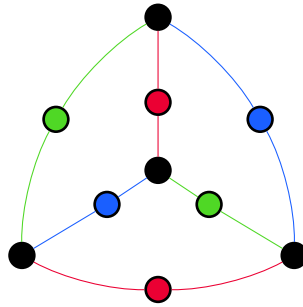
$$\begin{aligned} V - E + S &= 2 \\ n + t - 2t + \frac{6n - 2t}{3} &\leq V - E + S = 2 \\ n + t - 2t + \frac{6n - 2t}{3} &\leq 2 \\ t &\geq \frac{9n - 6}{5} \end{aligned}$$

Nyní uvažujme, pro jaké hodnoty n lze tak malého počtu tahů dosáhnout. Předchozí nerovnici můžeme upravit jako

$$t \geq n - 1 + \frac{4n - 1}{5}$$

a celočíselné hodnoty bude pravá strana nerovnice proto nabývat pro ta n , která po dělení pěti dávají zbytek 4, tedy pro $n \equiv 4 \pmod{5}$, nebo jinak $n = 5k + 4$, kdy $k \in \mathbb{Z}_0^+$.

Nejjednodušším příkladem je graf pro $n = 4$ (obrázek 3.11).



Obrázek 3.11: Subdivize K_4

Do takového grafu již žádný tah přidat nelze. Zároveň splňuje nerovnici pro minimální počet tahů $t \geq \frac{9n-6}{5}$ a je 2-souvislý, přičemž opravdu dosahuje předpokládaného minima pro $n = 4$.

Nyní budeme zkoumat, zda bude pro všechna n možné dosáhnout předpokládaného minima pro souvislé grafy. Pro přehlednost vytvoříme tabulku znázorňující předpokládaná minima tahů pro hru na 2-souvislém grafu v závislosti na n (pro n do 20, tabulka 3.2).

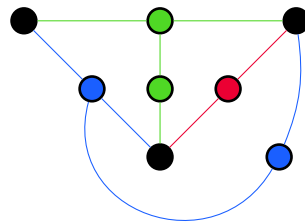
Minimum tahů pro $n = 1$ udávané v tabulce je neproveditelné, neboť hra s jedním počátečním vrcholem může obsahovat pouze hrany jedné barvy – první tah totiž nutně

určí původní vrchol jako monochromatický a tudíž nebude možné zahrát tah hranou jiné barvy. Tudíž se bude jednat o klasickou verzi hry a taková hra nemůže mít méně než $2n$ tahů.

Pro $n = 2$, $n = 4$ umíme sestavit 2-souvislé grafy splňující tabulkové minimum (po řadě obrázky 3.4, 3.11). Konstrukcí ukážeme, že i pro $n = 3, 6, 7, 8, 12$ a 13 lze sestavit graf potvrzující předpokládané 2-souvislé minimum.

Domněnka

Řekněme, že pro n_1 umíme sestavit 2-souvislý graf pomocí $t_1 = \frac{9n_1-6}{5}$ minimálního počtu tahů. Pokud by se podařilo nalézt podgraf na pěti původních vrcholech, jehož připojením bychom pro $n_2 = n_1 + 5$ původních vrcholů navýšili počet tahů o 9 a zároveň zachovali 2-souvislost, pak bychom mohli tvrdit, že pro každé $n \equiv n_1 \pmod{5}$ umíme sestavit 2-souvislý graf konečné hry o $\frac{9n-6}{5}$ tazích. Tak bychom dostali univerzální nástroj pro dosahování spodní hranice počtu tahů pro všechna n kromě $n \equiv 0 \pmod{5}$ (pro tyto případy bychom uměli dosáhnout $\frac{9n-6}{5} + 1$ tahů). Zatím se takový podgraf nalézt nepodařilo, tahově nejvýhodnější se prozatím jeví podgraf na obrázku 3.18. Je třeba uvést, že nutnou podmínkou k napojení takových podgrafů je, aby měl původní graf v nějaké oblasti alespoň dva vrcholy stupně dva s chybějícími hranami navzájem různých barev. Uvažujeme ale hry s nízkým počtem tahů, proto tento požadavek není problematický.



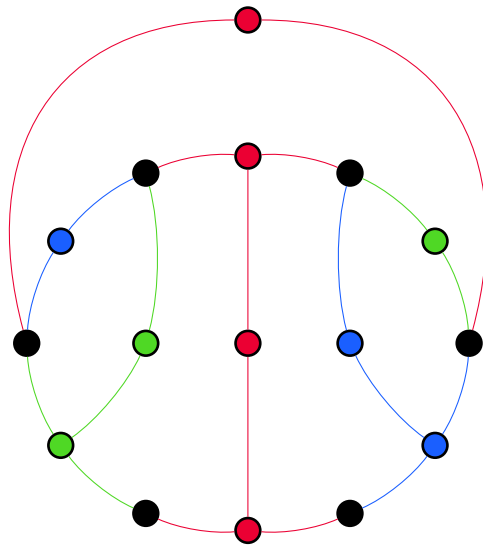
Obrázek 3.12: Hra na 2-souvislém grafu pro $n = 3$ s 5 tahy

Konstrukce grafů her končících 2-souvislým grafem s co nejmenším počtem tahů

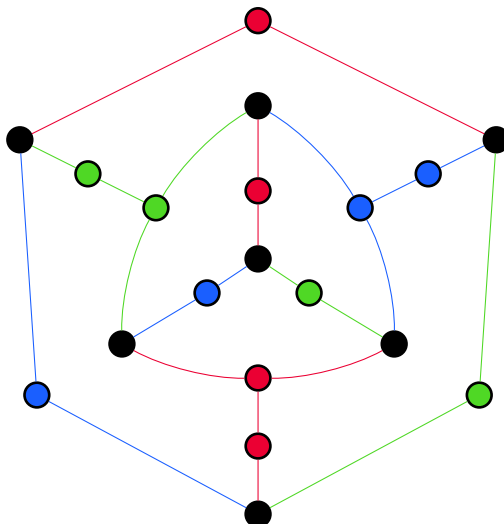
Pomocí podgrafu na pěti původních vrcholech (označme ho P) ukážeme, že i za předpokladu, že na konci hry bude graf hry 2-souvislý, bude v barevné variantě hry pro každé $n \neq 1$ možné dosáhnout menšího počtu tahů než v klasické verzi hry. Jinak řečeno pro každé $n \neq 1$ lze ukončit hru méně než $2n$ tahy resultující 2-souvislým grafem.

n	$\frac{9n-6}{5}$	Předpokládaná spodní hranice tahů	Počet tahů dosažený konstrukcí
1	0,6	1	2
2	2,4	3	3
3	4,2	5	5
4	6	6	6
5	7,8	8	9
6	9,6	10	10
7	11,4	12	12
8	13,2	14	14
9	15	15	16
10	16,8	17	18
11	18,6	19	20
12	20,4	21	21
13	22,2	23	23
14	24	24	26
15	25,8	26	28
16	27,6	28	30
17	29,4	30	31
18	31,2	32	33
19	33	33	36
20	34,8	35	38

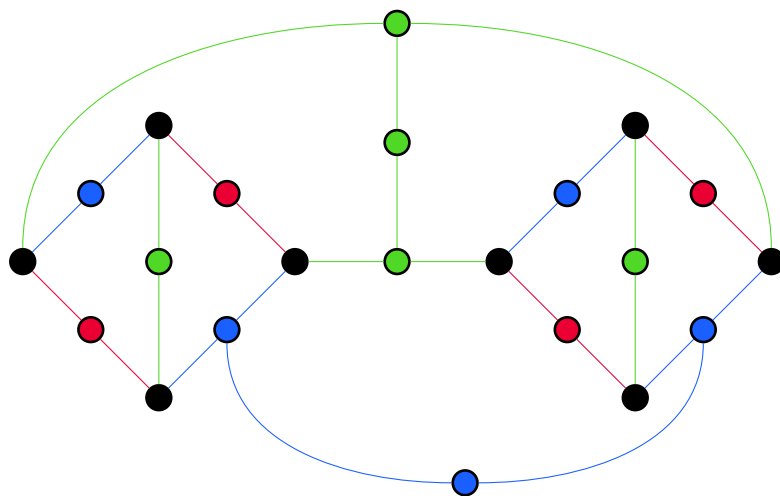
Tabulka 3.2: Tabulka spodní hranice počtu tahů – 2-souvislé grafy



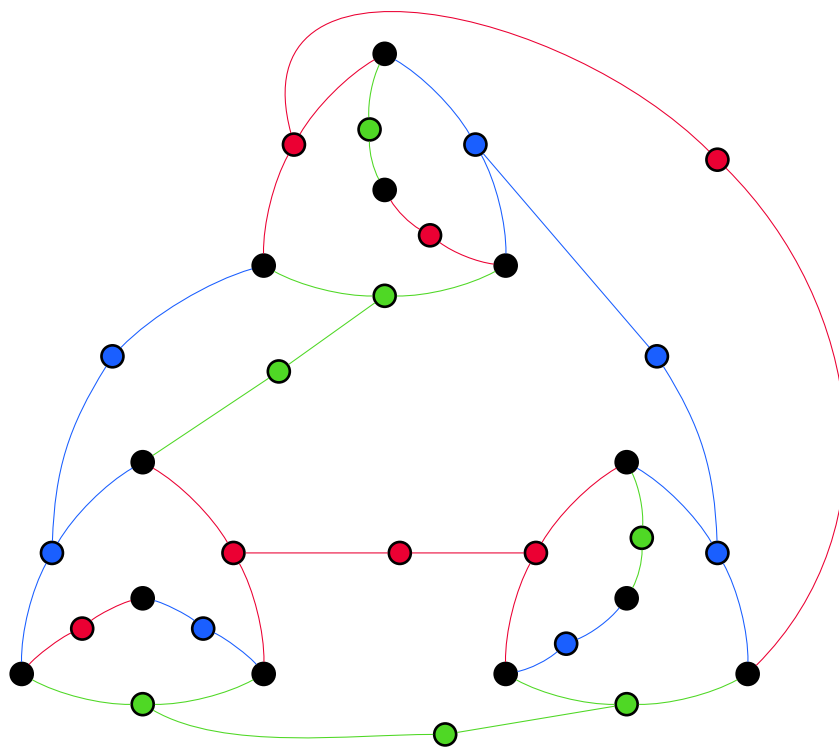
Obrázek 3.13: Hra na 2-souvislém grafu pro $n = 6$ s 10 tahy



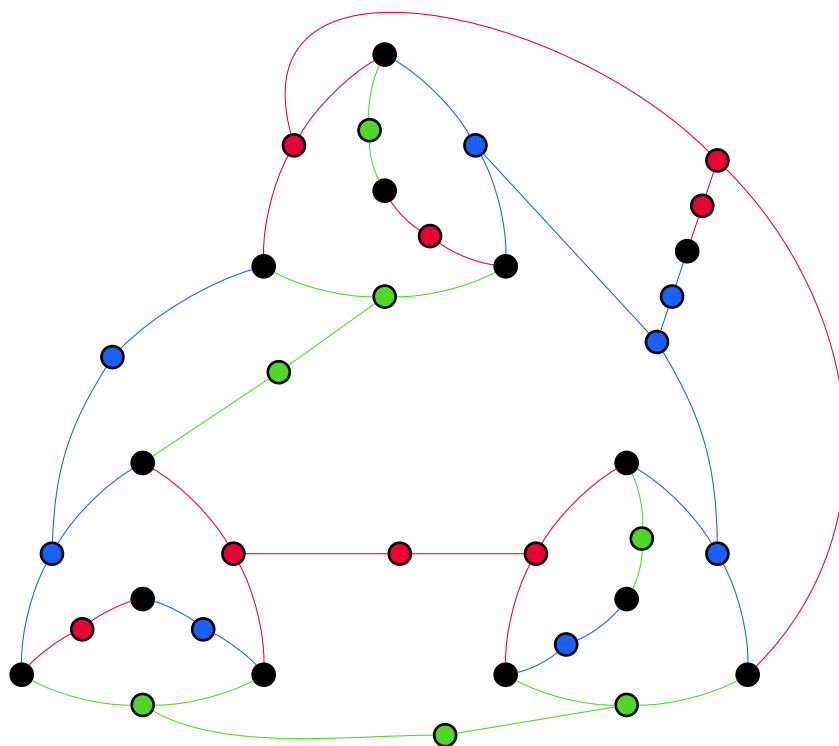
Obrázek 3.14: Hra na 2-souvislém grafu pro $n = 7$ s 12 tahy



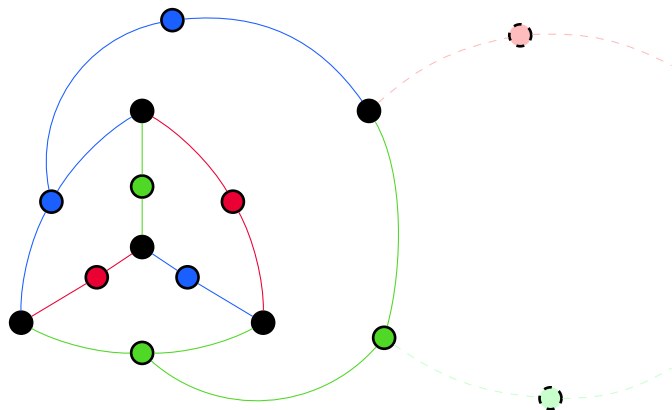
Obrázek 3.15: Hra na 2-souvislém grafu pro $n = 8$ se 14 tahy



Obrázek 3.16: Hra na 2-souvislém grafu pro $n = 12$ s 21 tahy



Obrázek 3.17: Hra na 2-souvislém grafu pro $n = 13$ s 23 tahy



Obrázek 3.18: Napojitelný podgraf P na pěti původních vrcholech vyžadující deset tahů

Na počty původních vrcholů budeme vzhledem k podgrafu pohlízet jazykem kongruencí s modulem 5. Pro každou zbytkovou třídu využijeme konstrukci na co nejvíce původních vrcholech vyhovující spodní hranici počtu tahů (nebo alespoň s malým počtem tahů v případě $n \equiv 5$).

Případ $n \equiv 1 \pmod{5}$

Minimum tahů pro $n = 1$ udávané v tabulce je neproveditelné, neboť hra s jedním počátečním vrcholem může obsahovat pouze hrany jedné barvy – první tah totiž nutně určí původní vrchol jako monochromatický a tudíž nebude možné zahrát tah hranou jiné barvy. Tudíž se bude jednat o klasickou verzi hry a taková hra nemůže mít méně než $2n$ tahů. Pokud bychom na graf s minimem tahů na 6 původních vrcholech (obrázek 3.13) opakovaně napojovali podgraf P , dostali bychom pro dané n vždy

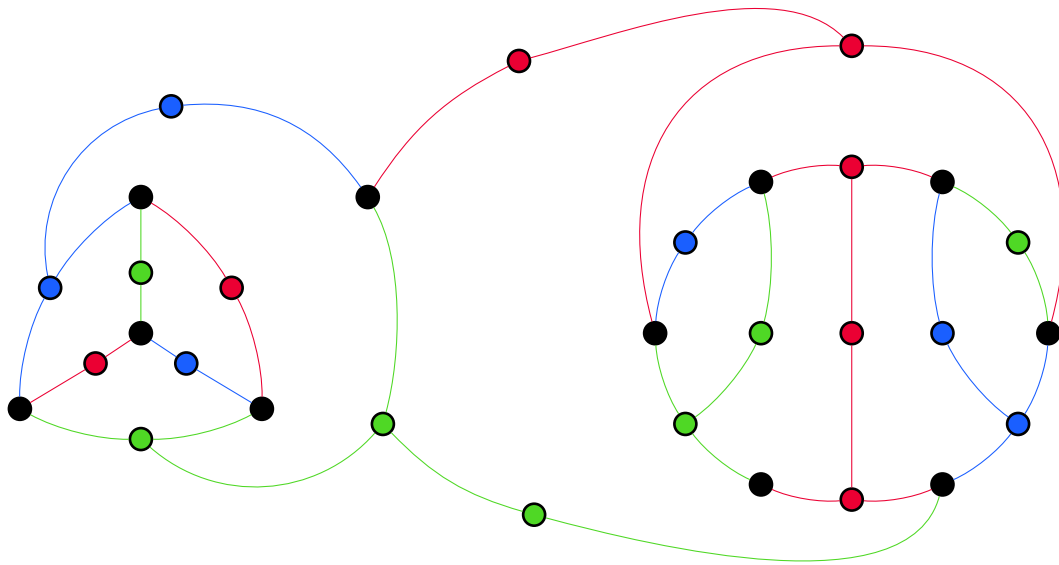
$$t = \frac{n - 6}{5} \cdot 10 + 10$$

$$t = 2n - 2$$

tahů, jako ukazuje obrázek 3.19 v případě $n = 11$. Z toho vyplývá, že pro jakékoli n z této zbytkové třídy vyjma $n = 1$ umíme realizovat hru s $2n - 2$ tahy.

Případ $n \equiv 2 \pmod{5}$

Pro tuto zbytkovou třídu jsme již ukázali konstrukce na 2, 7 a 12 původních vrcholech, které využívaly vždy méně než $2n$ tahů. Připojováním podgrafů P bychom pro $n \geq 12$



Obrázek 3.19: Hra na 2-souvislém grafu pro $n = 11$ s využitím podgrafu P s 20 tahy

z této zbytkové třídy uměli ukončit hru pomocí

$$t = \frac{n - 12}{5} \cdot 10 + 21$$

$$t = 2n - 3$$

tahů. Proč je zde o jedna nižší počet, než nám vyšel u předchozí zbytkové třídy? Je to tím, že zde vycházíme v pořadí s vyšším n vyhovujícím kongruenci. 12 je totiž třetí číslo v pořadí od nuly kongruentní s dvojkou podle modula pět, zatímco v předchozím případě bylo číslo 6 druhé. Kdybychom tedy za výchozí pro $n \equiv 2$ použili graf na 7 původních vrcholech, dostali bychom také $2n - 2$ tahů pro každé n vyhovující kongruenci.

Případ $n \equiv 3 \pmod{5}$

Nejvyšším vyhovujícím grafem pro tento případ je graf na 13 původních vrcholech. Číslo 13 je v otázce kongruence v pořadí třetí, proto i pro každé $n \geq 13$ kdy $n \equiv 3$ můžeme dosáhnout $2n - 3$ tahů. Důkaz tohoto typu samozřejmě není ideální, proto necháváme na čtenáři, aby si obdobně jako v předchozím případě tuto skutečnost dokázal.

Případ $n \equiv 4 \pmod{5}$

Zde jsme nuceni využít dobře známou subdivizi K_4 . Díky ní zvládneme pro jakékoli $n \equiv 4$ hrát hru

$$t = \frac{n-4}{5} \cdot 10 + 6$$
$$t = 2n - 2$$

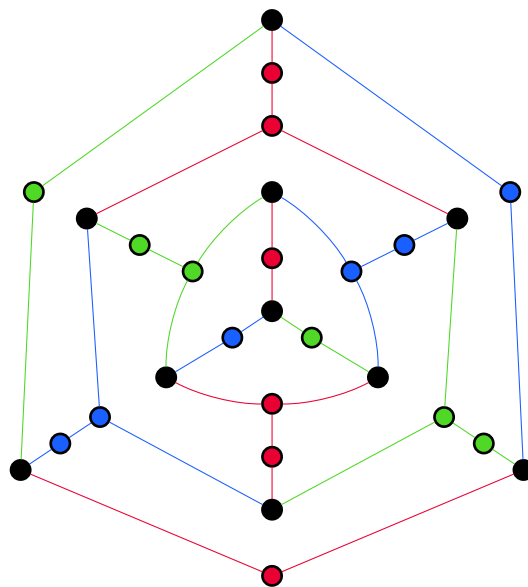
tahy.

Případ $n \equiv 0 \pmod{5}$

Pro pět původních vrcholů se nám nepodařilo realizovat souvislý graf hry s minimálním počtem tahů (to jest 8). Pokud bychom takový graf našli a napojili na něj vhodně pograf P , rázem bychom měli hru s 18 tahy na deseti původních vrcholech. Přesto graf takové hry nalezneme, i když bez využití podgrafu P (obrázek 3.20). Tím dostáváme z hlediska počtu tahů stejnou situaci, jako kdybychom na graf na pěti původních vrcholech zkonstruovaný pomocí 8 tahů (což se zatím nepodařilo) napojili podgraf P . Proto pro každé n z této zbytkové třídy, kdy $n \geq 10$, umíme hrát hru

$$t = \frac{n-10}{5} \cdot 10 + 18$$
$$t = 2n - 2$$

tahy.



Obrázek 3.20: Hra na 2-souvislém grafu pro $n = 10$ s 18 tahy

Tím jsme ukázali, že pro každé $n \geq 10$ zvládneme hrát hru končící 2-souvislým grafem $2n - 2$ nebo méně tahy. A jelikož i na nižších počtech původních vrcholů vyjma $n = 1$ umíme hrát hry méně než $2n$ tahy, je potvrzena počáteční domněnka.

3.4.3 Odvození pro 1-souvislé grafy pomocí Eulerova vzorce

V předchozí sekci jsme naznačili, že vrcholy stupně dva nemusí být na konci hry nutně ve dvou oblastech. Ve chvíli, kdy spojíme novou hranou dvě komponenty, náleží nově vzniklý vrchol stupně dva pouze jedné oblasti. Teprve až dalším tahem můžeme (ale ne nutně) tuto skutečnost změnit.

Odhad počtu dvoustupňových vrcholů proto s využitím počtu oblastí upravíme na $|V_{deg2}| \leq 3S$, neboť nově předpokládáme, že vrchol stupně dva může být na konci hry incidentní s pouze jednou oblastí a v každé oblasti mohou být až tři dvoustupňové vrcholy. Tento odhad bude jistě příliš přísný, pokud by nastala rovnost, dělil by každý z vrcholů stupně dva hranu, která by byla mostem. Nerovnost upravíme na $S \geq \frac{|V_{deg2}|}{3}$ a dosazením do Eulerova vzorce dostáváme pro 1-souvislé grafy:

$$\begin{aligned}V - E + S &= 2 \\n + t - 2t + \frac{3n - t}{3} &\leq 2 \\t &\geq \frac{3n}{2} - \frac{3}{2}\end{aligned}$$

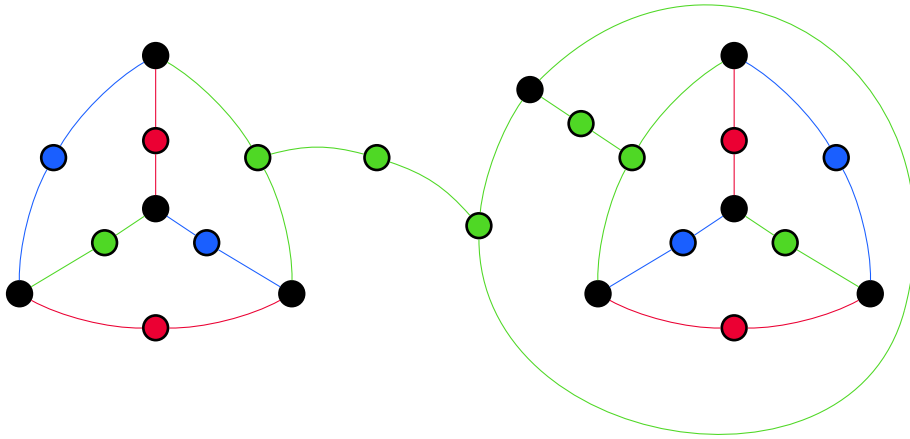
Hra s $\frac{3n}{2} - \frac{3}{2}$ tahy ale nikdy nemůže proběhnout, neboť obecně musí být počet tahů nejméně $\frac{3n}{2}$, jak jsme odvodili v sekci 3.4.1. Navíc by to znamenalo, že by v každé oblasti byly právě tři vrcholy stupně dva (každý samozřejmě jiné barvy). Žádný z těchto vrcholů by ale nesměl být součástí kružnice (aby nenáležel do dvou oblastí) a proto by žádné dvě trojice dvoustupňových vrcholů nebylo možné oddělit do různých oblastí. Tedy tento konkrétní způsob odvození kvůli příliš nepřesnému odhadu počtu oblastí nefunguje a my se musíme spokojit s tím, že pro hry končící 1-souvislými grafy jsme nedokázali nalézt lepší omezení než pro barevnou variantu obecně, tedy $t \geq \frac{3n}{2}$. Jistě ale existuje přesnější omezení.

Konstrukce grafů her končících 1-souvislým grafem s co nejmenším počtem tahů

Nyní se budeme alespoň pokoušet nacházet 1-souvislé konstrukce s co nejmenším počtem tahů pro různá n . Na počet původních vrcholů budeme nahlížet obdobně jako v případě 2-souvislých grafů jazykem kongruencí – motivací nám je vzorec pro dolní hranici tahů pro 2-souvislé grafy a dále také tahově výhodná napojitelná 1-souvislá konstrukce. Čtenář se o tom bude moci v následujících úvahách přesvědčit.

Případ $n \equiv 4 \pmod{5}$

Již jsme ukázali nejjednodušší příklad pro tuto zbytkovou třídu (3.11). Pro $n = 9$ umíme sestrojit graf, na kterém již nelze hrát další tah pomocí poměrně malého počtu tahů. Vytvoříme 2 „kopie“ minimálního grafu pro $n = 4$ (jedná se o subdivizi kompletního grafu K_4 , kde je každá hrana jednou rozdělena) a pomocí dalšího původního vrcholu „uzavřeme“ jednu ze subdivizí do oblasti a nakonec graf za provedení co nejmenšího počtu tahů vhodně dotvoříme.

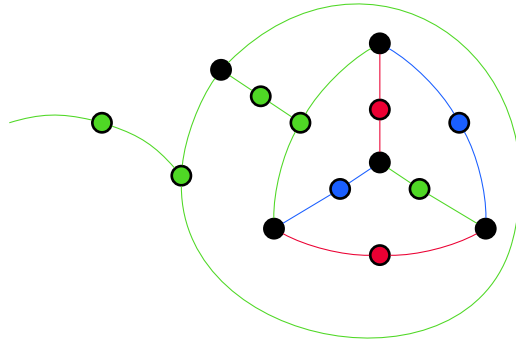


Obrázek 3.21: Hra na 1-souvislém grafu pro $n = 9$ s 15 tahy

Z tohoto můžeme vyčíst, že podobné konstrukce budeme pro $n \equiv 4 \pmod{5}$ schopni realizovat, podgraf s pěti původními vrcholy je „uzavřený“, na okolí nezávislý a je pro další napojení „nedosažitelný“. Při snaze dosahovat co nejnižšího počtu tahů je výhodný.

Takto lze tedy postupovat i pro ostatní n vyhovující výše uvedené podmínce. Vidíme, že přidání podgrafu na pěti původních vrcholech nám situaci ve vnější oblasti nikterak nemění, stále s ní zůstávají incidentní tři vrcholy stupně dva. Proto můžeme neomezeně přidávat další takové podgrafy a vždy zkonstruovat graf pro hru s určitým počtem tahů na $n \equiv 4 \pmod{5}$ vrcholech. Pro zmíněné konstrukce pak obecně vypočítáme počet tahů, na něž jsme schopni se omezit pro $n \equiv 4 \pmod{5}$.

Tento podgraf vyžaduje ke své konstrukci 9 tahů. Pokud zavedeme $n_2 = n_1 + 5$ a pro n_1 sestrojíme pomocí t_1 tahů souvislý graf, ve kterém už nelze provést další tah, pak můžeme pomocí tohoto podgrafu pro n_2 realizovat hru s $t_2 = t_1 + 9$ tahy. Podmínkou je ovšem skutečnost, že existuje vrchol, na který tento podgraf můžeme napojit. Zvolme za n_1 subdivizi grafu K_4 (obrázek 3.11), která splňuje minimální počet tahů na 1-souvislém grafu pro $n = 4$. K ní můžeme připojovat libovolný počet „uzavřených“



Obrázek 3.22: „Uzavřená“ K_4 – podgraf s devíti tahy využívaný pro minima tahů

subdivizí, na které spotřebujeme vždy po 9 tazích. Celkový počet tahů pak bude

$$t = 6 + 9 \cdot \frac{n-4}{5}$$

$$t = \frac{30 + 9n - 36}{5}$$

$$t = \frac{9n - 6}{5}$$

Tedy závěr je, že pro jakékoli $n \equiv 4 \pmod{5}$ lze hrát hru $t = \frac{9n-6}{5}$ tahy na souvislém grafu. Není bez zajímavosti, že se hodnota shoduje s odvozenou spodní hranicí tahů pro 2-souvislé grafy.

Případ $n \equiv 2 \pmod{5}$

Tentokrát využijeme graf minimálního počtu tahů pro $n = 2$ (potřebujeme na něj 3 tahy), na který budeme napojovat již známé „uzavřené“ subdivize. Tímto postupem dosáhneme vždy

$$t = 3 + 9 \cdot \frac{n-2}{5}$$

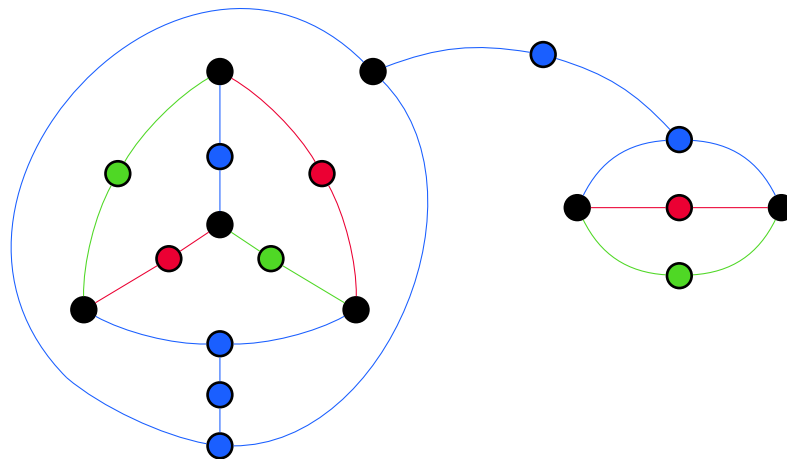
$$t = \frac{15 + 9n - 18}{5}$$

$$t = \frac{9n - 3}{5}$$

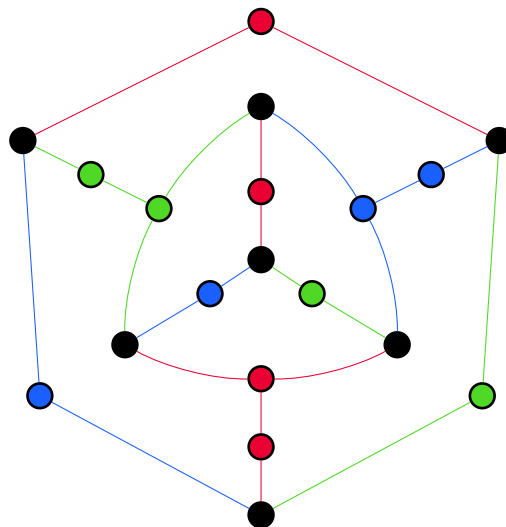
tahů. Proto můžeme s jistotou říci, že na $n \equiv 2 \pmod{5}$ původních vrcholech může hra skončit po $t = \frac{9n-3}{5}$ tazích. Nutno podotknout, že navržené realizace tohoto počtu tahů nejsou jediným řešením. Jde ale zřejmě o nejprímější a nejintuitivnější konstrukce. Pro ilustraci uvedeme dvě možnosti hry s $\frac{9n-3}{5}$ tahy na souvislých grafech pro $n = 7$.

Zatímco u první konstrukce (obrázek 3.23) si jednoduše umíme představit, jak by šlo realizovat $\frac{9n-3}{5}$ tahů pro $n = 12, 17, 22, \dots$ (přidáním další „uzavřené“ subdivi-

vize – obrázek 3.22), u druhé konstrukce (která je 2-souvislá, obrázek 3.24) se budou
 vyhovující grafy bez využití zmiňovaného podgrafu hledat jen obtížně.



Obrázek 3.23: Hra na 1-souvislém grafu pro $n = 7$ s 12 tahy



Obrázek 3.24: Hra na 2-souvislém grafu pro $n = 7$ s 12 tahy

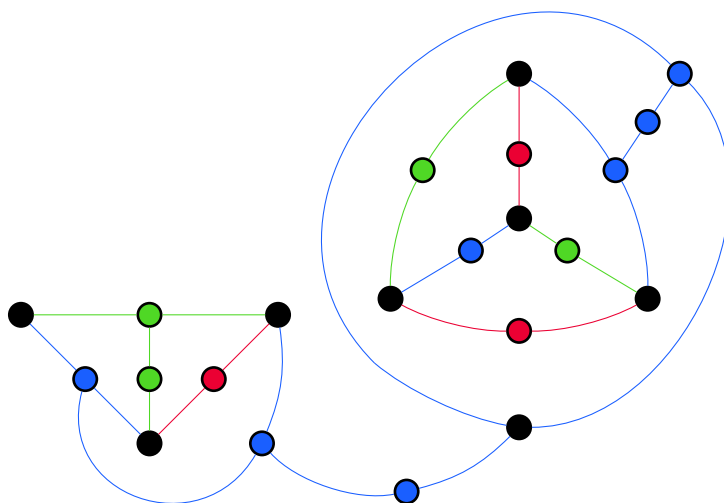
Případ $n \equiv 3 \pmod{5}$

Na $n = 3$ původních vrcholech proběhne hra vždy alespoň s 5 tahy. S využitím „uzavřených“ subdivizí můžeme vytvořit grafy konečných her nízkým počtem tahů.

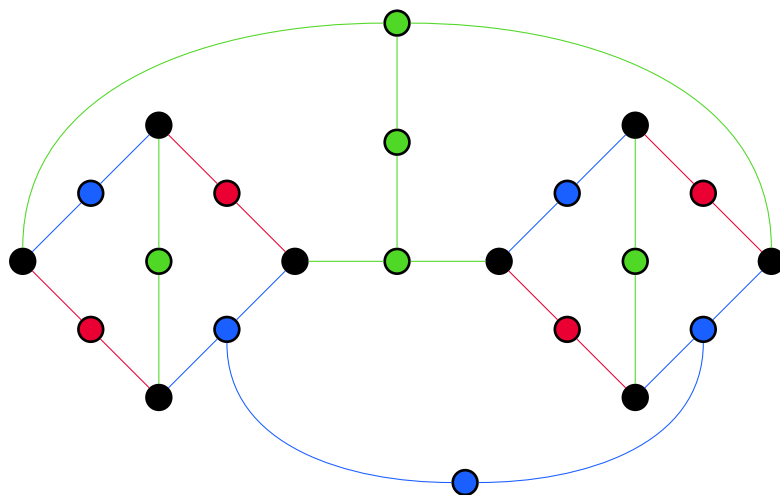
$$t = 5 + 9 \cdot \frac{n-3}{5}$$

$$t = \frac{25 + 9n - 27}{5}$$

$$t = \frac{9n - 2}{5}$$



Obrázek 3.25: Hra na 1-souvislém grafu pro $n = 8$ se 14 tahy



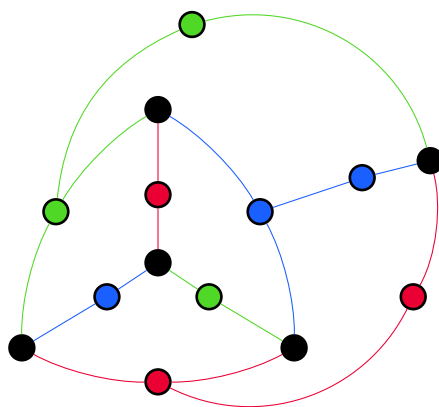
Obrázek 3.26: Hra na 2-souvislém grafu pro $n = 8$ se 14 tahy

Pro $n \equiv 3 \pmod{5}$ může být hra na 1-souvislých grafech konečná určitě po $t = \frac{9n-2}{5}$ tazích. Opět platí, že takové grafy nemusí být nutně konstruovány s využitím

„uzavřených“ subdivizí, jak ukazuje druhý obrázek (3.26), nicméně tento způsob se jeví nejjednodušším.

Případ $n \equiv 0 \pmod{5}$

Sestrojit 2-souvislý (ani 1-souvislý) graf pro hru s minimem tahů pro $n = 5$ (podle tabulky 3.2, kde je uvedeno $t \geq 8$) se nám nepodařilo. Budeme se proto muset v případě pěti původních vrcholů spokojit se hrou o 9 tazích. Na takový graf bychom mohli



Obrázek 3.27: Hra na 2-souvislém grafu pro $n = 5$ s 9 tahy

napojit „uzavřenou“ subdivizi, jako již mnohokrát, při troše zkoumání ale objevíme takově ještě výhodnější krok pro $n \equiv 0 \pmod{5}$ kdy $n \geq 10$. Napojováním „uzavřených“ subdivizí na sebe dosáhneme ještě nižšího počtu tahů (obrázek 3.28).

Tím pro $n \geq 10$ dostaneme graf konečné hry hrané

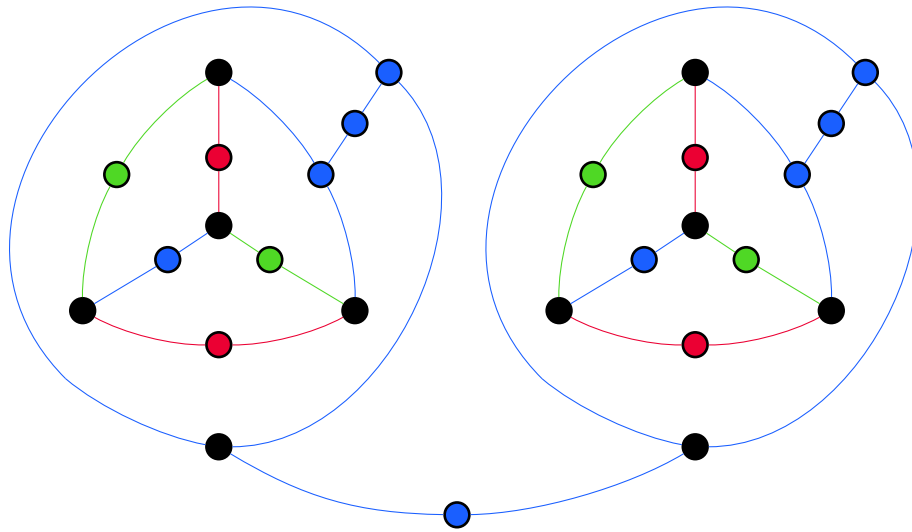
$$t = 9 \cdot \frac{n}{5} - 1$$

$$t = \frac{9n - 5}{5}$$

tahy. Díky těmto konstrukcím můžeme tvrdit, že pro každé $n \equiv 0 \pmod{5}$ kdy $n \geq 10$ lze hrát konečnou hru o $\frac{9n-5}{5}$ tazích.

Případ $n \equiv 1 \pmod{5}$

V sekci 3.4.2 se nám podařilo realizovat 2-souvislé minimum počtu tahů pro $n = 6$, které je zároveň obecným minimem počtu tahů. Pro $n = 11$ využijeme skutečnosti, že některé dvoustupňové vrcholy mohou být na konci hry v pouze jedné oblasti a tím teoreticky snižují počet tahů. Napojením dvou „uzavřených“ subdivizí různé barvy na jeden původní vrchol zajistíme, že tento vrchol se stane monochromatickým a zároveň



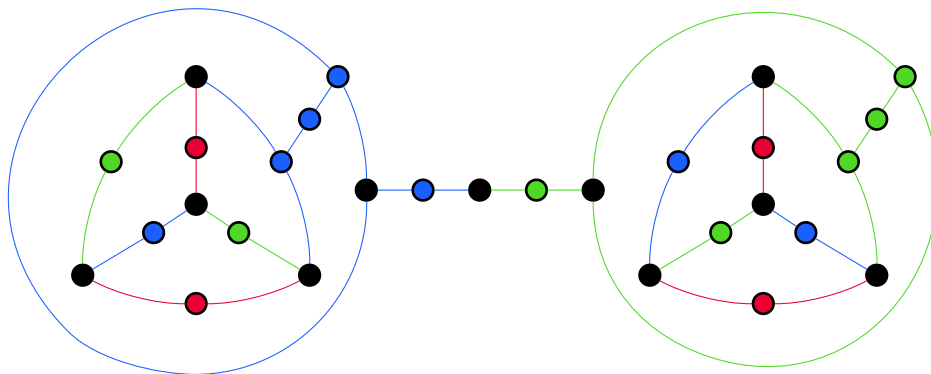
Obrázek 3.28: Hra na 1-souvislém grafu pro $n = 10$ se 17 tahy

ve vnější oblasti (ani v žádné další) nebude možno provést další tah – budou v ní ležet tři vrcholy stupně dva, každý s hranou jiné chybějící barvy. Takto budeme moci postupovat pro každé další $n \geq 11$ a dosáhneme tím

$$t = 9 \cdot \frac{n-1}{5}$$

$$t = \frac{9n-9}{5}$$

tahů. Abychom to uzavřeli: pro $n = 1$ hra končí vždy 2 tahy, pro $n = 6$ umíme na souvislých grafech zkonstruovat graf hry o 10 tazích a pro každé $n \equiv 1 \pmod{5}$ kdy $n \geq 11$ 1-souvislý graf hry o $t = \frac{9n-9}{5}$ tazích.



Obrázek 3.29: Hra na 1-souvislém grafu pro $n = 11$ s 18 tahy

Sestavme si podobně jako již několikrát tabulku pro spodní hranice počtu tahů pro n do dvaceti a porovnejme teoretické minimální hodnoty počtu tahů s těmi, kterých jsme zatím dosáhli (tabulka 3.3).

n	$\frac{3n}{2}$	Předpokládaná spodní hranice tahů	Počet tahů dosažený konstrukcí
1	1,5	2	2
2	3	3	3
3	4,5	5	5
4	6	6	6
5	7,5	8	9
6	9	10	10
7	10,5	11	12
8	12	13	14
9	13,5	14	15
10	15	16	17
11	16,5	17	18
12	18	19	21
13	19,5	20	23
14	21	22	24
15	22,5	23	26
16	24	25	27
17	25,5	26	30
18	27	28	32
19	28,5	29	33
20	30	31	35

Tabulka 3.3: Tabulka minimálního počtu tahů – 1-souvislé

S jistotou platí, že spodní hranice počtu tahů pro 1-souvislé grafy se bude v závislosti na n (vyjma $n = 2$ a $n = 4$, kde skutečně může nastat $t = \frac{3n}{2}$) pohybovat mezi předpokládanou hodnotou ze vzorce $\lfloor \frac{3n}{2} \rfloor + 1$ a počtem tahů jistě dosažitelných konstrukcí, který je pro každou zbytkovou třídu n uveden výše. Se zvyšujícím se n se bude možný rozsah pro dolní hranici počtu tahů pochopitelně zvyšovat.

Zároveň je dobré si uvědomit, že oproti hrám končícím nesouvislými grafy je zde více omezení a proto je dobrý důvod předpokládat, že by odvozená spodní hranice počtu tahů pro hry končící 1-souvislými grafy mohla být vyšší než $\frac{3n}{2}$, resp. $\lfloor \frac{3n}{2} \rfloor + 1$. Zatím se nám ale pro hry končící 1-souvislými grafy nepodařilo nalézt vhodný způsob odvození.

Závěrem

V práci jsem se snažila co nejlépe popsat hru Výhonky s předchozím nastíněním základů teorie grafů. Hlavním cílem práce pak bylo vymyslet vlastní novou variantu této hry a následně prozkoumat a popsat její vlastnosti.

Nejprve jsem vysvětlila nová pravidla a omezení, načež jsem zavedla označení pro druhy vrcholů, které se jevílo být dosti praktickým při dalším popisování nové hry. Uvedla jsem, které vrcholy mohou být duhové a které monochromatické, napsala jsem možné rozmezí pro počty monochromatických a duhových vrcholů. Ukázala jsem, že počet duhových vrcholů stupně tři může být na konci hry roven n pro $n = 2$ a $n \geq 4$, naopak pro $n = 1$ a $n = 3$ nikoli.

Především jsem se ale věnovala možným počtům tahů v barevné hře a sice minimálnímu možnému počtu tahů k ukončení hry, neboť maximální možný počet tahů se ukázal shodný s maximem v klasické hře. Poté, co jsem na základě myšlenky rozdělení vrcholů na *přeživší, strážce a farizeje* odvodila spodní hranici počtu tahů jako $\frac{3n}{2}$, jsem pomocí úvahy o oblastech a jejich hranicích dokázala, že tato hodnota bude dosažitelná pouze pro $n = 2$ a $n = 4$. Hledala jsme konstrukce, které by vyhovovaly teoretickému minimu tahů, což se mi podařilo pro všechna n od jedné do deseti a dále i pro $n = 12, 14$ a 16 . Pro ostatní počty původních vrcholů se zatím nepodařilo nalézt univerzální konstrukční řešení, ani případně odvodit obecný vzorec pro minimální počet tahů potřebný k ukončení hry. Proto jsem prokázala nejnižší počty tahů, kterých lze určitě konstrukcí dosáhnout. K tomu jsem počty původních vrcholů rozdělila do zbytkových tříd po dělení sedmi, neboť právě přidávání konstrukce grafu na sedmi původních vrcholech se jevílo jako vhodný způsob, jak malého počtu tahů dosahovat.

Dále jsem zkoušela odvodit spodní hranici počtu tahů pomocí Eulerova vzorce, kdy jsem začala odvozováním pro hry končící 2-souvislým grafem. Motivací byla skutečnost, že v takovém grafu se nevyskytne žádný most a proto lze tvrdit, že každý vrchol stupně

2 se nachází ve dvou oblastech. Jako výsledek jsem dostala nerovnost $t \geq \frac{9n-6}{5}$. Konstrukce 2-souvislých grafů odpovídající tahově této hodnotě počtu tahů se podařilo realizovat pro méně hodnot n než při obecném minimu počtu tahů. Díky univerzálně napojitelnému 2-souvislému podgrafu na pěti původních vrcholech (v textu podgraf P) jsem pro všechna n dle zbytku po dělení pěti stanovila malé počty tahů, kterých jistě budeme schopni dosáhnout.

Obdobně jsem zkoušela odvodit spodní hranici počtu tahů i pro hry končící 1-souvislými grafy. Zde se předpoklad omezující počet oblastí ukázal jako příliš volný a nedostačující, neboť výsledná spodní hodnota pro možný počet tahů vyšla ještě nižší, než ta obecná pro grafy bez omezení v rámci souvislosti. Proto jsem alespoň uváděla jistě dosažitelné nízké počty tahů pomocí napojitelného 1-souvislého podgrafu podobně jako pro obecné hry a pro hry končící 2-souvislými grafy.

Rozhodně nelze tvrdit, že bych novou variantu hry dokonale popsala, především co se týče spodní hranice počtu tahů. Otázka obecného řešení zůstává nadále otevřena, neboť pro většinu hodnot n zatím neumíme jednoznačně určit přesný minimální počet tahů k ukončení barevné hry.

Řešení nového problému tedy určitě není kompletní, téma nabízí ještě mnoho prostoru pro zkoumání, a proto usuzuji, že by mohlo představovat lákavou výzvu pro kohokoli, kdo se zajímá o teorii grafů, protože například nalézt obecný vzorec pro vyjádření nejnižšího realizovatelného počtu tahů v závislosti na n by bylo velkým krokem k hlubšímu pochopení hry.

Literatura

- [1] KOVÁŘ, Petr. *Úvod do Teorie grafů*. Matematika pro inženýry 21. století, Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava a Západočeská univerzita v Plzni, 2021 [cit. 2022-12-20]
- [2] CARLSON, Stephan C. *Graph theory*. Encyclopedia Britannica [online]. 23.12.2022 [cit. 2023-01-17]. Dostupné z: <https://www.britannica.com/topic/graph-theory>
- [3] PIGGOTT, Jennifer a Jo SCHOLTEN. *Sprouts Explained*. NRICH [online]. Cambridge: University of Cambridge, c1997-2022 [cit. 2022-12-14]. Dostupné z: <https://nrich.maths.org/2413>
- [4] MATOUŠEK, Jiří a Jaroslav NEŠETŘIL. *Kapitoly z diskrétní matematiky*. 4., upr. a dopl. vyd. V Praze: Karolinum, 2009. ISBN 978-80-246-1740-4.
- [5] KOVÁŘ, Petr. *Teorie grafů*. Matematika pro inženýry 21. století, Krmelín, 2022 [cit. 2022-11-28]