

# STŘEDOŠKOLSKÁ ODBORNÁ ČINNOST

Obor č. 1: Matematika a statistika

Rozšíření derivace pomocí teorie stability

Vojtěch Kloud

Královéhradecký kraj

Hradec Králové 2021

# STŘEDOŠKOLSKÁ ODBORNÁ ČINNOST

## Obor č. 1: Matematika a statistika

Rozšíření derivace pomocí teorie stability

Extention of the derivative using stability  
theory

**Autor:** Vojtěch Kloud

**Škola:** První soukromé jazykové gymnázium Hradec Králové,  
spol. s.r.o., Brandlova 875, Hradec Králové 3, 500 03

**Kraj:** Královéhradecký kraj

**Konzultant:** Mgr. Ondřej Hospodka

RNDr. Daniel Cameron Campbell, Ph.D.

Hradec Králové 2021

## **Prohlášení**

Prohlašuji, že jsem svou práci SOČ vypracoval samostatně a použil jsem pouze prameny a literaturu uvedené v seznamu bibliografických záznamů. Prohlašuji, že tištěná verze a elektronická verze soutěžní práce SOČ jsou shodné. Nemám námitek proti zpřístupňování této práce v souladu se zákonem č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon) ve znění pozdějších předpisů.

V Hradci Králové dne 21. března 2021

Vojtěch Kloud

## **Poděkování**

Můj velký dík patří všem lidem, kteří mi i v této nelehké době pomohli s úspěšným dokončením práce. Zejména bych rád poděkoval svým konzultantům Mgr. Ondřeji Hospodkovi a RNDr. Danielu Cameron Campbellovi, Ph.D., kteří mi s prací pomáhali po všech stránkách a dávali mi cenné rady. Dále bych rád poděkoval svému příteli Martinu Dolákovi za poskytnutí kontaktů, svému drahému tátovi za jazykovou korekturu a v neposlední řadě Bětce, která mi byla po celou dobu psaní práce velikou oporou.

## **Anotace**

Hlavním výsledkem práce je rozšíření operátoru standardní derivace analytických funkcí do všech nezáporných reálných řádů. Toto rozšíření je založeno na zajímavých paralelách mezi diskrétními posloupnostmi a jejich odpovídajícími diferenciálními rovnicemi. Zkoumání těchto paralel je hlavním předmětem teoretické části práce. V části praktické jsou k rozšíření operátoru využity metody komplexní analýzy jako je Taylorův rozvoj analytické funkce, Weierstrassovo kritérium stejnoměrné konvergence nebo Lebesgueova věta. Uvedené rozšíření je poté aplikováno do fyziky na modelování tlumeného oscilátoru.

**Klíčová slova:** konvergentní posloupnosti, stabilita ODE, komplexní analýza, zlomková derivace, tlumený oscilátor

## **Annotation**

The main focus of this thesis is to extend the standard derivative operator of analytic functions to all non-negative orders. This extension is based on interestingly similar properties of discrete convergent sequences and their appropriate differential equations. The observation and derivation of these properties is the subject of the theoretical part of the thesis. In order to extend the derivative operator, methods and theorems of complex analysis such as Taylor series, Weierstrass M-test and Lebesgue's theorem are utilized. We will then use the introduced fractional derivative to model a damped oscillator.

**Keywords:** convergent sequences, stability theory, complex analysis, fractional derivative, damped oscillator

# Obsah

Úvod	8
<b>Teoretická část</b>	<b>9</b>
<b>1 Rekurentní posloupnosti</b>	<b>9</b>
1.1 Babylonská metoda . . . . .	10
1.2 Logistický růst populací . . . . .	11
1.3 Pevné body posloupností a Banachova věta . . . . .	12
1.4 Newtonova metoda tečen . . . . .	14
<b>2 Stabilita diferenciálních rovnic</b>	<b>15</b>
2.1 Přepis diskretních konvergentních posloupností . . . . .	15
2.2 Stabilní body diferenciálních rovnic . . . . .	17
2.3 Přepis Newtonovy metody tečen . . . . .	21
<b>3 Funkce komplexní proměnné</b>	<b>21</b>
3.1 Cauchyho věta a její obecné znění . . . . .	22
3.2 Řady komplexních funkcí . . . . .	23
3.3 Taylorův rozvoj analytických funkcí . . . . .	24
3.4 Funkce Gamma . . . . .	25
<b>Praktická část</b>	<b>27</b>
<b>4 Podmínka rozšíření operátoru derivace</b>	<b>27</b>
<b>5 Odvození rozšíření derivace</b>	<b>28</b>
5.1 Podmínky funkcí $\lambda_n(t)$ a věta o rozšíření derivace . . . . .	30
5.2 Konkrétní příklady funkcí $\lambda_n(t)$ . . . . .	32
5.3 Vlastnosti rozšíření . . . . .	36
<b>6 Příklady</b>	<b>38</b>
6.1 Přepis diskretních posloupností na spojitě funkci . . . . .	38
6.2 Rozšíření derivace v bodě . . . . .	41
6.3 Rozšíření derivace funkce na intervalu . . . . .	43

7	Zlomková diferenciální rovnice	45
8	Aplikace zlomkové derivace	46
	Diskuse	51
	Závěr	53
	Literatura	54

# Úvod

Diskrétní posloupnosti nachází své uplatnění v mnoha vědních oborech ať už k výpočtům nebo k modelování. Takové posloupnosti slouží k nejjednodušším matematickým modelům. I přes jejich jednoduché zadání mohou tyto posloupnosti předpovídat populaci nějakého ekosystému nebo simulovat chaotickou soustavu.

O něco složitější systémy, které jsou spojitě v čase, můžeme modelovat diferenciálními rovnicemi. U jejich řešení můžeme rozlišovat například periodicitu nebo pro nás v teoretické části důležitější stabilitu. Stabilitou řešení diferenciálních rovnic se zabývá teorie stability. Tato teorie je podobná jako u posloupností a v práci ilustrujeme některé jejich paralely, na kterých založíme rozšíření derivace v praktické části práce.

Zlomkové derivace a zlomkové diferenciální rovnice nacházejí své uplatnění v nejrůznějších vědních disciplínách [10]. Existuje několik možných rozšíření derivací, které splňují určité vlastnosti. Se standardně používanými rozšířeními se může čtenář seznámit v [3] a [6]. My se zaměříme na rozšíření, které přirozeně vyplyne ze studia konvergentních posloupností a stabilních diferenciálních rovnic. V práci rozebereme vlastnosti tohoto rozšíření, uvedeme několik jeho příkladů a rozšíření aplikujeme na modelování tlumeného kyvadla.



# Teoretická část

Tato část práce analyzuje některé vlastnosti rekurentních posloupností a diferenciálních rovnic, jako je jejich konvergence a stabilita [9]. Využijeme zde základní poznatky o posloupnostech [2]. V kapitole 1 předložíme dva příklady rekurentních posloupností, jejichž podmínky pro konvergenci zobecníme ve speciálním případě Banachovy věty o pevném bodě. Tyto diskrétní posloupnosti přepíšeme na diferenciální rovnice, jejichž stabilitou se budeme zabývat v kapitole 2. V kapitole 3 uvedeme věty komplexní analýzy, jako je obecná Cauchyho věta, Weierstrassovo kritérium a Taylorův rozvoj. Tyto věty využijeme následně v části praktické k rozšíření derivace.

## 1 Rekurentní posloupnosti

V této práci se budeme soustředit primárně na *rekurentně* zadané posloupnosti. Tedy posloupnosti, kde je dán člen  $a_0$  a všechny další členy definujeme pomocí předchozích členů, případně i  $n$ . Nejzákladnější taková posloupnost s prvním členem  $a_0$  je dána  $a_{n+1} = f(a_n)$  pro  $n \geq 0$ . Rovnici  $a_{n+1} = f(a_n)$  říkáme *diferenční rovnice* a  $a_0$  je *počáteční podmínka*. Jednotlivé členy jsou pak  $a_1 = f(a_0), a_2 = f(a_1) = f(f(a_0)), \dots$ . Proces opakovaného dosazování funkčních hodnot do argumentu funkce nazýváme *iterace*.

**Definice 1.1.** Pevný bod funkce  $f(x)$  je takový bod  $\alpha \in D_f$ , pro který platí  $\alpha = f(\alpha)$ .

Posloupnosti  $\{a_0, a_{n+1} = f(a_n)\}$  jsou úzce spjaty s těmito pevnými body, neboť je lze numericky určit právě jako  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ . Tato metoda hledání pevných bodů se nazývá *metoda prosté iterace*.

**Věta 1.1.** *Nechť posloupnost  $\{a_0, a_{n+1} = f(a_n)\}$  konverguje k  $\alpha$  a  $f$  je v  $\alpha$  spojitá. Pak  $f(\alpha) = \alpha$ .*

Po rozebrání příkladů uvedeme nutnou podmínku pro funkci  $f$  a počáteční podmínku  $a_0$ , aby prostá iterace tohoto bodu konvergovala právě k jednomu pevnému bodu funkce  $f$ .

Nadále budeme v celé práci uvažovat množinu přirozených čísel  $\mathbb{N}$  i s nulou.

## 1.1 Babylonská metoda

Tato metoda umožňuje určit s libovolnou přesností druhou odmocninu kladného čísla pouze pomocí triviálních aritmetických operací a iterace. Jedná se o případ metody prosté iterace

**Věta 1.2** (Babylonská metoda). *Pro posloupnost  $\left\{ a_0 = b, a_{n+1} = \frac{a_n + b/a_n}{2} \right\}$ , kde  $b > 1$  platí  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{b}$ .*

*Důkaz.* Využijeme faktu, že každá omezená klesající posloupnost konverguje [2]. Všimněme si, že všechna  $a_n$  jsou kladná, neboť  $f(x) = \frac{x + b/x}{2}$  je kladná kdykoliv  $x$  je kladné. Protože  $a_0$  je kladné, je kladné i  $a_1$  a všechny následující členy, tedy  $\forall n \in \mathbb{N} : a_n > 0$ . Indukcí dokážeme, že  $\forall n \in \mathbb{N} : a_n > \sqrt{b}$ . Pro  $b > 1$  je  $b > \sqrt{b} \implies a_0 > \sqrt{b}$ , což je první krok indukce. Předpokládejme, že  $a_n > \sqrt{b}$  pro nějaké  $n$ . Pak je  $(a_n - \sqrt{b})^2 > 0$ , což je po roznásobení ekvivalentní

$$(a_n)^2 + b > 2a_n\sqrt{b}.$$

Vydělíme-li obě strany kladným  $2a_n$ , dostáváme

$$\frac{a_n + b/a_n}{2} = a_{n+1} > \sqrt{b}$$

a je tak splněn indukční krok. Tedy  $\forall n \in \mathbb{N} : a_n > \sqrt{b}$ , což znamená, že

$$a_n > \frac{b}{a_n}$$

$$2a_n > a_n + b/a_n$$

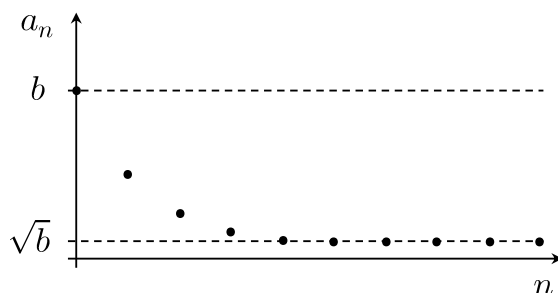
$$a_n > \frac{a_n + b/a_n}{2} = a_{n+1}.$$

Máme tak klesající posloupnost omezenou zdola číslem  $\sqrt{b}$ . Posloupnost tak konverguje k nějaké limitě, řekněme  $\alpha$ . Funkce  $f(x) = \frac{x + b/x}{2}$  je pro  $x > 0$  spojitá a tedy podle věty 1.1 je  $\alpha$  takové, že  $\alpha = \frac{\alpha + b/\alpha}{2} \implies \alpha = \sqrt{b}$ .  $\square$

Posloupnost konverguje k  $\sqrt{b}$  i pro  $0 < b < 1$ , ale není zde monotónní na všech  $n$ . Tento problém lze vyřešit tím, že pokud  $0 < b < 1$ , pak zvážíme iterace k  $1/b > 1$ , které původní větou konvergují monotónně k  $1/\sqrt{b}$ . Dále stačí jen výsledek převrátit a dostaneme touto metodou  $\sqrt{b}$  i pro  $0 < b < 1$ .

Pro rychlejší konvergenci posloupnosti lze vybrat počáteční hodnotu  $a_0$  co nejbližší hodnotě  $\sqrt{b}$ . Babylonská metoda nachází své uplatnění přímo v kalkulačkách a počítačích

pro výpočty odmocnin. Jedná se o lehce implementovatelnou a rychle konvergující posloupnost.



Obrázek 1: Babylonská metoda pro  $b = 100$  a  $0 \leq n \leq 10$

## 1.2 Logistický růst populací

Matematika nachází svojí aplikaci v biologii často právě při modelování populací nejrůznějších společenstev. Uvažujeme-li například jednotku času  $t$  jako jeden rok, lze předpokládat, že velikost populace  $P_{t+1}$  v roce  $t + 1$  je závislá na velikosti populace  $P_t$  v roce  $t$ . Tedy lze vyjádřit  $P_{t+1} = f(P_t)$ . Nechť  $P_0$  značí populaci na začátku našeho měření. Nejjednodušší a intuitivní model pro množení populace může být například

$$P_{t+1} = 2P_t.$$

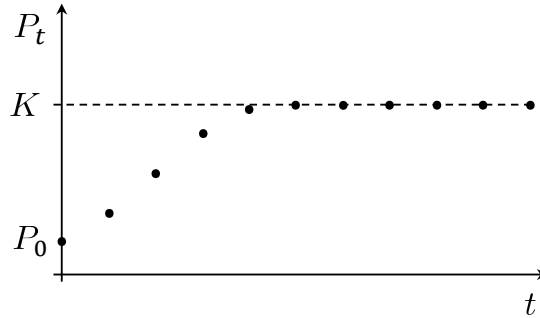
Pro počáteční podmínku  $P_0$  je  $P_t = P_0 \cdot 2^t$ , jedná se tedy o exponenciální růst a populace roste nade všechny meze. Skutečnost, že takový případ prakticky nemůže nastat, dobře zachycuje *logistická rovnice* ve tvaru

$$P_{t+1} = \left(2 - \frac{P_t}{K}\right) P_t, \quad (1.1)$$

kde  $K$  je takzvaná nosná kapacita prostředí. Pro velké  $K$  a malé  $P_t$  je  $\frac{P_t}{K}$  zanedbatelná a lokálně se jedná o exponenciální růst. Jde-li ovšem  $P_t \rightarrow K$ , máme  $P_{t+1} \approx P_t$  a populace se kolem nosné kapacity jejího prostředí stabilizuje. Numericky bylo v [1] ukázáno, že pro  $K = 500$  se pro  $P_0 \in (0, 1000)$  populace stabilizuje v nekonečnu právě v  $K = 500$ . Fakt, že pro některá  $P_0$  posloupnost  $\{P_t\}$  konverguje ke  $K$ , bychom mohli podobně jako v předchozí kapitole dokázat. V tomto příkladě se spokojíme pouze s intuitivní představou.

Na tomto příkladě lze pozorovat, že vyřešením rovnice  $\alpha = \left(2 - \frac{\alpha}{K}\right) \alpha$  dostáváme dva pevné body;  $\alpha = K$  a  $\alpha = 0$ . Je zjevné, že pokud  $P_0 = 0$ , pak pro všechny  $t \geq 0$

je  $P_t = 0$ . Ovšem i při libovolně malém  $P_0 > 0$  konverguje posloupnost ke  $K$ . Proto pevnému bodu v nule říkáme *nestabilní pevný bod*.



Obrázek 2: Graf logistické rovnice pro  $P_0 = 100$  a  $K = 500$

### 1.3 Pevné body posloupností a Banachova věta

V první řadě uvedeme definici stabilního pevného bodu funkce [11].

**Definice 1.2.** Pevný bod  $\alpha$  funkce  $f$  je stabilní, pokud  $\exists \delta > 0$  takové, že  $\forall a_0 : |a_0 - \alpha| < \delta$  konverguje prostá iterace tohoto bodu k  $\alpha$ . Tedy  $\{a_0, a_{n+1} = f(a_n)\} \rightarrow \alpha$ .

Prostá iterace každé počáteční podmínky, která je dostatečně blízko  $\alpha$ , tedy musí konvergovat k  $\alpha$ . Následující věta říká, za jakých podmínek na funkci  $f(x)$  a  $a_0$  konverguje posloupnost  $\{a_0, a_{n+1} = f(a_n)\}$  k pevnému bodu funkce  $f$ . Jedná se o speciální případ Banachovy věty o kontrakcích, která říká, že v neprázdném úplném metrickém prostoru existuje pro danou kontrakci právě jeden pevný bod [12].

**Věta 1.3** (Banachova věta). *Nechť  $f(x)$  a  $f'(x)$  jsou spojité na  $\langle a, b \rangle$ ,  $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle$  a  $|f'(x)| \leq \lambda < 1$  pro všechna  $x \in \langle a, b \rangle$ . Pak  $\forall x_0 \in \langle a, b \rangle$  posloupnost  $\{x_0, x_{n+1} = f(x_n)\}$  konverguje k právě jednomu pevnému bodu funkce  $f$  na  $\langle a, b \rangle$ .*

*Důkaz.* Nejprve dokážeme, že existuje právě jeden pevný bod  $f$  na daném intervalu. Bez újmy na obecnosti řekněme, že pevné body nejsou v  $a$  nebo  $b$ . Je-li tedy  $f(a) > a$  a  $f(b) < b$ , pak při definování  $g(x) = f(x) - x$  je  $g(a) > 0$  a  $g(b) < 0$ . Taková funkce  $g$  je na  $\langle a, b \rangle$  spojitá a podle Bolzanovy věty pak existuje  $\alpha \in (a, b) : g(\alpha) = 0 \implies \alpha = f(\alpha)$ . Protože  $g'(x) = f'(x) - 1 < 0$ , funkce  $g(x)$  je klesající a toto  $\alpha$  je právě jedno.

Pro  $x_0 \in \langle a, b \rangle$  je i  $x_1 = f(x_0) \in \langle a, b \rangle$  a tedy  $x_n \in \langle a, b \rangle \forall n \geq 0$ . Pro pevný bod  $\alpha$  platí

$$|\alpha - x_{n+1}| = |f(\alpha) - f(x_n)|. \quad (1.2)$$

Protože  $f$  má na  $\langle \alpha, x_n \rangle \subset \langle a, b \rangle$  spojitou derivaci, Lagrangeova věta o střední hodnotě garantuje existenci nějakého  $\xi_n \in \langle \alpha, x_n \rangle$  takového, že

$$f'(\xi_n) = \frac{f(\alpha) - f(x_n)}{\alpha - x_n} \quad (1.3)$$

$\implies |f(\alpha) - f(x_n)| = |f'(\xi_n)| |\alpha - x_n|$ . Dosazením do (1.2) a využitím faktu, že  $|f'(\xi_n)| \leq \lambda$  dostáváme  $\forall n \geq 0$

$$|\alpha - x_{n+1}| \leq \lambda |\alpha - x_n|. \quad (1.4)$$

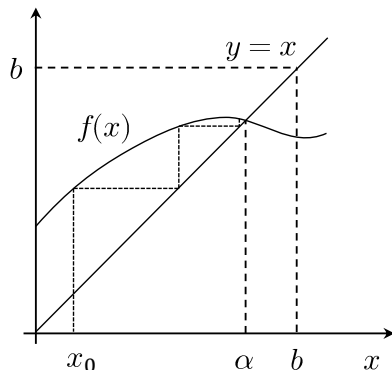
Indukcí pak lze ukázat, že

$$|\alpha - x_{n+1}| \leq \lambda |\alpha - x_n| \leq \lambda^2 |\alpha - x_{n-1}| \leq \dots \leq \lambda^{n+1} |\alpha - x_0|.$$

Pravá strana konverguje s  $\lambda < 1$  k nule a tedy pro výraz nalevo musí platit  $x_{n+1} \rightarrow \alpha$ .  $\square$

Následující věta je snadným testem stability daného pevného bodu.

**Věta 1.4.** *Nechť  $f(x)$  a  $f'(x)$  jsou spojitě a nechť je  $\alpha$  pevným bodem funkce  $f$ . Pokud  $|f'(\alpha)| < 1$ , pak pevný bod  $\alpha$  je stabilní.*

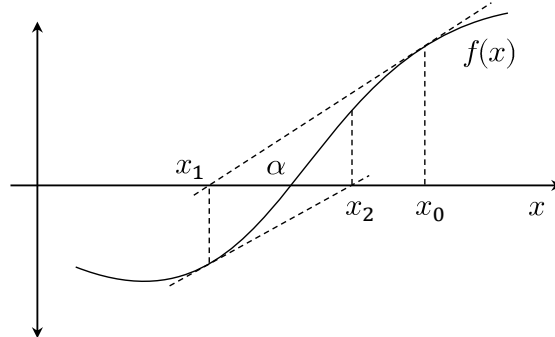


Obrázek 3: Pevný bod funkce a diagram iterace  $x_0$

Na obrázku 3 je naznačena metoda, jak lze graficky vyobrazit členy posloupnosti  $\{x_0, x_{n+1} = f(x_n)\}$ . Od bodu  $(x_0, f(x_0))$  pokračujeme horizontálně k  $y = x$  do  $(f(x_0), f(x_0))$ , kde vertikálně pokračujeme do  $(f(x_0), f(f(x_0)))$ , horizontálně k  $y = x$  do  $(f(f(x_0)), f(f(x_0)))$  atd. V diagramu je už člen  $x_2 = f(x_1) = f(f(x_0))$  relativně blízko pevnému bodu  $\alpha = f(\alpha)$ .

## 1.4 Newtonova metoda tečen

Tato metoda slouží k nalezení řešení rovnice  $f(x) = 0$ . Jedná se speciální případ výpočtu pevného bodu pomocí iterací.



Obrázek 4: Newtonova metoda tečen

Geometrická myšlenka Newtonovy metody je následující: Jako první aproximaci řešení rovnice  $f(x) = 0$  zvolíme  $x_0$ . V tomto bodě sestrojíme tečnu, jejíž kořen  $x_1$  lze jednoduše určit:

$$f'(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_0) = 0 \iff x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Dostaneme tak novou aproximaci řešení;  $x_1$ . V tomto budě sestrojíme tečnu a její kořen bude tvořit další aproximaci:

$$f'(x_1)(x_2 - x_1) + f(x_1) = 0 \iff x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Stejnou metodu opakujeme dále. Tvoříme tak posloupnost  $\left\{ x_0, x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \right\}$ .

Označíme-li  $g(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ , pak za předpokladu konvergence tato metoda pro spojitou  $f$  a  $f'$  konverguje podle věty 1.1 k  $\alpha$  takovému, že  $\alpha = g(\alpha) \iff \alpha = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}$ , což za předpokladu  $f'(\alpha) \neq 0$  je právě řešení rovnice  $f(\alpha) = 0$ .

**Věta 1.5** (Newtonova metoda). *Nechť jsou funkce  $f, f', f''$  spojité,  $f'(\alpha) \neq 0$  a  $\alpha$  je kořenem  $f: f(\alpha) = 0$ . Pak  $\alpha$  je stabilní pevný bod funkce  $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ , k němuž posloupnost*

$$\left\{ x_0, x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = g(x_n) \right\} \quad (1.5)$$

*konverguje.*

Babylonská metoda je ve své podstatě případ Newtonovy metody. Kořenem rovnice  $f(x) = x^2 - b = 0$  je  $\sqrt{b}$  a tedy odpovídající posloupnost konvergující k  $\sqrt{b}$  je podle (1.5) právě posloupnost  $\left\{ x_0, x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n)^2 - b}{2x_n} \right\} = \left\{ x_0, x_{n+1} = \frac{x_n + b/x_n}{2} \right\}$ .

## 2 Stabilita diferenciálních rovnic

V této kapitole přepíšeme dříve rozebrané diskrétní posloupnosti na diferenciální rovnice, jejichž stabilitou se budeme zabývat. Naše pozorování poté zobecníme.

### 2.1 Přepis diskrétních konvergentních posloupností

Začneme s logistickou rovnicí z kapitoly 1.2. Častěji se hovoří spíše o spojitě *logistické křivce*, než-li pouze o diskrétních bodech daných logistickou rovnicí (1.1). Chceme, aby zde  $t$  reprezentovalo spojitou hodnotu. Problém bychom mohli řešit následujícím způsobem:

Můžeme  $P_t$  pro  $t \in \mathbb{N}$  nahradit spojitou funkcí  $g(t)$  pro  $t \in \mathbb{R}_0^+$ . Logistická rovnice (1.1) by poté měla tvar.

$$g(t+1) = \left(2 - \frac{g(t)}{K}\right) g(t), \quad (2.1)$$

kde  $g(0) = P_0$  a  $g(t) : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$  je spojitá pro  $t \geq 0$ . Dostali jsme tak *funkcionální rovnici*, jejíž řešení není vždy triviální.

V této práci hledáme obecněji uplatitelnou metodu k nalezení rozšíření diskrétní posloupnosti. Zvažme následující postup:

Nejdříve uvažujme, že  $t$  je spojitá hodnota v  $\mathbb{R}_0^+$ . Označíme-li  $P_t = g(t)$ , můžeme aproximovat derivaci funkce  $g(t)$  jako  $g'(t) \sim g(t+1) - g(t) = P_{t+1} - P_t$ . To plyne ze vztahu  $g'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(t+h) - g(t)}{h}$ , kde můžeme nejmenší možné  $h$  zvolit 1, neboť  $P_t = g(t)$  má dané hodnoty jen pro přirozená čísla. Z logistické rovnice (1.1) tak dostáváme následující diferenciální rovnici:

$$P_{t+1} - P_t = \left(2 - \frac{P_t}{K}\right) P_t - P_t \rightsquigarrow g'(t) = g(t) - \frac{g^2(t)}{K}.$$

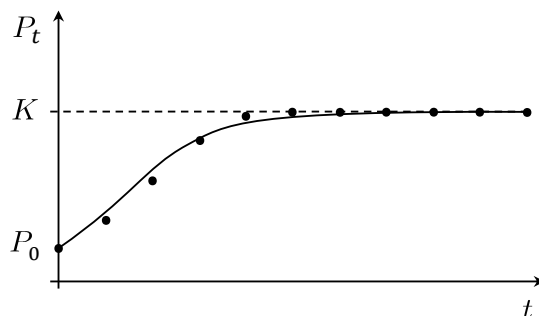
Pro počáteční podmínku  $P_0 = g(0) > 0$  a  $K > 0$  má tato rovnice řešení

$$g(t) = \frac{K}{1 - (1 - K/P_0)e^{-t}}. \quad (2.2)$$

I když funkce  $g(t)$  nutně protíná body logistické křivky pouze v  $t = 0$ , kde  $P_0 = g(0)$ , funkce  $g$  si zachovává jednu důležitou vlastnost spojenou s logistickou rovnicí a to sice,

že jejich limita v nekonečnu je stejná:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_t = \lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = K.$$



Obrázek 5: Diskrétní posloupnost  $P_t$  (1.1) a spojitá funkce  $g(t)$  (2.2)  
pro  $P_0 = 100$  a  $K = 500$

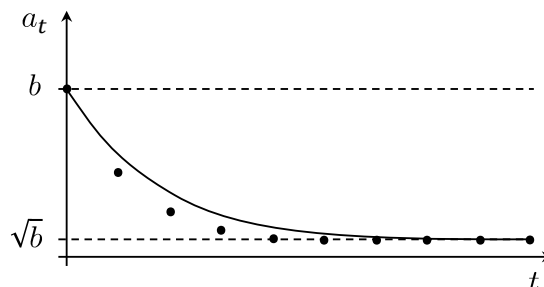
Obdobného výsledku dosáhneme při stejném postupu i u Babylonské metody. Zde bychom posloupnost  $\left\{ a_0 = b, a_{t+1} = \frac{a_t + b/a_t}{2} \right\}$  aproximací  $g'(t) \sim a_{t+1} - a_t$  a  $g(t) = a_t$  přepsali následovně:

$$a_{t+1} - a_t = \frac{a_t + b/a_t}{2} - a_t \rightsquigarrow g'(t) = \frac{b/g(t) - g(t)}{2}.$$

Pro počáteční podmínku  $g(0) = b > 0$  je řešením této diferenciální rovnice funkce

$$g(t) = \sqrt{b + (b^2 - b)e^{-t}}, \quad (2.3)$$

jejíž limita v nekonečnu opět splývá s limitou posloupnosti Babylonské metody, tedy  $\sqrt{b}$ .



Obrázek 6: Babylonská metoda a spojitá funkce  $g(t)$  (2.3) pro  $b = 100$

V tuto chvíli si můžeme začít všimnout určitých spojitostí mezi diskrétními posloupnostmi a jejich odpovídajícími diferenciálními rovnicemi, respektive jejich řešeními.



Při přepisu konvergentní rekurentní posloupnosti  $\{a_n\} \rightarrow \alpha$  pomocí  $n = t, g'(t) \sim a_{t+1} - a_t, g(t) = a_t$  platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \alpha. \quad (2.4)$$

Tuto vlastnost budeme chtít mít v praktické části práce zachovanou i pro obecněji zadané posloupnosti, což využijeme k odvození našeho rozšíření derivace.

Pro základní tvar rekurentní posloupnosti  $\{a_0, a_{n+1} = f(a_n)\}$  vypadá odpovídající diferenciální rovnice následovně:

$$a_{t+1} - a_t = f(a_t) - a_t \rightsquigarrow g'(t) = f(g(t)) - g(t) \quad (2.5)$$

s počáteční podmínkou  $g(0) = a_0$ .

Konvergencí řešení diferenciálních rovnic se zabývá teorie stability [11], [9]. Obdobně jako u posloupností zde definujeme pevné a stabilní body diferenciálních rovnic a určujeme podmínky, za kterých k těmto bodům řešení rovnic konverguje. V další podkapitole dokážeme pozoruhodné paralely mezi stabilními body diskrétních posloupností z kapitoly 1.3 a řešení odpovídajících diferenciálních rovnic, kterých jsme si mohli všimnout při konkrétním rozebrání logistické rovnice a Babylonské metody.

## 2.2 Stabilní body diferenciálních rovnic

Definice stability řešení diferenciální rovnice je velmi podobná definici pevného bodu diskrétních řad [11].

**Definice 2.1.** Řešení  $f(t) : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciální rovnice je asymptoticky stabilní v  $f_e$ , pokud existuje  $\delta > 0$  taková, že pokud  $|f(0) - f_e| < \delta$ , pak  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = f_e$ .

Stabilní body rovnic (2.2) a (2.3), jsou  $K$  a  $\sqrt{b}$ . Malá výchylka v počáteční podmínce na funkci tedy nemá dlouhodobý efekt na stabilitu systému, který se vrátí do svého bodu stability.

Následující věta je analogie Banachovy věty 1.3. Diskrétní posloupnosti jsou zde nahrazeny spojitým řešením diferenciální rovnice. Nadále budeme vždy předpokládat, že řešení diferenciální rovnice existuje a je spojitě pro  $t \geq 0$ .

**Věta 2.1.** *Nechť  $f(x)$  a  $f'(x)$  jsou spojitě na  $\langle a, b \rangle$  a  $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle$ . Pokud pro všechna  $x \in \langle a, b \rangle$  je  $f'(x) < 1$ , pak pro všechny počáteční podmínky  $x_0 = g(0) \in \langle a, b \rangle$*

platí pro řešení diferenciální rovnice  $g'(t) = f(g(t)) - g(t) : \lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \alpha$ , kde  $\alpha$  je právě jeden pevný bod funkce  $f$  na  $\langle a, b \rangle$ .

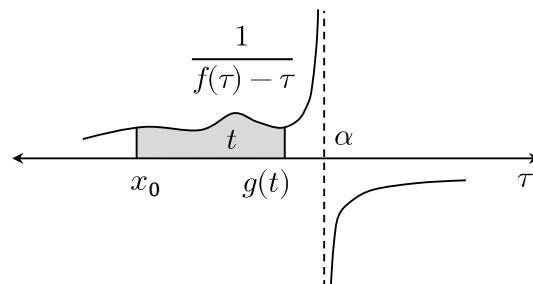
*Důkaz.* V důkazu nejprve upravíme diferenciální rovnici, poté ukážeme, že její řešení je omezené a nakonec, že konverguje k  $\alpha$ .

Fakt, že pevný bod  $\alpha$  existuje a je jednoznačný, je dán v první polovině důkazu Banachovy věty 1.3. Bez újmy na obecnosti řekněme, že pevný bod není v koncových bodech  $a, b$  a pro počáteční podmínku  $x_0$  platí  $a < x_0 < \alpha$ . Kdyby  $x_0 = \alpha$ , triviálním řešením je  $g(t) = \alpha$ . Obě strany rovnice  $g'(x) = f(g(x)) - g(x)$  vydělíme  $f(g(x)) - g(x)$ . Protože  $f(g(0)) - g(0) > 0$ , existuje alespoň nějaký interval  $\langle 0, t \rangle$  na kterém je  $f(g) - g > 0$ . Integrujeme tedy podle  $x$  od 0 do  $t$ :

$$\int_0^t 1 dx = t = \int_0^t \frac{g'(x)}{f(g(x)) - g(x)} dx.$$

Na pravé straně zavedeme substituci  $g(x) = \tau \implies g'(x)dx = d\tau, g(0) = x_0$ :

$$t = \int_{x_0}^{g(t)} \frac{1}{f(\tau) - \tau} d\tau. \quad (2.6)$$



Obrázek 7: Grafická reprezentace upravené diferenciální rovnice z (2.6)

Funkce  $\frac{1}{f(\tau) - \tau}$  má v  $\tau = \alpha$  pól prvního řádu neboť  $f(\tau) - \tau$  má v bodě  $\alpha$  nulu prvního řádu. Pro všechna  $\tau \in \langle a, b \rangle \setminus \{\alpha\}$  můžeme tedy napsat

$$\frac{1}{f(\tau) - \tau} = \frac{a_{-1}}{\tau - \alpha} + h(\tau), \quad (2.7)$$

kde  $h(\tau)$  je spojitá na  $\langle a, b \rangle$  a  $a_{-1}$  je reziduum funkce  $\frac{1}{f(\tau) - \tau}$  v  $\tau = \alpha$ , které je rovno  $1/(f'(\alpha) - 1)$ .

Dále ukážeme, že  $g(t)$  je pro  $t \geq 0$  omezená funkce. Všimněme si, že  $\frac{1}{f(\tau) - \tau} > 0$  pro  $a \leq \tau < \alpha$ . Pokud by někdy platilo  $\alpha < g(t) < x_0$  pro  $t > 0$ , pak by podle (2.6) znamenalo, že

$$t = \int_{x_0}^{g(t)} \frac{1}{f(\tau) - \tau} d\tau = - \int_{g(t)}^{x_0} \frac{1}{f(\tau) - \tau} d\tau < 0,$$

což je spor, neboť  $t \geq 0$ , tedy  $x_0 \leq g(t)$  pro  $t > 0$ .

Pokud by někde bylo  $g(t) \geq \alpha$ , věta o nabývání mezihodnot by kvůli  $g(0) = x_0 < \alpha$  garantovala existenci nějakého  $t_\alpha \in (0, t)$  takového, že  $g(t_\alpha) = \alpha$ . Pro libovolně malé  $\varepsilon : 0 < \varepsilon < \alpha - x_0$  platí  $x_0 < \alpha - \varepsilon < \alpha$  a tedy existuje i  $t_\varepsilon \in (0, t_\alpha)$  takové, že  $g(t_\varepsilon) = \alpha - \varepsilon$ , které by muselo splňovat podle (2.6):

$$t_\varepsilon = \int_{x_0}^{\alpha - \varepsilon} \frac{1}{f(\tau) - \tau} d\tau.$$

Využitím (2.7) tak dostáváme

$$t_\varepsilon = \frac{1}{f'(\alpha) - 1} \int_{x_0}^{\alpha - \varepsilon} \frac{1}{\tau - \alpha} d\tau + \int_{x_0}^{\alpha - \varepsilon} h(\tau) d\tau.$$

Druhý sčítanec na pravé straně je konečný, neboť  $h(\tau)$  je spojitá na  $\langle a, b \rangle$  a  $\langle x_0, \alpha - \varepsilon \rangle \subset \langle a, b \rangle$  je konečný interval. První sčítanec je roven

$$\frac{1}{f'(\alpha) - 1} (\ln |-\varepsilon| - \ln |x_0 - \alpha|).$$

Pokud necháme  $\varepsilon \rightarrow 0$ , jde  $\ln |-\varepsilon| \rightarrow -\infty$ . Protože  $\frac{1}{f'(\alpha) - 1} < 0$ , výraz roste nade všechny meze, což je spor, protože  $t_\varepsilon$  měla být konečná hodnota v  $(0, t_\alpha)$ . Máme tak horní omezení pro funkci  $g$ :  $g(t) < \alpha$ . Platí tedy, že  $x_0 \leq g(t) < \alpha$  pro  $t \geq 0$ .

Vrátíme se znovu k (2.6), kde nyní víme, že integrační meze tvoří konečný interval. Využijeme-li (2.7), dostáváme

$$t = \frac{1}{f'(\alpha) - 1} \int_{x_0}^{g(t)} \frac{1}{\tau - \alpha} d\tau + \int_{x_0}^{g(t)} h(\tau) d\tau.$$

Druhý sčítanec tak můžeme pro libovolné  $g(t) \in \langle x_0, \alpha \rangle$  omezit nějakou konečnou konstantou  $A$ :  $\int_{x_0}^{g(t)} h(\tau) d\tau \leq \int_{x_0}^{\alpha} |h(\tau)| d\tau \leq A$ . Tedy

$$t - A \leq \frac{1}{f'(\alpha) - 1} \int_{x_0}^{g(t)} \frac{1}{\tau - \alpha} d\tau = \frac{1}{f'(\alpha) - 1} (\ln |g(t) - \alpha| - \ln |x_0 - \alpha|).$$

Protože  $f'(\alpha) - 1 < 0$ ,  $g(t) < \alpha$ ,  $x_0 < \alpha$ , výraz můžeme upravit do následujícího tvaru:

$$\begin{aligned} (f'(\alpha) - 1)(t - A) &\geq \ln(\alpha - g(t)) - \ln(\alpha - x_0) \\ e^{(f'(\alpha) - 1)(t - A)} &\geq \frac{\alpha - g(t)}{\alpha - x_0}. \end{aligned}$$

Následnou úpravou a využitím  $g(t) < \alpha$  dostáváme pro  $g(t)$  následující odhad:

$$\alpha - (\alpha - x_0)e^{(f'(\alpha) - 1)(t - A)} \leq g(t) < \alpha.$$

Necháme-li nyní  $t \rightarrow \infty$ , obě strany odhadu jdou k  $\alpha$  a věta o sevření implikuje, že  $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \alpha$ . Pro  $x_0 \in (\alpha, b)$  by byl důkaz analogický.  $\square$

Obdobně jako u diskretních posloupností zde máme následující test pro stabilní body diferenciálních rovnic.

**Věta 2.2.** *Pokud  $\alpha$  je pevným bodem spojitě funkce  $f$  a  $f'(\alpha) < 1$ , pak  $\alpha$  je stabilním bodem řešení rovnice  $g'(t) = f(g(t)) - g(t)$ .*

Můžeme si všimnout, že v určitém smyslu jsou diferenciální rovnice stabilnější, než samotné posloupnosti, kde je podmínkou  $|f'| < 1 \iff -1 < f' < 1$ . Zvažme například posloupnost

$$a_{t+1} = r(1 - a_t)a_t, \quad (2.8)$$

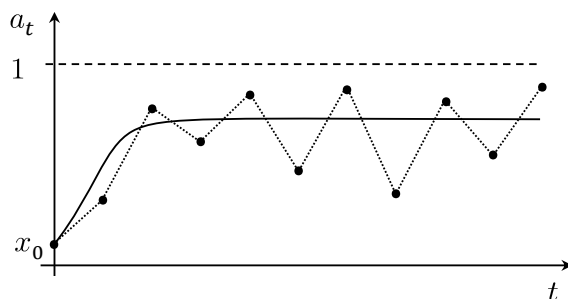
kde  $r > 3$ . Pevný bod funkce  $f(t) = r(1 - t)t$  je  $\frac{r-1}{r}$ . Derivace  $f(t)$  v tomto bodě je  $2 - r$ , což pro  $r > 3$  znamená, že  $f' \left( \frac{r-1}{r} \right) < 1$ , ale  $\left| f' \left( \frac{r-1}{r} \right) \right| > 1$ . Tedy tento bod je stabilní z pohledu diferenciální rovnice, ale ne diskretní posloupnosti. Tedy posloupnost  $a_{t+1} = r(1 - a_t)a_t$  nekonverguje k  $\frac{r-1}{r}$ , ale řešení diferenciální rovnice

$$a_{t+1} - a_t = (r - 1)a_t - r(a_t)^2 \rightsquigarrow g'(t) = (r - 1)g(t) + rg^2(t),$$

kteří s počáteční podmínkou  $g(0) = x_0$  má tvar

$$g(t) = \frac{r - 1}{r - (r - (r - 1)/x_0)e^{(1-r)t}}, \quad (2.9)$$

k bodu  $\frac{r-1}{r}$  konverguje. Pro  $r > 3$  posloupnost (2.8) je buďto periodická nebo pro malé hodnoty nad  $r = 3,56995$  chaotická a nemá žádnou periodu [5].



Obrázek 8: Chaotická posloupnost (2.8) a stabilní funkce (2.9) pro  $x_0 = 0,1$  a  $r = 3,57$

## 2.3 Přepis Newtonovy metody tečen

V podkapitole 1.4 jsme rozebrali speciální případ iterace pevného bodu, která sloužila k nalezení kořenů rovnice:  $f(x) = 0$ . Obecně platilo, že pokud posloupnost

$\left\{ x_0, x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \right\}$  konverguje k  $\alpha$ , pak  $f(\alpha) = 0$ . V takto speciálně zadané rekurentní posloupnosti můžeme řešení odpovídající diferenciální rovnice vytvořené přepisem  $n = t, g'(t) \sim x_{t+1} - x_t, g(t) = x_t$  při znalosti  $f(x)$  jednoduše určit.

$$x_{t+1} - x_t = -\frac{f(x_t)}{f'(x_t)} \rightsquigarrow g'(t) = -\frac{f(g(t))}{f'(g(t))} \quad (2.10)$$

Výraz upravme a integrujme podle  $t$ :

$$\int \frac{f'(g(t))}{f(g(t))} g'(t) dt = \int -1 dt = -t + c.$$

Zavedme substituci  $f(g(t)) = u \implies f'(g(t))g'(t)dt = du$

$$\int \frac{du}{u} = \ln |u| = -t + c$$

$$u = f(g(t)) = \pm c_0 e^{-t} = c_1 e^{-t}.$$

Předpokládejme stejně jako v kapitole 1.4, že v  $f'(\alpha) \neq 0$ , tedy kolem  $\alpha$  je  $f$  rostoucí nebo klesající, existuje zde inverzní funkce  $f^{-1}$ , pro kterou platí  $f^{-1}(0) = \alpha$ . Můžeme tedy vyjádřit  $g(t)$  jako

$$g(t) = f^{-1}(f(x_0)e^{-t}). \quad (2.11)$$

Tato funkce je řešením (2.10), splňuje  $g(0) = x_0$  a platí pro ni  $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = f^{-1}(0) = \alpha$ .

V Babylonské metodě je  $f(t) = t^2 - b$  a pro  $t \geq 0$  je  $f^{-1}(t) = \sqrt{b+t}$ . Pro počáteční podmínku  $x_0 = b$  použitím (2.11) dostáváme

$$g(t) = \sqrt{b + (b^2 - b)e^{-t}},$$

což odpovídá řešení (2.3).

## 3 Funkce komplexní proměnné

V této sekci uvedeme jedny ze základních vět komplexní analýzy, které později v praktické části práce využijeme [2].

### 3.1 Cauchyho věta a její obecné znění

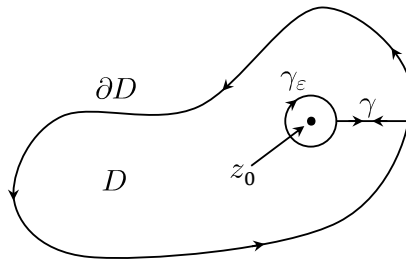
**Věta 3.1.** Je-li  $f(z)$  analytická na celé oblasti  $D$  a její hranici  $\partial D$  tvořené po částech spojitou jednoduchou křivkou, která je orientovaná proti směru hodinových ručiček, pak

$$\int_{\partial D} f(z) dz = 0. \quad (3.1)$$

**Věta 3.2.** Je-li funkce  $f(z)$  analytická na  $D$  a  $\partial D$ , pak pro všechna  $z_0 \in D$  platí

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \quad (3.2)$$

*Důkaz.* Funkce  $\frac{f(z)}{z - z_0}$  není analytická pro  $z = z_0 \in D$  a tedy věta 3.1 není aplikovatelná. Definujme novou křivku, která splývá s  $\partial D$ , ale před jejím uzavřením se vydá po  $\gamma$  k bodu  $z_0$ , který obkrouží ve směru hodinových ručiček ve vzdálenosti  $\varepsilon$  od  $z_0$  po  $\gamma_\varepsilon$  a na  $\partial D$  se znovu vrátí po  $\gamma$ .



Obrázek 9: Definice nové křivky, která neuzavírá  $z_0$

Vytvořili jsme tak novou křivku, která neuzavírá  $z_0$  a lze tak na ní aplikovat větu 3.1. Integrály po  $\gamma$  v opačných směrech se vykrátí a zůstávají tak integrály po  $\partial D$  a  $\gamma_\varepsilon$ :

$$\int_{\partial D} \frac{f(z)}{z - z_0} dz + \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 0. \quad (3.3)$$

Kruh  $\gamma_\varepsilon$  s poloměrem  $\varepsilon$  parametrizujeme pomocí  $z = z_0 + \varepsilon e^{-i\theta}$ ,  $dz = -i\varepsilon e^{-i\theta} d\theta$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ :

$$\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + \varepsilon e^{-i\theta})}{\varepsilon e^{-i\theta}} (-i\varepsilon e^{-i\theta}) d\theta = -i \int_0^{2\pi} f(z_0 + \varepsilon e^{-i\theta}) d\theta.$$

Necháme-li nyní  $\varepsilon \rightarrow 0$ , pak integrand jde k  $f(z_0)$  a celý integrál k  $-2\pi i f(z_0)$ . Dosazením do (3.3) a následnou úpravou pak dostáváme (3.2).  $\square$

Každou derivaci  $f(z)$  v bodě  $z_0$  lze získat opakovanou derivací Cauchyho vzorce (3.2), záměnou operátoru derivace a integrace a využitím

$$\frac{d^n}{dz_0^n} \frac{1}{z - z_0} = \frac{n!}{(z - z_0)^{n+1}}.$$

**Věta 3.3** (Cauchyho obecná věta). *Nechť je funkce  $f(z_0)$  analytická na  $D$  a  $\partial D$ . Pak v bodě  $f(z_0)$  existují derivace všech řádů a pro  $n \geq 0$  platí*

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz. \quad (3.4)$$

## 3.2 Řady komplexních funkcí

Posloupnost komplexních funkcí značíme  $\{f_n(z)\}$  nebo pouze  $\{f_n\}$ . Řadou komplexních funkcí myslíme funkci tvořenou součtem:

$$F_k(z) = \sum_{n=0}^k f_n(z). \quad (3.5)$$

Rozlišujeme zde dva základní typy konvergence. *Bodová* a *stejnomořná*. V práci si vystačíme s konvergencí stejnomořnou:

**Definice 3.1** (Stejnomořná konvergence). *Nechť  $\{f_n(z)\}$  je posloupnost funkcí  $f_n(z) : A \rightarrow \mathbb{C}$  a  $f(z) : A \rightarrow \mathbb{C}$ . Funkce  $f_n(z)$  pak konverguje na  $A$  stejnomořně k  $f(z)$ , pokud pro všechna  $\varepsilon > 0$  existuje  $N \in \mathbb{N}$  takové, že pokud  $n \geq N$ , pak  $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$  pro všechna  $z \in A$ .*

Ekvivalentně můžeme napsat, že  $f_n$  konverguje stejnomořně k  $f$ , pokud  $\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(z) - f(z)| = 0$  pro všechna  $z \in A$ . U stejnomořné konvergence jsou zachovány určité vlastnosti. V práci využijeme hlavně faktu, že stejnomořná konvergence zachovává spojitost.

**Věta 3.4.** *Nechť každá z  $f_n(z)$  je spojitá na  $A$  a  $f_n(z)$  konverguje stejnomořně k  $f(z)$ . Pak  $f(z)$  je spojitá na  $A$ .*

Konečný součet spojitých funkcí je spojitý. Tedy každá z  $F_k(z)$  v (3.5) je při spojitosti každé  $f_n(z)$  spojitá a můžeme se tak bavit o spojitosti nekonečné řady funkcí.

Protože obecně je složité vyjádřit  $F_k(z)$  v nějakém uzavřeném tvaru, je výhodné mít určité podmínky, za kterých je stejnomořná konvergence zaručena, a jejichž platnost se dá snadněji ověřit. Jednou z nich je *Weierstrassovo kritérium* stejnomořné konvergence.

**Věta 3.5** (Weierstrassovo kritérium). *Nechť  $M_n$  jsou takové, že pro všechny funkce  $f_n : A \rightarrow \mathbb{C}$  je  $|f_n(z)| \leq M_n$  pro všechna  $z \in A$ . Pokud  $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$  konverguje, pak  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$  konverguje stejnomořně na  $A$ .*

*Důkaz.* Srovnávací kritérium garantuje, že řada  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$  konverguje absolutně. Tedy konverguje, řekněme k  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ . Pro částečný součet  $F_k(z) = \sum_{n=0}^k f_n(z)$  platí

$$|f(z) - F_k(z)| = \left| \sum_{n=k+1}^{\infty} f_n(z) \right| \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} |f_n(z)| \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} M_n.$$

Protože  $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$  konverguje, konverguje i pravá strana k nule, tedy pro každé  $\varepsilon > 0$  existuje nějaké  $k$  takové, že  $\sum_{n=k+1}^{\infty} M_n < \varepsilon$ . Tedy  $|f(z) - F_k(z)| < \varepsilon$  a  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$  konverguje stejnoměrně k  $f(z)$  na  $A$ .  $\square$

### 3.3 Taylorův rozvoj analytických funkcí

Taylorovy řady umožňují vyjádřit analytické funkce v okolí bodu nekonečným polynomm. Hodnoty funkce můžeme aproximovat zanedbáním členů polynomu o vyšších řádech s libovolně malou odchylkou. Protože při výpočtech polynomů si vystačíme se základními aritmetickými operacemi, Taylorovy rozvoje mají jasné využití například u výpočtů hodnot trigonometrických a jiných důležitých funkcí.

Za triviální příklad Taylorovy řady můžeme považovat geometrickou řadu

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad (3.6)$$

kteřá konverguje pro  $|z| < 1$  a pro libovolné  $r < 1$  konverguje stejnoměrně na  $|z| \leq r$ . Za pomoci této řady můžeme jakoukoliv analytickou funkci zapsat nekonečným polynomm.

**Věta 3.6** (Taylorův rozvoj). *Je-li funkce  $f(z)$  analytická na  $|z - z_0| < \rho$ , pak pro všechna taková  $z$  lze zapsat hodnotu  $f(z)$  řadou*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Pro pevně dané  $r < \rho$  jsou koeficienty  $a_n$  určeny vzorcem

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta.$$

*Důkaz.* Zde  $\oint_{|\zeta - z_0| = r}$  značí křivkový integrál přes kružnici se středem v  $z_0$  a poloměrem  $r$ . Pro  $|z - z_0| < \rho$  zvolme  $r = |\zeta - z_0|$  takové, že  $|z - z_0| < r < \rho$ . Pak pro  $s = \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}$  platí  $|s| < 1$ . Pro takové  $z$  pak zapišme

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \frac{1}{1 - \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \frac{1}{1 - s}.$$



Násobek napravo rozepišme pomocí geometrické řady (3.6)

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\zeta - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n$$

Obě strany vynásobme výrazem  $\frac{f(\zeta)}{2\pi i}$  a integrujme po kružnici  $C = \{\zeta : |\zeta - z_0| = r\}$  podle  $\zeta$ .

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \right)$$

Podle Cauchyho věty 3.2 je toto rovno  $f(z)$ . V sumě na pravé straně můžeme z integrálu vytknout členy  $(z - z_0)^n$ , které jsou pro  $\zeta$  konstantní.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \left( \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \right) (z - z_0)^n \right]$$

Integrál v sumě je roven  $\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$  podle zobecněného Cauchyho vzorce (3.4) z věty 3.3. Dostáváme tak Taylorův rozvoj funkce  $f(z)$ :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

□

Tato řada konverguje na  $|z - z_0| < \rho$ , ale pro určení  $a_n$  integrací můžeme poloměr kružnice se středem v  $z_0$  vybrat libovolně malý. Další užitečná vlastnost je, že Taylorovy polynomy konvergují i absolutně. To znamená, že pro  $|z - z_0| < \rho$  konverguje i  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n (z - z_0)^n|$ .

**Věta 3.7.** *Je-li funkce  $f(z)$  analytická na  $|z - z_0| < \rho$ , pak její Taylorův rozvoj  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$  pro všechna  $z : |z - z_0| < \rho$  konverguje absolutně.*

### 3.4 Funkce Gamma

Tato funkce rozšiřuje funkci faktoriál do všech nezáporných čísel. Budeme ji využívat v průběhu celé praktické části. Je definovaná v základním tvaru jako

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} \tau^{z-1} e^{-\tau} d\tau$$

pro  $\operatorname{Re}(z) > 0$ . Ekvivalentně můžeme napsat

$$\Gamma(z + 1) = \int_0^{\infty} \tau^z e^{-\tau} d\tau \tag{3.7}$$

pro  $\operatorname{Re}(z) > -1$ . V této oblasti je funkce  $\Gamma(z+1)$  analytická a tedy spojitá. Jako definiční obor můžeme zvolit  $\mathbb{R}_0^+$ . Pro takové  $t$  je

$$\Gamma(t+1) = \int_0^{\infty} \tau^t e^{-\tau} d\tau.$$

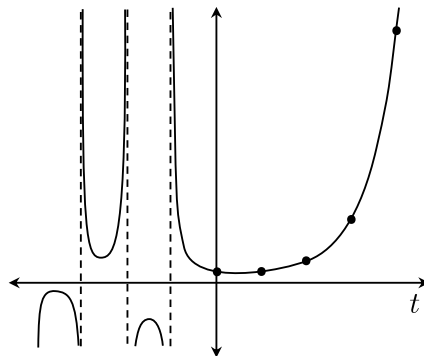
Je splněno  $\Gamma(0+1) = 1$  a dále integrací po částech s

$$\begin{aligned} u &= \tau^t & v' &= e^{-\tau} \\ u' &= t\tau^{t-1} & v &= -e^{-\tau} \end{aligned}$$

dostáváme

$$\Gamma(t+1) = [-\tau^t e^{-\tau}]_{\tau=0}^{\tau=\infty} + t \int_0^{\infty} \tau^{t-1} e^{-\tau} d\tau = t \cdot \Gamma(t) = t \cdot \Gamma(t+1-1).$$

Pro  $t = 1, 2, \dots$ . Odsud je zjevné, že funkce  $\Gamma(t+1) = t \cdot \Gamma(t+1-1)$  splňuje stejnou rekurentní vlastnost jako faktoriál, kde obdobně je  $0! = 1$  a  $t! = t \cdot (t-1)!$  pro  $t = 1, 2, \dots$ . Platí zde tedy  $\Gamma(t+1) = t!$ .



Obrázek 10: Funkce  $t!$  a její rozšíření  $\Gamma(t+1)$

## Praktická část

V této části práce se budeme zabývat rozšířením operátoru derivace do všech nezáporných reálných řádů. K tomu využijeme poznatků z části teoretické. Po odvození rozšíření rozebereme některé jeho vlastnosti. Námi uvedenou derivaci poté aplikujeme na konkrétní funkce a rozšíření využijeme k modelování tlumeného kyvadla pomocí zlomkové diferenciální rovnice.

### 4 Podmínka rozšíření operátoru derivace

Existuje několik rozšíření derivací, které splňují určité vlastnosti. Tyto derivace označujeme někdy za *zlomkové derivace*. Jedná-li se o rozšíření, je žádoucí, aby tato rozšíření splývala se standardní derivací v  $\mathbb{N}$ .

V našem případě chceme, aby byla zachována paralela mezi diskrétními posloupnostmi a diferenciálními rovnicemi zkoumaná v teoretické části práce. Hlavní myšlenkou bylo, že při přepisu posloupnosti  $\{x_n\}$  v určitém tvaru na diferenciální rovnici získanou přepisem  $n = t, g'(t) \sim x_{t+1} - x_t$  a  $g(t) = x_t$  je zachována rovnost posloupnosti a řešení této diferenciální rovnice  $g(t)$  v nekonečnu:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{t \rightarrow \infty} g(t). \quad (4.1)$$

Dále budeme požadovat, aby tato vlastnost byla zachována i pro posloupnosti v jiném zápisu. Použitím Taylorova rozvoje funkce a komplexní analýzy tak odvodíme možné rozšíření derivace.

Definujme rekurentní posloupnost  $\{x_n\}$  jako

$$\begin{aligned} x_0 &= 0, \\ x_1 &= x_0 + f(z_0), \\ x_2 &= x_1 + f'(z_0)(z - z_0) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) \\ &\vdots, \end{aligned}$$

kde obecně je

$$\left\{ x_0 = 0, x_{n+1} = x_n + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \right\} \quad (4.2)$$

a tedy

$$x_{n+1} = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!} (z - z_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n =$$

$$\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k.$$

Podle kapitoly (3.3) je posloupnost  $\{x_n\}$  s  $n \rightarrow \infty$  Taylorův rozvoj  $f(z)$ . Máme tedy, že  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = f(z)$ . Přepisem posloupnosti (4.2) užitím  $n = t, g'(t) \sim x_{t+1} - x_t$  a  $g(t) = x_t$  dostáváme

$$g'(t) = \frac{f^{(t)}(z_0)}{t!} (z - z_0)^t. \quad (4.3)$$

Aby byla zachována vlastnost (4.1) musí platit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = f(z)$ . Nahradme zde  $t!$  funkcí  $\Gamma(t+1)$ . Předpokládáme-li, že známe rozšíření  $f^{(t)}(z_0)$  na  $t \geq 0$ , takové, že pravá strana (4.3) je integrovatelná, exaktní výraz pro  $g(t)$  můžeme získat integrací (4.3) od 0 do  $\tau$  podle  $t$ :

$$\int_0^\tau g'(t) dt = g(\tau) - g(0) = \int_0^\tau \frac{f^{(t)}(z_0)}{\Gamma(t+1)} (z - z_0)^t dt.$$

Pokud  $\tau \rightarrow \infty$ , pak požadovaná vlastnost (4.1) má formu

$$f(z) = \int_0^\infty \frac{f^{(t)}(z_0)}{\Gamma(t+1)} (z - z_0)^t dt.$$

Hledáme tedy rozšíření derivace funkce  $f$  v bodě  $z_0$  takové, aby byla tato vlastnost zachována. Jak uvidíme v následujících kapitolách, takové rozšíření existuje a je závislé na daném  $z$ .

**Věta 4.1.** *Nechť je funkce  $f(z)$  analytická na  $|z - z_0| < \rho$ . Pak pro každé takové  $z \neq z_0$  existuje rozšíření derivace  $D_z^t f(z_0)$  do všech  $t \geq 0$  takové, že*

$$f(z) = \int_0^\infty \frac{D_z^t f(z_0)}{\Gamma(t+1)} (z - z_0)^t dt. \quad (4.4)$$

## 5 Odvození rozšíření derivace

Inspiraci nabereme primárně z obecné Cauchyho věty a Taylorova rozvoje analytické funkce.

Nechť je funkce analytická na  $|z - z_0| < \rho$ . Pak podle Cauchyho obecného vzorce z věty 3.3 je pro všechna  $r : 0 < r < \rho$  a  $t \in \mathbb{N}$

$$f^{(t)}(z_0) = \frac{t!}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{t+1}} d\zeta. \quad (5.1)$$

Integrál na pravé straně je definovaný i pro necelá  $t$  a pokud nahradíme  $t!$  za  $\Gamma(t+1)$ , dostáváme možné rozšíření derivace. Parametrizujme kružnici  $|\zeta - z_0| = r$  pomocí  $\zeta = re^{i\theta} + z_0$  pro  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . Pak je  $d\zeta = ire^{i\theta}d\theta$  a z (5.1) dostáváme

$$\frac{\Gamma(t+1)}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{i\theta} + z_0)}{r^{t+1}e^{i(t+1)\theta}} ire^{i\theta} d\theta = \frac{\Gamma(t+1)}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{i\theta} + z_0)}{r^t e^{it\theta}} d\theta.$$

Protože  $f(z)$  je na  $|z - z_0| < \rho$  analytická a  $r < \rho$ , můžeme v čitateli integrandu zapsat funkci  $f(z)$  jako  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ :

$$\frac{\Gamma(t+1)}{2\pi r^t} \int_0^{2\pi} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta}}{e^{it\theta}} d\theta = \frac{\Gamma(t+1)}{2\pi r^t} \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{i(n-t)\theta} d\theta.$$

Podle věty (3.7) je řada absolutně konvergentní, záměna nekonečné sumy a integrálu je tedy možná [4]. Touto operací tak dostáváme

$$\frac{\Gamma(t+1)}{r^t} \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n \int_0^{2\pi} \frac{e^{i(n-t)\theta}}{2\pi} d\theta. \quad (5.2)$$

Samotný integrál je roven

$$\left. \frac{e^{i(n-t)\theta}}{2\pi i(n-t)} \right|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = \frac{e^{2\pi i(n-t)}}{2\pi i(n-t)} - \frac{1}{2\pi i(n-t)} = \frac{e^{-2\pi it} - 1}{2\pi i(n-t)}.$$

Hlavní vlastnost této funkce je ta, že její limita s  $t \rightarrow n$  je 1. Toto lze ukázat například využitím L'Hopitalova pravidla:

$$\lim_{t \rightarrow n} \frac{e^{-2\pi it} - 1}{2\pi i(n-t)} = \lim_{t \rightarrow n} \frac{-2\pi i e^{-2\pi it}}{-2\pi i} = 1.$$

Pro všechna ostatní přirozená čísla je ovšem funkce nulová. Označme  $\lambda_n(t) = \frac{e^{-2\pi it} - 1}{2\pi i(n-t)}$ , kde nyní uvažujeme rozšíření i do  $t = n$  s  $\lambda_n(n) = 1$  a  $\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{n\}$  platí  $\lambda_n(k) = 0$ . Oprostíme-li se od geometrické intuice, v (5.2) můžeme poloměr integrace  $r$  nahradit libovolným nenulovým číslem, řekněme  $z - z_0 \neq 0$ . Zde vstupuje do rovnice parametr  $z$ . Nahradíme tedy  $f^{(t)}f(z_0)$  za  $D_z^t f(z_0)$ . Dostáváme tak rozšíření

$$D_z^t f(z_0) = \frac{\Gamma(t+1)}{(z - z_0)^t} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \lambda_n(t). \quad (5.3)$$

Rovnost je zachována pro všechna přirozená čísla, neboť pro  $m \in \mathbb{N}$  je pravá strana

$$\frac{\Gamma(m+1)}{(z - z_0)^m} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \lambda_n(m),$$

kde všechny sčítance jsou nulové kromě sčítance pro  $n = m$ , kde  $\lambda_m(m) = 1$  a tedy z řady zbude pouze jeden člen

$$D_z^m f(z_0) = \frac{\Gamma(m+1)}{(z-z_0)^m} a_m (z-z_0)^m \cdot 1 = \Gamma(m+1) \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} = f^{(m)}(z_0).$$

Výraz (5.3) je definovaný pro všechna  $t \geq 0$ . Vystupuje zde parametr  $z$ , na kterém je "t-tá" derivace funkce  $f$  v bodě  $z_0$  závislá. Je-li rozšíření derivace na takovém parametru závislé, mluvíme o *nelokálním* rozšíření. Došli jsme tak k základnímu tvaru možného rozšíření derivace:

$$D_z^t f(z_0) = \frac{\Gamma(t+1)}{(z-z_0)^t} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \lambda_n(t), \quad (5.4)$$

kde  $\forall n \in \mathbb{N} : \lambda_n(n) = 1, \forall k \in \mathbb{N} \setminus \{n\} : \lambda_n(k) = 0$ .

Na  $\lambda_n(t)$  uvalíme ještě další podmínky, které zaručí, že dříve formulovaná podmínka rozšíření derivace bude splněna.

## 5.1 Podmínky funkcí $\lambda_n(t)$ a věta o rozšíření derivace

Požadovaná vlastnost rozšíření z (4.4) je ve tvaru

$$f(z) = \int_0^{\infty} \frac{D_z^t f(z_0)}{\Gamma(t+1)} (z-z_0)^t dt.$$

V čitateli integrandu substituujeme odvozené rozšíření z (5.4). Podmínka (4.4) má tak tvar

$$\begin{aligned} f(z) &= \int_0^{\infty} \frac{D_z^t f(z_0)}{\Gamma(t+1)} (z-z_0)^t dt = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t+1)} \frac{(z-z_0)^t}{(z-z_0)^t} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \lambda_n(t) dt = \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \lambda_n(t) dt. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Pro lehčí manipulaci s tímto výrazem je žádoucí, abychom mohli zaměnit pořadí integrálu a sumy. Následující věta je důsledkem Lebesgueovi věty z teorie míry, která určuje podmínku, kdy je možné nekonečnou sumu a integrál zaměnit [4].

**Věta 5.1.** *Pokud jsou funkce  $f_n(t)$  na  $t \geq 0$  spojité pro všechna  $n \in \mathbb{N}$ , a jestli*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} |f_n(t)| dt < \infty \text{ nebo } \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} |f_n(t)| dt < \infty,$$

*pak můžeme zaměnit pořadí integrálu a nekonečné sumy:*

$$\int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} f_n(t) dt.$$

*Toto tvrzení platí i pro konečné intervaly integrace.*

Ve větě pracujeme s integrálem absolutní hodnoty funkce. Říkáme, že funkce je *absolutně integrovatelná*, existuje-li integrál její absolutní hodnoty, který je konečný. Podobně jako u diskrétních řad absolutní integrovatelnost implikuje integrovatelnost. Uvalíme tedy na  $\lambda_n(t)$  podmínku v následující větě:

**Věta 5.2.** *Jsou-li  $\lambda_n(t)$  absolutně integrovatelné na  $\langle 0, \infty \rangle$  a omezené jednou konstantou, tj.  $\int_0^\infty |\lambda_n(t)| dt < C$  pro všechna  $n \in \mathbb{N}$ , pak v (5.5) je možné zaměnit pořadí sumy a integrálu:*

$$\int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty a_n(z - z_0)^n \lambda_n(t) dt = \sum_{n=0}^\infty a_n(z - z_0)^n \int_0^\infty \lambda_n(t) dt.$$

*Důkaz.* Je-li  $\int_0^\infty |\lambda_n(t)| dt < C$ , pak je

$$\int_0^\infty |a_n(z - z_0)^n \lambda_n(t)| dt = |a_n(z - z_0)^n| \int_0^\infty |\lambda_n(t)| dt \leq C |a_n(z - z_0)^n|,$$

odkud srovnávacím kritériem dostáváme pro sumu

$$\sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty |a_n(z - z_0)^n \lambda_n(t)| dt \leq C \sum_{n=0}^\infty |a_n(z - z_0)^n|.$$

Podle věty 3.7 konverguje Taylorův rozvoj analytické funkce absolutně. Tedy pravá strana konverguje a pro  $f_n(t) = a_n(z - z_0)^n \lambda_n(t)$  je splněna první podmínka z věty 5.1. Můžeme tak zaměnit pořadí sumy a integrálu.  $\square$

Dále budeme požadovat, aby nejen integrály  $|\lambda_n(t)|$  byly omezené, ale aby taky samotné funkce  $\lambda_n(t)$  byly omezené jednou konstantou  $M$  :  $|\lambda_n(t)| < M$  pro všechna  $t \geq 0$ .

Za těchto podmínek můžeme zapsat (5.5) jako

$$f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n(z - z_0)^n \int_0^\infty \lambda_n(t) dt.$$

Levou stranu rovnice zapíšeme Taylorovou řadou  $f(z)$ :

$$\sum_{n=0}^\infty a_n(z - z_0)^n = \sum_{n=0}^\infty a_n(z - z_0)^n \int_0^\infty \lambda_n(t) dt.$$

Tato rovnost bude rozhodně zachována, pokud si jednotlivé členy nekonečné řady budou rovny, tedy stačí uvalit podmínku  $\forall n \in \mathbb{N} : \int_0^\infty \lambda_n(t) dt = 1$ .

Nyní jsme rozebrali všechny podmínky na  $\lambda_n(t)$  z rozšíření derivace  $D_z^t f(z_0)$  v (5.4). Všechny naše poznatky a podmínky shrneme do základní věty práce o rozšíření derivace.

**Věta 5.3** (Rozšíření derivace). *Nechť je funkce  $f(z)$  analytická na  $|z - z_0| < \rho$ . Pak pro všechna  $z \neq z_0$  existuje rozšíření derivace  $D_z^t f(z_0)$  do všech  $t \geq 0$  takové, že*

$$f(z) = \int_0^\infty \frac{D_z^t f(z_0)}{\Gamma(t+1)} (z - z_0)^t dt. \quad (5.6)$$

*Toto rozšíření má tvar*

$$D_z^t f(z_0) = \frac{\Gamma(t+1)}{(z - z_0)^t} \sum_{n=0}^\infty a_n (z - z_0)^n \lambda_n(t), \quad (5.7)$$

*kde  $\lambda_n(t)$  splňuje podmínky:*

1.  $\forall n \in \mathbb{N} : \lambda_n(n) = 1, \forall k \in \mathbb{N} \setminus \{n\} : \lambda_n(k) = 0,$
2.  $\forall n \in \mathbb{N}$  jsou funkce  $\lambda_n(t)$  spojité a omezené:  $|\lambda_n(t)| < M$ . Jsou absolutně integrovatelné:  $\int_0^\infty |\lambda_n(t)| dt < C$ . Zde  $M, C$  nejsou závislé na  $n$ .
3.  $\forall n \in \mathbb{N} : \int_0^\infty \lambda_n(t) dt = 1.$

## 5.2 Konkrétní příklady funkcí $\lambda_n(t)$

Existuje nekonečně mnoho různých funkcí  $\lambda_n(t)$  splňující podmínky uvedené výše. V této kapitole uvedeme tři konkrétní příklady těchto  $\lambda_n(t)$ .

Inspiraci můžeme vzít z nárazové funkce v  $\mathbb{R}$ , která má svůj základní tvar

$$\Psi(t) = \begin{cases} \exp\left(\frac{t^2}{t^2-1}\right), & t \in (-1, 1) \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

a je hladká na všech  $\mathbb{R}$  v tom smyslu, že všechny její derivace jsou spojité. Chceme-li, aby funkce měla vrchol v  $[n, 1]$  a polovinu "podstavy" o délce  $a$ , kde by připomínala funkci  $\lambda_n(t)$ , můžeme napsat

$$\lambda_n(t) = \begin{cases} \exp\left(\frac{(t-n)^2}{(t-n)^2-a^2}\right), & t \in (n-a, n+a) \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

pro  $n = 1, 2, \dots$  a  $0 < a < 1$ . Tato funkce splňuje první dvě podmínky na  $\lambda_n(t)$  z věty 5.3. Navíc konstantu  $a$  můžeme vybrat tak, aby byla i třetí podmínka  $\int_0^\infty \lambda_n(t) dt = 1$  splněna.



V tomto případě má podmínka tvar:

$$1 = \int_0^\infty \lambda_n(t) dt = \int_{n-a}^{n+a} \exp\left(\frac{(t-n)^2}{(t-n)^2 - a^2}\right) dt.$$

Zavedením substituce  $t - n = ax$ ,  $dt = adx$  tak dostáváme

$$1 = \int_{-1}^1 \exp\left(\frac{a^2 x^2}{a^2 x^2 - a^2}\right) adx = a \int_{-1}^1 \exp\left(\frac{x^2}{x^2 - 1}\right) dx,$$

odkud

$$\left(\int_{-1}^1 \exp\left(\frac{x^2}{x^2 - 1}\right) dx\right)^{-1} = a \approx 0,828\dots$$

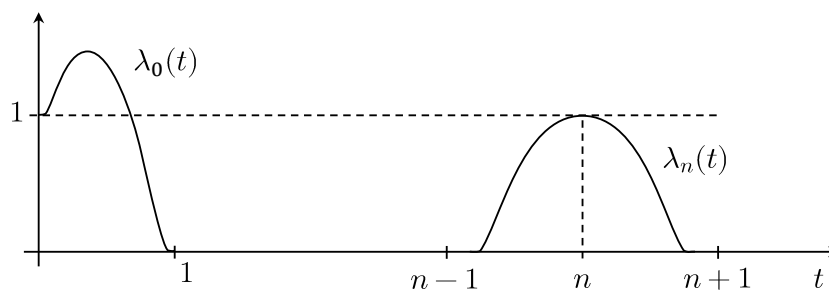
Stejný vzorec ovšem neplatí pro  $n = 0$ , kde je  $\int_0^\infty \lambda_0(t) dt = 0,5$ . Zde můžeme sestavit funkci z dvou nárazových funkcí. Jedné se středem v  $t = 0$ , výškou 1 a polovinou podstavy o velikosti 1 a druhé nárazové funkce funkce se středem v 0,5, polovinou podstavy 0,5 s vrcholem ve výšce  $b$ :

$$\lambda_0(t) = \begin{cases} \exp\left(\frac{t^2}{t^2-1}\right) + b \exp\left(\frac{(t-0,5)^2}{(t-0,5)^2-0,25}\right), & t \in \langle 0, 1 \rangle \\ 0, & \langle 1, \infty \rangle \end{cases}.$$

Pro  $\lambda_0(t)$  je tak podmínka

$$1 = \int_0^1 \exp\left(\frac{t^2}{t^2-1}\right) dt + b \int_0^1 \exp\left(\frac{(t-0,5)^2}{(t-0,5)^2-0,25}\right) dt$$

$$\left[1 - \int_0^1 \exp\left(\frac{t^2}{t^2-1}\right) dt\right] \left[\int_0^1 \exp\left(\frac{(t-0,5)^2}{(t-0,5)^2-0,25}\right) dt\right]^{-1} = b \approx 0,657\dots$$



Obrázek 11: Funkce  $\lambda_0(t)$  a  $\lambda_n(t)$  vytvořeny z nárazových funkcí

Tyto funkce jsou skoro všude nulové a tedy i absolutně integrovatelné a splňují tak všechny vlastnosti z věty 5.3.

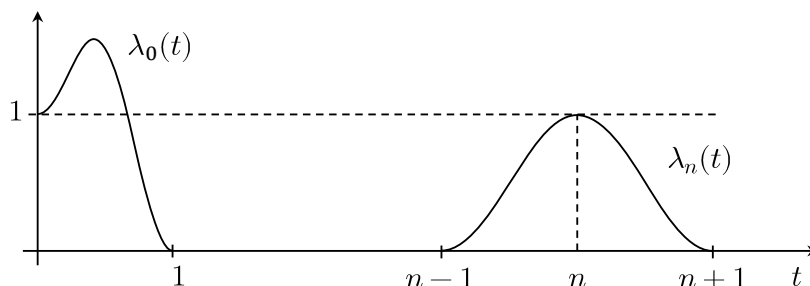
Nárazové funkce jsou sice hladké, ale práce s nimi není jednoduchá, neboť jejich neurčitý integrál nemá elementární primitivní funkci. Proto v následujících praktických

příkladech rozšíření derivace budeme pracovat s podobnými funkcemi, jejichž alespoň první derivace je spojitá. Tyto funkce mají následující tvar:

$$\lambda_0(t) = \begin{cases} \cos^2\left(\frac{\pi}{2}t\right) + \sin^2(\pi t), & t \in \langle 0, 1 \rangle \\ 0, & t \in (1, \infty) \end{cases}$$

$$\lambda_n(t) = \begin{cases} \cos^2\left(\frac{\pi}{2}(t-n)\right), & t \in (n-1, n+1) \\ 0, & \langle 0, n-1 \rangle \cup \langle n+1, \infty \rangle \end{cases} \quad (5.8)$$

kde  $n = 1, 2, \dots$ .

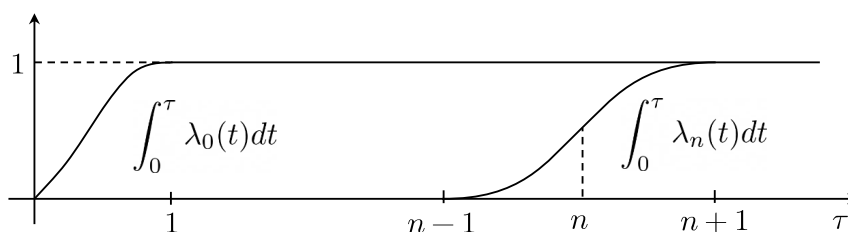


Obrázek 12: Funkce z (5.8) pro oba případy rozšíření

Dále lze určit spojitou primitivní funkci:

$$\int_0^\tau \lambda_0(t) dt = \begin{cases} \frac{2 \sin(\pi\tau) - \sin(2\pi\tau)}{4\pi} + \tau, & \tau \in \langle 0, 1 \rangle \\ 1, & \tau \in (1, \infty) \end{cases}$$

$$\int_0^\tau \lambda_n(t) dt = \begin{cases} 0, & \tau \in \langle 0, n-1 \rangle \\ \frac{\tau - n + 1}{2} + \frac{\sin(\pi\tau + \pi n)}{2\pi}, & \tau \in (n-1, n+1) \\ 1, & \tau \in \langle n+1, \infty \rangle \end{cases} \quad (5.9)$$



Obrázek 13: Primitivní funkce (5.9) k funkci (5.8)

Tyto funkce  $\lambda_n(t)$  splňují všechny podmínky uvedené ve větě 5.3. Jsou ovšem definovány po částech, s čímž se může pracovat obtížněji. Proto uvedeme ještě jednu funkci, která po částech zadaná není.

Zvolme postup, kdy nejprve najdeme primitivní funkci, kterou poté zderivujeme a dostaneme hledanou  $\lambda_n(t)$ . Lze systematicky odvodit, že funkce

$$f_n(t) = \frac{\sin(2\pi t)(1 - \cos(2\pi t))}{4\pi^3(t - n)^2} + \frac{\cos(2\pi t) - 1}{2\pi^2 t^2} \quad (5.10)$$

tuto primitivní funkci představuje. Čítenel prvního sčítance má ve všech  $t \in \mathbb{N} \setminus \{n\}$  nuly třetího řádu a je vynásoben zde spojitou funkcí  $\frac{1}{4\pi^3(t - n)^2}$ , tedy  $(f_n(k))' = 0$ . Pro  $t = n$  je zde pól druhého řádu, tedy funkce zde má nulu prvního řádu a v tomto okolí lze zde pomocí Taylorova rozvoje funkcí  $\sin(2\pi t) \approx 2\pi(t - n)$  a  $1 - \cos(2\pi t) \approx 2\pi^2(t - n)^2$  aproximovat výraz jako

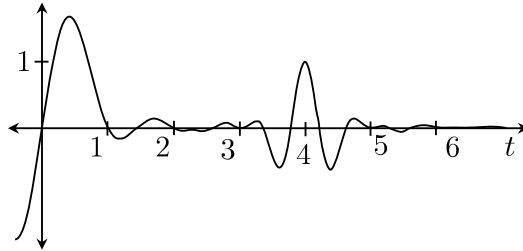
$$\frac{2\pi(t - n) \cdot 2\pi^2(t - n)^2}{4\pi^3(t - n)^2} = t - n,$$

tedy zde je  $(f_n(n))' = 1$ . Dále platí pro všechna  $n \in \mathbb{N}$ , že  $\lim_{t \rightarrow \infty} f_n(t) = 0$  a kvůli druhému sčítanci je  $\lim_{t \rightarrow 0} f_n(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-2\pi^2 t^2}{2\pi^2 t^2} = -1$ . Proto platí i  $f_n(\infty) - f_n(0) = 1$ , což je pouze podmínka  $\int_0^\infty \lambda_n(t) dt = 1$ . Přepsáním funkce  $f_n(t)$  z (5.10) na

$$\frac{2 \sin(2\pi t) - \sin(4\pi t)}{8\pi^3(t - n)^2} + \frac{\cos(2\pi t) - 1}{2\pi^2 t^2}$$

a derivací tak získáváme možnou funkci  $\lambda_n(t) = (f_n(t))'$ :

$$\frac{\cos(2\pi t)}{2\pi^2(t - n)^2} - \frac{\sin(2\pi t)}{2\pi^3(t - n)^3} - \frac{\cos(4\pi t)}{2\pi^2(t - n)^2} + \frac{\sin(4\pi t)}{4\pi^3(t - n)^3} - \frac{\sin(2\pi t)}{\pi t^2} - \frac{\cos(2\pi t) - 1}{\pi^2 t^3} \quad (5.11)$$



Obrázek 14: Funkce  $\lambda_n(t)$  z (5.11) s  $n = 4$

Funkce (5.10) a (5.11) vždy uvažujeme s rozšířením do bodů, kde nejsou definované, odpovídajícími limitami. Konkrétně:  $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : \lambda_n(0) = 0, \forall n \in \mathbb{N} : \lambda_n(n) = 1$ . Takové funkce jsou omezené a spojité pro všechna  $t \geq 0$ . Posledním krokem je ověřit, že  $\lambda_n(t)$  jsou absolutně integrovatelné. Ověříme absolutní integrovatelnost zvlášť pro členy, kde se objevuje  $n$  a pro ty, kde  $n$  nehraje roli. Pokud jsou obě části absolutně integrovatelné, je i jejich součet absolutně integrovatelný.

Pro funkci (5.11), kde figurují  $n$ , zavedeme pro integrál na  $t \in \langle 0, \infty \rangle$  substituci  $t - n = x \implies dt = dx$ . Pro tuto část je tedy integrál

$$\int_{-n}^{\infty} \frac{\cos(2\pi x)}{2\pi^2 x^2} - \frac{\sin(2\pi x)}{2\pi^3 x^3} - \frac{\cos(4\pi x)}{2\pi^2 x^2} + \frac{\sin(4\pi x)}{4\pi^3 x^3} dx. \quad (5.12)$$

Označíme-li integrand jako funkci  $f(x)$ , dostáváme následující odhad

$$\int_{-n}^{\infty} |f(x)| dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx.$$

Protože je funkce  $f(x)$  sudá, lze napsat  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = 2 \int_0^{\infty} |f(x)| dx = 2 \int_0^1 |f(x)| dx + 2 \int_1^{\infty} |f(x)| dx$ . Funkce  $f(x)$  má v nule limitu rovnu jedné, tedy je na  $\langle 0, 1 \rangle$  omezená a její integrál přes tento interval je také omezený. Integrál přes  $\langle 1, \infty \rangle$  lze omezit absolutními členy součtu. Protože každá z absolutních hodnot trigonometrických funkcí je v  $\langle 0, 1 \rangle$ , pro integrál na  $\langle 1, \infty \rangle$  dostáváme odhad

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{2\pi^2 x^2} + \frac{1}{2\pi^3 x^3} + \frac{1}{2\pi^2 x^2} + \frac{1}{4\pi^3 x^3} dx.$$

Tento integrál bez pochyb konverguje, neboť primitivní funkce jsou násobky  $x^{-1}, x^{-2}$ , které jdou k nule s  $x \rightarrow \infty$ . Integrál  $\int_0^{\infty} |f(x)| dx$  tedy konverguje. Pro druhou část funkce z (5.11), kde  $n$  nefiguruje, můžeme pokračovat analogicky. Protože ve jmenovatelích se objevují  $t^2, t^3$ , integrál také konverguje absolutně a proto i integrál celé (5.11) na  $\langle 0, \infty \rangle$  konverguje absolutně.

Funkce  $\lambda_n(t)$  ve tvaru (5.11) je užitečná, neboť kromě dvou bodů není definovaná po částech. Zároveň rovnou známe její primitivní funkci z (5.10).

### 5.3 Vlastnosti rozšíření

Různá rozšíření derivací mají různé vlastnosti. U našeho rozšíření si posloupnost  $\left\{ x_0 = 0, x_{n+1} = x_n + \frac{D_z^n f(z_0)}{\Gamma(n+1)} (z - z_0)^n \right\}$  mající limitu  $f(z)$  zachovává v nekonečnu stejnou limitu jako funkce

$$g(\tau) = \int_0^{\tau} \frac{D_z^t f(z_0)}{\Gamma(t+1)} (z - z_0)^t dt, \quad (5.13)$$

tj.  $\lim_{\tau \rightarrow \infty} g(\tau) = f(z)$ . Nejprve dokážeme dvě důležité vlastnosti uvedeného operátoru  $D_z^t f(z_0)$  a poté i funkce  $g(\tau)$ .

**Věta 5.4** (Linearita operátoru). *Operátor rozšířené derivace  $D_z^t f(z_0)$  je lineárním operátorem.*

*Tedy pro všechna  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  platí*

$$D_z^t(\alpha f(z_0) + \beta g(z_0)) = \alpha D_z^t f(z_0) + \beta D_z^t g(z_0).$$

*Důkaz.* Vyjádříme-li analytické funkce jako  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$  a  $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$ , pak pro funkci  $h(z) = \alpha f(z) + \beta g(z)$  platí  $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)(z-z_0)^n$  a její rozšíření derivace v  $z_0$  je dáno

$$\begin{aligned} D_z^t h(z_0) &= D_z^t(\alpha f(z_0) + \beta g(z_0)) = \frac{\Gamma(t+1)}{(z-z_0)^t} \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)(z-z_0)^n \lambda_n(t) = \\ &= \frac{\Gamma(t+1)}{(z-z_0)^t} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n(z-z_0)^n \lambda_n(t) + \beta b_n(z-z_0)^n \lambda_n(t)) \right] = \\ &= \frac{\Gamma(t+1)}{(z-z_0)^t} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \alpha a_n(z-z_0)^n \lambda_n(t) + \sum_{n=0}^{\infty} \beta b_n(z-z_0)^n \lambda_n(t) \right] = \\ &= \alpha \frac{\Gamma(t+1)}{(z-z_0)^t} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \lambda_n(t) + \beta \frac{\Gamma(t+1)}{(z-z_0)^t} \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n \lambda_n(t) = \\ &\quad \alpha D_z^t f(z_0) + \beta D_z^t g(z_0). \end{aligned}$$

□

Dále ukážeme, že uvedené rozšíření derivace je navíc spojité pro  $t \geq 0$ , tedy malá změna v  $t$  vyvolá malý rozdíl v derivaci.

**Věta 5.5** (Spojitost operátoru). *Pro analytickou funkci  $f(z)$  na  $|z-z_0| < \rho$  je pro pevně dané  $z \neq z_0$  z této oblasti operátor  $D_z^t f(z_0)$  spojité pro všechna  $t \geq 0$ .*

*Důkaz.* Využijeme Weierstrassova kritéria z věty 3.5, abychom ukázali, že  $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^t \lambda_n(t)$  konverguje stejnoměrně pro  $t \geq 0$ . Pro omezené  $\lambda_n(t) : |\lambda_n(t)| < M$  máme majorantu  $M_n$  ve tvaru

$$|a_n(z-z_0)^n \lambda_n(t)| \leq |a_n(z-z_0)^n| M = M_n.$$

Taylorův rozvoj konverguje podle věty 3.7 absolutně, tedy  $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$  konverguje a Weierstrassovo kritérium tak garantuje stejnoměrnou konvergenci  $f(t)$  pro  $t \geq 0$ . Protože každá z  $\lambda_n(t)$  je spojitá a  $a_n(z-z_0)^n$  jsou vůči  $t$  konstanty, každá z funkcí  $f_k(t) = \sum_{n=0}^k a_n(z-z_0)^n \lambda_n(t)$  je spojitá. Větou 3.4 je tak spojitá i funkce  $f(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \lambda_n(t)$ . Funkce  $\frac{\Gamma(t+1)}{(z-z_0)^t}$  je pro  $z \neq z_0$  a  $t \geq 0$  spojitá a tedy i součin

$$\frac{\Gamma(t+1)}{(z-z_0)^t} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \lambda_n(t) = D_z^t f(z_0)$$

je spojitá komplexní funkce pro  $t \geq 0$ .

□

Je-li funkce  $f(z)$  reálná a chceme, aby i její zlomkové derivace byly čistě reálné a spojité, stačí vybrat parametr  $z > z_0$ . Nyní dokážeme spojitost samotné funkce  $g(\tau)$  ze začátku kapitoly, kterou je rozšíření motivováno.

**Věta 5.6** (Spojitést funkce  $g(\tau)$ ). *Pro rozšíření  $D_z^t f(z_0)$ , je funkce (5.13), jež jde zapsat jako*

$$g(\tau) = \int_0^\tau \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \lambda_n(t) dt \quad (5.14)$$

*spojitá pro  $\tau \geq 0$ .*

*Důkaz.* Označme  $I_n(\tau) = \int_0^\tau \lambda_n(t) dt$ . Dostáváme tak pro integrál odhad  $|I_n(\tau)| \leq \int_0^\tau |\lambda_n(t)| dt \leq \int_0^\infty |\lambda_n(t)| < C$ . Kvůli absolutní konvergenci Taylorova rozvoje  $f(z)$  lze podle věty 5.1 zaměnit pořadí sumy a integrálu:

$$g(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n I_n(\tau).$$

Protože jsou  $\lambda_n(t)$  spojité, jsou i její integrály  $I_n(\tau)$  spojité. Tedy každá z funkcí  $g_k(\tau) = \sum_{n=0}^k a_n (z - z_0)^n I_n(\tau)$  je spojitá a podle Weierstrassova kritéria 3.5 s majorantami  $C|a_n(z - z_0)^n|$  stejnoměrně konvergentní k  $g(\tau)$  na  $\langle 0, \infty \rangle$ . Podle věty 3.4 je tak spojitá i funkce  $g(\tau)$ .  $\square$

## 6 Příklady

V této kapitole se zaměříme na praktické příklady dříve formulovaného rozšíření. Všechny doplňující grafy jsou vytvořeny autorem pomocí programovacího jazyka Python v programu Jupyter Notebook.

### 6.1 Přepis diskrétních posloupností na spojité funkce

Jeden ze základních Taylorových polynomů je pro funkci  $f(z) = e^z$  v okolí  $z_0 = 0$ :

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Tato řada konverguje pro všechna  $z \in \mathbb{C}$ , neboť funkce  $e^z$  je všude analytická. Navíc pro všechny celočíselné derivace platí  $f^{(n)}(0) = 1$ . Nám postačí hodnota v  $z = 1$ , kde máme  $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} (1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ .

Na základě toho můžeme definovat posloupnost

$$\left\{ x_0 = 0, x_{n+1} = x_n + \frac{f^n(0)}{n!}(1-0)^n = x_n + \frac{1}{n!} \right\}, \quad (6.1)$$

pro kterou platí  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = e$ . Přepíšeme na spojitou funkci pomocí  $n = t, g'(t) \sim x_{t+1} - x_t, g(t) = x_t$  dostáváme

$$g'(t) = \frac{f^{(t)}(0)}{t!}.$$

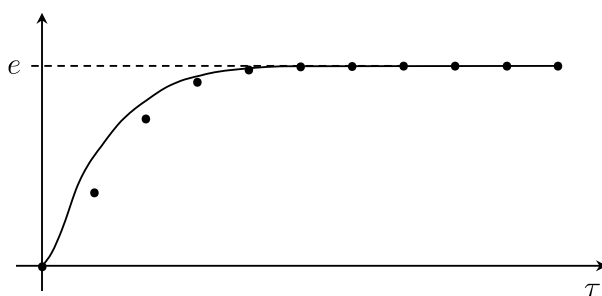
Nahradíme  $t! = \Gamma(t+1)$  a  $f^{(t)}(0) = D_1^t f(0)$  a integrujeme podle  $t$  od 0 do  $\tau$ . Dostáváme tak pro  $z_0 = 0, z = 1$ :

$$g(\tau) = \int_0^\tau \frac{D_1^t f(0)}{\Gamma(t+1)} dt = \int_0^\tau \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda_n(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n I_n(\tau). \quad (6.2)$$

Zde je  $a_n = \frac{1}{n!}$  a platí  $\lim_{\tau \rightarrow \infty} g(\tau) = e$ . Použijeme dvě různá  $I_n(t)$ . Nejprve jedno definované po částech pomocí trigonometrických funkcí z (5.9):

$$I_0(\tau) = \begin{cases} \frac{2 \sin(\pi\tau) - \sin(2\pi\tau)}{4\pi} + \tau, & \tau \in \langle 0, 1 \rangle \\ 1, & \tau \in (1, \infty) \end{cases}$$

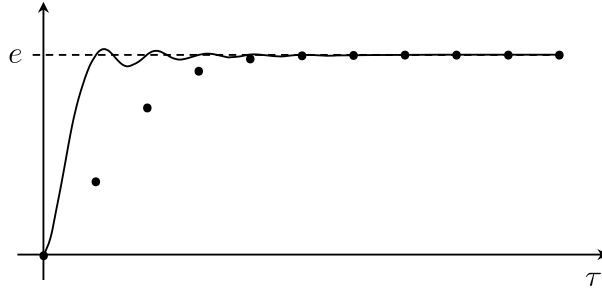
$$I_n(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau \in \langle 0, n-1 \rangle \\ \frac{\tau - n + 1}{2} + \frac{\sin(\pi\tau + \pi n)}{2\pi}, & \tau \in (n-1, n+1) \\ 1, & \tau \in \langle n+1, \infty \rangle \end{cases} \quad (6.3)$$



Obrázek 15: Posloupnost (6.1) a funkce  $g(\tau)$  z (6.2) s  $I_n(\tau)$  z (6.3)

Použijme ještě druhé možné  $I_n(\tau)$ , které není definované po částech a tedy práce s ním může být o něco lehčí. Z podkapitoly příkladů  $\lambda_n(t)$  je takové  $I_n(\tau)$  podle (5.10) v následujícím tvaru:

$$I_n(\tau) = 1 + \frac{\sin(2\pi\tau)(1 - \cos(2\pi\tau))}{4\pi^3(\tau - n)^2} + \frac{\cos(2\pi\tau) - 1}{2\pi^2\tau^2} \quad (6.4)$$



Obrázek 16: Posloupnost (6.1) a funkce  $g(\tau)$  z (6.2) s  $I_n(\tau)$  z (6.4) pro  $\tau \in \langle 0, 10 \rangle$

I když se grafy těchto dvou funkcí poměrně liší, důležité je, že si v nekonečnu ponechávají stejnou limitu.

Jako druhý příklad uveďme geometrickou řadu

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n,$$

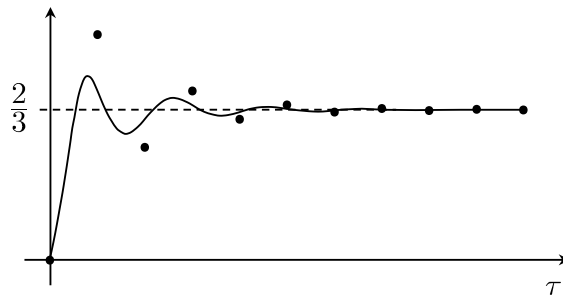
kteřá konverguje pro  $|z| < 1$ . Zde je znovu  $z_0 = 0$  s  $a_n = 1$  a například pro  $z = -\frac{1}{2}$  je odpovídající posloupnost

$$\left\{ x_0 = 0, x_{n+1} = x_n + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right\} \quad (6.5)$$

oscilující a s limitou  $\frac{1}{1+1/2} = \frac{2}{3}$ . Obdobným přepisem  $n = t, g'(t) \sim x_{t+1} - x_t, g(t) = x_t$  jako u předchozího příkladu dostáváme

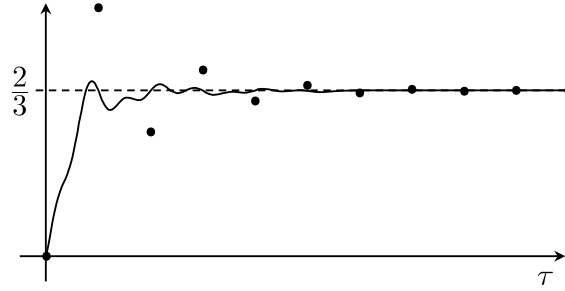
$$g(\tau) = \int_0^\tau \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \lambda_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n I_n(\tau), \quad (6.6)$$

kde je znovu zachována limita  $\lim_{\tau \rightarrow \infty} g(\tau) = \frac{2}{3}$ . Použijeme stejná  $I_n(\tau)$  jako v minulém příkladě.



Obrázek 17: Posloupnost (6.5) a funkce  $g(\tau)$  z (6.6) s  $I_n(\tau)$  z (6.3) pro  $\tau \in \langle 0, 10 \rangle$





Obrázek 18: Posloupnost (6.5) a funkce  $g(\tau)$  z (6.6) s  $I_n(\tau)$  z (6.4) pro  $\tau \in \langle 0, 10 \rangle$

## 6.2 Rozšíření derivace v bodě

Nyní rozebereme hlavní výsledek práce na praktických příkladech.

Mějme funkci  $f(z) = \sin(z)$ . Nultá derivace je vždy pouze funkční hodnota v bodě, tedy například v bodě  $z_0 = 0$  je  $f(0) = 0$ . Dále je  $f'(0) = \cos(0) = 1$ ,  $f''(0) = -\sin(0) = 0$ ,  $f^{(3)}(0) = -\cos(0) = -1$ ,  $f^{(4)}(0) = \sin(0) = 0$ . Obecně můžeme napsat, že pro  $n \in \mathbb{N}$  platí  $f^{(n)}(0) = \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)$ . Protože liché derivace jsou vždy u funkce  $\sin(z)$  nulové, liché členy v Taylorově rozvoji můžeme vynechat. Funkce  $\sin(z)$  tak jde zapsat jako

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}.$$

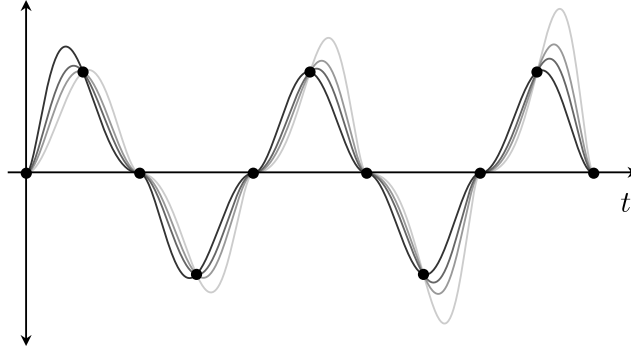
Podle (5.7) má v  $z_0 = 0$  zlomková derivace funkce  $\sin(z)$  s parametrem  $z$  tvar

$$D_z^t \sin(z_0)|_{z_0=0} = \frac{\Gamma(t+1)}{z^t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \lambda_{2n+1}(t). \quad (6.7)$$

Zde využijeme funkce  $\lambda_n(t)$  definované v (5.8) a můžeme vynechat  $\lambda_0(t)$ :

$$\lambda_n(t) = \begin{cases} \cos^2\left(\frac{\pi}{2}(t-n)\right), & t \in (n-1, n+1) \\ 0, & t \in \langle 0, n-1 \rangle \cup \langle n+1, \infty \rangle \end{cases} \quad (6.8)$$

Zvolme čtyři různé parametry:  $z = 1, 2, \pi, 2\pi$ . V následujícím grafu je křivka (6.7) s parametrem  $z = 1$  nejsvětlejší a s rostoucím parametrem křivka tmavě.

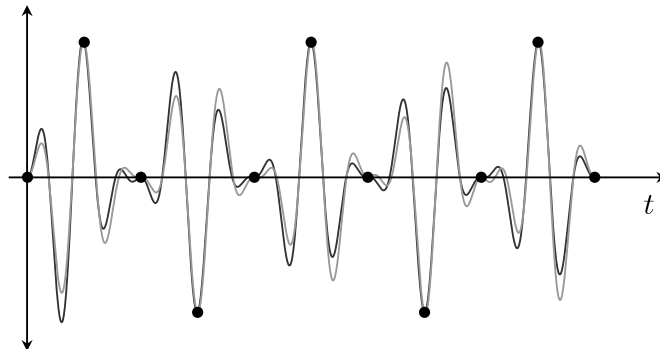


Obrázek 19: Křivka (6.7) s parametry 1, 2,  $\pi$ ,  $2\pi$  a  $\lambda_n(t)$  z (6.8) pro  $t \in \langle 0, 10 \rangle$

Zvolme ještě trigonometrickou verzi  $\lambda_n(t)$  definovanou v (5.11):

$$\lambda_n(t) = \frac{\cos(2\pi t)}{2\pi^2(t-n)^2} - \frac{\sin(2\pi t)}{2\pi^3(t-n)^3} - \frac{\cos(4\pi t)}{2\pi^2(t-n)^2} + \frac{\sin(4\pi t)}{4\pi^3(t-n)^3} - \frac{\sin(2\pi t)}{\pi t^2} - \frac{\cos(2\pi t) - 1}{\pi^2 t^3} \quad (6.9)$$

Zvolme dva parametry  $z = \pi, 2\pi$ . V následujícím grafu je funkce (6.7) s parametrem  $z = \pi$  světlejší.



Obrázek 20: Křivka (6.7) s parametry  $\pi, 2\pi$  a  $\lambda_n(t)$  z (6.9) pro  $t \in \langle 0, 10 \rangle$

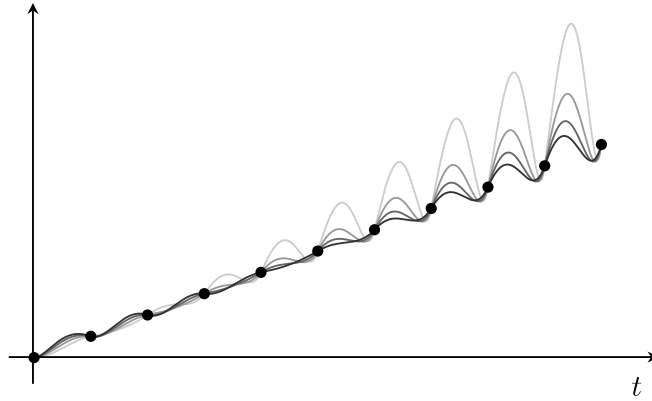
Jako druhý příklad mějme funkci  $f(z) = ze^z$  s derivací v bodě  $z_0 = 0$ . V tomto bodě má funkce Taylorův rozvoj

$$ze^z = z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+1}}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} z^n.$$

Odsud je zjevné, že  $f^{(n)}(0) = n$ , tedy derivace roste s jejím řádem lineárně. Zlomková derivace této funkce s parametrem  $z$  má podle (5.7) tvar

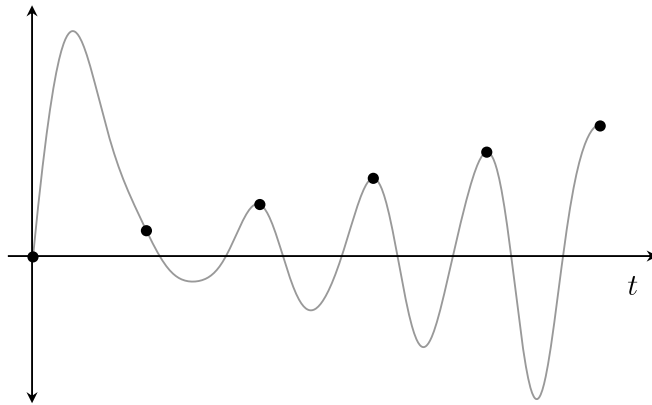
$$D_z^t e^{z_0} |_{z_0=0} = \frac{\Gamma(t+1)}{z^t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} z^n \lambda_n(t). \quad (6.10)$$

Využijme funkci  $\lambda_n(t)$  z (6.8) pro parametry  $z = 1, 2, 3, 4$ . Znovu zde s rostoucím parametrem křivka tmavne.



Obrázek 21: Křivka (6.10) s parametry  $z = 1, 2, 3, 4$  a  $\lambda_n(t)$  z (6.9) pro  $t \in \langle 0, 10 \rangle$

Pro trigonometrickou verzi  $\lambda_n(t)$  z (6.9) zvolme pouze jeden parametr  $z = \frac{3}{2}$ .



Obrázek 22: Křivka (6.10) s parametrem  $z = \frac{3}{2}$  a  $\lambda_n(t)$  z (6.9) pro  $t \in \langle 0, 5 \rangle$

### 6.3 Rozšíření derivace funkce na intervalu

Řekněme, že máme danou funkci  $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ , jejíž celočíselné derivace jsou  $f^{(0)}(x) = \frac{1}{2}x^2$ ,  $f^{(1)}(x) = x$ ,  $f^{(2)}(x) = 1$ ,  $f^{(3)}(x) = 0$  pro všechna  $x$ . Zajímají nás nyní neceločíselné derivace této funkce, řekněme na intervalu  $\langle -1, 1 \rangle$ . Podle (5.7) je rozšíření derivace v bodě  $x$  s parametrem  $z$  v následujícím tvaru

$$D_z^t f(x) = \frac{\Gamma(t+1)}{(z-x)^t} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-x)^n \lambda_n(t),$$

kde  $a_n = \frac{f^{(n)}(x)}{n!}$ . Aby tato rozšíření byla reálná, stačí vybrat  $z$  tak, aby  $z > x$ . Vyberme například  $z = 2$ . Protože všechny celočíselné derivace funkce pro  $n \geq 3$  jsou nulové, stačí

zvážit pouze první tři členy řady. Rozšíření má tedy tvar

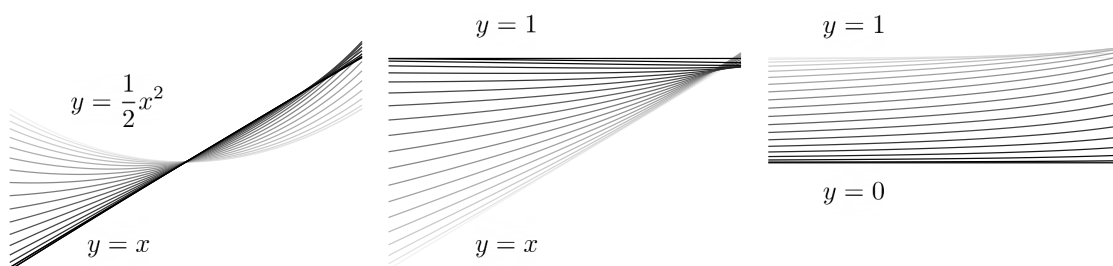
$$D_2^t \left( \frac{1}{2}x^2 \right) = \frac{\Gamma(t+1)}{(2-x)^t} \left( \frac{1}{2}x^2 \lambda_0(t) + x(2-x) \lambda_1(t) + \frac{(2-x)^2}{2} \lambda_2(t) \right) \quad (6.11)$$

Uvažujme funkce  $\lambda_n(t)$  z (5.8):

$$\lambda_0(t) = \begin{cases} \cos^2 \left( \frac{\pi}{2}t \right) + \sin^2(\pi t), & t \in \langle 0, 1 \rangle \\ 0, & t \in (1, \infty) \end{cases} \quad (6.12)$$

$$\lambda_n(t) = \begin{cases} \cos^2 \left( \frac{\pi}{2}(t-n) \right), & t \in (n-1, n+1) \\ 0, & \langle 0, n-1 \rangle \cup \langle n+1, \infty \rangle \end{cases}$$

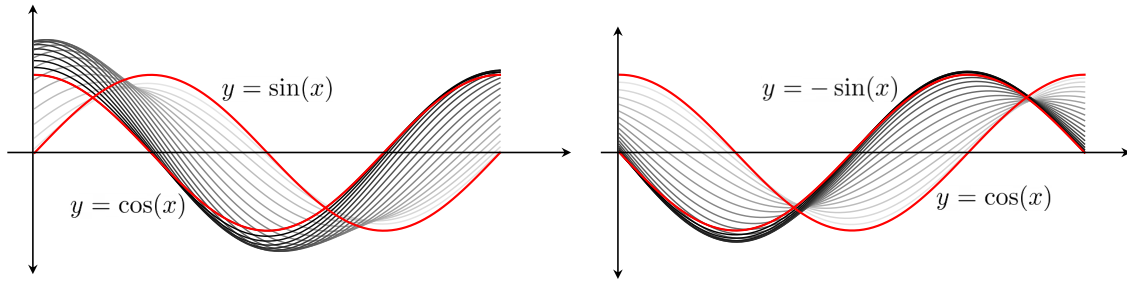
V následujících třech grafech je vždy zobrazena transformace funkce  $D_2^t \left( \frac{1}{2}x^2 \right)$  s  $t$  z intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$ ,  $\langle 1, 2 \rangle$  a  $\langle 2, 3 \rangle$ . S rostoucím  $t$  křivka tmavne. Pro všechna  $t$  jsou tato rozšíření pro  $x \in \langle -1, 1 \rangle$  spojitá. Osy grafů nejsou v poměru 1 : 1.



Obrázek 23: Zlomkové derivace funkce  $\frac{1}{2}x^2$  z (6.11) pro  $x \in \langle -1, 1 \rangle$  a  $t$  v intervalech  $\langle 0, 1 \rangle$ ,  $\langle 1, 2 \rangle$  a  $\langle 2, 3 \rangle$  s parametrem  $z = 2$ .

Jako druhý příklad zvažme rozšíření derivace funkce  $f(x) = \sin(x)$  na intervalu  $\langle 0, 2\pi \rangle$ . Zvolme tedy například parametr  $z = 3\pi$ . Celočíselné derivace jsou  $f^{(0)}(x) = \sin(x)$ ,  $f^{(1)}(x) = \cos(x)$ ,  $f^{(2)}(x) = -\sin(x)$  pro všechna  $x$ . Bude nás zajímat rozšíření derivace pro  $t \in \langle 0, 2 \rangle$ . Pokud použijeme pro rozšíření  $\lambda_n(t)$  z předchozího příkladu (6.12), můžeme z nekonečného součtu vynechat  $\lambda_3(t)$ ,  $\lambda_4(t)$ ,  $\dots$ , protože jsou nulové pro  $t \in \langle 0, 2 \rangle$ . Zlomková derivace funkce  $\sin(x)$  má tedy podle (5.7) tvar

$$D_{3\pi}^t \sin(x) = \frac{\Gamma(t+1)}{(3\pi-x)^t} \left( \sin(x) \lambda_0(t) + \cos(x) (3\pi-x) \lambda_1(t) - \frac{\sin(x)}{2} (3\pi-x)^2 \lambda_2(t) \right) \quad (6.13)$$



Obrázek 24: Zlomkové derivace funkce  $\sin(x)$  z (6.13) pro  $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$  a  $t$  v intervalech  $\langle 0, 1 \rangle$  a  $\langle 1, 2 \rangle$  s parametrem  $z = 3\pi$

## 7 Zlomková diferenciální rovnice

V této kapitole ukážeme, jak může vypadat zlomková diferenciální rovnice, která používá rozšíření derivace prezentované v této práci. Tyto rovnice nemusí mít řešení, které lze analyticky vyjádřit. Není-li řešení možno vyjádřit, můžeme ho buďto aproximovat, nebo v jeho výpočtu využít numerických metod.

V této kapitole vyřešíme dvě diferenciální rovnice. Jako první příklad mějme rovnici

$$D_z^\alpha f(x) = f(x), \quad (7.1)$$

kde  $0 < \alpha < 1$  a  $f(x)$  je reálná funkce. Definičním oborem této rovnice jsou podle našeho rozšíření všechna  $x < z$ . Jako  $D_z^\alpha f(x)$  vyberme rozšíření, které má  $\lambda_n(\alpha)$  z kapitoly 5.2 definované v (5.8). Pro  $\alpha \in (0, 1)$  je rozšíření dáno hodnotami  $f(x)$  a  $f'(x)$ . Exaktním vyjádřením  $D_z^\alpha f(x)$  z definice (5.7) dostáváme z (7.1) následující rovnici

$$\frac{\Gamma(\alpha + 1)}{(z - x)^\alpha} [f(x)\lambda_0(\alpha) + f'(x)(z - x)\lambda_1(\alpha)] = f(x).$$

Tuto rovnici můžeme vypočítat klasickými metodami. Rovnici upravme následovně.

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{(z - x)^\alpha} f'(x)(z - x)\lambda_1(\alpha) &= f(x) \left( 1 - \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{(z - x)^\alpha} \lambda_0(\alpha) \right) \\ \frac{f'(x)}{f(x)} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)\lambda_1(\alpha)} (z - x)^{\alpha-1} - \frac{\lambda_0(\alpha)}{\lambda_1(\alpha)} \frac{1}{z - x} \end{aligned}$$

Integrací dostáváme následující vztah

$$\ln |f(x)| + k = \frac{-(z - x)^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha + 1)\lambda_1(\alpha)} + \frac{\lambda_0(\alpha)}{\lambda_1(\alpha)} \ln |x - z|$$

Pokud obě strany dáme do exponentu a zvažíme, že  $x < z$ , dostáváme řešení

$$f(x) = c \cdot \exp \left( \frac{-1}{\alpha\Gamma(\alpha + 1)\lambda_1(\alpha)} (z - x)^\alpha \right) (z - x)^{\lambda_0(\alpha)/\lambda_1(\alpha)}. \quad (7.2)$$

Jeho validitu můžeme zkontrolovat dosazením do původní rovnice. Například pro  $\alpha = 1/2$  jsou  $\lambda_0(\alpha) = 3/2$ ,  $\lambda_1(\alpha) = 1/2$ ,  $\Gamma(\alpha + 1) = \sqrt{\pi}/2$  a pro tedy pro rovnici

$$D_z^{1/2} f(x) = f(x)$$

dostáváme řešení

$$f(x) = c \cdot \exp\left(\frac{-8}{\sqrt{\pi}}\sqrt{z-x}\right) (z-x)^3.$$

Jako druhý příklad zvažme podobnou rovnici se stejným rozšířením:

$$D_z^\alpha f(x) = f'(x), \quad (7.3)$$

kde znovu  $0 < \alpha < 1$  a  $x < z$ . Levou stranu můžeme znovu přepsat a rovnici upravit:

$$\frac{\Gamma(\alpha + 1)}{(z-x)^\alpha} [f(x)\lambda_0(\alpha) + f'(x)(z-x)\lambda_1(\alpha)] = f'(x)$$

$$\frac{\Gamma(\alpha + 1)}{(z-x)^\alpha} \lambda_0(\alpha) f(x) = f'(x) \left(1 - \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{(z-x)^\alpha} (z-x)\lambda_1(\alpha)\right).$$

Pro  $(z-x)^\alpha - \Gamma(\alpha + 1)\lambda_1(\alpha)(z-x) \neq 0 \iff x \neq z - (\Gamma(\alpha + 1)\lambda_1(\alpha))^{1/(\alpha-1)}$  můžeme upravit rovnici s  $x = t$  na

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{\Gamma(\alpha + 1)\lambda_0(\alpha)}{(z-t)^\alpha - \Gamma(\alpha + 1)\lambda_1(\alpha)(z-t)}$$

Integrací přes nějaký interval  $\langle a, x \rangle$  v definičním oboru, který neobsahuje singularitu funkce dostáváme

$$\ln(f(x)) + \ln(f(a)) = \Gamma(\alpha + 1)\lambda_0(\alpha) \int_a^x \frac{dt}{(z-t)^\alpha - \Gamma(\alpha + 1)\lambda_1(\alpha)(z-t)}.$$

Odsud lze určit  $f(x)$  následovně

$$f(x) = f(a) \cdot \exp\left(\Gamma(\alpha + 1)\lambda_0(\alpha) \int_a^x \frac{dt}{(z-t)^\alpha - \Gamma(\alpha + 1)\lambda_1(\alpha)(z-t)}\right). \quad (7.4)$$

Integrál v exponentu nemá elementární primitivní funkci. Zde by pak bylo pro konkrétní výpočet třeba použít numerických metod nebo aproximací.

## 8 Aplikace zlomkové derivace

V této kapitole se zaměříme na modelování tlumeného oscilátoru pomocí teorie zlomkových derivací. Použijeme námi uvedenou zlomkovou derivaci v odpovídající zlomkové

diferenciální rovnici a budeme zkoumat její řešení. Poté tuto rovnici využijeme k modelování tlumeného kyvadla s velkou počáteční výchylkou.

V článku [7] je modelován tlumený oscilátor pomocí zlomkové diferenciální rovnice ve tvaru

$$\frac{d^\alpha u}{dt^\alpha} + \omega^\alpha u(t) = 0, \quad (8.1)$$

kde  $1 < \alpha \leq 2, \omega > 0$  s počáteční podmínkou  $u(0) = 1, u'(0) = 0$ . Obdobný model můžeme najít i v knize [3]. V obou případech je pro modelování využita Caputova derivace. My využijeme námi uvedenou derivaci  $D_z^\alpha u(t)$ .

V první řadě ukážeme, jak rovnice (8.1) může modelovat tlumený oscilátor. Pro  $\alpha = 1$  má rovnice tvar

$$u'(t) = -\omega u(t).$$

Podmínku  $u'(0) = 0$  zde zanedbáváme. Řešením této rovnice je funkce  $u(t) = e^{-\omega t}$ , která pro  $t \geq 0$  představuje exponenciální pokles konvergující k nule. Pro  $\alpha = 2$  má rovnice tvar

$$u''(t) = -\omega^2 u(t).$$

Řešením této rovnice je  $u(t) = \cos(\omega t)$ , tedy cosinusoida s periodou  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ . Pro  $\alpha \in (1, 2)$  můžeme tedy očekávat, že řešením rovnice bude jakási kombinace těchto funkcí, tedy klesající exponenciální funkce s určitou periodou, která modeluje právě tlumené oscilátory.

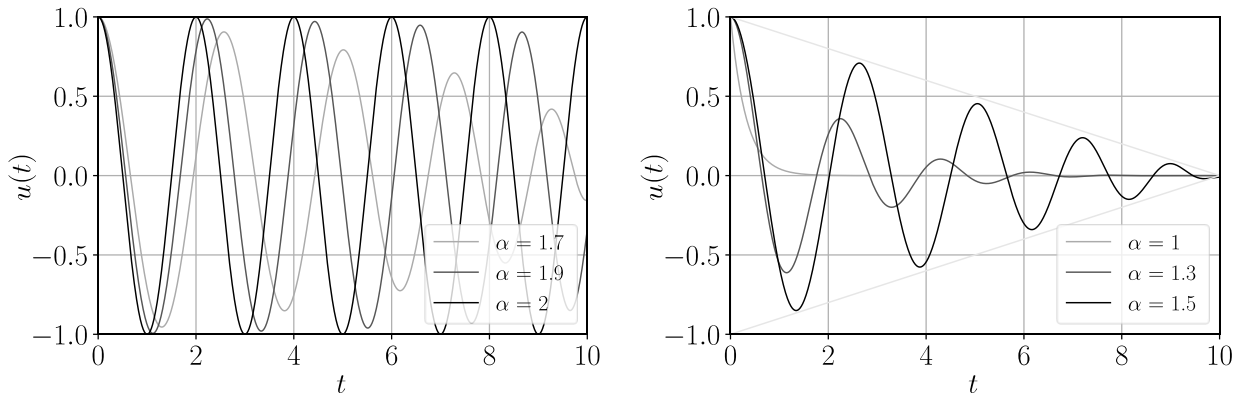
Pro zlomkovou diferenciální rovnici

$$D_z^\alpha u(t) = -\omega^\alpha u(t) \quad (8.2)$$

zvolme funkce  $\lambda_n(\alpha)$  z (5.8). Rozepsáním tak dostáváme rovnici

$$\frac{\Gamma(\alpha + 1)}{(z - t)^\alpha} \left( u'(t)(z - t)\lambda_1(\alpha) + \frac{u''(t)}{2}(z - t)^2\lambda_2(\alpha) \right) = -\omega^\alpha u(t)$$

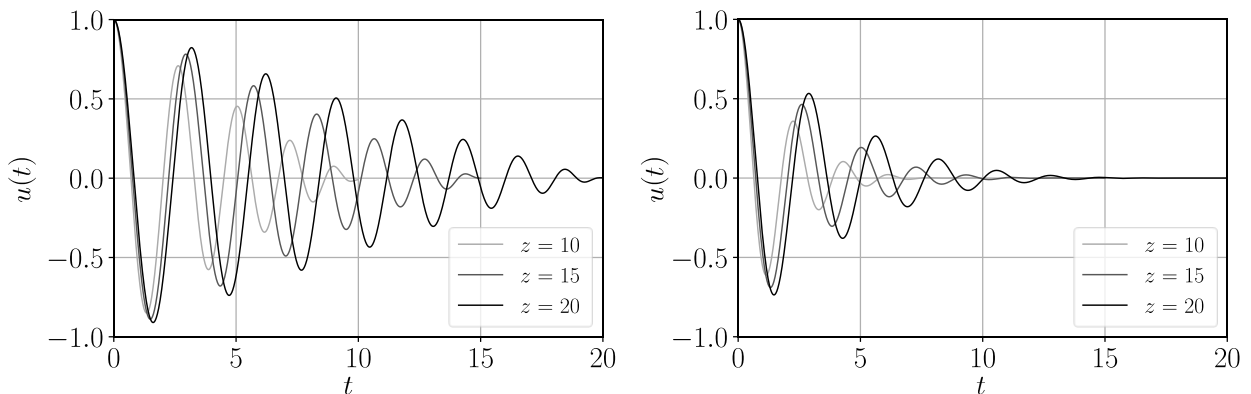
Tuto rovnici budeme řešit numericky metodou konečných diferencí na intervalu  $t \in \langle 0, 10 \rangle$ . Zvolme tedy na začátek  $z = 10$ . Později ukážeme, jaký efekt má výběr tohoto parametru na řešení rovnice. Všechny následující grafy jsou vytvořené autorem pomocí programovacího jazyka Python v programu Jupyter Notebook.



Obrázek 25: Řešení  $u(t)$  rovnice (8.2) pro  $z = 10, \omega = \pi$  a různé  $\alpha \in \langle 1, 2 \rangle$

Z obrázku 25 můžeme vyčíst, že ideální oscilátor bez tlumení pro  $\alpha = 2$  má periodu 2, což odpovídá analytickému výpočtu. Dále, pro  $\alpha = 1,5$  je pokles téměř lineární a pro  $\alpha = 1$  je řešením klesající exponenciální funkce. Parametr  $\alpha$  tedy určuje, jakým způsobem je daný oscilátor tlumený. Pro  $\alpha$  blízko 2 je tlumící síla malá a oscilátor ztrácí energii pomalu. Pro  $\alpha$  blíže 1 je tlumení větší a oscilátor ztrácí energii rychleji. S klesajícím  $\alpha$  se mění i zdánlivá perioda<sup>1</sup> řešení rovnice, která není konstantní.

Zaměříme se na případ  $\alpha \leq 1,5$ , kde je pokles  $u(t)$  rychlejší a budeme zkoumat, jaký efekt má na řešení rovnice volba parametru  $z$ .



Obrázek 26: Řešení  $u(t)$  rovnice (8.2) pro  $\alpha = 1,5, \alpha = 1,3, \omega = \pi$  a různé  $z$

Pro  $\alpha < 1,5$  je z obrázku 26 zjevný význam parametru  $z$ . V tomto případě  $z$  reguluje, kdy oscilátor ztratí veškerou svojí energii a zůstane v klidu s nulovou výchylkou. S rostoucím  $z$  roste i zdánlivá perioda řešení a délka intervalu, kde má oscilátor energii. V praxi tento parametr může například u kyvadla nahradit míru odporu atmosféry. Čím

<sup>1</sup>Zde zdánlivou periodou myslíme vzdálenost dvou maxim nebo minim funkce  $u(t)$  na ose  $t$ .



větší je odpor, tím rychleji se dostane kyvadlo do klidového stavu a tím menší je tedy  $z$ . Přesnou charakteristiku odporové síly můžeme tedy popsat různou kombinací  $z, \alpha$ .

Zaměříme se nyní na modelování kyvadla z klasické mechaniky pomocí rovnice (8.2). Vezmeme v potaz i odpor vzduchu a velké úvodní vychýlení kyvadla. Idealizované vzorce užívané ve středoškolské fyzice tyto dva parametry zanedbávají.

Naším cílem je věrohodně namodelovat chování takového kyvadla pomocí zlomkové diferenciální rovnice (8.2).

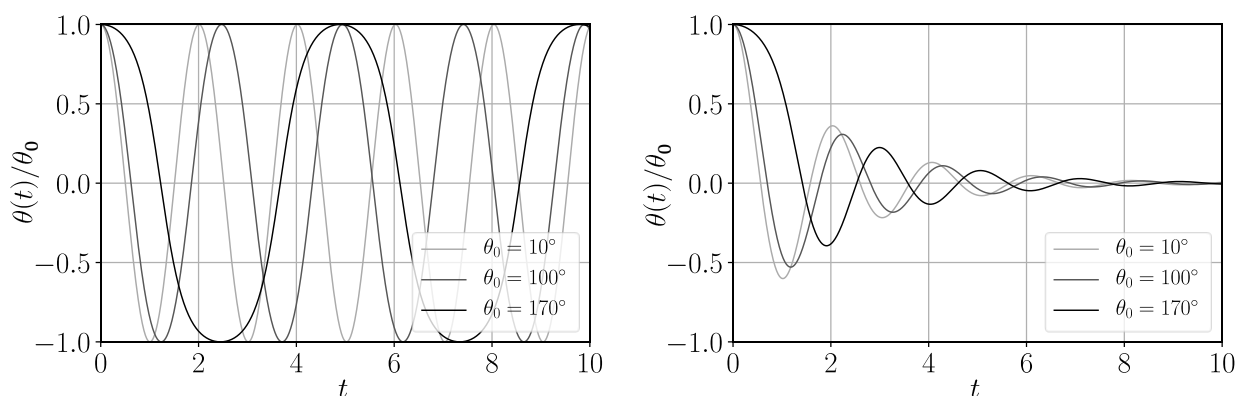
Základní diferenciální rovnice pro matematické kyvadlo je ve tvaru

$$\ddot{\theta}(t) = -\frac{g}{L} \sin(\theta(t)).$$

Pro malé počáteční úhly  $\theta(0) = \theta_0$ , můžeme aproximovat  $\sin(\theta) \approx \theta$  a rovnici vyřešit analyticky. V takovém případě se jedná o ideální oscilátor s  $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$ , neboť  $\theta(t) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t\right)$ . Síla odporu vzduchu je opačná pohybu kyvadla a ve standardních modelech úměrná rychlosti, v tomto případě tedy  $F_o = -\mu\dot{\theta}(t)$ , kde  $\mu$  je konstanta popisující velikost odporu vzduchu [8]. Dostáváme tak rovnici, která modeluje pohyb kyvadla a bere v potaz odpor vzduchu:

$$\ddot{\theta}(t) = -\mu\dot{\theta}(t) - \frac{g}{L} \sin(\theta(t)) \quad (8.3)$$

Pro větší počáteční úhly, kde nelze aproximovat sinus, nemá tato rovnice analytické řešení, proto jí budeme řešit numericky pomocí metody konečných diferencí. Nadále budeme uvažovat  $L = 1, g = 9,81$  a normalizovat osy  $y$  ve vytvořených grafech.



Obrázek 27: Řešení rovnice (8.3) s  $\mu = 0$  a  $\mu = 1$  pro různé  $\theta_0$

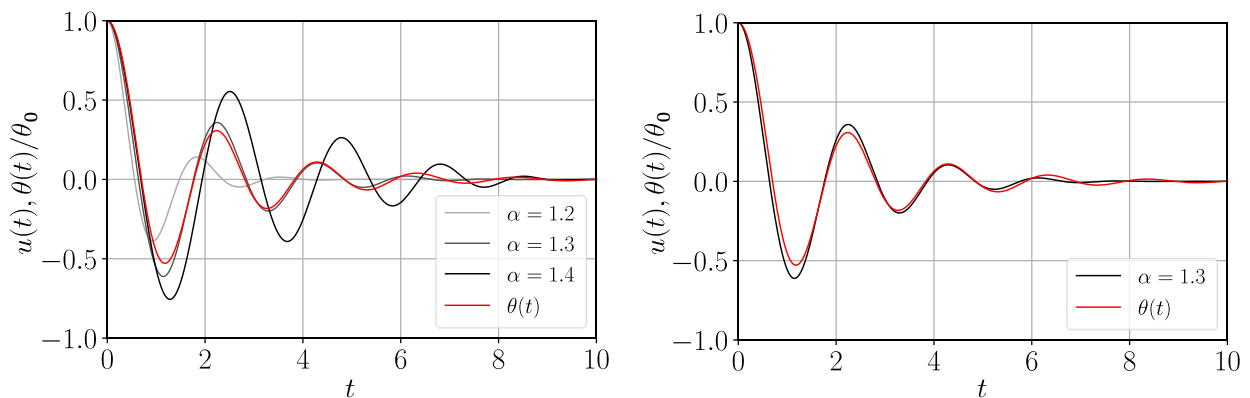
Na obrázku 27 si můžeme všimnout, že v ideálním případě, kdy  $\theta_0$  je malé ( $\theta_0 = 10^\circ$ ) a  $\mu = 0$ , má oscilátor periodu přibližně 2. Toto plyne z aproximace  $\sqrt{g} \approx \pi$ . S rostoucím

$\theta_0$  se zvětšuje zdánlivá perioda i u tlumených oscilátorů s  $\mu = 1$ . Přesně tento efekt měla aplikace zlomkové diferenciální rovnice na oscilátor, viz obrázek 25. Proto je aplikace naší zlomkové derivace v tomto kontextu užitečná.

Chceme co nejlépe aproximovat normalizovanou funkci  $\theta(t)$  řešením rovnice

$$D_z^\alpha u(t) = -\omega^\alpha u(t) \quad (8.4)$$

Zaměřme se na případ, kdy  $\theta_0 = 100^\circ$ ,  $\mu = 1$ . Na obrázku 27 vidíme, že takový oscilátor v  $t = 10$  ztratí téměř veškerou svojí energii. Zvolme tedy  $z = 10$ . V případě pro ideální kyvadlo je  $\omega = \sqrt{g} \approx \pi$ . V (8.4) zvolme tedy  $\omega = \pi$ . Tato aproximace je vhodná, neboť grafy takovýchto oscilátorů máme již vyobrazeny na obrázku 25. Zbývá správně zvolit  $\alpha$ , které zjevně bude menší než 1,5.



Obrázek 28: Řešení rovnice (8.3) pro  $\theta_0 = 100^\circ$ ,  $\mu = 1$  a řešení rovnice (8.4) pro  $z = 10$ ,  $\omega = \pi$  a různá  $\alpha$

Nejpřesnější aproximaci tlumeného kyvadla dostáváme pro  $\alpha = 1,3$ , jak je vidět na obrázku 28 pro námi zvolené  $\alpha$ . Vyjádření modelu zlomkovou diferenciální rovnicí (8.4) je kompaktnější než rovnicí (8.3). Navíc podle argumentu na začátku kapitoly je lépe patrné, že rovnice (8.4) popisuje tlumený oscilátor, což nemusí být bez fyzikální intuice z rovnice (8.3) zřejmé.

## Diskuse

Práce nabízí zajímavé rozšíření operátoru derivace do všech nezáporných reálných řádů. Hlavní vlastnost tohoto rozšíření se liší od standardně používaných zlomkových derivací rozebraných například v [3] a [6]. Za pomoci metod komplexní analýzy jsme došli k možnému nelokálnímu rozšíření, které je snadnější na výpočet, než obvykle užívaná rozšíření. Naše rozšíření používá pouze nekonečnou sumu, kterou lze jednoduše aproximovat parciálními součty. Pro dobře zvolené  $\lambda_n(t)$ , například z (5.8), zbudou navíc z této nekonečné řady pouze dva členy. Pro neceločíselný řád  $t \in (n, n + 1)$  s  $n \in \mathbb{N}$  derivace funkce je třeba znát pouze celočíselné derivace této funkce o řádech  $n$  a  $n + 1$ . Jednoduchost výpočtu uvedeného rozšíření je jedna z výhod oproti standardně používaným zlomkovým derivacím. Například Riemann–Liouvillovo i Caputovo rozšíření používá jak integrál tak derivaci dané funkce [3], [6], což jsou obecně složitější operátory na výpočet. Práci by bylo možné rozšířit uvedením i těchto definic a prodiskutovat jejich vzájemné výhody a nevýhody i v jiných ohledech.

Další výhodou našeho rozšíření je jeho unikátní nelokálnost. Standardní nelokální rozšíření pracují s parametry, které jsou menší než  $x$ . Tedy pracují s tím, v jakém stavu se systém v minulosti nalézal. Taková rozšíření nachází svá využití například u popisu chování akumulátorů. Kvůli jejich *paměťovému efektu* jsou nelokální teorie při určování chování akumulátoru přesnější, než standardní lokální metody [3].

Naše rozšíření pracuje s parametrem  $z$ , který je pro reálná řešení vždy větší než  $x$ . Dalo by se tedy říci, že je závislý na budoucím stavu systému. Tento fakt může být užitečný, neboť můžeme na začátku vybrat stav, ve kterém chceme, aby systém skončil. Náš model poté určí, jak bude probíhat cesta k námi zvolenému finálnímu stavu. Tento zajímavý fenomén lze pozorovat například u aplikace v kapitole 8. Zde pro  $\alpha < 1,5$  parametr  $z$  určoval, po jaké době ztratí oscilátor veškerou svojí energii.

V kapitole 8 se ukázala být naše zlomková derivace ideální, neboť podobně jako kyvadlo s velkým vychýlením měnila pro neceločíselné řády svojí zdánlivou periodu. Změna periody může, ale nemusí, u tlumených oscilátorů nastat. Standardně užívané zlomkové derivace u tlumených oscilátorů si svou periodu zachovávají [3], [7]. V naší aplikaci bychom práci mohli rozšířit nalezením přesného vztahu mezi veličinami  $z, \alpha, \omega$  a  $\theta_0, \mu, g, L$  tak, aby odpovídající modely byly co nejpřesnější.

V neposlední řadě můžeme vyzdvihnout flexibilitu uvedeného rozšíření. To je závislé

na funkcích  $\lambda_n(t)$ , které musí splňovat určité vlastnosti popsané v základní větě práce 5.3. Existuje nekonečně mnoho funkcí, které tyto podmínky splňují. Proto by v aplikaci takového rozšíření mohly být funkce  $\lambda_n(t)$  zvoleny tak, aby užitečně nebo co nejpřesněji popisovaly daný zkoumaný systém. V aplikaci jsme si vystačili s pevně určenými  $\lambda_n(t)$ . Jak mají být tyto funkce zvoleny, může být předmětem dalšího výzkumu.

Práci by bylo možno rozšířit ještě několika dalšími způsoby. V teoretické rovině můžeme uvést více podmínek, které musí rozšíření splňovat. Tím může být například vlastnost skládání derivací, jež se v našem rozšíření nelehce interpretuje:  $D^\alpha(D^\beta) = D^{\alpha+\beta}$ . Dále lze rozšíření obohatit i o odpovídající zlomkový integrál. Zajímavostí je, že v Riemann–Liouvillově i Caputově rozšíření derivace předcházelo rozšíření integrálu pomocí Cauchyho vzorce pro opakovanou integraci.

Po praktické stránce by bylo ideální práci rozšířit o více aplikací zlomkových derivací. V práci jsme rozebrali aplikaci na tlumené kyvadlo, které bere v potaz odpor vzduchu a velkou úvodní výchylku. Tento odpor jsme uvažovali přímo úměrný rychlosti kyvadla. Pro komplikovanější prostředí popsané například v práci [13] uvažujeme, že odpor prostředí je úměrný neceločíselné derivaci polohy oscilátoru. Tento koncept také označujeme jako *zlomkové třecí síly* [3].

Naše rozšíření můžeme dále aplikovat v několika oborech a využít zde jeho výhody, které má oproti standardním rozšířením. Jedním z nich je například aplikace v kvantové fyzice a vlnové rovnici [3]. Uvedené rozšíření lze použít v mnoha dalších oborech, kde jsou využívány zlomkové derivace, jako například v biologii, ekonomii či strojírenství [10].

## Závěr

V práci jsme představili nelokální rozšíření operátoru derivace do všech nezáporných reálných řádů. Hlavní podmínka tohoto rozšíření vyplynula z pozorované paralely mezi posloupnostmi a odpovídajícími diferenciálními rovnicemi. Využili jsme metod komplexní analýzy jako je obecná Cauchyho věta a Taylorův rozvoj analytické funkce, abychom formulovali základní tvar tohoto rozšíření. Jeho vlastnosti jsme poté ověřili pomocí dalších postupů s využitím Weierstrassova kritéria a Lebesgueovy věty. Uvedli jsme několik příkladů funkcí  $\lambda_n(t)$ , které v tomto rozšíření figurují. Vyřešili jsme několik příkladů, které jsme doplnili o grafy vytvořené v Pythonu. Uvedenou zlomkovou derivaci jsme využili k modelování tlumeného kyvadla pomocí zlomkové diferenciální rovnice.

## Literatura

- [1] R. Erben. “Matematická biologie: Populační modely, dynamika a chaos”. In: *Rozhledy matematicko-fyzikální* 95.1 (2020), s. 1–10.
- [2] T. Gamelin. *Complex Analysis*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2003. ISBN: 9780387950693.
- [3] R. Herrmann. *Fractional Calculus: An Introduction for Physicists*. World Scientific, 2011. ISBN: 9789814340243.
- [4] J. Malý. *Teorie míry a integrálů*. 2016. URL: <https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~maly/files/tmi16.pdf>.
- [5] Logistic map. *Logistic map – Wikipedia, the free encyclopedia*. 2021. URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Logistic\\_map](https://en.wikipedia.org/wiki/Logistic_map).
- [6] I. Podlubny. *Fractional Differential Equations: An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications*. ISSN. Elsevier Science, 1998. ISBN: 9780080531984.
- [7] Adel Al-rabtah, Vedat Suat Ertürk a Shaher Momani. “Solutions of a fractional oscillator by using differential transform method”. In: *Computers & Mathematics with Applications* 59.3 (2010). Advance in Fractional Differential Equations, s. 1356–1362. ISSN: 0898-1221. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2009.06.036>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0898122109004118>.
- [8] Alvaro H. Salas. *Analytic Solution to the Nonlinear Damped Pendulum Equation*. 2016. URL: <https://www.researchgate.net/publication/290946080>.
- [9] S.H. Strogatz. *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. Studies in Nonlinearity. Avalon Publishing, 2014. ISBN: 9780813349114.
- [10] HongGuang Sun et al. “A new collection of real world applications of fractional calculus in science and engineering”. In: *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 64 (2018), s. 213–231. ISSN: 1007-5704. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2018.04.019>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1007570418301308>.

- [11] Stability theory. *Stability theory – Wikipedia, the free encyclopedia*. 2021. URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Stability\\_theory](https://en.wikipedia.org/wiki/Stability_theory).
- [12] Eric. W. Weisstein. "*Banach Fixed Point Theorem*" *From MathWorld – A Wolfram Web Resource*. URL: <https://mathworld.wolfram.com/BanachFixedPointTheorem.html>.
- [13] M. Zemčiková. "Výpočty a aplikace zlomkového kalkulu". Bakalářská práce. Brno: Vysoké učení technické v Brně, 2011. URL: [https://www.vutbr.cz/www\\_base/zav\\_prace\\_soubor\\_verejne.php?file\\_id=40040](https://www.vutbr.cz/www_base/zav_prace_soubor_verejne.php?file_id=40040).