

**STŘEDOŠKOLSKÁ ODBORNÁ ČINNOST**

Obor č. 1: Matematika a statistika

# **Hausdorffova dimenze fraktálních množin**

Kateřina Panešová  
Ústecký kraj

Teplice, 2020

# STŘEDOŠKOLSKÁ ODBORNÁ ČINNOST

Obor č. 1: Matematika a statistika

## Hausdorffova dimenze fraktálních množin

## The Hausdorff dimension of fractal sets

**Autor:** Kateřina Panešová

**Škola:** Gymnázium Teplice, Československých dobrovolců 530/11, 415 01 Teplice

**Kraj:** Ústecký kraj

**Konzultant:** Mgr. Pavla Hofmanová

Teplice, 2020

## **Prohlášení**

Prohlašuji, že jsem svou práci SOČ vypracovala samostatně a použila jsem pouze prameny a literaturu uvedené v seznamu bibliografických záznamů.

Prohlašuji, že tištěná verze a elektronická verze soutěžní práce SOČ jsou shodné.

Nemám závažný důvod proti zpřístupňování této práce v souladu se zákonem č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon) ve znění pozdějších předpisů.

V Teplicích dne .....

Podpis: .....

## **Poděkování**

Děkuji Mgr. Pavle Hofmanové za milé vedení mé práce.

## **Anotace**

Cílem mé práce je představit čtenáři matematickou teorii popisující fraktální množiny. Jedná se o úvod do fraktální geometrie, podaný formou srozumitelnou studentům středních škol se zájmem o matematiku. V práci shrnuji základní poznatky z teorie míry, které jsou nezbytné pro pochopení problematiky, a doplňuji je o své úvahy, jež směřují čtenáře k porozumění odbornému tématu a k přemýšlení nad významem definic a vět. V praktické části uijeme získané teoretické poznatky k výpočtům Hausdorffovy dimenze fraktálních množin.

## **Klíčová slova**

fraktál; teorie míry; Hausdorffova míra; Hausdorffova dimenze

## **Annotation**

The aim of my thesis is to present the mathematical theory behind the properties of fractal sets. It is a brief introduction into fractal geometry, written in an understandable manner and therefore accessible to high school students interested in mathematics. In this work I summarize the basics of measure theory, which are essential for the readers's comprehension of the topic, and add my personal reflections to make the readers think about the meanings of the definitions and theorems. In the practical part we use the fresh knowledge to find out the Hausdorff dimensions of fractal sets.

## **Keywords**

fractal; measure theory; Hausdorff measure; Hausdorff dimension

# Obsah

Úvod	6
<b>1 Míra a její vlastnosti</b>	<b>9</b>
1.1 Každodenní míry . . . . .	9
1.2 Míra . . . . .	10
1.3 Prostor s mírou . . . . .	15
1.4 Příklady měř . . . . .	18
<b>2 Fraktály</b>	<b>19</b>
2.1 Fraktální struktury v přírodě . . . . .	19
2.2 Matematické fraktály . . . . .	20
2.2.1 Kochova hvězda . . . . .	20
2.2.2 Sierpiňského trojúhelník . . . . .	22
<b>3 Hausdorffova dimenze</b>	<b>26</b>
3.1 Prerekvizity . . . . .	26
3.1.1 Relace uspořádání . . . . .	26
3.1.2 Průměr množiny bodů . . . . .	29

---

3.2	Hausdorffova míra . . . . .	30
3.3	Hausdorffova dimenze . . . . .	33
3.4	Definice fraktálu . . . . .	34
<b>4</b>	<b>Výpočty dimenzí fraktálů</b>	<b>36</b>
4.1	Typické fraktály . . . . .	36
4.1.1	Kochova hvězda . . . . .	36
4.1.2	Sierpiňského trojúhelník . . . . .	37
4.2	Vlastní tvorba . . . . .	38
4.2.1	Protílátka . . . . .	38
	<b>Závěr</b>	<b>41</b>

# Úvod

Pojmu fraktál poprvé použil roku 1975 francouzsko-americký matematik Benoît Mandelbrot [Hyk01] [enc20a]. Svou teorii popsal v knize *Fraktály: Tvar, náhoda a dimenze* [Man75], velký zájem vzbudila její rozšířená verze *Fraktální geometrie přírody* [Man82]. Ve své práci Mandelbrot navázal na článek z roku 1938 *Přírodní dualita statistického rozložení* českého geografa a statistika Jaromíra Korčáka [Kor41]. Korčák empiricky popsal rozložení různých přírodních a demografických jevů v prostředí a všiml si zákonitostí v jejich zdánlivě chaotickém uspořádání [Imr16]. To vedlo Mandelbrota k propojení čistě matematické teorie fraktálů s dalšími vědními disciplínami, zabývajícími se přírodními i sociálními jevy [Imr16]. Fraktály však pronikly také do umění. Dnes je takzvané studium fraktálů, jehož základy Mandelbrot a jeho předchůdci položili, krásnou oblastí matematiky s interdisciplinárním dosahem.

Fraktální množiny však byly známy už o století dříve. V období kolem roku 1870 do oblasti zájmu matematiky pronikly spojité funkce, které však neměly v žádném bodě derivaci. S prvními příklady těchto funkcí přišli Bernhard Riemann a Karl Weierstrass [Hyk01]. Křivky, které jsou grafickou reprezentací těchto funkcí bez derivace, mají fraktální strukturu [Gra03].

Roku 1904 představil švédský matematik Helge von Koch spojitou křivku (známou jako *Kochova hvězda*), ke které ovšem nelze sestrojít tečnu v žádném jejím bodě [Gra03]. Zde chci poukázat na souvislost se zmíněnými funkcemi bez derivace. Narozdíl od nich má Kochova hvězda velmi názornou geometrickou interpretaci. Je vhodné poznamenat, že Kochova křivka dobře ilustruje jednu z možných vlastností fraktálů: přestože se jedná o „nekonečně složitý útvar“ z hlediska diferencovanosti, vzniká opakováním jednoduchých kroků (viz obrázek 2.1 na straně 21). Položme si nyní otázku, jak definovat fraktál. Protože klasické úvahy o soběpodobnosti nepopisují všechny fraktální útvary, je definice fraktálu poměrně fluidní. Důležitým mezníkem



v definování fraktální struktury bylo zavedení *Hausdorffovy*, neboli fraktální míry roku 1918 německým matematikem a zakladatelem moderní topologie Felixem Hausdorffem [Hau18]. S touto mírou úzce souvisí pojem fraktální dimenze, jejíž hodnota je pro většinu fraktálů ostře větší než dimenze topologická.

Záměrem této práce je srozumitelnou formou vysvětlit základy matematické teorie stojící za pojmem fraktál.

Nejprve je třeba úvodu do teorie míry. Na takto pevném podkladu je následně možné vystavět teorii ozřejmující nutnost zavedení Hausdorffovy míry. Vysvětleny budou vlastnosti Hausdorffovy míry a její užití, k čemuž se váže stěžejní pojem *Hausdorffova dimenze*.

Druhá část této práce se soustředí na výpočty fraktálních dimenzí známých fraktálních množin a mnou navrženého fraktálu.

# Kapitola 1

## Míra a její vlastnosti

V této kapitole se vydáme od intuitivní představy míry (tedy co bychom chtěli, aby míra splňovala) k formální definici, která obsáhne naše požadavky na vlastnosti míry a zároveň míru jasně a přesně definuje.

### 1.1 Každodenní míry

V běžném životě často měříme různé věci a je pro nás přirozené měřit např. rozměry obrazu v jednotkách délky, ale objem vody na uvaření špaget v jednotkách krychlových. Zkusíme si koncept měření zobecnit.

**Definice 1.1.1.** *Zobrazením  $f$  množiny  $A$  do množiny  $B$  rozumíme cokoli, co každému prvku  $a \in A$  přiřadí právě jeden prvek z  $B$ . Ten pak značíme  $f(a)$ .*

Představme si, že chceme měřit délku úsečky. Přiložíme pravítko a zjistíme, že délka úsečky je 2 cm. Shrňme si to; vstupní hodnotou byla úsečka a výstupem pak její délka v centimetrech. Můžeme tedy definovat délku úsečky jako zobrazení, které každé úsečce přiřadí její délku v centimetrech. Zde je množinou  $A$  množina všech úseček a množinou  $B$  je množina kladných reálných čísel.

Nyní se zamysleme nad tím, co od měření délky úsečky očekáváme. Zřejmě předpokládáme, že spojením úseček různých délek vznikne úsečka o

délce rovné součtu délek původních úseček. Další předpoklad, který se nám zdá samozřejmý, je požadavek, aby prázdná množina měla nulovou délku.

Pro přehlednost budeme zapisovat úsečky pomocí intervalů. Představme si, že měřená úsečka leží na číselné ose a její krajní body jsou určeny čísly 1,41 a 3,14. Zaveďme zobrazení  $f$ , které každému uzavřenému intervalu přiřadí délku odpovídající úsečky. Potom  $f(\langle 1,41; 3,14 \rangle) = 1,73$  a obecně  $f(\langle a; b \rangle) = b - a$ . První předpoklad tedy zapíšeme  $f(\langle a; b \rangle) = f(\langle a; r \rangle) + f(\langle r; b \rangle)$  pro libovolné  $r \in \langle a; b \rangle$ . Druhý předpoklad lze zapsat jako  $f(\langle a; a \rangle) = 0$ .

*Poznámka.* V definici zobrazení  $f$  jsme mlčky předpokládali, že  $a \leq b$ . Rozšíříme-li však definici o  $f(\langle a; b \rangle) = b - a$  i pro  $a > b$  (tzn. hodnota  $f$  bude záporná), je zápis prvního předpokladu platný pro libovolné reálné  $r$ <sup>1</sup>.

Naše zobrazení *délka* zřejmě dokáže měřit (tj. přiřadit měřené množině kladné reálné číslo) jakoukoli konečnou křivku. Pokud však zobrazíme množinu 10 bodů zakreslených na papíře, hodnota délky bude 0. Naopak bude-li vstupem čtverec o straně 2 cm, výstupní hodnota nepůjde vyjádřit žádným reálným číslem; můžeme ji značit symbolem  $\infty$ . Tyto vlastnosti jsou inspirací pro zavedení Hausdorffovy dimenze, k čemuž se dostaneme v kapitole 3.

## 1.2 Míra

**Definice 1.2.1.** Zobrazení  $\mu : P(X)^2 \mapsto \langle 0; \infty \rangle$  nazveme *mírou* na množině  $X$ , pokud

$$(i) \mu(\emptyset) = 0$$

$$(ii) \mu(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k), \text{ kdykoli } A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \text{ } (\sigma\text{-subaditivita}).$$

*Poznámka.* Značením  $\langle 0; \infty \rangle$  myslíme zleva uzavřený interval  $\langle 0; \infty \rangle$  sjednocený s  $\{\infty\}$ . Symbol  $\infty$  je v teorii míry dodefinován pro množiny, jejichž míra je větší než jakékoli reálné číslo.

*Poznámka.* Ve většině textů je tato míra nazývána *vnější mírou*, pojmem míra se pak myslí  $\mu$  omezená pouze na  $\mu$ -měřitelné množiny. K propojení

<sup>1</sup>toto zobrazení už však nebude mírou - viz definice 1.2.1

<sup>2</sup> $P(X)$  je potenční množina neboli množina všech podmnožin množiny  $X$

této míry a vnější míry se dostaneme za chvíli, pro začátek mi přijde srozumitelnější začít vnější mírou.

*Poznámka.* Ze subaditivity plyne, že  $\mu(A) \leq \mu(B)$ , kdykoli  $A \subseteq B$ .

Abychom završili intuitivní úvod do teorie míry, zbývá rozebrat definici míry na příkladu délky. Množinou  $X$  je zde množina reálných čísel, vizuálně číselná osa, potenční množinu  $P(X)$  (množina podmnožin  $X$ ) tvoří podmnožiny reálných čísel. Je vidno, že zdaleka ne všem podmnožinám lze přiřadit délku intervalu. Podmínka (i) je zřejmá, podmínka (ii) říká, že délka intervalu je vždy menší nebo rovna součtu délek intervalů, které dohromady daný interval pokrývají. To je zobecnění požadavku, aby součet délek úseček byl roven délce úsečky vzniklé spojením původních.

Několikrát byl zmíněn pojem *měřitelnost*. Lidově řečeno to znamená, zda je pomocí dané množiny možné měřit jiné množiny, jak vyplývá z definice níže. Zajímavé připodobnění je také toto: „ $\mu$ -měřitelná množina je nůž, který rozřízne každou množinu aditivně“ [Net16].

**Definice 1.2.2.** Nechť  $\mu$  je míra na množině  $X$ . Množinu  $A \subset X$  nazveme  $\mu$ -měřitelnou, jestliže pro každou množinu  $B \subset X$  platí:

$$\mu(B) = \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A)$$

*Poznámka.* Všimněme si, že množina  $A$  je  $\mu$ -měřitelná, právě tehdy když je  $\mu$ -měřitelná i množina  $X \setminus A$ .

Měřitelné množiny mají některé pěkné vlastnosti. Například měřitelnost je uzavřená na spočetná sjednocení i spočetné průniky.

**Věta 1.2.1** (Vlastnosti měřitelných množin). *Nechť  $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$  je posloupnost  $\mu$ -měřitelných množin.*

1. Sjednocení  $\cup_{k=1}^{\infty} A_k$  a průnik  $\cap_{k=1}^{\infty} A_k$  jsou  $\mu$ -měřitelné.
2. Pokud jsou množiny  $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$  disjunktní, tak

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$$

*Důkaz.* 1. Nejprve ukážeme, že sjednocení dvou  $\mu$ -měřitelných množin je  $\mu$ -měřitelné. Musíme tedy ukázat rovnost

$$\mu(B) = \mu(B \cap (A_1 \cup A_2)) + \mu(B \setminus (A_1 \cup A_2))$$

kde  $B$  je libovolná (tzv. testovací) podmnožina  $X$  a  $A_1, A_2$  jsou  $\mu$ -měřitelné množiny z posloupnosti  $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ . Ze  $\sigma$ -subaditivity (podmínky (ii) v definici 1.2.1) plyne nerovnost

$$\mu(B) \leq \mu(B \cap (A_1 \cup A_2)) + \mu(B \setminus (A_1 \cup A_2))$$

takže stačí dokázat nerovnost opačnou.

$$\begin{aligned} \mu(B) &= \\ &= \mu(B \cap A_1) + \mu(B \setminus A_1) \\ &= \mu(B \cap A_1) + \mu((B \setminus A_1) \cap A_2) + \mu((B \setminus A_1) \setminus A_2) \\ &\geq \mu(B \cap (A_1 \cup A_2)) + \mu(B \setminus (A_1 \cup A_2)) \end{aligned}$$

V úpravě jsme využili postupně  $\mu$ -měřitelnosti množin  $A_1$  a  $A_2$  a toho, že  $B \cap (A_1 \cup A_2) \subseteq (B \cap A_1) \cup ((B \setminus A_1) \cap A_2)$ , což díky  $\sigma$ -subaditivě dává nerovnost v posledním řádku.

*Poznámka.* Jak již bylo uvedeno, získaná nerovnost je postačující, neboť opačná nerovnost plyne ze  $\sigma$ -subaditivity. Ovšem mohli bychom rovnou odvodit rovnost, např. takto

$$\begin{aligned} \mu(B \cap A_1) + \mu((B \setminus A_1) \cap A_2) &= \\ &= \mu((B \cap (A_1 \cup A_2)) \cap A_1) + \mu((B \cap (A_1 \cup A_2)) \setminus A_1) \\ &= \mu(B \cap (A_1 \cup A_2)). \end{aligned}$$

Pro lepší představu o sjednoceních a průnicích množin pomůže načrtnout si Vennův diagram.

Celkově dostáváme, že pokud jsou  $A_1, A_2$   $\mu$ -měřitelné množiny, je  $\mu$ -měřitelné i sjednocení  $A_1 \cup A_2$ . Z matematické indukce pak plyne, že sjednocení *konečného* počtu  $\mu$ -měřitelných množin je  $\mu$ -měřitelné.

2. Zajímavým způsobem ukážeme, že i průnik konečně mnoha  $\mu$ -měřitelných množin je  $\mu$ -měřitelný. A sice tak, že převedeme případ průniku na případy, které již máme dokázané, totiž že množina je  $\mu$ -měřitelná, jen pokud je  $\mu$ -měřitelný i její doplněk, a že sjednocení  $\mu$ -měřitelných množin je  $\mu$ -měřitelné. Vyjděme z rovnosti množin

$$X \setminus (A_1 \cap A_2) = (X \setminus A_1) \cup (X \setminus A_2)$$

Jelikož oba doplňky  $X \setminus A_1, X \setminus A_2$  jsou  $\mu$ -měřitelné, je i jejich sjednocení  $\mu$ -měřitelné. To je ale rovno doplňku  $X \setminus (A_1 \cap A_2)$  množiny  $(A_1 \cap A_2)$ , která je tudíž také  $\mu$ -měřitelná, což jsme chtěli ukázat. Proto je průnik konečně mnoha  $\mu$ -měřitelných množin  $\mu$ -měřitelný.

Pro rozšíření  $\mu$ -měřitelnosti na spočetná sjednocení potřebujeme následující lemma.

**Lemma 1.2.2.** *Nechť  $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$  je posloupnost podmnožin množiny  $X$ . Definujme  $B_k = A_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} A_j$ . Množinu  $B_k$  si lze představit laicky jako to, co zbyde z  $A_k$  po odebrání všech předchozích množin v posloupnosti. Důsledkem je, že množiny  $B_k$  jsou po dvou disjunktní a  $\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ . Snadno nahlédneme rovnost  $B_k = (A_k^c \cup \bigcup_{j=1}^{k-1} A_j)^c$ , kde  $M^c$  značí doplněk  $X \setminus M$ .*

3. Díky lemmatu 1.2.2 lze z posloupnosti  $\mu$ -měřitelných množin, o kterých nic víc nepředpokládáme, vyrobit posloupnost po dvou disjunktních množin pouze použitím konečného sjednocení a doplňku. Uzavřenost  $\mu$ -měřitelnosti na konečná sjednocení a doplněk jsme však již dokázali, takže nic nebrání vytvoření posloupnosti  $\mu$ -měřitelných *disjunktních* množin. To se brzy bude hodit, neboť pro disjunktní množiny dokážeme uzavřenost  $\mu$ -měřitelnosti na *spočetná* sjednocení - a podle lemmatu 1.2.2 nahradíme sjednocení disjunktních množin sjednocením množin ne nutně disjunktních.

Nechť tedy  $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$  je posloupnost po dvou disjunktních  $\mu$ -měřitelných množin a  $C_0 = \emptyset$ ,  $C_j = \bigcup_{n=1}^j B_n$ ,  $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ . Nechť  $E \subset X$  je libovolná (tzv. testovací) množina. Pišme

$$\begin{aligned} \mu(E \cap C_j) &= \\ &= \mu((E \cap C_j) \cap B_j) + \mu((E \cap C_j) \setminus B_j) = \\ &= \mu(E \cap B_j) + \mu(E \cap C_{j-1}). \end{aligned}$$

*Poznámka.* Uvědomme si, že pro platnost rovnosti  $(E \cap C_j) \setminus B_j = E \cap C_{j-1}$  je nezbytná podmínka disjunktnosti. Bez toho bychom se v důkazu dál nedostali. Teď se konečně ozřejmila nutnost lemmatu 1.2.2.

Podobně bychom pokračovali pro  $C_{j-1}$  atd. Indukcí tedy dostaneme rovnost

$$\mu(E \cap C_j) = \sum_{n=1}^j \mu(E \cap B_n)$$

Z  $\mu$ -měřitelnosti  $C_j$  a z  $(E \setminus C_j) \supset (E \setminus B)$  (neboť  $C_j \subset B$ ) dostaneme

$$\mu(E) = \mu(E \cap C_j) + \mu(E \setminus C_j) \geq \sum_{n=1}^j \mu(E \cap B_n) + \mu(E \setminus B)$$

Využijeme  $\sigma$ -subaditivitu a pro  $j \rightarrow \infty$  dostáváme

$$\begin{aligned} \mu(E) &\geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E \cap B_n) + \mu(E \setminus B) \\ &\geq \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (E \cap B_n)\right) + \mu(E \setminus B) \\ &= \mu(E \cap B) + \mu(E \setminus B) \geq \mu(E). \end{aligned} \tag{1.1}$$

*Poznámka.* Použili jsme množinovou rovnost  $\bigcup_{n=1}^{\infty} (E \cap B_n) = E \cap B$ , která je důsledkem zřejmé rovnosti  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$  (distributivita sjednocení a průniku).

Důsledkem je vztah  $\mu(E) \geq \mu(E)$ , avšak je jasné, že nastává rovnost. Protože jsou znaménka  $\geq$  v 1.1 obklíčena znaménky  $=$ , musí i místo nich nastat rovnost, aby celková rovnost platila.

Z toho pak

$$\mu(E) = \mu(E \cap B) + \mu(E \setminus B)$$

tedy množina  $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$  je  $\mu$ -měřitelná, což jsme chtěli dokázat. Dokázali jsme, že *spočetná* sjednocení  $\mu$ -měřitelných *disjunktních* množin jsou  $\mu$ -měřitelná, a díky lemmatu 1.2.2 jsou *všechna spočetná sjednocení*  $\mu$ -měřitelných množin  $\mu$ -měřitelná.

4. Stejně tvrzení o spočetných průnicích dokážeme opět trikově, analogicky s důkazem  $\mu$ -měřitelnosti konečných průniků  $\mu$ -měřitelných množin. Díky množinové rovnosti

$$X \setminus \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} (X \setminus A_k)$$

kde spočetné sjednocení doplňků  $\mu$ -měřitelných množin, které je z předchozího  $\mu$ -měřitelné, je rovno doplňku spočetného průniku  $\mu$ -měřitelných množin, je tento doplněk  $\mu$ -měřitelný, a tedy i samotný spočetný průnik je  $\mu$ -měřitelný.

Dokázali jsme, že spočetná sjednocení a spočetné průniky  $\mu$ -měřitelných množin jsou  $\mu$ -měřitelné, čímž je vlastnost 1. z věty 1.2.1 dokázána.

5. Nyní dokážeme, že pro disjuntní  $\mu$ -měřitelné množiny platí  $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$ . Navážeme na rovnici 1.1, ze které

mimo předchozího důsledku vyplývá ještě rovnost

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E \cap B_n) + \mu(E \setminus B) &= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (E \cap B_n)\right) + \mu(E \setminus B) \\ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E \cap B_n) &= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (E \cap B_n)\right) \end{aligned}$$

Nahradíme v poslední rovnosti množinu  $E$  množinou  $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ , která je sjednocením po dvou disjunktních  $\mu$ -měřitelných podmnožin  $X$ . Dostáváme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \quad (1.2)$$

Vlastnosti 1.2 se říká  $\sigma$ -aditivita a ještě se s ní setkáme. Důkaz věty 1.2.1 je tímto dokončen.

□

### 1.3 Prostor s mírou

V této části propojíme naši známou (vnější) míru s pojmem, který je ve většině publikací označován jako *míra*. V rámci celé této práce nejsou znalosti z této sekce nezbytné, avšak slouží k lepšímu pochopení souvislostí a k pozdější orientaci v odborných publikacích.

Definujeme nové pojmy:  $\sigma$ -algebra, měřitelný prostor a prostor s mírou.

**Definice 1.3.1** ( $\sigma$ -algebra). Nechť  $X$  je množina a  $P(X)$  její *potenční* množina (množina všech podmnožin  $X$ ). Pak systém podmnožin  $\mathcal{A} \subset P(X)$  zveme  $\sigma$ -*algebrou*, pokud platí

1.  $\emptyset \in \mathcal{A}$
2. Jestliže  $A \in \mathcal{A}$ , pak také  $A^c \in \mathcal{A}$
3. Pro každou posloupnost  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$  množin z  $\mathcal{A}$  platí, že  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$



Říkáme, že  $\mathcal{A}$  je  $\sigma$ -algebrou na  $X$ , neboli že dvojice  $(X, \mathcal{A})$  tvoří **měřitelný prostor**.

Pro  $\sigma$ -algebru platí, že je uzavřená vzhledem ke spočetným sjednocením, spočetným průnikům a k rozdílu množin. V definici se přitom mluví pouze o uzavřenosti na doplněk a spočetná sjednocení. Odvodíme, že podmínky 1., 2. a 3. jsou podmínkami nutnými, avšak postačujícími.

V části 1.2 jsme se setkali s rovností

$$X \setminus \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} (X \setminus A_k)$$

která propojuje sjednocení a průnik. Vidíme, že doplněk spočetného průniku množin z  $\mathcal{A}$  je roven spočetnému sjednocení množin z  $\mathcal{A}$ , a tedy taktéž patří do  $\mathcal{A}$ . A protože  $\mathcal{A}$  je uzavřená vzhledem k doplňkům, je i  $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$  v  $\mathcal{A}$ , takže  $\mathcal{A}$  je uzavřená i vzhledem ke spočetným (tedy i konečným) průnikům. Uzavřenost vzhledem k rozdílu množin vyplývá ze vztahu

$$A \setminus B = A \cap B^c.$$

Zbývá konečně zdefinovat míru, jak je běžně nazývána.

**Definice 1.3.2** (Míra (nejčastěji)). Nechť  $(X, \mathcal{A})$  je měřitelný prostor. Zobrazení  $\mu : \mathcal{A} \mapsto (0; \infty)$  nazýváme *míra*, jestliže

1.  $\mu(\emptyset) = 0$
2. Je-li  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$  posloupnost po dvou disjunktních množin z  $\mathcal{A}$ , pak

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

( $\sigma$ -aditivita)

Trojici  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  nazýváme **prostor s mírou**. Míra tedy narozdíl od vnější míry musí být definována na nějakém měřitelném prostoru, kterým je  $\sigma$ -algebra na nějaké množině. Označení měřitelný prostor není vůbec náhodné, neboť všechny množiny v  $\sigma$ -algebře jsou  $\mu$ -měřitelné.

**Tvrzení 1.3.1.** *Všechny podmnožiny  $X$  tvořící  $\sigma$ -algebru  $\mathcal{A}$  jsou  $\mu$ -měřitelné, přičemž  $\mu$  je míra definovaná na  $(X, \mathcal{A})$ .*

*Důkaz.* Mějme libovolnou množinu  $A \in \mathcal{A}$  a libovolnou testovací množinu  $B \in \mathcal{A}$ . Vlastnost 2. v definici 1.3.2 zřejmě implikuje platnost stejného vztahu i pro konečná sjednocení po dvou disjunktních množin (můžeme zvolit všechny zbývající množiny v posloupnosti  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$  prázdné).

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^j A_n\right) = \sum_{n=1}^j \mu(A_n) \quad (1.3)$$

Sestrojme tedy množiny  $B \cap A$  a  $B \setminus A$ , které jistě leží v  $\mathcal{A}$ . Zřejmě mají prázdný průnik, tedy jsou disjunktní. Proto můžeme podle rovnosti 1.3 psát

$$\mu(B) = \mu((B \cap A) \cup (B \setminus A)) = \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A),$$

čímž jsme ukázali, že libovolná  $A \in \mathcal{A}$  je  $\mu$ -měřitelná, tedy všechny množiny  $\sigma$ -algebry jsou  $\mu$ -měřitelné.  $\square$

Můžeme si položit opačnou otázku, totiž zda pro (vnější) míru  $\mu$  na  $X$  platí, že všechny  $\mu$ -měřitelné množiny tvoří  $\sigma$ -algebru.

**Tvrzení 1.3.2.** *Nechť  $\mu$  je (vnější) míra na  $X$  a  $S$  je množina všech  $\mu$ -měřitelných množin. Pak  $S$  je  $\sigma$ -algebra na  $X$ .*

*Důkaz.* Ověříme vlastnosti  $\sigma$ -algebry.  $S$  je podmnožinou  $P(X)$ , neboť míra  $\mu$  je definována na  $X$ . Dále prázdná množina  $\emptyset$  je  $\mu$ -měřitelná, protože pro všechny  $B \subset X$  platí  $\mu(B) = 0 + \mu(B) = \mu(B \cap \emptyset) + \mu(B \setminus \emptyset)$ , takže  $\emptyset \in S$ . Dále je-li  $A \in S$ , je  $A$   $\mu$ -měřitelná, a tedy  $\mu(B) = \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A) = \mu(B \setminus A^c) + \mu(B \cap A^c)$ , takže i  $A^c \in S$ .

Zbývá dokázat uzavřenost  $S$  vzhledem ke spočetným sjednocením. To ale znamená ukázat, že sjednocení spočetně mnoha  $\mu$ -měřitelných množin je  $\mu$ -měřitelné, což říká již dokázaná věta 1.2.1. Tedy  $S$  je skutečně  $\sigma$ -algebra.  $\square$

Vnější míra  $\mu$  se na  $S$  stává mírou, neboť vlastnost 2. z definice 1.3.2 jsme již dokázali ve větě 1.2.1 a vlastnost 1. je zřejmá.

Tím je završeno propojení vnější míry a míry. Závěrem je, že omezíme-li (vnější) míru  $\mu$  pouze na množinu měřitelných podmnožin  $X$ , je tato zúžená (vnější) míra mírou v běžném slova smyslu, tzn. zúžená míra a množina měřitelných podmnožin  $X$  tvoří prostor s mírou (zapisujeme  $(X, S, \mu|_S)$ ).

*Úmluva.* V dalších částech tohoto textu budeme z praktických důvodů užívat názvu **míra** pro vnější míru.

## 1.4 Příklady měr

Síla důkazů vlastností míry a  $\mu$ -měřitelných množin tkví v jejich obecnosti. V důkazech jsme vycházeli pouze z uvedených předpokladů, a proto lze dokázané vlastnosti aplikovat na úplně libovolný matematický objekt splňující dané podmínky. Abstraktní přístup nejenže šetří práci s dokazováním stejné vlastnosti v mnoha specifických případech, ale umožňuje vyslovit dokázaná tvrzení i o ještě nemyšlených objektech.

V našem případě to pak znamená, že ať si vymyslíme sebezběsilejší zobrazení, které však bude splňovat definici míry, budou pro něj všechny dokázané vlastnosti míry platit.

Pro ilustraci uvedeme některé známé příklady měr [Mal16] [Net16].

1. **Počítací míra** na  $\mathbb{N}$  přiřadí každé podmnožině  $\mathbb{N}$  počet jejích prvků.

$$\mu_p(\{1; 2; 3; 5; 8\}) = 5 \quad \mu_p(n \in \mathbb{N} | n = 2k, k \in \mathbb{N}) = \infty$$

2. **Pravděpodobnostní míra** je míra  $P$ , jejímž oborem hodnot je  $\langle 0; 1 \rangle$ . Pravděpodobnostní prostor  $\Omega$  je množinou všech elementárních jevů (výsledků), které mohou nastat. V teorii pravděpodobnosti se podmnožiny  $\Omega$  nazývají jevy a pravděpodobnostní míra jim přiřazuje pravděpodobnost, s jakou nastanou [Roz18]. Všimněme si, že s pravděpodobností zacházíme intuitivně jako s mírou, např. pravděpodobnost, že na kostce padne 1 nebo 2, počítáme jako součet  $P(1) + P(2)$ <sup>3</sup>.
3. **Hausdorffova míra** slouží k měření objektů (množin) v  $n$ -rozměrném prostoru. Kterou vlastnost objektu zrovna měříme, závisí na dimenzi Hausdorffovy míry, tato míra je tedy zobecněním počítací míry, délky, plochy i objemu. Navíc s ní jsme schopni měřit v topologických dimenzích neměřitelné fraktály. Hausdorffova míra je klíčovým pojmem této práce, a proto je jí věnována kapitola 3.

---

<sup>3</sup>Zájemcům doporučuji skvělý a srozumitelný seriál Matematického korespondenčního semináře [Roz18]. Najdete ho na <https://prase.cz/index.php> nebo na odkazu v bibliografii.

# Kapitola 2

## Fraktály

Cílem této kapitoly je zprostředkovat rozvahu nad fraktálními množinami. Začneme od našich představ fraktálu založených na zkušenosti a intuici a pokusíme se tyto představy zobecnit a zmatematizovat. Zamyslíme se nad měřením délky, plochy či objemu fraktálů, na což navážeme v následující kapitole.

Namísto uvedení formální definice fraktálu bez potřebných prerekvizit se pokusíme složit intuitivní obrázek fraktálu.

### 2.1 Fraktální struktury v přírodě

Zdá se, že příroda si fraktály velmi oblíbila. Vyskytují se jak ve formě soběpodobných útvarů, tak jako nesoběpodobné, nýbrž pouze fraktálně složitě a diferencované útvary.

Podstatnou odnož fraktálů tvoří soběpodobné útvary, které vznikají opakováním stále stejné struktury na všech úrovních. To znamená, že drobný výřez je jen zmenšeninou celého fraktálu, neboli že přiblížením fraktálu získáme obraz celého fraktálu. Každá jeho část tak obsahuje informaci o celku. Lze si to představit i tak, že kdybychom se náhodou ocitli na fraktálu, nepoznali bychom, v jakém měřítku se nacházíme.

Princip soběpodobnosti je hojně využíván v přírodě, což je z ekonomického hlediska velmi logické - k zakódování složitých struktur stačí malé

množství informace. Příkladem může být růžice kvěťáku, sněhová vločka nebo tvar blesku na obloze. V lidském těle se fraktálně větví průdušky a průdušinky plic, krevní i lymfatické cévy, fraktální strukturu mají játra, ledviny i sliznice střev. Nesmíme zapomenout ani na nervovou soustavu včetně mozku. Zajímavé je, že fraktální princip se objevuje nejen ve statických tvarech, ale i v průběhu biochemických dějů - na jedné straně imunitní reakce a množení bakterií či šíření infekce na straně druhé [Klí15].

Pojem fraktál však nezahrnuje pouze soběpodobné útvary. Myslí se jím jakékoli velmi složité, rozrůzněné a zakřivené tvary a plochy, takové, které si i pod značným zvětšením zachovávají drsnou strukturu. Pobřežní linie Norska či Velké Británie i zčeřená mořská hladina vykazují znaky fraktálu [San17].

Avšak žádná fraktální struktura v přírodě není geometricky dokonalá, nerozrůžňuje se donekonečna, jako je tomu u abstraktních fraktálů. Fraktál je samozřejmě pouhým výplodem lidské mysli, ve viditelném světě se nevyskytuje. Mnoho živých i neživých soustav však bezchybný fraktál dobře napodobuje, a to je důvodem, proč je zajímavé fraktály zkoumat nejen pro jejich matematickou krásu.

## 2.2 Matematické fraktály

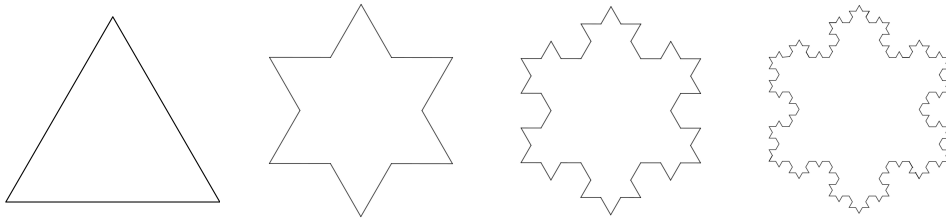
### 2.2.1 Kochova hvězda

Jedním z nejznámějších fraktálů je Kochova křivka. Vzniká iterací (opakováním) tohoto kroku:

1. Vezměme úsečku a rozdělme ji na třetiny.
2. Nad prostřední třetinou vztýčme rovnostranný trojúhelník.
3. Umažme základnu trojúhelníka (prostřední třetinu úsečky).

Tento postup nyní opakujeme na všech nově vzniklých úsečkách. Složením tří Kochových křivek v rovnostranný trojúhelník vzniká Kochova hvězda.

Kochova hvězda je typickým příkladem soběpodobného fraktálu. Proto se s ní snadno počítá.



Obrázek 2.1: Výchozí trojúhelník a první tři iterace Kochovy hvězdy

Ze zvláštní vlastnosti nekonečného opakování stejného vzorce a v podstatě nekonečného zakřivování můžeme usuzovat na podobně zvláštní vlastnosti, co se měření týče. Intuitivně, zkrátka protože je to křivka, zkusíme změřit její délku. Odvodíme vzorec pro délku  $n$ -té iterace, označme ji  $d_n$ . Jednotkou délky je zde strana původního trojúhelníku.

$$\diamond d_0 = 3 \cdot 1$$

$$\diamond d_1 = 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3}$$

$$\diamond d_2 = 3 \cdot 4^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$\diamond d_3 = 3 \cdot 4^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3$$

...

$$\diamond d_n = 3 \cdot 4^n \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Pro  $n \rightarrow \infty$  je skutečná délka obvodu Kochovy hvězdy rovna

$$3 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n.$$

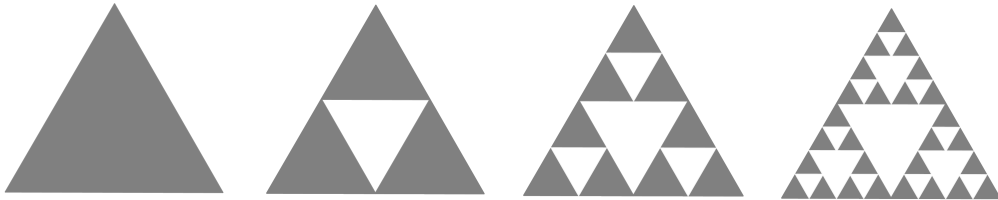
Jelikož však  $\frac{4}{3} \geq 1$ , je délka obvodu Kochovy hvězdy větší než kterékoli reálné číslo, v teorii míry používáme symbol  $\infty$ . Délku Kochovy křivky tedy můžeme považovat za nekonečnou. Na druhou stranu nyní postrádá smysl počítat obsah či objem této křivky, neboť je nejspíš nulový.

Kochovu křivku jsme definovali pomocí iterace určitého kroku. Obráceným způsobem tvorby opět soběpodobného fraktálu je rekurze, která není ničím jiným, než tzv. vnořováním objektu do sebe sama.

### 2.2.2 Sierpiňského trojúhelník

Tento známý fraktální obrazec, někdy nazývaný Sierpiňského koberec, je definován takto:

1. Mějme plný rovnostranný trojúhelník.
2. Vyjměme z něj menší trojúhelník určený středními příčkami původního trojúhelníka.
3. Ve všech nově vzniklých plných trojúhelnících proved'eme stejnou akci a tento krok opakujme.



Obrázek 2.2: Výchozí trojúhelník a tři rekurze Sierpiňského trojúhelníka

Narozdíl od Kochovy křivky, která se neustále plošně rozrůstá, původně plošný trojúhelník postupně mizí. Proto se nabízí otázka obsahu Sierpiňského trojúhelníka. Necht'  $S_n$  značí obsah  $n$ -tého rekurzivního vykreslení a jednotkou obsahu je obsah původního trojúhelníka.

- ◇  $S_0 = 1$
- ◇  $S_1 = 1 - \frac{1}{4}$
- ◇  $S_2 = S_1 - 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot S_1$
- ◇  $S_3 = S_2 - 3^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} S_2$

Ze zápisu je patrný postup: Z předcházející rekurze odstraníme z každého plného trojúhelníka menší trojúhelník o čtvrtěním obsahu - celkově pro  $k$  plných trojúhelníků v dané rekurzi odstraníme  $k$ -krát obsah čtvrtiny z  $k$ -tiny obsahu dané rekurze Sierpiňského trojúhelníku. Úpravou dostaneme, že

odstraníme celkem  $k$   $k$ -tin čtvrtin obsahu dané rekurze Sierpiňského trojúhelníka, *rekurzivní vzorec*<sup>1</sup> tedy můžeme zjednodušit na

$$S_n = S_{n-1} - \frac{1}{4}S_{n-1} = \frac{3}{4}S_{n-1}.$$

Z tohoto rekurzivního předpisu už snadno určíme vzorec pro  $n$ -tý člen:

$$S_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

Zatímco se  $n$  blíží k nekonečnu, obsah Sierpiňského trojúhelníka se limitně blíží nule. Perfektní Sierpiňského trojúhelník má tedy nulový obsah. Přejděme tedy o dimenzi níže; jakou má délku?

Zdá se to irelevantní, počítat délku zdánlivě plošného útvaru. Každopádně je třeba nejdřív najít křivku, která celý Sierpiňského trojúhelník vykreslí, a poté vypočítat délku té křivky. Taková křivka existuje a pracovně jí budeme říkat Sierpiňského křivka<sup>2</sup>, přestože je pouhou analogií křivky zvané Sierpiňského, která místo trojúhelníku vyplňuje čtverec. Vzniká iterací podobně jako Kochova křivka, postup je následující:

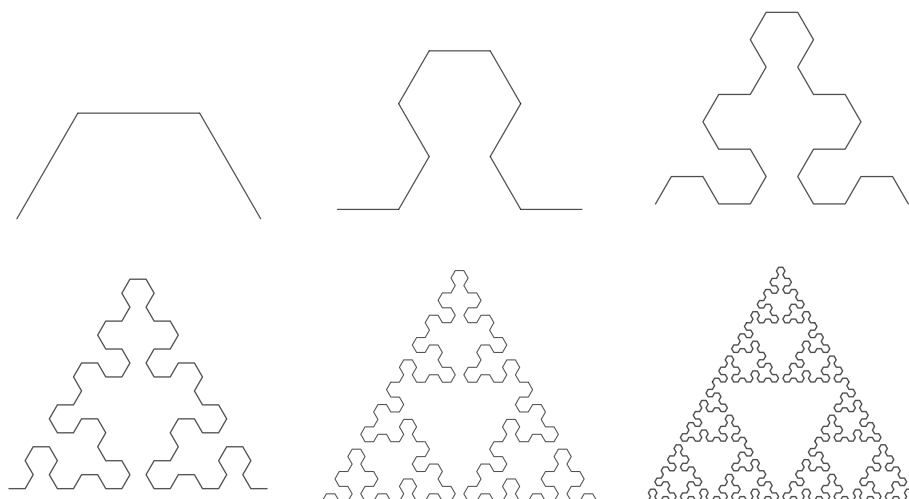
1. Mějme rovnou úsečku.
2. Nahradíme ji lomenou čarou opisující obvod poloviny pravidelného šestiúhelníku, a to podle orientace úsečky; prostřední část nahradivší lomené čáry bude rovnoběžná s nahrazenou úsečkou. Dále platí:
  - (a) Směřuje-li úsečka severovýchodně, bude nahrazena lomenou čarou vypouklou směrem šikmo dolů.
  - (b) Je-li úsečka vodorovná, bude nahrazena lomenou čarou vypouklou nahoru.
  - (c) Směřuje-li úsečka jihovýchodně, bude nahrazena lomenou čarou vypouklou směrem šikmo dolů.
3. S nově vzniklými úsečkami opakujeme předchozí kroky.

Pro představu pomůže obrázek.

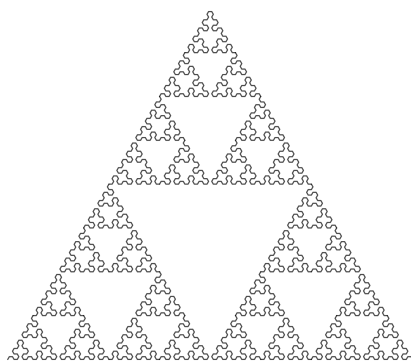
<sup>1</sup>definovaný pomocí předchozí členu

<sup>2</sup>v angličtině pod názvem Sierpiński arrowhead curve



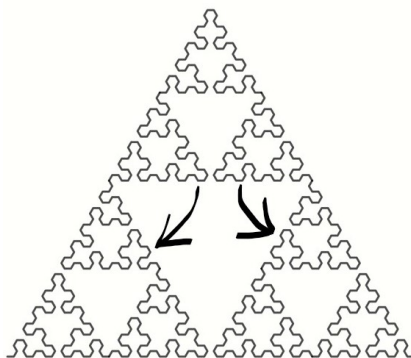


Obrázek 2.3: Prvních 6 iterací „Sierpiňského křivky“



Obrázek 2.4: „Sierpiňského křivka“ 7. řádu

Proces tvorby této křivky si můžeme představit ještě jinak: stávající křivku zmenšíme na  $\frac{1}{2}$  a přesuneme ji do horní poloviny obrazu. Poté ji za pravý a levý dolní roh „rozbalíme“ směrem dolů, neboli zobrazíme ji v otočení o  $120^\circ$  se středem v pravém dolním rohu a o  $240^\circ$  se středem v levém dolním rohu, jak je vyobrazeno níže. Tato křivka je v limitě totožná



Obrázek 2.5: Alternativní pohled na tvorbu „Sierpiňského křivky“

s Sierpiňského trojúhelníkem. Důkaz tohoto tvrzení však značně přesahuje odbornost této práce. Všimněme si však, že se křivka zdá být odpuzována bílými trojúhelníky, které jsme před chvílí vyjímali v rekurzích Sierpiňského trojúhelníku. Fakt, že křivka nikdy nezasáhne do prázdných trojúhelníků, jehož důkaz zde pomineme, si lze představit pomocí výše popsaného „rozbalování“ křivky.

Jaká by byla délka této křivky? Počítejme; v každém kroku se křivka prodlouží o polovinu své délky, pro  $n$ -tou iteraci tedy dostáváme délku  $(\frac{3}{2})^n$ , což se limitně blíží nekonečnu.

Přitom Sierpiňského trojúhelník není nekonečně rozsáhlý, aby jej nějak nešlo změřit. Potíží je v tom, že jsme dosavadně měřili pouze délku a obsah, což jsou míry v celočíselných dimenzích. Můžeme si představit, že se Sierpiňského trojúhelník skládá z určitého materiálu či hmoty, u které však nemůžeme určit konečnou délku ani nenulový obsah, avšak můžeme spočítat jakousi analogii délky a obsahu, míru, která je vlastní útvaru o dimenzi Sierpiňského trojúhelníka.

# Kapitola 3

## Hausdorffova dimenze

Zásadní koncept v teorii míry uvedl roku 1918 německý matematik Felix Hausdorff ve své publikaci *Dimension und äußeres Maß* [Hau18]. Definoval  $s$ -rozměrnou Hausdorffovu míru, která je vnější mírou na metrickém prostoru (pro naše účely budeme pracovat s podmnožinami  $\mathbb{R}^n$ ) a zobecňuje pojem délky, plochy i  $s$ -rozměrného objemu, avšak  $s$  vůbec nemusí být přirozené číslo.

Touto stěžejní kapitolou nás budou provázet pojmy *Hausdorffova míra* a *Hausdorffova dimenze*.

### 3.1 Prerekvizity

Definice Hausdorffovy míry může na první pohled působit děsivě. Proto nejprve vysvětlíme všechny potřebné pojmy a části definice, a s pojmem Hausdorffova míra se potom setkáme jako se starou známostí.

#### 3.1.1 Relace uspořádání

*Relaci* na množině chápeme jako nějaký vztah či podmínku, která se týká dvou prvků množiny a je pro ně buď pravdivá, nebo nepravdivá. Příkladem mohou být relace na celých číslech; relace **větší než**, **rovná se** nebo **je dělitelem**. Uvědomme si, že může záležet na pořadí prvků v relaci. Mezi

relace týkající se množin patří např. relace **je podmnožinou**.

**Definice 3.1.1.** *Uspořádání* je relace  $R$  (na nějaké množině  $X$ ), která je:

1. *reflexivní*;  $\forall x \in X : xRx$ , tedy každý prvek množiny je v relaci sám se sebou
2. *tranzitivní*;  $\forall x, y, z \in X : xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$ , neboli pokud jsou je  $x$  v relaci s  $y$ , které je v relaci se  $z$ , je nutně  $x$  v relaci se  $z$ .
3. *antisymetrická*;  $\forall x, y \in X : xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$ , tzn. je-li možné prohodit pořadí prvků v relaci, pak se prvky nutně rovnají.

*Poznámka.* Všimněme si, že tranzitivita i antisymetrie pracují s implikací; důsledek musí být pravdivý, jen pokud je splněna předchozí podmínka (pro tranzitivitu je to  $xRy \wedge yRz$ ). Pokud tato podmínka neplatí, je úplně jedno, zda závěr platí či ne (v případě tranzitivity zda platí  $xRz$ ).

Dále poznamenejme, že v definici uspořádání není zmíněno, že by všechny prvky musely být porovnatelné, tedy že by pro každé dva prvky  $x, y$  platilo  $xRy$  nebo  $yRx$  (nebo obojí).

**Definice 3.1.2.** Množinu, na které je definováno uspořádání, nazvěme *uspořádanou*. Pokud jsou navíc každé dva prvky množiny porovnatelné, nazývá se *úplně uspořádaná*.

*Poznámka.* Někdy se pro rozlišení používá označení *částečně uspořádaná* množina pro uspořádanou množinu.

**Příklad 3.1.3.** ► Relace  $\leq$  je uspořádáním na množině  $\mathbb{R}$ . Množina reálných čísel je úplně uspořádaná.

- Relace  $\subset$  je uspořádáním na množině  $P(\mathbb{N})$  podmnožin množiny přirozených čísel. Potenční množina  $P(X)$  je jen částečně uspořádaná, protože např. neplatí ani  $\{2, 5, 8\} \subset \{3, 42, 1024\}$ , ani  $\{3, 42, 1024\} \subset \{2, 5, 8\}$ , tedy ne všechny podmnožiny jsou porovnatelné.

Zaměřme se nyní na množinu reálných čísel  $\mathbb{R}$ , neboť následující pojmy potřebujeme mít definované právě na ní.

**Definice 3.1.4.** Mějme uspořádání  $\leq$  na  $\mathbb{R}$ . Neprázdná podmnožina  $A \subset \mathbb{R}$  je *zdola omezená*, pokud existuje  $k \in \mathbb{R}$  takové, že pro všechna  $a \in A$  platí  $k \leq a$ . Prvek  $k$  pak nazýváme *dolní mez* množiny  $A$ .

*Poznámka.* Zde je důležité, že množina  $A$  je neprázdná. O prvcích prázdné množiny bychom totiž mohli vyslovit cokoli.

*Poznámka.* Dolních mezí může být dle definice nekonečně mnoho.

**Definice 3.1.5.** Nechť  $A \subset \mathbb{R}$  a  $\leq$  je uspořádání na  $\mathbb{R}$ . Prvek  $x \in A$  je *minimálním* prvkem množiny  $A$ , pokud pro  $\forall a \in A : x \leq a$ .

*Poznámka.* Tato množina je pak zřejmě zdola omezená a  $x$  je jednou z jejích dolních mezí.

Kupříkladu minimálním prvkem množiny přirozených čísel je číslo 1. Nemusíme však chodit daleko, abychom zjistili, že ne všechny zdola omezené množiny mají minimální prvek. Vezměme množinu kladných reálných čísel  $\mathbb{R}^+$ . Zjevně je zdola omezená, dolní mezí je např.  $-4$ . Má však minimální prvek?

**Tvrzení 3.1.1.** *Množina kladných reálných čísel  $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$  nemá minimum.*

*Důkaz.* Pro spor předpokládejme, že existuje prvek  $r \in \mathbb{R}^+$  takový, že pro všechna  $x \in \mathbb{R}^+$  platí: jestliže  $x \leq r$ , tak  $x = r$ . Pak ale existuje prvek  $\frac{r}{2} \in \mathbb{R}^+$ , který je ostře menší než  $r$ , což je spor s předpokladem, že  $r$  je minimum. Minimální prvek množiny kladných reálných čísel tedy neexistuje.  $\square$

Podobně bychom ukázali, že žádný otevřený interval reálných čísel nemá minimum. Proto se zavádí následující pojem.

**Definice 3.1.6.** Mějme zdola omezenou podmnožinu  $A \subset \mathbb{R}$ . Pokud pro její dolní mez  $\lambda \in \mathbb{R}$  platí, že každá další dolní mez  $k \leq \lambda$ , pak  $\lambda$  je *nejvyšší dolní mez* neboli *infimum* množiny  $A$ . Značíme  $\inf A = \lambda$ .

*Poznámka.* Má-li množina minimum, je toto zároveň jejím infimem.

**Tvrzení 3.1.2.** *Každá zdola omezená podmnožina  $A$  reálných čísel má infimum.*

*Důkaz.* Sestrojíme  $\lambda = a_0, a_1 a_2 \dots$  tak, že najdeme nejvyšší celé číslo  $a_0$ , které je dolní mezí  $A$ , následně nejvyšší číslo od 0 do 9 takové, že  $a_0, a_1$  je dolní mezí  $A$  a analogicky pro další  $a_k$ . Kvůli způsobu sestavení je  $\lambda$  zřejmě dolní mezí. Pokud existuje dolní mez  $k > \lambda$ , pak  $k - \lambda > 0$ , a tedy <sup>1</sup>  $k - \lambda > 10^{-n} > 0$  pro

<sup>1</sup>podle podmínky známé jako Archimédova vlastnost

někaké  $n \in \mathbb{N}$ . To znamená, že můžeme  $a_n$  zvýšit o 1, anebo pokud  $a_n = 9$ , můžeme zvýšit o 1 některé předchozí  $a_m < 9$ . Což je spor s definicí  $\lambda$ . Tedy  $\lambda$  je nejvyšší dolní mezí, neboli infimem  $A$ .  $\square$

Analogicky definujeme omezenost shora, maximální prvek množiny a *supremum* (nejnižší horní mez)  $\sup A$ .

### 3.1.2 Průměr množiny bodů

Průměrem v této souvislosti myslíme geometrický průměr, např. průměr kružnice či koule. Definice průměru coby úsečky procházející středem však na méně pravidelná tělesa či útvary nestačí. Pro účely měření nekulatých těles v  $\mathbb{R}^n$  dodefinujeme průměr jako nejdelší úsečku, jejíž koncové body leží na povrchu tělesa (analogicky na obvodu útvaru). To souhlasí s naší intuicí - např. průměrem krychle bude její tělesová úhlopříčka.

Tato „definice“ je však příliš volná, aby stačila na naše abstraktní pojetí množin v prostoru. Zaprvé, množiny mohou mít roztodivné tvary a nemusí být vůbec jasné, která úsečka je nejdelší. Zadruhé, abstraktní množiny bodů nemusejí být tak jasně uchopitelné jako známá tělesa, především vůbec nemusejí mít jasně ohraničený okraj, jedná-li se o tzv. otevřené množiny <sup>2</sup>. V neposlední řadě ještě nevíme, co přesně myslíme pojmem vzdálenost a v jakém prostoru se pohybujeme!

Pro účely této práce pouze lehce nastíníme, jaké pozadí potřebujeme pro přesnou definici průměru tělesa. Zobecněním 3-rozměrného prostoru, ve kterém žijeme, počítáme a měříme průměry těles, je *metrický prostor*. Metrický prostor tvoří množina spolu se zobrazením *metrikou*, která se chová tak, jak bychom očekávali od funkce přiřazující vzdálenost dvěma bodům v dané množině. Metrika tedy splňuje některé intuitivní podmínky: její hodnoty (vzdálenosti) jsou nezáporné; vzdálenost od bodu A do bodu B je stejná jako vzdálenost z B do A; pokud je vzdálenost dvou bodů nulová, jsou tyto body totožné; a splňuje trojúhelníkovou nerovnost [enc20c].

Prostor  $\mathbb{R}^n$  je metrickým prostorem a s vlastnostmi jemu příslušné metriky pracujeme přirozeně, proto tímto ukončíme exkurz do obecných metrických prostorů a budeme se věnovat známému  $n$ -rozměrnému prostoru  $\mathbb{R}^n$ .

<sup>2</sup>analogie otevřených intervalů

Hodnotám euklidovské metriky v  $\mathbb{R}^n$  budeme říkat vzdálenost a značit je rovnými závorkami.

**Definice 3.1.7.** Nechť  $M$  je množina bodů v prostoru  $\mathbb{R}^n$ . Průměr množiny  $M$  definujeme jako nejnižší horní mez vzdáleností mezi body množiny  $M$ . Zapisujeme:

$$\text{diam}(M) = \sup\{|XY|; X, Y \in M\}$$

*Poznámka.* Zde se hodí použít supremum, neboť díky němu můžeme definovat průměr i na otevřených množinách.

## 3.2 Hausdorffova míra

Hausdorffova míra umožňuje měřit velmi malé a geometricky složité podmnožiny  $\mathbb{R}^n$ . Je definovaná pomocí průměrů vhodných pokrytí množiny.

**Definice 3.2.1.** Nechť  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $0 \leq s < \infty$  a  $0 < \delta \leq \infty$ . Definujeme

$$\mathcal{H}_\delta^s(A) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(s) \left( \frac{\text{diam } C_j}{2} \right)^s \mid A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j, \text{diam } C_j \leq \delta \right\},$$

kde

$$\alpha(s) = \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(\frac{s}{2} + 1)}.$$

Zde je  $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx$ , ( $0 < s < \infty$ ), známá gamma funkce.

*Poznámka.*  $\mathcal{H}_\delta^s$  můžeme nazvat Hausdorffovou „předmírou“<sup>3</sup>.

*Vysvětlení definice.* Normalizační konstanta  $\alpha(s)$  je použita, aby Hausdorffova míra odpovídala obsahu 2-rozměrných útvarů a objemu vícerozměrných těles<sup>4</sup>. Nestarejme se tedy nyní o konstantu  $\alpha(s)$ , ale nahlédněme smysl Hausdorffovy předmíry. Je to funkce, která pro danou množinu najde všemožná pokrytí koulemi o průměru menším nebo rovným  $\delta$  a sečte jim přisouzené „objemy“, které jsou definovány vzorcem  $\alpha(s) \left( \frac{\text{diam } C_j}{2} \right)^s$ . Důležité je, že pokrývacích tvarů může být nekonečně mnoho (spočetně). Funkce  $\mathcal{H}_\delta^s$  poté z těchto součtů objemů vezme jejich infimum, tzn. buď nejmenší součet,

<sup>3</sup>jedná se o pracovní překlad anglického premeasure, jak je v některých cizojazyčných publikacích označována

<sup>4</sup>přesněji, pokud  $n$  je přirozené číslo, je  $\alpha(n)$  rovno objemu (Lebesqueově vnější míře)  $n$ -rozměrné jednotkové koule

nebo hodnotu, ke které se součty shora limitně blíží (protože různých pokrytí množiny  $A$  je mnoho a nemusí existovat jedno dokonalé pokrytí, které dokonale obepíná množinu  $A$ <sup>5</sup>). Tím je dosaženo aproximace skutečného objemu množiny s přesností danou velikostí  $\delta$ .

**Definice 3.2.2.** Mějme  $A$  a  $s$  z definice 3.2.1 a definujme  $s$ -rozměrnou Hausdorffovu míru na  $\mathbb{R}^n$

$$\mathcal{H}^s(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(A) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}_\delta^s(A).$$

*Poznámka.* Zatímco se  $\delta$  blíží nule, zvyšují se nároky na průměr pokrývacích množin, tj. jejich průměr musí být menší a menší, čímž se omezuje počet vhodných pokrytí, takže  $\mathcal{H}_\delta^s(A)$  se zmenšující se  $\delta$  rozhodně neklesá, což zdůvodňuje použití suprema.

**Věta 3.2.1.**  $\mathcal{H}^s$  je míra ( $0 \leq s < \infty$ ).

*Důkaz.* Nejprve ukážeme, že  $\mathcal{H}_\delta^s$  je míra. Zřejmě se jedná o zobrazení z  $P(X)$  do  $\langle 0; \infty \rangle$ , tzn. hodnoty  $\mathcal{H}_\delta^s$  jsou nezáporné. Dále chceme ukázat  $\mathcal{H}_\delta^s(\emptyset) = 0$ . Rozdělme to na případy  $s > 0$  a  $s = 0$ . Pro  $s > 0$  pokryjeme prázdnou množinu koulí o jistém poloměru  $r > 0$ , který můžeme libovolně zmenšovat. Potom  $\mathcal{H}_\delta^s(\emptyset) = \alpha(s) \left(\frac{r}{2}\right)^s$ , přičemž když  $r \rightarrow 0$ , blíží se  $\frac{r}{2}$  k nule a  $0^s = 0$ , tedy  $\mathcal{H}_\delta^s(\emptyset) = 0$ . Jestliže  $s = 0$ , hodí se domluvit se, že velikost prázdné množiny umocněná na 0 bude 0, tj.  $|\emptyset|^0 = 0$ .

Zbývá dokázat  $\sigma$ -subaditivitu  $\mathcal{H}_\delta^s$ . Z definice  $\mathcal{H}_\delta^s$  zřejmé, že pokud  $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ , je  $\mathcal{H}_\delta^s(A) \leq \mathcal{H}_\delta^s(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k)$ . Proto stačí dokázat, že pro posloupnost  $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$  podmnožin  $\mathbb{R}^n$  platí

$$\mathcal{H}_\delta^s\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{H}_\delta^s(A_k). \quad (3.1)$$

Pro každé  $A_k$  najdeme množiny  $\{C_j^k\}_{j=1}^{\infty}$  takové, že  $\forall j \in \mathbb{N} : \text{diam } C_j^k \leq \delta$ . Potom množiny  $\{C_j^k\}_{j,k=1}^{\infty}$  pokrývají celé  $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ . Proto

$$\mathcal{H}_\delta^s\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(s) \left(\frac{\text{diam } C_j^k}{2}\right)^s.$$

Vezmeme-li infima z obou stran nerovnice, dostaneme požadovanou nerovnost 3.1.

<sup>5</sup>zde se nabízí analogie s otevřenými intervaly reálných čísel



Pro důkaz, že  $\mathcal{H}^s$  je míra, použijeme nerovnosti

$$\mathcal{H}_\delta^s\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{H}_\delta^s(A_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(A_k),$$

kde  $\mathcal{H}_\delta^s(A_k) \leq \mathcal{H}^s(A_k)$  vyplývá z poznámky u definice 3.2.2. Necháme  $\delta \rightarrow 0$  a dostaneme

$$\mathcal{H}^s\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(A_k).$$

Zbývající vlastnosti míry vyplývají pro  $\mathcal{H}^s$  z již dokázaných vlastností  $\mathcal{H}_\delta^s$ .  $\square$

**Věta 3.2.2.** *Nechť  $A \subset \mathbb{R}^n$  a  $0 \leq s < t < \infty$ . Platí*

1. *Pokud  $\mathcal{H}^s(A) < \infty$ , tak  $\mathcal{H}^t(A) = 0$ .*
2. *Pokud  $\mathcal{H}^t(A) > 0$ , tak  $\mathcal{H}^s(A) = \infty$ .*

*Důkaz.* Všimněme si, že 2. implikace automaticky vyplývá z 1. Dokážeme 1. implikaci. Nechť tedy  $\mathcal{H}^s(A) < \infty$  a  $\delta > 0$ . Najdeme množiny  $\{C_j\}_{j=1}^{\infty}$ , které splňují  $\text{diam } C_j \leq \delta$  a zároveň pokrývají množinu  $A$ . Dokonce existují takové množiny  $\{C_j\}_{j=1}^{\infty}$ , že

$$\mathcal{H}_\delta^s(A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(s) \left(\frac{\text{diam } C_j}{2}\right)^s \leq \mathcal{H}_\delta^s(A) + 1, \quad (3.2)$$

neboť  $\mathcal{H}^s(A) < \infty$ , takže i  $\mathcal{H}_\delta^s(A)$  je konečná, a proto vezmeme-li takové pokrytí  $\{C_j\}_{j=1}^{\infty}$ , které se limitně blíží infimu z definice  $\mathcal{H}_\delta^s(A)$ , dokážeme sumu  $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha(s) \left(\frac{\text{diam } C_j}{2}\right)^s$  obemknout v jednotkovém intervalu.

Dále z již známého vztahu  $\mathcal{H}^s(A) \geq \mathcal{H}_\delta^s(A)$  spolu s nerovností 3.2 dostáváme

$$\sum_{j=1}^{\infty} \alpha(s) \left(\frac{\text{diam } C_j}{2}\right)^s \leq \mathcal{H}^s(A) + 1 \quad (3.3)$$

Nerovnost 3.3 tedy stojí na předpokladu  $\mathcal{H}^s(A) < \infty$ . Dále

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\delta^t(A) &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(t) \left( \frac{\text{diam } C_j}{2} \right)^t \\ &= \frac{\alpha(t)}{\alpha(s)} \cdot 2^{s-t} \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(s) \left( \frac{\text{diam } C_j}{2} \right)^s \cdot (\text{diam } C_j)^{t-s} \quad (3.4) \\ &\leq \frac{\alpha(t)}{\alpha(s)} \cdot 2^{s-t} \cdot \delta^{t-s} (\mathcal{H}^s(A) + 1). \end{aligned}$$

Nyní poznamenejme, že  $\frac{\alpha(t)}{\alpha(s)} \cdot 2^{s-t} \cdot (\mathcal{H}^s(A) + 1)$  je z předchozího nějaké konečné číslo. Jelikož  $t - s > 0$ , bude se spolu s  $\delta \rightarrow 0$  blížit nule i  $\delta^{t-s}$ . Proto pokud v nerovnosti 3.4 pošleme  $\delta \rightarrow 0$ , dostaneme kýžený vztah

$$\mathcal{H}^t(A) = 0.$$

□

### 3.3 Hausdorffova dimenze

Navážeme na větu 3.2.2, její význam nyní rozebereme. Dané  $s$ , resp.  $t$ , určuje dimenzi Hausdorffovy míry, proto jsme  $\mathcal{H}^s$  v definici 3.2.2 nazvali  $s$ -rozměrnou Hausdorffovou měrou na  $\mathbb{R}^n$ . Jedná se o dimenzi, ve které danou množinu měříme, a je typicky menší než dimenze celého prostoru ( $n$ )<sup>6</sup>.

Už v kapitole 2 jsme narazili na množiny, jejichž délka byla nekonečná, ale obsah nulový. Zde bylo  $s = 1$  a  $t = 2$ , protože délka je jedno-rozměrná a obsah 2-rozměrný. Podle věty 3.2.2 ať měříme v jakékoli dimenzi menší než 1, už vždy dostaneme nekonečnou „míru“, a naopak v kterékoli dimenzi větší než 2 naměříme 0. Někde v intervalu  $(1; 2)$  musí být mezní (hraniční, zlomový) bod, v jehož dimenzi naměříme něco smysluplného (pro Kochovu hvězdu a Sierpiňského trojúhelník).

Je to logické. Představme si třeba takový čtverec. Očividně není fraktální. Jedná se dvourozměrný útvar. Když jej chceme měřit, měříme jeho obsah, ani nás nenapadne měřit jeho délku (nanejvýš délku jeho obvodu, což ale není „délka čtverce“) ani jeho objem - první by vyšlo  $\infty$  a druhé 0.

<sup>6</sup>Dá se dokázat, že pokud  $s > n$ , tak  $\mathcal{H}^s = 0$  na  $\mathbb{R}^n$ . Např. zde [EG92]

Proto nám u Kochovy hvězdy a Sierpiňského trojúhelníka vycházela tak neočekávaná čísla. Jednoduše jsme je neměřili v jim příslušné dimenzi, kterou rozhodně není dimenze topologická. Topologická dimenze je nám známá, běžně s ní pracujeme, např. rovina má topologickou dimenzi 2, bod 0 a přímka 1. Fraktály však leží jaksi mezi topologickými dimenzemi a až Hausdorffova míra nám je dovoluje měřit.

To vede k následující definici.

**Definice 3.3.1** (Hausdorffova dimenze). *Hausdorffova (fraktální) dimenze* podmnožiny  $A$  prostoru  $\mathbb{R}^n$  je

$$\mathcal{H}_{dim}(A) = \inf\{0 \leq t < \infty \mid \mathcal{H}^t(A) = 0\} = \sup\{0 \leq s < \infty \mid \mathcal{H}^s(A) = \infty\}.$$

*Poznámka.* Definice pomocí infima, resp. suprema, opět dává smysl. Nevíme totiž, jaké hodnoty bude  $\mathcal{H}^s$  pro dané  $A$  nabývat, jediné, co víme podle věty 3.2.2 s jistotou, je to, že někde nastane právě jeden zlomový bod, kterým ani nemusí být kladné reálné číslo, ale i 0 a  $\infty$ <sup>7</sup>.

## 3.4 Definice fraktálu

Benoît Mandelbrot definoval fraktál jako *množinu, jejíž Hausdorffova dimenze ostře převyšuje její dimenzi topologickou*. Avšak později se ukázalo, že přijetím této definice bychom vyloučili mnoho útvarů, které zcela jistě fraktály jsou (např. Hilbertovu křivku) [enc20b]. Definice pomocí soběpodobnosti také nestačí, neboť soběpodobná jsou i různá nefraktální pravidelná tělesa (krychle), útvary (čtverec) a křivky (úsečka).

Britský matematik Kenneth Falconer se ve své knize *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications* vyslovuje, že za fraktál je považována množina, která má některé typické vlastnosti [Fal04]. Jejich přibližné znění je zde:

### Vlastnosti fraktálů

1. V libovolném přiblížení jsou velmi členité.
2. Jsou příliš nepravidelné pro tradiční geometrii.

<sup>7</sup>vezmeme si například prázdnou množinu, nebo celou rovinu

3. Často jsou soběpodobné (nějakým způsobem <sup>8</sup>).
4. Jejich fraktální dimenze je obvykle větší než topologická.
5. Většinou je lze definovat velmi jednoduše (iterace, rekurze).

---

<sup>8</sup>např. dokonalá, přibližná, statistická soběpodobnost

# Kapitola 4

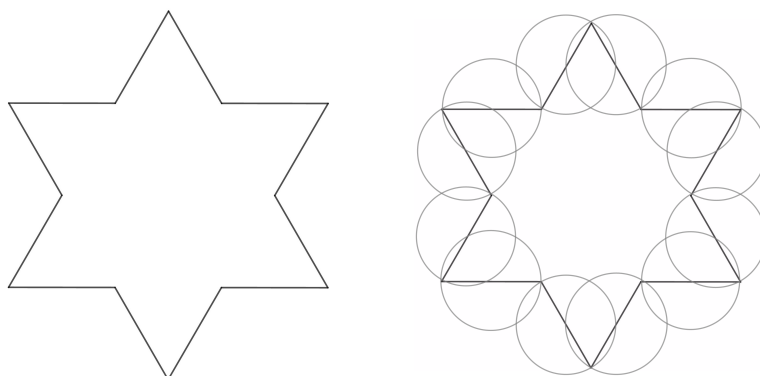
## Výpočty dimenzí fraktálů

V praktické části této práce spočítáme Hausdorffovy dimenze několika známých a neznámých fraktálů.

### 4.1 Typické fraktály

#### 4.1.1 Kochova hvězda

Kochovu hvězdu jsme již definovali v kapitole 2. Pokusíme se zjistit její Hausdorffovu dimenzi. Postupně budeme v  $\mathcal{H}_\delta^s$  snižovat  $\delta$ , tedy maximální průměr pokrývacích množin (pro představu jsou jimi kruhy).



Obrázek 4.1: Pokrytí 1. iterace Kochovy hvězdy

Počítejme pro množinu  $K$  tvořící Kochovu hvězdu, přičemž jednotkou vzdálenosti je strana výchozího trojúhelníka.

$$\begin{aligned} \diamond \mathcal{H}_{\frac{1}{3}}^s(K) &= \alpha(s) \cdot 3 \cdot 4 \left(\frac{1}{2}\right)^s \\ \diamond \mathcal{H}_{\frac{1}{9}}^s(K) &= \alpha(s) \cdot 3 \cdot 4^2 \left(\frac{1}{2}\right)^s \\ \diamond \mathcal{H}_{\frac{1}{27}}^s(K) &= \alpha(s) \cdot 3 \cdot 4^3 \left(\frac{1}{2}\right)^s \\ &\dots \\ \diamond \mathcal{H}_{\frac{1}{3^n}}^s &= \alpha(s) \cdot 3 \cdot 4^n \left(\frac{1}{2}\right)^s \end{aligned}$$

Pošleme-li  $n \rightarrow \infty$ , pak zároveň  $\delta \rightarrow 0$ , takže  $\mathcal{H}_\delta^s \rightarrow \mathcal{H}^s$ . Z toho

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^s(K) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \alpha(s) \cdot 3 \cdot 4^n \left(\frac{1}{2}\right)^n \right)^s \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \alpha(s) \cdot 3 \cdot 2^{-s} \left(\frac{4}{3}\right)^n \right)^s \end{aligned} \quad (4.1)$$

Uvědomme si, co ovlivňuje velikost dané limity. Pro dostatečně velké  $s$  bude  $\frac{4}{3^s} < 1$  a limita rovna 0, pro dostatečně malé  $s$  naopak „rovna“  $\infty$ . Dokonce ze znalosti exponenciální funkce můžeme říct, že existuje právě jedno  $s$ , u kterého se velikost  $\mathcal{H}^s(K)$  láme. Limita je totiž konečná, právě tehdy když  $\frac{4}{3^s} = 1$ , neboli  $s = \log_3 4$ .

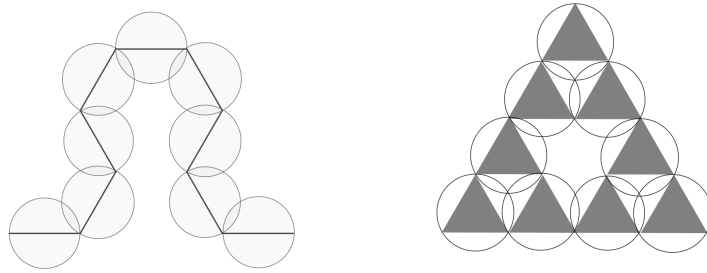
Hausdorffova dimenze Kochovy množiny je proto

$$\mathcal{H}_{dim}(K) = \log_3 4 \doteq 1.2619.$$

## 4.1.2 Sierpińského trojúhelník

Dokončíme úvahy z kapitoly 2 vyčíslením Hausdorffovy dimenze Sierpińského trojúhelníka dvěma způsoby - nahlédneme na něj postupně jako na topologicky 2-rozměrný útvar, do kterého vykusujeme díry, a jako na nekonečně diferencovanou křivku.

Ihned vidíme, že při každé iteraci se průměr pokrývacího kruhu zmenší na polovinu a těchto menších kruhů bude potřeba 3krát více (a to jak



Obrázek 4.2: Pokrytí 2. iterace 2 náhledů na vznik Sierpiňského trojúhelníka

u křivky tak u trojúhelníka). Fraktální množinu tvořící v limitě Sierpiňského trojúhelníka označme  $S$ . To nám dává vzorec pro  $n$ -tou iteraci, kdy poloměr bude  $\frac{1}{2^n}$  počátečního poloměru:

$$\mathcal{H}_{\frac{1}{2^n}}^s(S) = \alpha(s) \cdot 3^n \left(\frac{1}{2^n}\right)^s$$

Pro  $n \rightarrow \infty$ , a tudíž  $\delta \rightarrow 0$  dostaneme

$$\mathcal{H}^s(S) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha(s) \cdot 2^{-s} \left(\frac{3}{2^s}\right)^n) \quad (4.2)$$

Fraktální dimenze Sierpiňského trojúhelníka je tedy

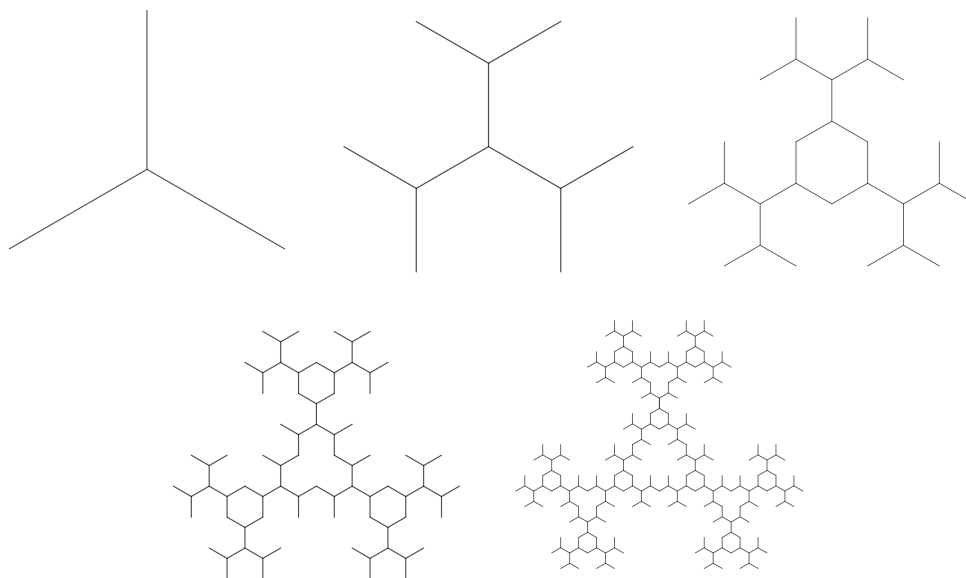
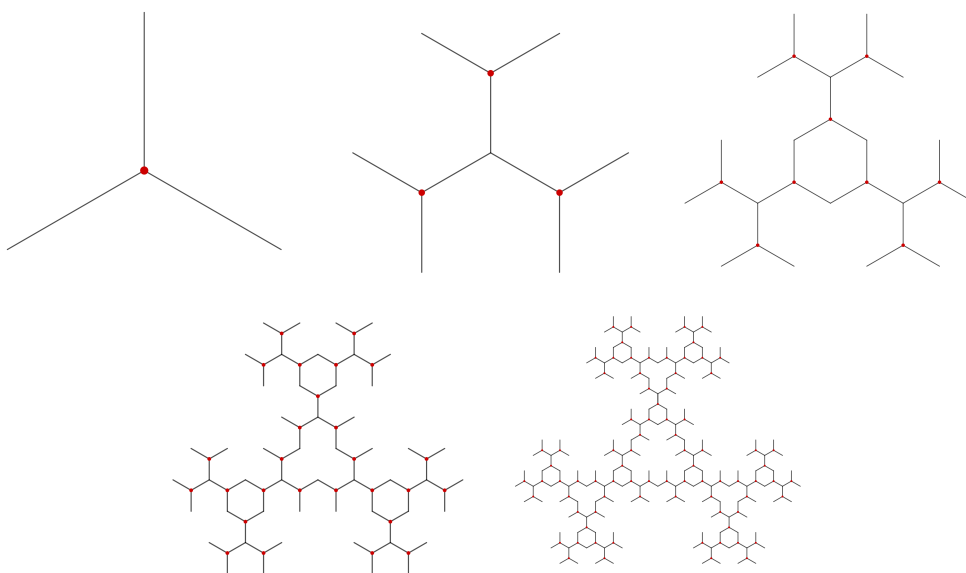
$$\mathcal{H}_{dim}(S) = \log_2 3 \doteq 1.58496.$$

## 4.2 Vlastní tvorba

### 4.2.1 Protilátka

Tento fraktál vzniká iterací druhého kroku:

1. Mějme bod, nazvěme jej ohniskem. Vztyčme z něj 3 úsečky svírající úhel  $120^\circ$ . Ve středu každé úsečky ať je ohnisko následující iterace.
2. Z nových ohnisek vztyčme 3 úsečky poloviční délky tak, aby svíraly úhel  $120^\circ$  a aby jedna z nich vedla směrem do nejbližšího ohniska předchozí iterace.

Obrázek 4.3: Prvních 5 iterací fraktálu *protilátky*Obrázek 4.4: Prvních 5 iterací fraktálu *protilátky* s vyznačenými ohnisky



Fraktál se jmenuje *protílátka*, protože trojnožky připomínají schematická znázornění protílátek z učebnic biologie. Další souvislostí může být fakt, že proces tvorby protílátek má fraktální strukturu.

Než začneme odvozovat dimenzi tohoto fraktálu, učinme několik pozorování.

Nabízí se otázka, zda se při nějaké vzdálenější iteraci úsečky nepřekříží. Pokud ano, jakým způsobem? Nebo nesloučí se některá ohniska v jedno?

**Tvrzení 4.2.1.** *V žádné iteraci fraktálu protílátky se jeho úsečky nepřekříží, ani se žádná dvě ohniska nespojí v jedno.*

*Důkaz.* V celém fraktálu jsou jen tři naklonění úseček: vertikální, severovýchodní a jihovýchodní, a jejich směry svírají úhel  $60^\circ$ . Tyto směry v  $n$ -té iteraci vytvoří mozaiku z rovnostranných trojúhelníků o straně  $\frac{1}{2^n}$ . Proto v důkazu považujeme za **vzdálenost dvou ohnisek** délku nejkratší cesty z jednoho ohniska do druhého **po stranách trojúhelníků** mozaiky. Matematickou indukci ukážeme, že vzdálenost každých dvou ohnisek v každé iteraci je vždy alespoň 2krát strana trojúhelníka v mozaice dané iterace.

V první iteraci je jen jedno ohnisko, takže tvrzení platí. Předpokládejme, že v  $n$ -té iteraci jsou všechna ohniska vzdálena alespoň  $2 \cdot \frac{1}{2^n}$ . Ohniska  $(n+1)$ -té iterace leží ve vzdálenosti  $\frac{1}{2^{n+1}}$  od ohnisek  $n$ -té iterace, takže k sobě nemohou mít blíž než  $2 \cdot \frac{1}{2^{n+1}}$ , což jsme chtěli ukázat. Tím jsme však vyřešili pouze případ, kdy ohniska  $n+1$ -té iterace pocházejí ze dvou různých „kmenových“ ohnisek  $n$ -té iterace. Musíme tedy dodat, že 3 ohniska ležící ve středech úseček vycházejících z ohniska  $n$ -té iterace jsou nutně vzdálena právě  $2 \cdot \frac{1}{2^{n+1}}$  vzhledem ke způsobu tvorby fraktálu.

A jestliže jsou v každé iteraci ohniska vzdálena alespoň 2 strany trojúhelníka mozaiky dané iterace, nemohou se úsečky (o délce strany trojúhelníka) vycházející z daných ohnisek překřížit ani splýnout v jednu, mohou se pouze dotknout koncovými body, jak je vidět na obrázcích.  $\square$

Uvědomme si, že tento fraktál se skládá ze stále se zmenšujících trojnožek, které se vyskytují ve dvou otočeních. Označme  $A$  natočení, při kterém směřuje vertikální úsečka z ohniska na sever, a  $B$  natočení, při kterém vertikální úsečka ukazuje na jih. Dále si všimněme, že v určité iteraci jsou všechny trojnožky téhož druhu. Pro zajímavost bychom mohli změnit krok v nějaké iteraci vyměněním formy  $A$  za formu  $B$  a sledovat, jak fraktál poroste. Zřejmě bude mít stejnou Hausdorffovu dimenzi jako originální fraktál.

Zjistíme, jaká je Hausdorffova dimenze fraktálu protilátky  $P$ .  
Položme délku úsečky z 1. iterace rovnu  $\frac{1}{2}$ .

$$\diamond \mathcal{H}_{\frac{1}{2}}^s(P) = \alpha(s) \cdot 3 \left(\frac{1}{2}\right)^s$$

$$\diamond \mathcal{H}_{\frac{1}{4}}^s(P) = \alpha(s) \cdot 3^2 \left(\frac{1}{2^2}\right)^s$$

$$\diamond \mathcal{H}_{\frac{1}{8}}^s(P) = \alpha(s) \cdot 3^3 \left(\frac{1}{2^3}\right)^s$$

...

$$\diamond \mathcal{H}_{\frac{1}{2^n}}^s(P) = \alpha(s) \cdot 3^n \left(\frac{1}{2^n}\right)^s$$

Z toho je patrné, že  $P$  má stejnou Hausdorffovu dimenzi jako Sierpiňského trojúhelník, a to  $\log_2 3 \doteq 1.58496$ .

# Závěr

Mojí motivací k napsání této práce byl především pocit, že téma fraktálních množin je v dostupných českých publikacích popsáno buď jen nahodile a s důrazem spíše na efekt a umělecký dojem z fraktálů než na teorii schovanou za tím, anebo naopak formou nepřístupnou amatérským čtenářům se zájmem o matematiku. Snažila jsem se proto nashromáždit základní informace k dané problematice a složit je v ucelený text vyvážený co do odbornosti. Inspirovala jsem se metodikou knihy *The Foundations of Mathematics* [ST15] a pokusila se téma představit postupně od hypotéz po vystavení solidního základu pro následnou teorii. Mým hlavní cílem bylo představit matematickou teorii týkající se fraktálů srozumitelně pro středoškoláky, a proto jsem se snažila nové koncepty vysvětlit svými slovy a formální důkazy prokládat vlastními úvahami, které by měly čtenáři pomoci toto téma lépe pochopit.

Myslím si, že jsem svůj cíl naplnila. Zároveň jsem vymyšlením fraktálů lépe pochopila smysl Hausdorffovy dimenze a míry.

Závěrečná část je však pouhým nastíněním možností další práce s fraktály. Zkoumala jsem také zobecnění známých fraktálů, jako je Sierpińského koberec nebo Cantorovo diskontinuum. Později jsem zjistila, že všechna jsou již popsána, takže mi přijde bezpředmětné je v této práci uvádět. Na druhou stranu bych do budoucna chtěla rozšířit toto zobecnění i do euklidovských prostorů vyššího rozměru než 3 a najít způsob, jak je graficky znázornit.

Námětem další práce by mohlo být zkoumání množin, jejichž dimenze nelze snadno vyjádřit pomocí logaritmu. Mezi mými návrhy totiž byly takové, že pro zjištění jejich dimenze bych potřebovala vhodně vyjádřit nekonečný výraz typu

$$(((b+a) \cdot b + a) \cdot b + a) \cdot b \cdots = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( b^n + a \cdot \frac{b^n - 1}{b - 1} \right),$$

který vyjadřuje počet pokrývacích  $s$ -rozměrných koulí při  $n$ -té iteraci, kdy  $n \rightarrow \infty$ . Jeden z nich jsem nazvala „navrtaná krychle“.

Vzniká tímto způsobem:

1. Mějme krychli. Pomyslně ji rozdělme na 27 shodných krychliček o třetinové hraně.
2. Z každé stěny vyjmeme prostřední krychličku, celkem 6 krychlí <sup>1</sup>.
3. Celý zbytek krychle kromě prostřední krychličky nechme být. Opakujme tyto kroky s prostřední krychličkou.

Nedokážu říct, zda lze tento objekt považovat za fraktál, ale každopádně bych ráda zjistila jeho Hausdorffovu dimenzi přesně. V Excelu jsem odhadovala dimenzi tohoto tělesa tak, že jsem zvětšovala  $n$  a zkoumala, zda se hodnoty  $s$  blíží k nějakému číslu. Pozorovala jsem, že od určitého  $n$  se ustálí první tři cifry za desetinnou čárkou tak, že rozvoj příslušných  $s$  začíná 2,998, mým velmi hrubým odhadem je tedy to, že Hausdorffova dimenze tohoto tělesa se buď limitně blíží 3, nebo je jen o něco málo nižší než 3.

V další práci by podle mě bylo zajímavé zkoumat analogie případu uvedeného v kapitole 2 u Sierpiňského trojúhelníka, totiž že jej lze získat z plošného trojúhelníka i ze zakřivující se lomené čáry. Mám návrh, jak by se takto dal získat zmíněný fraktál protilátka:

1. Mějme plný trojúhelník. Vyjmeme prostřední trojúhelník jako u Sierpiňského trojúhelníka.
2. Zbylé tři trojúhelníky o poloviční délce strany otočme o  $180^\circ$ .
3. Opakujme předchozí kroky pro nově vzniklé trojúhelníky.

Snadno ověříme, že Hausdorffova dimenze tohoto útvaru je stejná jako dimenze fraktálu protilátky. To však neznamená, že se v limitě tyto útvary shodují. V navazující činnosti by proto bylo zajímavé věnovat se dvojímu způsobu generování totožných fraktálů a hledat důkazy, že jsou různě získané fraktály v limitě shodné.

---

<sup>1</sup>vyjmeme ty krychličky, které se dotýkají sousedních krychliček právě pěti stranami



Obrázek 4.5: Fraktál *protílátka* v rozostření

# Seznam obrázků

2.1	Výchozí trojúhelník a první tři iterace Kochovy hvězdy . . . .	21
2.2	Výchozí trojúhelník a tři rekurze Sierpiňského trojúhelníka . .	22
2.3	Prvních 6 iterací „Sierpiňského křivky“ . . . . .	24
2.4	„Sierpiňského křivka“ 7. řádu . . . . .	24
2.5	Alternativní pohled na tvorbu „Sierpiňského křivky“ . . . . .	25
4.1	Pokrytí 1. iterace Kochovy hvězdy . . . . .	36
4.2	Pokrytí 2. iterace 2 náhledů na vznik Sierpiňského trojúhelníka	38
4.3	Prvních 5 iterací fraktálu <i>protílátky</i> . . . . .	39
4.4	Prvních 5 iterací fraktálu <i>protílátky</i> s vyznačenými ohnisky . .	39
4.5	Fraktál <i>protílátka</i> v rozostření . . . . .	44

# Seznam definic a vět

## Definice

- Definice 1.1.1 (Zobrazení), s. 9, [Bia17]
- Definice 1.2.1 (Vnější míra), s. 10, [EG92]
- Definice 1.2.2 ( $\mu$ -měřitelnost), s. 11, [EG92]
- Definice 1.3.1 ( $\sigma$ -algebra), s. 15, [Net16]
- Definice 1.3.2 (Míra), s. 16, [Net16]
- Definice 3.1.1 (Uspořádání), s. 27, [Kuř19]
- Definice 3.1.2 (Uspořádaná množina), s. 27, [Kuř19]
- Definice 3.1.4 (dolní mez), s. 27, [ST15]
- Definice 3.1.5 (minimum), s. 28, [Kuř19]
- Definice 3.1.6 (infimum), s. 28, [ST15]
- Definice 3.1.7 (průměr množiny), s. 30
- Definice 3.2.1 (Hausdorffova „předmíra“), s. 30, [EG92]
- Definice 3.2.2 (Hausdorffova míra), s. 31, [EG92]
- Definice 3.3.1 (Hausdorffova dimenze), s. 34, [EG92]

## Věty a tvrzení

- Věta 1.2.1 (Vlastnosti měřitelných množin), s. 11, [EG92], [Net16]
- Lemma 1.2.2 (Disjunktní sjednocení), s. 12, [Net16]
- Tvrzení 1.3.1 ( $\mu$ -měřitelnost množin  $\sigma$ -algebry), s. 16
- Tvrzení 1.3.2 ( $\mu$ -měřitelné množiny tvoří  $\sigma$ -algebru), s. 17
- Tvrzení 3.1.2 (existence infima), s. 28, [ST15]
- Věta 3.2.1 (Hausdorffova míra), s. 31, [EG92]
- Věta 3.2.2 (Vlastnost Hausdorffovy míry), s. 32, [EG92]

# Bibliografie

- [Hau18] Felix Hausdorff. „Dimension und äusseres Mass“. In: *Mathematische Annalen* 79 (1918), s. 157–179. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01457179>.
- [Kor41] Jaromír Korčák. „Přírodní dualita statistického rozložení“. In: *Statistický obzor* 22 (1941), s. 171–222.
- [Man75] B. B. Mandelbrot. *Les objets fractals : forme, hasard et dimension*. Paris: Flammarion, 1975.
- [Man82] B. B. Mandelbrot. *The Fractal Geometry of Nature*. San Francisco: W.H. Freeman, 1982.
- [EG92] L.C. Evans a R.F. Gariepy. *Measure Theory and Fine Properties of Functions*. Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, 1992, s. 1–4, 60–65. ISBN: 0-8493-7157-0. URL: <https://books.google.cz/books?id=e3R3CAAQBAJ>.
- [Hyk01] Magdalena Hykšová. „Fraktály a objektově orientované programování“. In: *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie* 46 (3 2001), s. 232–253. ISSN: 0032-2423. URL: <http://hdl.handle.net/10338.dmlcz/141087>.
- [Gra03] I. Grattan-Guinness. *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences*. .3.8 The early history of fractals, 1870-1920. A Johns Hopkins paperback sv. 1. Johns Hopkins University Press, 2003, s. 367, 368, 372. ISBN: 9780801873966. URL: <https://books.google.cz/books?id=2hDvzITtfdAC>.
- [Fal04] K. Falconer. *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*. Wiley, 2004, s. xxv. ISBN: 9780470871355. URL: <https://books.google.cz/books?id=JXnGzv7X6wcC>.



- [Klí15] M. Klímová J. a Fialová. *Proč (a jak) psychosomatika funguje*. Praha: Progressive consulting, v. o. s., 2015, s. 131–134. ISBN: 978-80-260-8208-8.
- [ST15] I. Stewart a D.O. Tall. *The Foundations of Mathematics*. Oxford University Press, 2015. ISBN: 9780198706434. URL: <https://books.google.cz/books?id=Z56eBgAAQBAJ>.
- [Imr16] Novotný J. Imre A. „Fractals and the Korcak-law: a history and a correction“. In: *The European Physical Journal H* 41 (2016), s. 69–70. DOI: <https://doi.org/10.1140/epjh/e2016-60039-8>.
- [Mal16] Jan Malý. „Teorie míry a integrálu“. 2016. URL: <http://www.karlin.mff.cuni.cz/~maly/files/tmi16.pdf>.
- [Net16] Ivan Netuka. „Teorie míry“. 2016. URL: [http://www.karlin.mff.cuni.cz/~netuka/TM\\_25.3.2016\\_final.pdf](http://www.karlin.mff.cuni.cz/~netuka/TM_25.3.2016_final.pdf).
- [Bia17] J. Bialas F. a Löwit. „Teorie grup I - Moc abstrakce“. 2017. URL: <https://prase.cz/archive/37/uvod1s.pdf>.
- [San17] Grant Sanderson. *Fractals are typically not self-similar*. 2017. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=gB9n2gHsHN4> (cit. 09. 03. 2020).
- [Roz18] Koževnikov D. a Rozhoň V. „Pravděpodobnost I. - Společenstvo elementárních jevů“. 2018. URL: <https://prase.cz/archive/38/uvod1s.pdf>.
- [Kuř19] Martin Kuřil. „Lineární algebra, kapitola 1: Základní matematické pojmy“. 2019. URL: <https://kma.ujep.cz/profil/martin-kuril>.
- [enc20a] Wikipedia: the free encyclopedia. *Benoît Mandelbrot*. 2020. URL: [https://cs.wikipedia.org/wiki/Beno%C3%AEt\\_Mandelbrot](https://cs.wikipedia.org/wiki/Beno%C3%AEt_Mandelbrot) (cit. 09. 03. 2020).
- [enc20b] Wikipedia: the free encyclopedia. *Fractal*. 2020. URL: <https://en.wikipedia.org/wiki/Fractal> (cit. 09. 03. 2020).
- [enc20c] Wikipedia: the free encyclopedia. *Metrický prostor*. 2020. URL: [https://cs.wikipedia.org/wiki/Metrický\\_prostor](https://cs.wikipedia.org/wiki/Metrický_prostor) (cit. 09. 03. 2020).