

STŘEDOŠKOLSKÁ ODBORNÁ ČINNOST

Obor č. 1: Matematika a statistika

Optimalizace délky křivek v rovině

Vojtěch Kloud
Královéhradecký kraj

Hradec Králové 2019

STŘEDOŠKOLSKÁ ODBORNÁ ČINNOST

Obor č. 1: Matematika a statistika

Optimalizace délky křivek v rovině

Optimizing length of planar curves

Autor: Vojtěch Kloud

Škola: První soukromé jazykové gymnázium Hradec Králové,
spol. s.r.o., Brandlova 875, Hradec Králové 3, 500 03

Kraj: Královéhradecký kraj

Konzultant: Mgr. Ondřej Hospodka

doc. Mgr. Dušan Bednařík, Ph.D.

Hradec Králové 2019

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou práci SOČ vypracoval samostatně a použil jsem pouze prameny a literaturu uvedené v seznamu bibliografických záznamů. Prohlašuji, že tištěná verze a elektronická verze soutěžní práce SOČ jsou shodné. Nemám závažný důvod proti zpřístupňování této práce v souladu se zákonem č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon) ve znění pozdějších předpisů.

V Hradci Králové dne:

Podpis:

Vojtěch Kloud

Poděkování

Na tomto místě bych rád poděkoval oběma svým konzultantům, kteří mi umožnili práci dokončit. Můj velký dík patří hlavně docentovi Mgr. Dušanu Bednařikovi, Ph.D. z Univerzity Hradec Králové, který mě uvedl do problematiky, kterou řeším ve své práci, doporučil literaturu, z které mohu čerpat, naučil mě nové matematické a motivoval k další práci, čehož si nesmírně vážím.

Anotace

Práce se zabývá řešením variačních problémů metodami kalkulu a analytické geometrie. Náplní teoretické části práce je úvod do variačního počtu a řešení nejznámějších problémů této disciplíny. Praktická část práce je zaměřena na problematiku hledání křivek s minimální délkou v rovině s překážkami. Pro hledání takových křivek mívají lidé vybudovanou dobrou intuici, kterou se autor práce snaží rozvíjet a podpořit matematickými důkazy.

Klíčová slova

Variační počet, rovinné křivky, minimum, překážky

Annotation

In this thesis we will focus on solving variational problems using tools of calculus and analytical geometry. The content of the theoretical part of the thesis will be an introduction to calculus of variations and solutions to one of its most famous problems. In the practical part, we will be finding shortest curves or paths between two points in a plane with given planar obstacles. People usually have a strong intuition for finding such curves or paths, which we will support with mathematical evidence.

Keywords

Calculus of variations, planar curves, minimum, obstacles

Obsah

Úvod a cíl práce	8
Teoretická část práce	9
1 Úvod do variačního počtu	9
2 Historické problémy variačního počtu a jejich řešení	10
2.1 Problém královny Dido	10
2.2 Fermatův princip	13
2.3 Zákon odrazu	13
2.4 Snellův zákon	14
2.5 Problém brachystochrony	16
3 Variační počet metodami kalkulu	20
3.1 Křivky a jejich délky	20
3.2 První variace a Euler-Lagrangeova rovnice	23
3.3 Nejkratší spojnice dvou bodů v rovině	25
3.4 Beltramiho identita	27
3.5 Problém brachystochrony	28
4 Isoperimetrické problémy	33
4.1 Metoda Lagrangeových multiplikátorů	33
4.2 Problém královny Dido jako isoperimetrický problém	34
4.3 Řetězovka	36
Praktická část práce	40
5 Základní pojmy problému	40
5.1 Definice překážky	40
5.2 Definice přípustných křivek	41
5.3 Definice délky křivek a nejkratší křivky	41
6 Vlastnosti reálných funkcí	43
6.1 Věty reálné analýzy	43

6.2	Konvexní a konkávní funkce	44
7	Určování nejkratších křivek	47
7.1	Úvodní problém	47
7.2	Úvodní problém s různými okrajovými body	51
7.3	Dvě překážky v rovině	55
	Diskuse	60
	Závěr	62
	Literatura	63

Úvod

Práce je rozdělena na dvě hlavní části. Teoretická část práce se zabývá řešením známých variačních problému, jak geometricky, tak analyticky a poskytne formální úvod do variačního počtu metodami matematické analýzy. Uvedeme koncept funkcionálu a první variace, která nám umožní systematicky hledat extrémy daných funkcionálů. Značný přínos do této problematiky měl švýcarský matematik Leonhard Euler (1707-1783), podle kterého je pojmenována jedna ze základních diferenciálních rovnic variačního počtu a to právě Euler-Lagrangeova rovnice, jejíž důkaz je uveden v kapitole 3.2.

Hlavní poznatky z teoretické části využijeme v části praktické, kde se budeme zabývat minimalizací funkcionálu udávající délku rovinné křivky. Tyto křivky budou omezené různými překážky v této rovině. Definujeme tedy překážky a přípustné křivky, které mohou být řešením daného problému. Z množiny všech přípustných křivek určíme tu nejkratší. K důkazu obecného tvaru takové nejkratší přípustné křivky využijeme známých vět reálné analýzy.

Teoretická část práce

V této části práce se seznámíme s variačním počtem a vyřešíme jedny z jeho nejznámějších problémů. Nejdříve se zaměříme na geometrické řešení několika problémů a dále problémy budeme řešit analyticky. K analytickému řešení problémů využijeme Euler-Lagrangeovu rovnici, kterou si odvodíme. Umožní nám například určit rovnici řetězovky, tedy křivky, kterou vykreslí řetěz zavěšen mezi dvěma pevnými body.

1 Úvod do variačního počtu

Optimalizace jako taková je velice zajímavá problematika. Matematiku totiž velice úzce spojuje s pozorovatelnou přírodou, která má tendenci určité procesy v ní probíhající nějak minimalizovat či maximalizovat. Například mýdlové bubliny nabývají svého tvaru, aby minimalizovaly své povrchové napětí. Paprsek světla cestuje v homogenním prostředí po úsečce, aby se dostal z místa A do místa B za co nejkratší dobu a tak dále. Problémy tohoto typu spadají právě do variačního počtu, a proto může být jeho studium velice přínosné.

V podstatě je variační počet odvětvím kalkulu, které se soustředí výhradně na optimalizaci. Tím je myšleno hledání extrémů nějakých funkcí, či funkcionalů. Funkcional I je funkce definovaná jako:

$$I : \mathcal{F} \ni y \rightarrow I(y) \in \mathbb{R}$$

Kde: \mathcal{F} je nějaký prostor či množina funkcí

V klasickém variačním počtu nabývají funkcionaly nejčastěji formy:

$$I(y) = \int_a^b F(x, y, y') dx$$

Kde: $y = y(x)$ je reálná, diferencovatelná funkce proměnné $x \in \langle a, b \rangle$

Metodami variačního počtu pak můžeme najít funkci y , která maximalizuje nebo minimalizuje $I(y)$. Abychom takovou funkci našli, musíme vyřešit určitou diferenciální rovnici. V tom se kalkulus variací liší od kalkulu jedné proměnné, kde pouze hledáme body a řešíme algebraické rovnice. K takto definovaným funkcionalům se vrátíme později v práci a zatím se budeme soustředit na jednodušší optimalizační problémy.

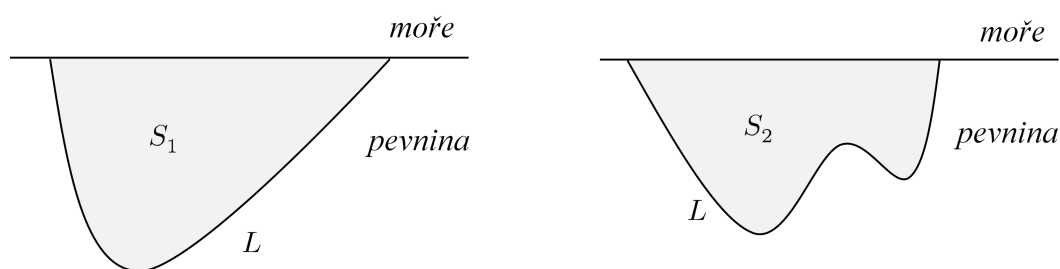
2 Historické problémy variačního počtu a jejich řešení

Řešení optimalizačních problémů doprovází člověka od počátků samotné civilizace. Jaký nejlepší obchod můžeme provést s tím, co vlastníme? Nebo jaký největší pozemek můžeme oplotit, máme-li k dispozici plot o dané, konečné délce? Druhá otázka nás vede k jednomu z prvních klasických problémů variačního počtu.

2.1 Problém královny Dido

Roku 814 před naším letopočtem byla fénická královna Dido svržena z trůnu svým bratrem Pygmalionem. Utekla na pobřeží severní Afriky i s pokladem, kterého se chtěl její bratr zmocnit. Na pobřeží Středoziemního moře chtěla založit nové město Kartágo, a proto požádala berberského krále, aby jí prodal nějakou tamní půdu. Král nabídl Dido, že jí prodá všechnu půdu, kterou bude schopna ohraničit volskou kůží. To ovšem bývalou fénickou královnu nezaskočilo a dokázala z králova slibu vytěžit maximum. Kůži rozřezala na tenké plátky, které měli dohromady délku L . Jako přirozenou hranici použila pobřeží moře. Řekneme pro zjednodušení, že pobřeží moře bylo dokonale rovné.

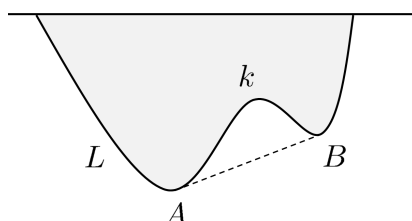
Nyní budeme hledat odpověď na otázku: Jaký tvar musí mít město, které je ohrazeno pobřežím a volskou kůží o délce L tak, aby mělo co největší rozlohu?



Obrázek 1: Problém královny Dido

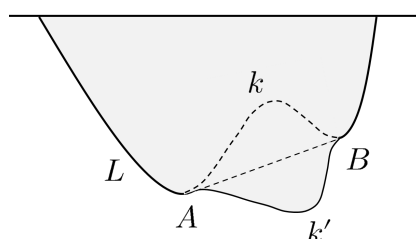
Ukážeme si známé řešení tohoto problému, které pochází od švýcarského matematika Jakoba Steinerja (1796-1863). Toto elegantní řešení je založeno pouze na několika geometrických poznátcích. [3]

Předpokládejme, že řešení takového problému existuje. Ukážeme, že křivka z volské kůže musí být konvexní. Předpokládejme, že křivka, která společně s osou uzavírá největší obsah je nekonvexní. Protože tato křivka je nekonvexní, musí existovat dva body A, B ležící na křivce, jejichž spojnice AB neleží v této křivce. Část křivky mezi body A, B označme k :



Obrázek 2: Nekonvexní útvar

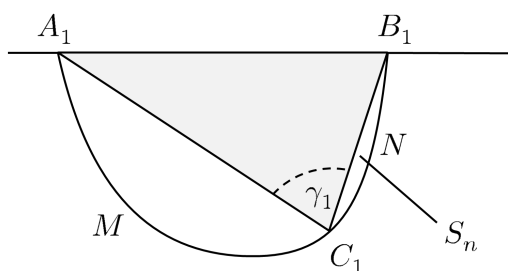
Část křivky k můžeme nyní zrcadlově zobrazit podle úsečky AB na k' . Vznikne nám tak křivka, která si určitě zachovala svoji délku, ale kvůli její nekonvexitě jsme byli schopni povrch, který ohraničuje, zvětšit:



Obrázek 3: Zvětšení obsahu nekonvexního útvaru

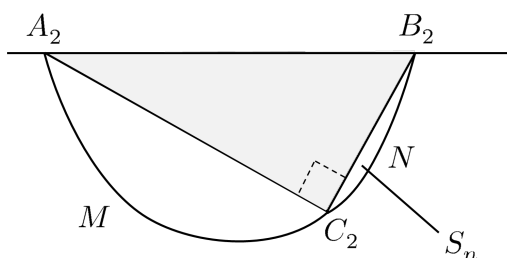
Křivka, kterou hledáme tedy musí být určitě konvexní. Označme koncové body takové konvexní křivky A_1, B_1 . Kdekoliv na této křivce vybereme bod C_1 . Protože křivka je konvexní, trojúhelník $A_1B_1C_1$ leží uvnitř útvaru. Všimněme si, že obsah tohoto trojúhelníku vypočítáme jako: $\frac{1}{2}|A_1C_1| \cdot |C_1B_1| \cdot \sin \gamma_1$, kde $\gamma_1 = \angle A_1C_1B_1$. Část křivky od A_1 do C_1 pojmenujme M . Nechť plocha ohraničená křivkou M a úsečkou A_1C_1 má obsah S_M . Část křivky od C_1 do B_1 pojmenujme N . Nechť plocha ohraničená křivkou N a úsečkou C_1B_1 má obsah S_n .

Obsah celého útvaru je roven: $S_n + S_m + \frac{1}{2}|A_1C_1| \cdot |C_1B_1| \cdot \sin \gamma_1$



Obrázek 4: Steinerovo řešení problému královny Dido

Sestrojíme nový trojúhelník $A_2B_2C_2$ takový, že $|A_1C_1| = |A_2C_2|$, $|C_1B_1| = |C_2B_2|$. Nechť má trojúhelník pravý úhel při vrcholu C_2 . Obsah tohoto trojúhelníku vypočítáme jako: $\frac{1}{2} \cdot |A_2C_2| \cdot |C_2B_2|$. Části křivky M a N připojíme k trojúhelníku $A_2B_2C_2$. Obsah nově sestrojeného útvaru je pak roven: $S_n + S_m + \frac{1}{2} \cdot |A_2C_2| \cdot |C_2B_2|$.



Obrázek 5: Steinerovo řešení problému královny Dido

Nově sestrojený útvar má stejný obvod pod úsečkou A_2B_2 jako náš původní, neboť jeho obvod tvoří křivky M a N stejně jako původní tvar. Porovnejme nyní obsahy obou útvarů. Předpokládejme, že obsah původního útvaru je menší nebo roven obsahu nově sestrojeného útvaru:

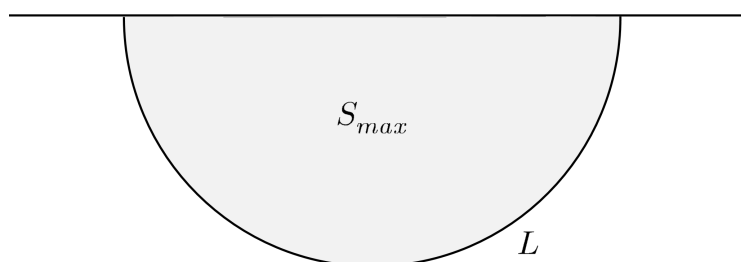
$$S_n + S_m + \frac{1}{2} \cdot |A_1C_1| \cdot |C_1B_1| \cdot \sin \gamma_1 \leq S_n + S_m + \frac{1}{2} \cdot |A_2C_2| \cdot |C_2B_2|$$

$$\frac{1}{2} \cdot |A_2C_2| \cdot |C_2B_2| \cdot \sin \gamma_1 \leq \frac{1}{2} \cdot |A_2C_2| \cdot |C_2B_2|$$

$$\sin \gamma_1 \leq 1$$

Což je pravda pro všechny úhly γ_1 a tedy předpokládaná nerovnice platí. Rovnost nastává pouze, když $\gamma_1 = 90^\circ$. Obsah původního útvaru tedy určitě není maximální, pokud $\gamma_1 \neq 90^\circ$. Protože bod C_1 byl zvolen libovolně, každý bod na křivce musí s krajními body křivky svírat pravý úhel. Víme, že takový útvar je právě Thaletova půlkružnice.

Tedy pokud nějaké řešení existuje, hledanou křivkou je právě půlkružnice.



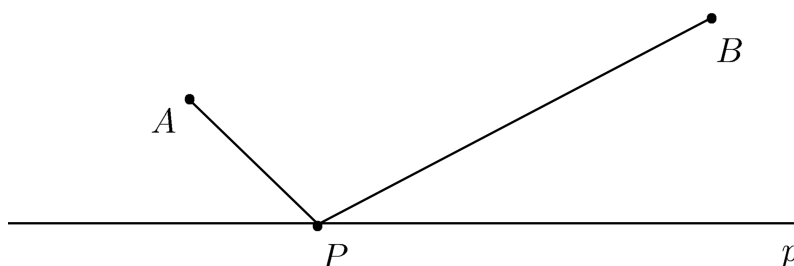
Obrázek 6: Řešení problému královny Dido

2.2 Fermatův princip

Fermatův princip je fyzikální tvrzení, které zformuloval francouzský matematik Pierre de Fermat (1601-1665) roku 1662. Fermatův princip říká, že se světlo v prostoru šíří z jednoho bodu do druhého po takové dráze, aby doba potřebná k průběhu této dráhy nabývala minimální hodnoty. S tímto předpokladem, jak uvidíme, pracovali optici a matematici dávno před jeho formálním uvedením. Z tohoto principu jsou odvozeny základní vlastnosti chování paprsku v prostoru.

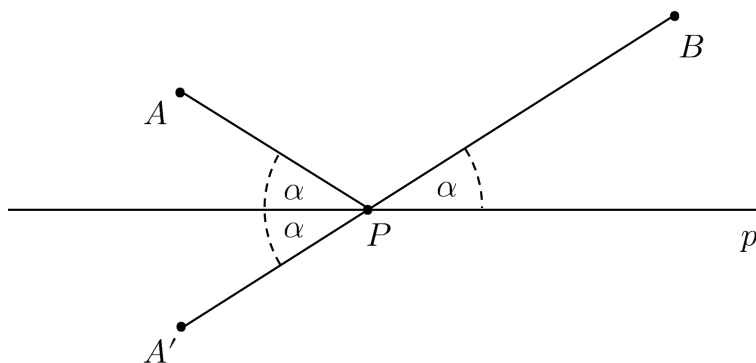
2.3 Zákon odrazu

Hérón Alexandrijský (10-75 n. l.) dokázal jedno ze základních pravidel odrazu světla. Jeho problém pracuje pouze s odrazem paprsku od rovné plochy nebo zrcadla, které budeme reprezentovat přímkou. Mějme přímkou p , počáteční a konečný bod A a B , oba ležící v jedné polorovině přímky p . Paprsek světla se odráží od přímky p v bodě P . Pro jaký bod P je $|AP| + |PB|$ minimální?



Obrázek 7: Problém zákona odrazu

Protože se pohybujeme v homogenním prostoru, rychlost šíření paprsku zůstává po celou dobu stejná. Proto stačí minimalizovat dráhu, kterou paprsek urazí. K vyřešení tohoto problému zobrazíme zrcadlově bod A podle přímky p na bod A' . Určitě $|AP| = |A'P|$. Nyní stačí najít bod P , který minimalizuje $|A'P| + |PB|$. Aby byla tato hodnota minimalizována, musí $P \in A'B$, protože nejkratší spojnici dvou bodů v rovině je úsečka vedena těmito body. Dostáváme tak jedno ze základních pravidel odrazu:



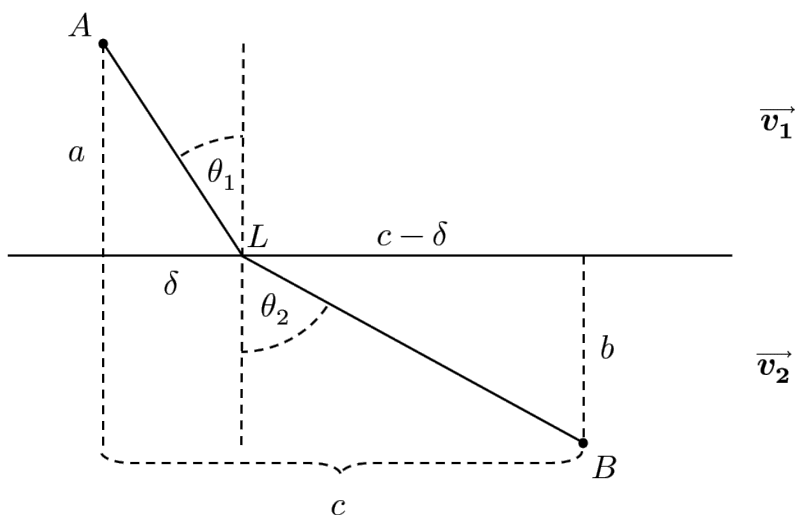
Obrázek 8: Zákon odrazu

2.4 Snellův zákon

Toto tvrzení objasňuje vlastnost lomu světla při přechodu z jednoho prostředí, do druhého. Dokázal ho nizozemský matematik a astronom Willebrord Snellius (1580-1626). Stejně jako Hérón, i Snell vycházel z předpokladu, že si paprsek světla vždy vybere cestu, která minimalizuje čas. Ukážeme si klasický důkaz tohoto tvrzení, které využívá již metody kalkulu k hledání minima funkce.

Mějme pevně dané body A a B , oba v různém prostředí (například vzduch a voda). Rychlost paprsku v prvním prostředí označme v_1 a rychlost v druhém v_2 . Pod jakým úhlem se paprsek při přechodu z jednoho prostředí do druhého láme?

Z Fermatova principu víme, že se světlo bude lámat pod takovým úhlem, aby minimalizovalo čas, za který se dostane z bodu A do bodu B .



Obrázek 9: Snellův zákon

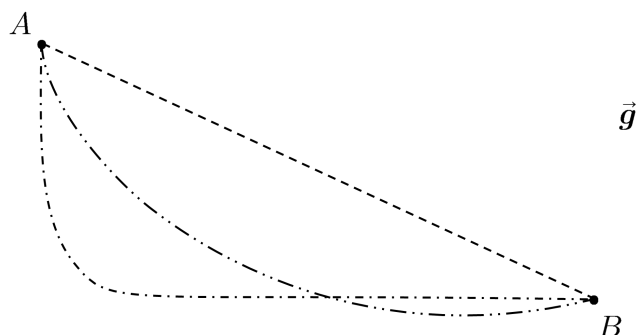
Podle obrázku 9 můžeme sestavit funkci t_c udávající celkový čas. Tato funkce bude při konstantním a, b, c závislá pouze na δ . Víme, že $t = \frac{s}{v}$. Abychom našli minimum t_c položíme její první derivaci vůči δ rovnu nule:

$$\begin{aligned}
 t_c(\delta) &= t_1(\delta) + t_2(\delta) = \frac{s_1(\delta)}{v_1} + \frac{s_2(\delta)}{v_2} = \frac{\sqrt{a^2 + \delta^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (c - \delta)^2}}{v_2} \\
 \frac{\partial t_c}{\partial \delta} &= 0 = \frac{\delta}{v_1 \sqrt{a^2 + \delta^2}} - \frac{c - \delta}{v_2 \sqrt{b^2 + (c - \delta)^2}} \\
 \frac{\delta}{v_1 \sqrt{a^2 + \delta^2}} &= \frac{c - \delta}{v_2 \sqrt{b^2 + (c - \delta)^2}} \\
 \frac{\sin \theta_1}{v_1} &= \frac{\sin \theta_2}{v_2} \tag{1}
 \end{aligned}$$

Za Snellův zákon označujeme rovnicí (1). Říká nám, že poměr sinů úhlů a rychlostí se při přechodu z jednoho prostředí do druhého nemění (zůstává konstantní). Paprsek světla má při lomu vždy tuto vlastnost. Snell ve svém důkaze určitě nevyužíval metody diferenciálního počtu, protože jeho formální základy položil až Isaac Newton (1642-1726). Důkaz Snellova zákona je ale vskutku vzorový optimalizační problém řešitelný derivacemi, proto jsem ho zde uvedl.

2.5 Problém brachystochrony

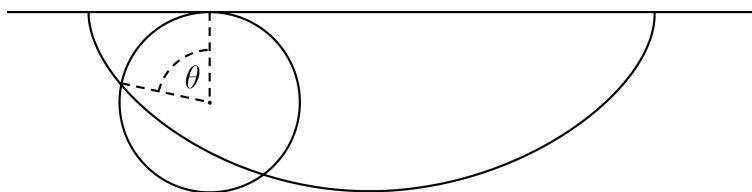
Slovo brachystochrona pochází z dvou řeckých slov: brákhistos - nejkratší, khrónos - čas. Brachystochrona je křivka spojující dva body, po které se hmotný bod dostane z počátečního klidu v bodě A do bodu B působením homogenního gravitačního pole za nejkratší dobu. Tření zanedbáváme.



Obrázek 10: Možné brachystochrony

Tento problém se řadí mezi jedny z nejnámějších v matematice. Určitě proto, že odpověď na otázku určitě není jasná na první pohled. V případě minimalizace dráhy nedosáhneme dostatečné rychlosti a při maximalizaci rychlosti se dráha prodlouží (viz obrázek 10).

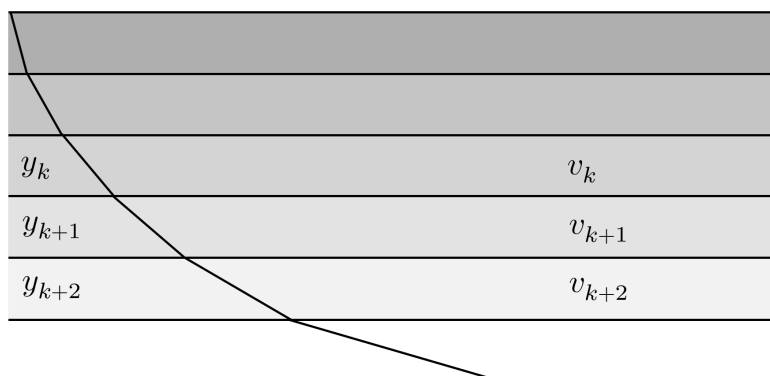
Řešením tohoto problému, pozoruhodně, je část křivky, které říkáme cykloida. Cykloida je křivka, kterou vytvoří pevný bod na kružnici, která se kutálí po přímce. V případě brachystochrony tento bod leží na obvodu samotné kružnice:



Obrázek 11: Cykloida

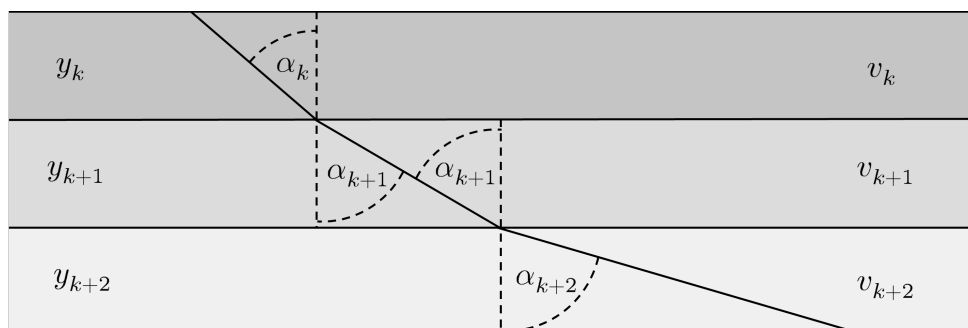
Roku 1696 během dvou týdnů vyřešil tento problém švýcarský matematik Johann Bernoulli (1667-1748) a následně ho předložil jako výzvu tehdejším nejlepším matematikům Evropy jako byli Newton, Leibniz nebo l'Hôpital. Newton jeho problém vyřešil za jedinou noc. Důkaz pak Johannovi poslal anonymně. Říká se, že když Johann tento anonymní důkaz viděl, pravil: „Poznávám lva podle jeho tlapy.“ [3]

Nyní si ukážeme důkaz Johanna Bernoulliho a podpoříme ho geometrií cykloidy, kterou ukázal moderní matematik Mark Levi z PennState Univerzity v jeho článku z roku 2015. Bernoulliho klíčový nápad byl, že místo hmotného padajícího tělesa uvažoval paprsek světla. Ze Snellova zákona víme, že si paprsek světla vždy vybere křivku minimalizující čas. Rozdělil si rovinu na vrstvy a v každé této vrstvě se rychlost paprsku zvětšuje (reprezentuje pád).



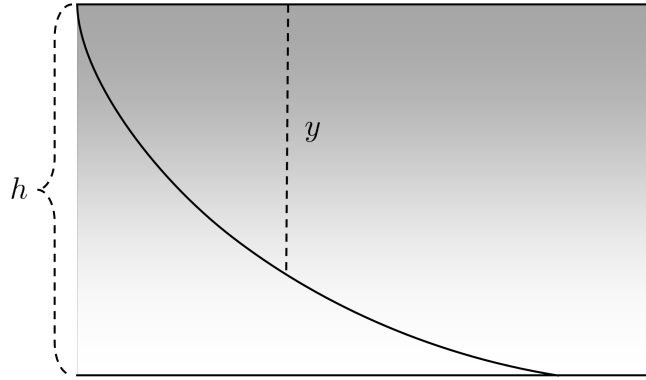
Obrázek 12: Nalezení brachystochrony podle Johanna Bernoulli

Aby byl minimalizovaný čas, musí v každém přechodu platit Snellův zákon (1).



Obrázek 13: Nalezení brachystochrony podle Johanna Bernoulli

Toto dělení na vrstvy musíme uvažovat v limitním procesu „jemné“, aby byl pád částice spojitý. Nyní zjistíme rychlost padající částice ve vzdálenosti y od počátečního bodu. Řekněme, že se počáteční bod nachází ve výšce h .



Obrázek 14: Repräsentace spojitého pádu

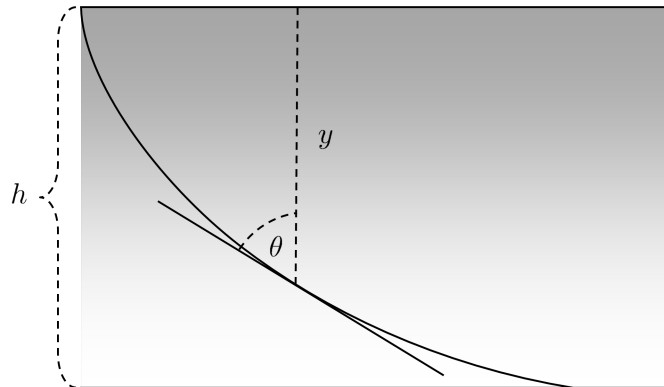
Protože částice začíná z klidového stavu, má pouze energii potenciální rovnu: mgh . Ze zákona o zachování energie víme, že $E_c = E_k + E_p = \text{konstanta}$. Odsud:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + mg(h - y)$$

$$gh = \frac{1}{2}v^2 + gh - gy$$

$$\sqrt{2g}\sqrt{y} = c\sqrt{y} = v$$

Aby křivka minimalizovala čas, musí v každém bodě splňovat Snellův zákon. Tj.:



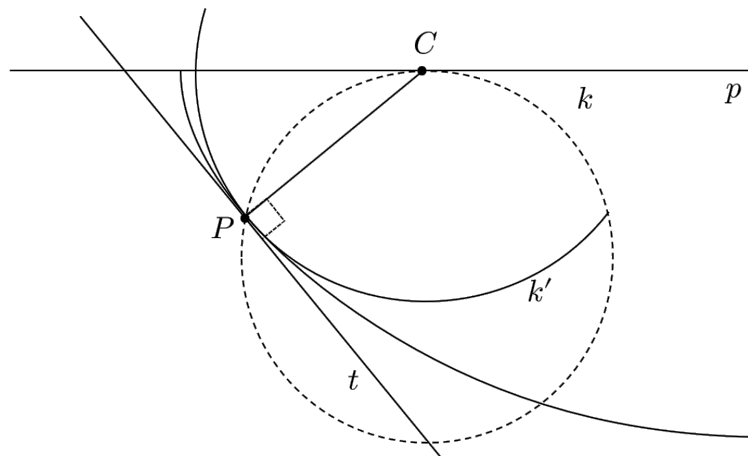
Obrázek 15: Nutná podmínka brachystochrony

$$\frac{\sin \theta}{v} = \frac{\sin \theta}{c\sqrt{y}} = c_0$$

$$\frac{\sin \theta}{\sqrt{y}} = C$$

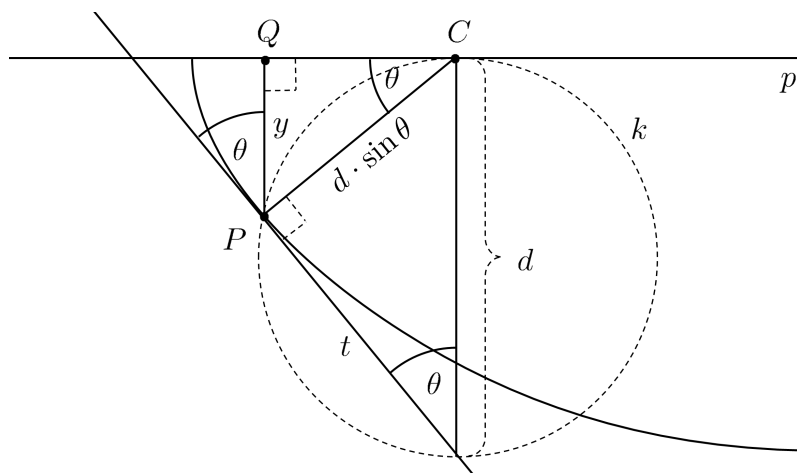
Když Bernoulli došel k tomuto závěru, ihned v něm viděl vztah s cykloidou. Dokažme ještě Bernoulliho tvrzení, že křivkou brachystochrony je opravdu cykloida. Elegantní geometrii cykloidy zveřejnil v roce 2015 Mark Levi. [4]

První krok je sestavení tečny v bodě P k cykloidě. Všimněme si, že pokud se dotýká kružnice k , tvořící cykloidu, přímky p v bodě C , můžeme si představit, že v tu chvíli se bod C chová jako střed otáčení bodu P . Trajektorii tohoto pomyslného otáčení označme k' . Víme, že tečna ke kružnici k' v bodě P svírá s úsečkou PC pravý úhel. Sestrojíme-li tedy tečnu t ke kružnici k' v bodě P , pak sestrojíme i tečnu k cykloidě v tomto bodě, která bude s úsečkou PC svírat také pravý úhel.



Obrázek 16: Geometrie cykloidy

Jako v předešlém případě označme y jako vzdálenost bodu P od přímky p a úhel θ jako úhel svíraný přímkami y a t . Z obrázku 17 jsou zjevné podobné pravoúhlé trojúhelníky:



Obrázek 17: Geometrie cykloidy

Vidíme, že v trojúhelníku QPC platí:

$$\sin \theta = \frac{y}{d \sin \theta}$$

$$\sqrt{d} \sin \theta = \sqrt{y}$$

$$\frac{\sin \theta}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{d}} = C_0$$

V posledním rovnici, je pravá strana konstantní, protože se poloměr d kružnice k k po celou dobu jeho kutálení nemění. Došli jsme tedy k závěru, že křivka, která minimalizuje čas sdílí svojí geometrii s cykloidou. Tím je náš důkaz dokončen.

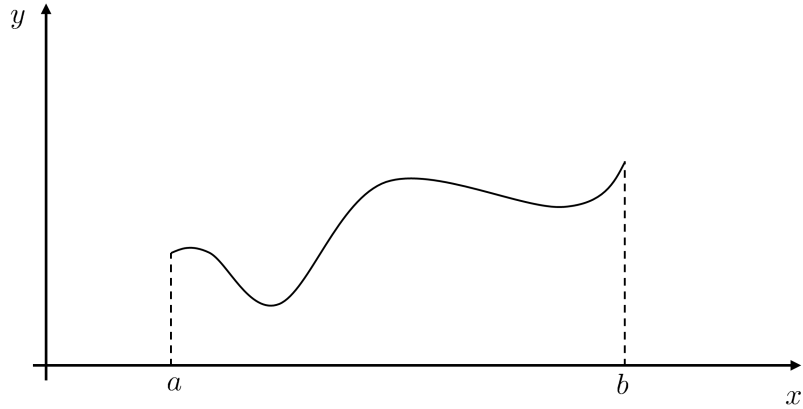
Jak si můžeme všimnout, zatím všechny předešlé problémy byly řešeny různými metodami. Naším cílem by mělo být zavedení nějakého systému do řešení takovýchto optimalizačních problémů. Abychom měli nějakou motivaci, můžeme si položit následující otázku: Jaká spojitá křivka spojující dva body v rovině je nejkratší? Intuitivně víme, že je to právě úsečka vedena těmito body. My ovšem máme na výběr z nekonečně mnoha křivek. Musíme tedy najít nějaký systematický postup, jak dokázat, že řešením našeho problému je právě úsečka. Tímto se dostáváme do variačního počtu, který už využívá metody matematické analýzy.

3 Variační počet metodami kalkulu

Leonhard Euler byl jeden z prvních matematiků, který zavedl nějaký systém do variačního počtu. Navrhl systematický postup, jak najít funkce minimalizující funkcionály ve tvaru uvedeném v kapitole 1.2. Abychom si zopakovali pojem funkcionál, vrátíme se k předchozímu problému hledání nejkratší spojnice dvou bodů v rovině.

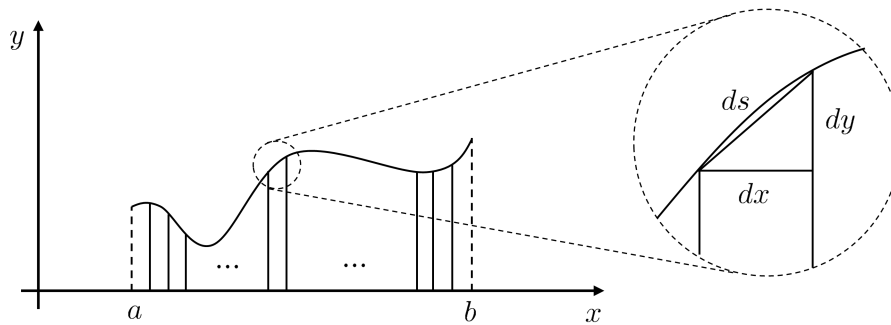
3.1 Křivky a jejich délky

Jaká spojitá křivka spojující dva body v rovině je nejkratší? V první řadě bychom měli definovat pojem spojitá křivka. Spojitá křivka je dána spojitou funkcí nebo parametrickými rovnicemi. Pro takto dané křivky můžeme sestavit graf, jehož délku se budeme snažit určit. Zkusíme si nyní odvodit vzorec pro výpočet délky takové křivky.



Obrázek 18: Rovinná křivka dána funkcí $y = y(x)$

Klasickou metodou kalkulu je studium chování funkce v malém okolí nějakého bodu na této funkci. K výpočtu délky křivky můžeme použít metodu jejího rozdělení (rektifikace) na malé části, respektive na přepony infinitezimální trojúhelníků, jejichž délky jsme schopni určit v závislosti na velikosti změny v x a y .



Obrázek 19: Odvození délky křivky metodou infinitezimálního počtu

Délky přepon (prvků) ds pak sečteme, aby daly délku celé křivky na $\langle a, b \rangle$. V infinitezimálním počtu pod tímto součtem rozumíme integrál na $\langle a, b \rangle$.

$$\int_a^b ds$$

$$\int_a^b \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$\int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

$$I(y) = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

Pozn.: Tento postup odvození vzorce je validní podle infinitezimálního počtu, nikoli podle moderního kalkulu. Můžeme ale prohlásit tento integrál jako definici samotné délky křivky na $\langle a, b \rangle$. V rozporu s opravdovou definicí délky křivky nejsme. [3]

Definice 3.1.: Mějme parametrickou křivku $\gamma(x, y)$ danou funkcemi $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$ pro $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$. Funkce ϕ, ψ jsou na $\langle \alpha, \beta \rangle$ spojité a mají na tomto intervalu spojitou první derivaci. Jako délku křivky γ na $\langle \alpha, \beta \rangle$ značíme:

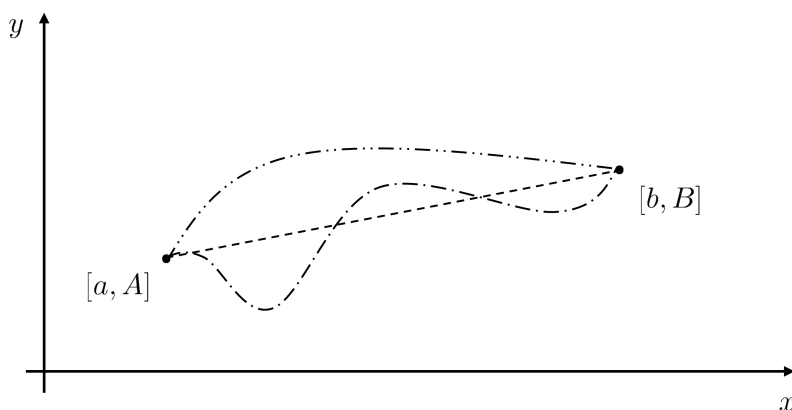
$$\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\phi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt$$

[3] Je-li parametrická rovnice zadána ve speciálním tvaru: $(x, y) = (t, y(t))$, pak se jedná o funkci y , která je závislá na x resp. t . Délka takové speciální parametrické křivky, pro $t \in \langle a, b \rangle$, odpovídá dříve odvozenému funkcionálu:

$$\int_a^b \sqrt{(t')^2 + (y')^2} dt = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dt$$

Nyní jsme zkonstruovali funkcionál I závislý na funkci y , který udává délku křivky y na $\langle a, b \rangle$. Naším cílem je najít funkci y , pro kterou bude $I(y)$ nabývat minima. Tato funkce musí splňovat okrajové podmínky: $y(a) = A, y(b) = B$. Očekáváme, že funkce y minimalizující $I(y)$ a splňující okrajové podmínky bude ve tvaru:

$$y(x) = \left(\frac{B - A}{b - a} \right) (x - a) + A$$



Obrázek 20: Křivky spojující dva body v rovině

3.2 První variace a Euler-Lagrangeova rovnice

Mějme funkcionál I definovaný na množině funkcí \mathcal{F} , funkci $y \in \mathcal{F}$ a funkci h takovou, aby $y + th \in \mathcal{F}$ pro malé t .

Definice 3.2.: *Existuje-li*

$$\delta I(y)h = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{I(y + th) - I(y)}{t} = \left. \frac{d}{dt} I(y + th) \right|_{t=0},$$

pak je funkcionál I Gâteaux diferencovatelný v y ve směru h . [3]

Výrazu $\delta I(y)h$ říkáme první variace funkcionálu I . Definice první variace je užitečná, neboť udává nutnou podmínku pro funkci udávající extrém funkcionálu.

Tvrzení 3.2.1.: *Udává-li funkce y lokální extrém funkcionálu I , pak za předpokladu existence $\delta I(y)h$ musí*

$$\delta I(y)h = 0$$

$$\forall h : y + th \in \mathcal{F}$$

Důkaz. Tvrzení dokážeme pro případ, kdy y udává lokální minimum funkcionálu I . Důkaz pro funkci udávající maximum by byl analogický.

Z definice minima musí $I(y + th) - I(y) \geq 0 \forall \{y, y + th\} \in \mathcal{F}$. Vydělíme-li výraz kladným t a zvážíme $\lim_{t \rightarrow 0^+}$, pak

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{I(y + th) - I(y)}{t} \geq 0$$

Vydělíme-li výraz $I(y + th) - I(y) \geq 0$ záporným t a zvážíme $\lim_{t \rightarrow 0^-}$, pak

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{I(y + th) - I(y)}{t} \leq 0$$

Jsou-li si tyto limity rovny, pak musí

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{I(y + th) - I(y)}{t} = \delta I(y)h = 0$$

□

Tvrzení 3.2.2: Máme-li funkcionál ve tvaru

$$I(y) = \int_a^b F(x, y, y') dx, \quad (2)$$

pak $\delta I(y)h$ má tvar:

$$\int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} h + \frac{\partial F}{\partial y'} h' \right] dx \quad (3)$$

Důkaz.

$$\delta I(y)h = \frac{d}{dt} \left[\int_a^b F(x, y + th, y' + th') dx \right] \Big|_{t=0}$$

Leibnizovo pravidlo pro integraci říká, že můžeme zaměnit pořadí derivace a integrace:

$$\int_a^b \frac{d}{dt} F(x, y + th, y' + th') \Big|_{t=0} dx$$

Užitím derivace funkce proměnných dostáváme:

$$\int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial y + th} \frac{\partial y + th}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial y' + th'} \frac{\partial y' + th'}{\partial t} \right] \Big|_{t=0} dx$$

$$\int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y + th} h + \frac{\partial F}{\partial y' + th'} h' \right] \Big|_{t=0} dx$$

Vyčísleme-li v $t = 0$, dostáváme první variaci funkcionálu (2):

$$\int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} h + \frac{\partial F}{\partial y'} h' \right] dx$$

□

Při zavedení okrajových podmínek na přípustné funkce, tj. pro $y \in \mathcal{F}$ musí platit $y(a) = A, y(b) = B$, pak pro $y + th \in \mathcal{F}$ musí platit $h(a) = h(b) = 0$, můžeme odvodit nutnou podmínku pro funkci udávající lokální extrém funkcionálu (2) ve formě diferenciální rovnice, které říkáme Euler-Lagrangeova rovnice.

Tvrzení 3.2.3: Máme-li funkcionál ve tvaru

$$I(y) = \int_a^b F(x, y, y') dx,$$

pak funkce y udávající lokální extrém I a splňující okrajové podmínky musí splňovat Euler-Lagrangeovu rovnici:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0 \quad (4)$$

Důkaz. Z tvrzení 4.2.1. víme, že je notnou podmínkou, aby $\delta I(y)h = 0 \forall h$ a při I ve tvaru (2) máme:

$$\int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} h + \frac{\partial F}{\partial y'} h' \right] dx = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial y} h dx + \int_a^b \frac{\partial F}{\partial y'} h' dx = 0 \quad (5)$$

Druhý člen v (5) integrujme po částech. Víme, že: $\int_a^b u \cdot v' dx = [u \cdot v]_a^b - \int_a^b v \cdot u' dx$. V našem případě zvolme $u = \frac{\partial F}{\partial y'}$, $v' = h'$. Odsud:

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial y'} h' dx = \left[\frac{\partial F}{\partial y'} h \right]_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) h dx \quad (6)$$

Kvůli okrajovým podmínkám $h(a) = h(b) = 0$ máme $\left[\frac{\partial F}{\partial y'} h \right]_a^b = 0$. Substitucí (6) do 5 dostáváme:

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial y} h dx + \int_a^b \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) h dx = 0$$

Integrál sloučíme do jednoho a vytkneme h :

$$\int_a^b h \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right) dx = 0$$

Neboť rovnost musí platit $\forall h$, pak užitím fundamentálního lemmatu variačního počtu [3] dostáváme nutnou podmínku pro funkci udávající extrém funkcionálu:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0$$

□

3.3 Nejkratší spojnice dvou bodů v rovině

V kapitole 4.1. jsme odvodili tvar funkcionálu, který udává délku grafu funkce na $\langle a, b \rangle$:

$$I(y) = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

Za okrajových podmínek: $y(a) = A$, $y(b) = B$ si přejeme tento funkcionál minimalizovat. Aby nabýval funkcionál extrému resp. minima, musí splňovat Euler-Lagrangeovu rovnici (4). V tomto případě máme $F(x, y, y') = \sqrt{1 + (y')^2}$. Určíme parciální derivace F vůči první a druhé proměnné:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\sqrt{1 + (y')^2} \right) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y'} &= \frac{1}{2} \frac{2y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} = \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} \end{aligned}$$

Vyřešíme odpovídající Euler-Lagrangeovu rovnici a vyřešíme pro y :

$$0 - \frac{d}{dx} \left[\frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} \right] = 0$$

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} \right] = 0$$

Obě strany integrujeme podle x a dostáváme: (c, C, c_0, c_1 jsou konstanty)

$$\frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} = c$$

$$y' = c\sqrt{1 + (y')^2}$$

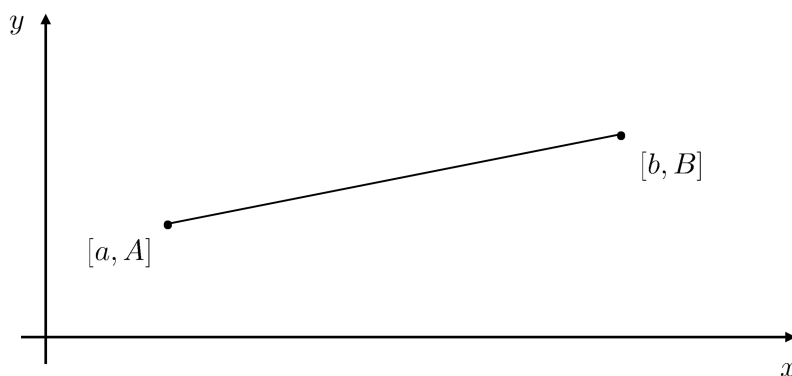
$$(y')^2 = C + C(y')^2$$

$$y' = \sqrt{\frac{C}{1 - C}} = c_1$$

$$y = c_1x + c_0$$

Po aplikaci okrajových podmínek: $y(a) = A, y(b) = B$ vidíme, že y nabývá tvaru, který jsme očekávali:

$$y(x) = \left(\frac{B - A}{b - a} \right) (x - a) + A$$



Obrázek 21: Nejkratší spojnice dvou bodů v rovině

Euler-Lagrangeova rovnice ovšem udává pouze extrém, ne výslovně minimum. Abychom byli přesvědčeni o tom, že funkce opravdu minimalizuje $I(y)$, museli bychom provést další testování, jako je například druhá variace. Pro teď si ale vystačíme s intuicí a pravdivě prohlásíme, že funkce s nejmenší délkou procházející dvěma pevnými body v rovině je právě funkce afinní.

3.4 Beltramiho identita

V minulém problému nabýval funkcionál relativně jednoduchého tvaru, neboť platilo: $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$. Pro složitější funkcionály může být nutností k nalezení extrémální funkce řešení diferenciální rovnice druhého řádu.

Beltramiho identita, pojmenovaná podle italského matematika Eugenio Beltrami (1835-1900), je méně obecná verze Euler-Lagrangeovy rovnice. Stejně jako Euler-Lagrangeova rovnice, udává nutnou podmínku pro minimalizaci nebo maximalizaci funkcionálu ve tvaru (2).

Tvrzení 3.4.: Máme-li funkcionál ve tvaru

$$I(y) = \int_a^b F(x, y, y') dx,$$

kde $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$, pak Euler-Lagrangeova rovnice je ekvivalentní diferenciální rovnicí:

$$F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = C, \quad (7)$$

kde C je konstanta. Rovnici (7) říkáme Beltramiho identita.

Důkaz. K odvození Beltramiho identity začneme Euler-Lagrangeovou rovnicí (4):

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0$$

Obě strany vynásobíme y' :

$$y' \frac{\partial F}{\partial y} - y' \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0 \quad (8)$$

K dalšímu postupu je nutné využít vlastnosti totální derivace $F(x, y, y')$ vůči x . Z derivace funkce více proměnných vyplývá, že:

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dx} &= \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial x} \\ \frac{dF}{dx} &= \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial y'} y'' \end{aligned} \quad (9)$$

Pracujeme-li s předpokladem, že: $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$, můžeme rovnici (9) upravit na tvar:

$$\frac{dF}{dx} - \frac{\partial F}{\partial y} y'' = y' \frac{\partial F}{\partial y'} \quad (10)$$

Substitucí rovnice (10) do rovnice (8) dostáváme:

$$\begin{aligned}\frac{dF}{dx} - \frac{\partial F}{\partial y} y'' - y' \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) &= 0 \\ \frac{dF}{dx} - \left[y'' \frac{\partial F}{\partial y} + y' \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] &= 0\end{aligned}\tag{11}$$

Pravidlo o derivaci součinu funkcí říká, že:

$$\frac{d}{dx} \left(y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = y'' \frac{\partial F}{\partial y'} + y' \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right)\tag{12}$$

Substituuujeme rovnici (12) do rovnice (11):

$$\begin{aligned}\frac{dF}{dx} - \frac{d}{dx} \left(y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right) &= 0 \\ \frac{d}{dx} \left(F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right) &= 0\end{aligned}$$

Obě strany integrujeme vůči x a dostáváme tak Beltramiho identitu:

$$F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = C\tag{13}$$

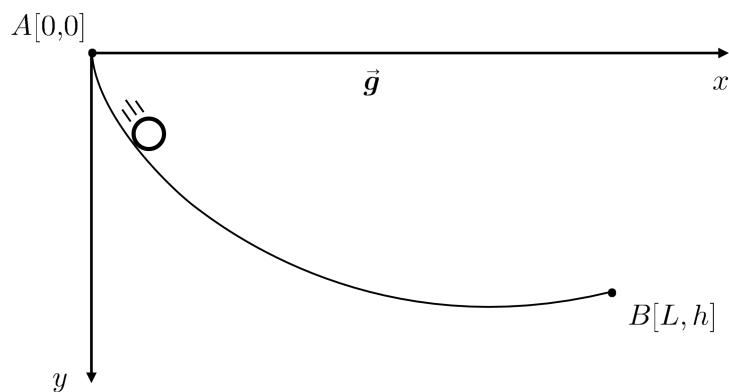
Zde je C integrační konstanta dále určena z okrajových podmínek

Řešení Beltramiho identity je často jednodušší, než řešení Euler-Lagrangeovy rovnice. U klasických variačních problémů je vlastnost $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$, jak uvidíme, velice častá, a tak postačí řešení diferenciální rovnice vycházející z aplikace Beltramiho identity. Na rozdíl od Euler-Lagrangeovy rovnice při aplikaci Beltramiho identity bude nutné vždy řešit pouze diferenciální rovnici prvního řádu.

3.5 Problém brachystochrony

Nyní se budeme věnovat řešení problému brachystochrony pomocí hledání minima odpovídajícího funkcionálu.

Mějme počáteční bod $A[0, 0]$ a konečný bod $B[L, h]$ v souřadnicové soustavě, kde osa y směřuje dolů. Body A, B udávají okrajové podmínky.

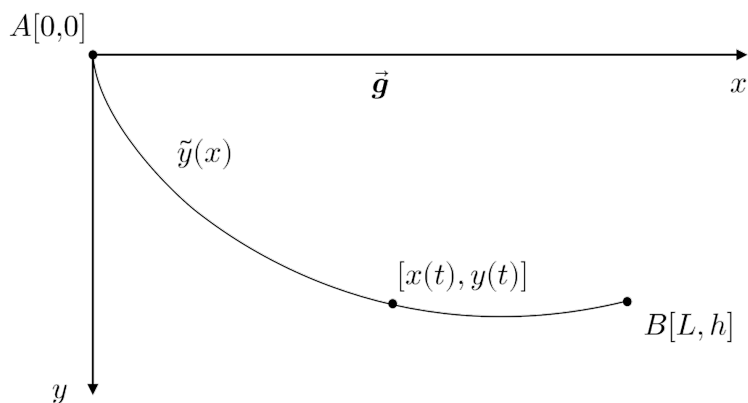


Obrázek 22: Hledání brachystochrony analyticky

Trajektorii parametrizujeme v závislosti na čase $t : \{(x(t), y(t)) | t \in \langle 0, T \rangle\}$. Zde je T celkový čas, za který se dostane částice z bodu A do bodu B . Musí být splněny okrajové podmínky: $(x(0), y(0)) = (0, 0); (x(T), y(T)) = (L, h)$

$$T = \int_0^T dt = \int_0^T 1 dt \quad (14)$$

Předpokládejme, že je možné trajektorii parametrizovat s $x : \{(x(t), y(t)) | t \in \langle 0, T \rangle\} = \{(x, \tilde{y}(x)) | x \in \langle 0, L \rangle\}$.



Obrázek 23: Parametrizace křivky brachystochrony

Z kapitoly 4.1. je nyní délka, či dráha \tilde{y} rovna:

$$s(t) = \int_0^{x(t)} \sqrt{1 + (\tilde{y}'(\xi))^2} d\xi = I(x(t)) \quad (15)$$

Z klasické mechaniky víme, že $\frac{ds}{dt}(t) = v(t)$. V případě (15) máme podle derivace složené funkce:

$$\frac{d}{dt} I(x(t)) = I'(x(t)) \cdot x'(t) = \sqrt{1 + (\tilde{y}'(x(t)))^2} \cdot x'(t) = v(t)$$

Začíná-li částice s nulovou rychlostí, podle kapitoly 3.5 můžeme její rychlost vyjádřit také jako:

$$v(t) = \sqrt{2g\tilde{y}(x(t))}$$

Tyto rychlosti jsou si samozřejmě rovny, a tedy:

$$1 = \frac{\sqrt{1 + (\tilde{y}'(x(t)))^2}}{\sqrt{2g\tilde{y}(x(t))}} x'(t)$$

Substitucí do (14) dostáváme:

$$T = \int_0^T 1 dt = \int_0^T \frac{\sqrt{1 + (\tilde{y}'(x(t)))^2}}{\sqrt{2g\tilde{y}(x(t))}} x'(t) dt$$

Zvolíme substituci $x(t) = \phi \implies x'(t)dt = d\phi$ a dostáváme nové integrační meze: $x(0) = 0, x(T) = L$:

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^L \frac{\sqrt{1 + (\tilde{y}'(\phi))^2}}{\sqrt{\tilde{y}(\phi)}} d\phi$$

Zanedbáme konstantu $\frac{1}{\sqrt{2g}}$ a naším cílem je tedy minimalizovat funkcionál ve tvaru:

$$\int_0^L \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{y}} dx = \int_0^L F(x, y, y') dx \quad (16)$$

Platí: $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ a tedy k nalezení funkce udávající minimum funkcionálu můžeme využít Beltramiho identitu (7):

$$F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = C$$

V tomto případě máme: $F = \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{y}}$, $\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{y}\sqrt{1 + (y')^2}}$ Aplikací Beltramiho identity dostáváme diferenciální rovnici:

$$\frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{y}} - \frac{\sqrt{(y')^2}}{\sqrt{y}\sqrt{1 + (y')^2}} = C$$

Obě strany vynásobíme výrazem: $\sqrt{y}\sqrt{1 + (y')^2}$: $(C, c_0, c_1, k$ jsou konstanty)

$$1 + (y')^2 - (y')^2 = C\sqrt{y}\sqrt{1 + (y')^2}$$

$$1 = C\sqrt{y}\sqrt{1 + (y')^2}$$

Separujeme $y' = \frac{dy}{dy}$:

$$\frac{1}{C^2} = c_0 = y(1 + (y')^2)$$

$$\sqrt{\frac{c_0}{y} - 1} = y' = \frac{dy}{dx}$$

$$dx = \sqrt{\frac{y}{c_0 - y}} dy$$

Integrací obou stran dostáváme:

$$x = \int \sqrt{\frac{y}{c_0 - y}} dy$$

Zavedeme substituci: $y = c_0 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \implies dy = c_0 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta$:

$$x = \int \sqrt{\frac{c_0 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{c_0 - c_0 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}} c_0 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta$$

Integrand zjednodušíme pomocí trigonometrické rovnice: $\sqrt{1 - \left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^2} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$:

$$x = c_0 \int \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta$$

$$x = c_0 \int \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta$$

Další trigonometrická rovnice říká, že: $\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1 + \cos\theta}{2}$:

$$x = \frac{c_0}{2} \int (1 + \cos\theta) d\theta$$

Nechť $k = \frac{c_0}{2}$, pak:

$$x = k(\theta - \sin\theta) + c_1$$

Dříve zavedenou substituci zjednodušíme:

$$y = c_0 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = k(1 - \cos\theta)$$

Nyní máme křivku udávající extrém resp. minimum integrálu (16) určenou parametrickými rovnicemi:

$$x = k(\theta - \sin\theta) + c_1$$

$$y = k(1 - \cos\theta)$$

K určení c_1 využijeme okrajových podmínek: $x = 0 \iff y = 0$:

$$0 = k(\theta - \sin\theta) + c_1$$

$$0 = k(1 - \cos\theta)$$

Určitě $k \neq 0$, pak musí být podle druhé rovnice $\theta = 0$. Odsud:

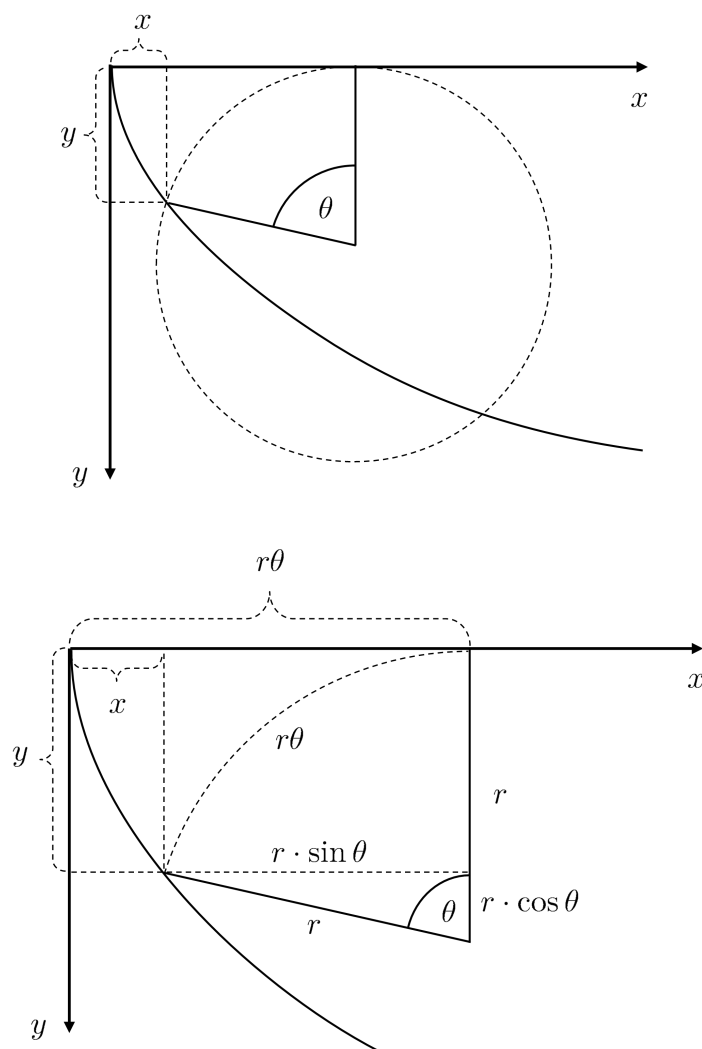
$$0 = k(0 - \sin 0) + c_1 = c_1$$

Parametrické rovnice jsme zjednodušili na:

$$x = k(\theta - \sin \theta)$$

$$y = k(1 - \cos \theta)$$

Z kapitoly (1.3.5.) víme, že křivka minimalizující čas, brachystochrona, je část inverzní cykloidy. Tyto parametrické rovnice by tedy měli odpovídat parametrickým rovnicím cykloidy. Tento fakt je znázorněn na obrázku 24.:



Obrázek 24: Parametrické rovnice cykloidy

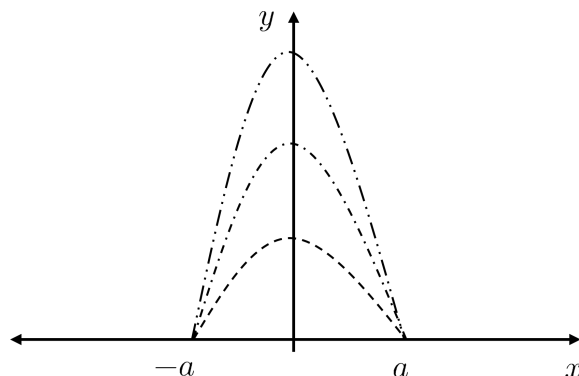
Vidíme, že máme $x(\theta) = r\theta - r \sin \theta = r(\theta - \sin \theta)$ a zároveň $y(\theta) = r - r \cos \theta = r(1 - \cos \theta)$, což odpovídá parametrickým rovnicím pro $k = r$.

4 Isoperimetrické problémy

Nyní jsme si už ukázali řešení některých variačních problémů pomocí Euler-Lagrangeovy rovnice. Problém královny Dido z kapitoly 3.1. se jeví jako ukázkový variační problém. Můžeme problém převést do jazyka Integrálního počtu. Zjednodušíme si problém tím, že si zvolíme meze $-a, a$. Chceme nyní maximalizovat funkcionál ve tvaru:

$$\int_{-a}^a y \, dx = \int_{-a}^a F(x, y, y') \, dx,$$

kde máme okrajové podmínky $y(-a) = y(a) = 0$. Odpovídající Euler-Lagrangeova rovnice má ovšem tvar: $1 = 0$, což znamená, že žádná funkce není pro tento problém lokálním extrémem. Je zjevné, že bez zavedení další podmínky můžeme udělat obsah pod křivkou y libovolně velký, či malý:



Obrázek 25: Absence lokálního extrému k problému královny Dido

V problému královny Dido byla zavedena důležitá podmínka a to, že délka samotné křivky y je předem dána. K řešení problému analyticky potřebujeme nějakou novou metodu řešení, která pracuje s naší podmínkou.

4.1 Metoda Lagrangeových multiplikátorů

Někdy nazývána Lagrangeova metoda neurčitých koeficientů je metoda, jak nalézt extrém funkcionálu za platnosti nějakých diferenciálních podmínek na přípustné funkce. Jedná se o rozšíření klasické metody Lagrangeových multiplikátorů používané při hledání extrémů funkce více proměnných za daných podmínek.

Tvrzení 4.1.: *Chceme-li najít extrém funkcionálu*

$$I(y) = \int_a^b F(x, y, y') dx$$

za podmínky na y ve tvaru

$$K(y) = \int_a^b G(x, y, y') dx = \ell \in \mathbb{R},$$

pak je tímto extrémem extrém funkcionálu

$$\mathcal{L}(y) = I(y) + \lambda K(y), \quad (17)$$

kde $\lambda \in \mathbb{R}$ je dále určena z podmínky $K(y) = \ell$ nebo z okrajových podmínek na y .

[3]

Důkaz. Důkaz rozšiřuje klasickou metodu Lagrangeových multiplikátorů a je uveden v knize [3] na straně 59. □

4.2 Problém královny Dido jako isoperimetrický problém

Stejně jako v kapitole 3.1. věnované tomuto problému, se budeme snažit maximalizovat obsah pod křivkou, máme-li danou délku této křivky. Délku hledané křivky y označme L . Isoperimetrická podmínka k tomuto problému bude tedy:

$$K(y) = \int_{-a}^a \sqrt{1 + (y')^2} dx = L \quad (18)$$

Máme zde také okrajové podmínky: $y(-a) = y(a) = 0$. Hledáme maximum funkcionálu:

$$I(y) = \int_{-a}^a y dx$$

za podmínky (18). Podle tvrzení 5.1. uvedeme nový funkcionál

$$\mathcal{L}(y) = I(y) + \lambda K(y) = \int_{-a}^a y + \lambda \sqrt{1 + (y')^2} dx, \quad (19)$$

jehož maximum najdeme vyřešením odpovídající Beltramiho identity, která v tomto případě je aplikovatelná. Označíme-li integrand (19) jako $F(x, y, y')$, pak $\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{\lambda y'}{\sqrt{1 + (y')^2}}$.

Odpovídající Beltramiho identita (7) má tedy tvar:

$$y + \lambda \sqrt{1 + (y')^2} - y' \frac{\lambda y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} = C$$

Obě strany vynásobíme $\sqrt{1 + (y')^2}$:

$$y\sqrt{1 + (y')^2} + \lambda(1 + (y')^2) - \lambda(y')^2 = C\sqrt{1 + (y')^2}$$

$$y\sqrt{1 + (y')^2} + \lambda = C\sqrt{1 + (y')^2}$$

Separujeme $y' = \frac{dy}{dx}$:

$$(y - C)\sqrt{1 + (y')^2} = -\lambda$$

$$1 + (y')^2 = \frac{\lambda^2}{(y - C)^2}$$

$$y' = \sqrt{\frac{\lambda^2}{(y - C)^2} - 1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{\lambda^2 - (y - C)^2}}{y - C}$$

$$dx = \frac{y - C}{\sqrt{\lambda^2 - (y - C)^2}} dy$$

Integrací obou stran dostáváme:

$$x = \int \frac{y - C}{\sqrt{\lambda^2 - (y - C)^2}} dy$$

Zavedeme substituci:

$$\lambda^2 - (y - C)^2 = u \implies -2(y - C)dy = du \iff (y - C)dy = -\frac{1}{2}du$$

$$x = \int -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{u}} du = -\sqrt{u} + c$$

Desubstituujeme a upravíme výraz:

$$x + c = \sqrt{\lambda^2 - (x - C)^2}$$

$$f(x, y) : \lambda^2 = (y - C)^2 + (x - c)^2$$

Aplikujeme okrajové podmínky: $y(-a) = y(a) = 0$

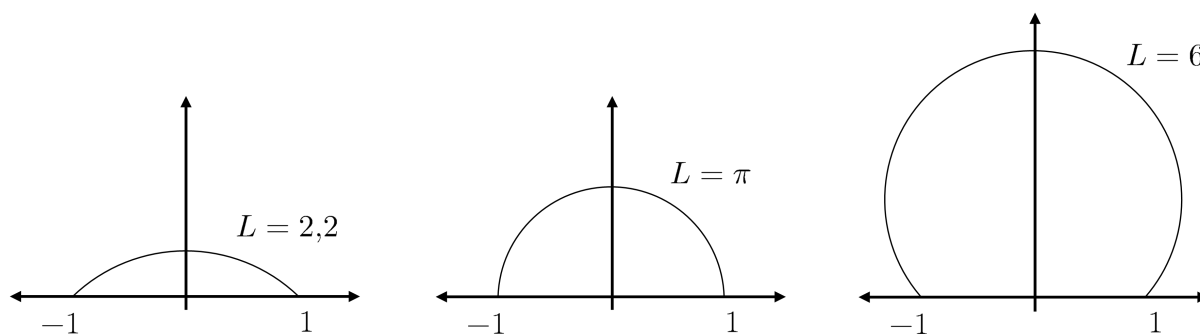
$$\lambda^2 = (0 - C)^2 + (a - c)^2 = C^2 + (a - c)^2$$

$$\lambda^2 = (0 - C)^2 + (-a + c)^2 = C^2 + (a + c)^2$$

Odsud je zjevné, že musí platit: $c = -c \implies c = 0$. Hledanou funkci jsme tedy zjednodušili na:

$$f(x, y) : \lambda^2 = (y - C)^2 + x^2$$

Při libovolně zadaném L a a se ale řešení problému liší od našeho původního v kapitole 3.1.. To kvůli tomu, že nyní musíme mít pevně zadané meze, které jsme v původním problému mohli posouvat. Ve skutečnosti jsme tedy vyřešili docela jiný problém. Můžeme předpokládat, že v tomto mírně modifikovaném problému královny Dido se v bodech $-a, a$ nacházely strategické body pro umístění přístavů a královna tyto přístavy chtěla mít výhradně na okrajích města. Pro takový problém je pak řešením část kružnice. Sazmořejmě při dobře zvoleném L a a splyne řešení tohoto problému s řešením původního problému. Na obrázku 26 jsou ilustrována řešení pro $a = 1$ a s různě zadanými L .

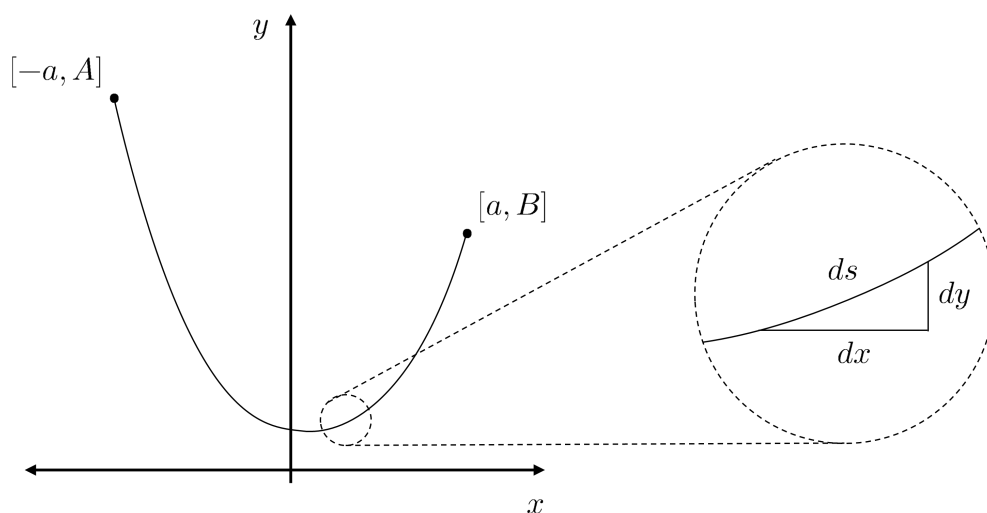


Obrázek 26: Řešení modifikovaného problému královny Dido

4.3 Řetězovka

Někdy také nazývaný problém visícího řetězu je isoperimetrický variační problém, který se ptá, jakou křivku tvoří řetěz zavěšené mezi dvěma pevnými body v rovině při působení homogenního gravitačního pole. Délka řetězu je daná. Galileo Galilei (1564-1642) se domníval, že řetěz nabývá tvaru paraboly, což, jako uvidíme, není pravda. Křivku vytvořenou řetězem chceme jako obvykle vyjádřit analyticky.

K řešení tohoto problému se nejdříve zopakujeme základní principy fyziky. Všechny hmotné objekty se snaží minimalizovat svojí potenciální energii při působení gravitační síly (padají k zemi). Stejně je tomu u našeho problému. Visící řetěz se rovněž snaží minimalizovat svojí potenciální energii. Musíme tedy zkonstruovat funkcionál udávající potenciální energii takového řetězu. Abychom si odvodili funkcionál udávající potenciální energii (E_p) řetězu, musíme se podívat zblízka na hledanou křivku.



Obrázek 27: Odvození funkcionálu pro řetězovku

Označme dE_p jako potenciální energii prvku ds . K určení celkové potenciální energie řetězu integrujeme prvky dE_p :

$$E_p(y) = \int_{-a}^a dE_p \quad (20)$$

Víme, že $E_p = mgh$. Odtud $dE_p = (dm)gh$, kde dm je element hmotnosti elementu délky ds . Protože uvažujeme, že $dx, dy \rightarrow 0$, můžeme říci, že celý prvek ds je ve výšce $h = y \implies dE_p = (dm)gy$. Řekněme, že řetěz má lineární hustotu μ (hmotnost na délku jednotky). Hmotnost prvku ds můžeme tedy zapsat jako: $dm = \mu \cdot ds \implies dE_p = \mu \cdot ds \cdot gy$. Substituujeme do (20):

$$E_p(y) = \int_{-a}^a dE_p = \int_{-a}^a (dm)gh = \int_{-a}^a (dm)gy = \int_{-a}^a \mu \cdot ds \cdot gy$$

Z kapitoly 4.1. víme, že $ds = \sqrt{1 + (y')^2}dx$. Provedeme substituci a upravíme:

$$E_p(y) = \int_{-a}^a \mu \sqrt{1 + (y')^2} dx \cdot gy$$

Konstantu $\mu \cdot g$ zanedbejme. Funkcionál, který máme minimalizovat je tedy ve tvaru:

$$E_p(y) = \int_{-a}^a y \sqrt{1 + (y')^2} dx \quad (21)$$

Řekněme, že délka řetězu je L . Pracujeme tedy s isoperimetrickou podmínkou:

$$K(y) = \int_{-a}^a \sqrt{1 + (y')^2} dx = L \quad (22)$$

Podle tvrzení 5.1. zkonstruujeme funkcionál $\mathcal{L}(y)$, jehož extrém bude udávat extrém funkcionálu (21) za isoperimetrické podmínky (22):

$$\mathcal{L}(y) = E_p(y) + \lambda K(y) = \int_{-a}^a y \sqrt{1 + (y')^2} + \lambda \sqrt{1 + (y')^2} dx \quad (23)$$

Beltramiho identita (7) je aplikovatelná. Integrand funkcionálu (23) nazvěme F . Odsud $\frac{\partial F}{\partial y'} = (y + \lambda) \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}}$. Odpovídající Beltramiho identita má tedy tvar:

$$y \sqrt{1 + (y')^2} + \lambda \sqrt{1 + (y')^2} - \frac{(y + \lambda)(y')^2}{\sqrt{1 + (y')^2}} = C$$

Obě strany vynásobíme $\sqrt{1 + (y')^2}$ a separujeme $y' = \frac{dy}{dx}$:

$$y + y(y')^2 + \lambda + \lambda(y')^2 - y(y')^2 - \lambda(y')^2 = C \sqrt{1 + (y')^2}$$

$$y + \lambda = C \sqrt{1 + (y')^2}$$

$$\frac{(y + \lambda)^2}{C^2} - 1 = (y')^2$$

$$\sqrt{\frac{(y + \lambda)^2 - C^2}{C^2}} = \frac{dy}{dx}$$

$$dx = \frac{C}{\sqrt{(y + \lambda)^2 - C^2}} dy$$

Obě strany integrujeme:

$$x = \int \frac{C}{\sqrt{(y + \lambda)^2 - C^2}} dy$$

Pro integrál na pravé straně zavedme substituci: $y + \lambda = C \cosh u \implies dy = C \sinh u du$, kde: $\cosh u = \frac{e^u + e^{-u}}{2}$, $\sinh u = \frac{e^u - e^{-u}}{2}$. Platí, že: $\cosh^2 u - 1 = \sinh^2 u$. Provedeme substituci a upravíme:

$$x = \int \frac{C^2}{\sqrt{(C \cosh u)^2 - C^2}} du$$

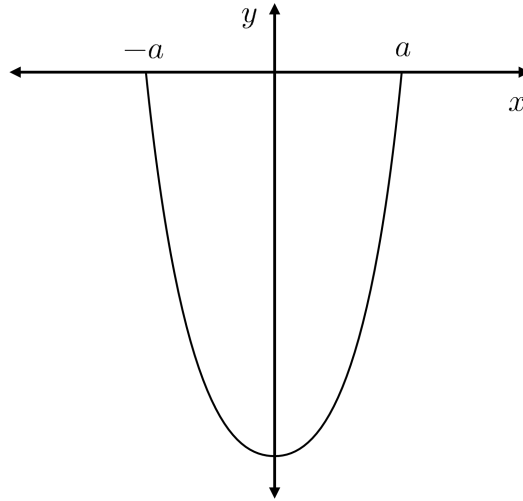
$$x = \int \frac{C \sinh u}{\sqrt{\cosh^2 u - 1}} du$$

$$x = \int C du = C \cdot u + c$$

$$C \cosh \left(\frac{x - c}{C} \right) = C \cosh u = y + \lambda$$

$$y = C \cosh \left(\frac{x - c}{C} \right) - \lambda \quad (24)$$

Pro teď uvažujme, že řetěz „visí na ose x “ a tedy uvedeme okrajové podmínky: $y(-a) = y(a) = 0$:



Obrázek 28: Řetěz visící na ose x

$$y(a) = C \cosh\left(\frac{a-c}{C}\right) - \lambda = y(-a) = C \cosh\left(\frac{-a-c}{C}\right) - \lambda = 0$$

Neboť $\cosh(q) = \cosh(-q)$, pak:

$$C \cosh\left(\frac{a-c}{C}\right) - \lambda = C \cosh\left(\frac{a+c}{C}\right) - \lambda$$

Odsud je zjevné, že musí platit $c = 0$. Protože $0 = C \cosh\left(\frac{a}{C}\right) - \lambda$, pak $\lambda = C \cosh\left(\frac{a}{C}\right)$.

Konečně, graf řetězovky je graf funkce:

$$y(x) = C \cosh\left(\frac{x}{C}\right) - C \cosh\left(\frac{a}{C}\right)$$

Neznámá konstanta C je numericky dohledatelná z podmínky $\int_{-a}^a \sqrt{1 + (y')^2} dx = L$

Tvar řetězovky je využíván v architektuře, neboť obrácená řetězovka tvoří oblouk, který je nejstabilnější v tom smyslu, že je schopen unést svou vlastní váhu.

Praktická část práce

V této části práce se budeme věnovat analýze nejkratších křivek v rovině s překážkami. Zejména budeme hledat obecné tvary takovýchto křivek a pro daný problém a dokážeme, že se opravdu jedná o nejkratší křivku pro daný problém za předpokladu, že nejkratší křivka existuje. K důkazu existence obecného tvaru nejkratší křivky využijeme známé věty reálné analýzy. Při důkazu, že tato křivka je optimální, využijeme základních poznatků variačního počtu.

5 Základní pojmy problému

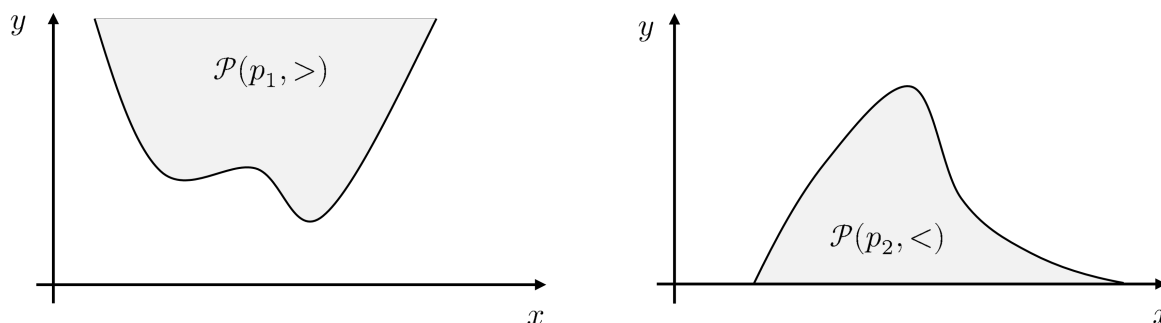
Základními pojmy všech následujících problémů budou překážky a přípustné křivky.

5.1 Definice překážky

Překážka \mathcal{P} v rovině je množina všech bodů \mathbb{R}^2 daná dvojicí: $(p_1, >)$ nebo $(p_2, >)$, kde p_1, p_2 jsou spojitě reálné funkce. Znaménko nerovnosti určuje zda-li je překážka tvořena nadgrafem nebo podgrafem funkce. Samotné překážky jsou definovány následovně:

$$\mathcal{P}(p_1, >) = \{A[a_x, a_y] \mid a_y > p_1(a_x)\} \quad (25)$$

$$\mathcal{P}(p_2, <) = \{B[b_x, b_y] \mid b_y < p_2(b_x)\} \quad (26)$$



Obrázek 29: Ilustrace překážek v \mathbb{R}^2

Tyto překážky mohou být omezeny na uzavřené intervaly. Další předpoklady o vlastnostech funkcí udávající překážky budou uvedeny při řešení daného problému.

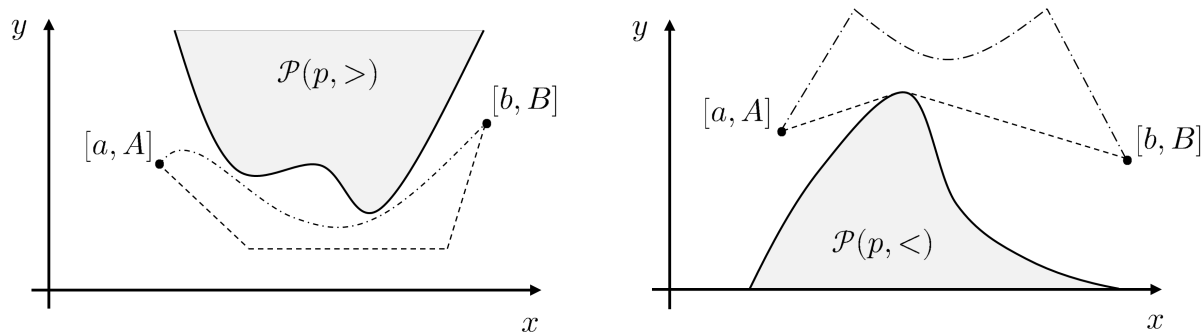
5.2 Definice přípustných křivek

Pojem křivka a funkce použijeme zaměnitelně. Množinu všech spojitých křivek na $\langle a, b \rangle$ značíme $C[a, b]$. Hladká křivka na $\langle a, b \rangle$ je spojitá křivka se spojitou derivací n -tého řádu. Množina všech funkcí se spojitou první derivací na $\langle a, b \rangle$ je značena $C^1[a, b]$. Po částech (piecewise) hladká křivka na $\langle a, b \rangle$ je křivka, která je spojitá na celém $\langle a, b \rangle$ a hladká na dílčích intervalech $\langle x_{i-1}, x_i \rangle \subseteq \langle a, b \rangle, i = \{1, \dots, m\}$, kde $a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$. Množinu všech po částech hladkých křivek na $\langle a, b \rangle$ značíme $C^{1,pw}[a, b]$. Určitě $C^1[a, b] \subset C^{1,pw}[a, b] \subset C[a, b]$ a všechny tři množiny jsou vektorové prostory. [3]

Přípustné křivky (*admissible curves*) musí vycházet z námi zadaného počátečního bodu $[a, A]$ a končit v námi zadaném bodě $[b, B]$. Na celém intervalu $\langle a, b \rangle$ nesmí zasáhnout do žádné námi zadané překážky.

Definice 5.2.: *Nechť \mathcal{A} značí množinu všech přípustných křivek. Mějme na intervalu $\langle a, b \rangle$ zadané překážky $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n$ a okrajové body $[a, A], [b, B]$. Křivka $k \in \mathcal{A} \subseteq C^{1,pw}[a, b]$ je přípustná, právě když:*

$$\forall x \in \langle a, b \rangle, \forall m = \{1, \dots, n\} : [x, k(x)] \notin \mathcal{P}_m \wedge k(a) = A, k(b) = B$$



Obrázek 30: Přípustné křivky

5.3 Definice délky křivek a nejkratší křivky

Definice 5.3.1.: *Délka (length) křivky $k \in C^{1,pw}[a, b]$ na $\langle a, b \rangle$ je určena funkcí:*

$$L(k) = \int_a^b \sqrt{1 + (k')^2} dx \quad (27)$$

Důsledek 5.3.1.: Máme-li křivku $k_{pw}(x) \in C^{1,pw}[a, b]$ zadanou ve formě

$$k_{pw}(x) = \begin{cases} k_0(x) & \text{pro } x \in \langle x_0, x_1 \rangle \\ \vdots & \vdots \\ k_{m-1}(x) & \text{pro } x \in \langle x_{m-1}, x_m \rangle \end{cases},$$

kde: $a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$, pak můžeme využít aditivitu integrálů a délku k_{pw} na $\langle a, b \rangle$ zapsat jako:

$$L(k_{pw}) = \sum_{i=0}^{m-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \sqrt{1 + (k'_i)^2} dx$$

Aby byla křivka $k_{pw} \in C^{1,pw}[a, b]$, musí být hladká na dílčích intervalech a spojitá ve „zlomových bodech“ x_0, x_1, \dots, x_m tj.: $k_{n-1}(x_n) = k_n(x_n) \forall n : 1 \leq n \leq m - 1$

Definice 5.3.2.: Přípustná křivka $k_{min} \in \mathcal{A}$, je nejkratší, či minimální, právě když:

$$\forall k \in \mathcal{A} : L(k_{min}) \leq L(k)$$

Důkaz existence takové minimální křivky je relativně složitý hlavně kvůli definici množiny \mathcal{A} . Existence křivky udávající extrém nějakého funkcionálu se standardně dokazuje pomocí přímých metod variačního počtu viz [3]. Tyto metody byly uvedeny na počátku 20. století Davidem Hilbertem (1862-1943) a stavějí na metodách funkcionální analýzy a topologie. Po zbytek práce budeme předpokládat existenci nejkratší křivky pro daný problém, existuje-li alespoň jedna přípustná křivka.

Tvrzení 5.3.: Je-li funkce $\left(\frac{B-A}{b-a}\right)(x-a) + A = l_{AB}(x) \in \mathcal{A} \subseteq D = C^{1,pw}[a, b] \cap \{y(a) = A, y(b) = B\}$ přípustná, pak je tato funkce podle definice 5.3.2. nejkratší. Existuje-li pro funkci $\gamma \in \mathcal{A}$ bod $c \in (a, b) : \gamma(x) \neq l_{AB}(c)$, pak

$$L(l_{AB}) < L(\gamma) \tag{28}$$

Důkaz. Pro všechny funkce $y \in D$ víme z kapitoly 3.3, že extrém funkcionálu $L(y) = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx$ udává právě funkce $\left(\frac{B-A}{b-a}\right)(x-a) + A = l_{AB}(x)$. Dále podle [3] udává funkce l_{AB} minimum L na D . Protože $\mathcal{A} \subseteq D$, pak pokud je l_{AB} v \mathcal{A} , pak musí minimalizovat L na \mathcal{A} .

Protože γ není kvůli bodu $c \in (a, b)$ řešením odpovídající Euler-Lagrangeovy rovnice, neudává extrémem resp. minimum funkcionálu L . \square

V případě, kdy $l_{AB} \in \mathcal{A}$ je řešení problému triviální. Pokud $l_{AB} \notin \mathcal{A}$, k nalezení nejkratší křivky nebude stačit aplikace Euler-Lagrangeovy rovnice. Abychom byli schopni určit tvar nejkratší křivky pro takové případy, využijeme známé věty reálné analýzy a vlastnosti funkcí udávající překážky, které dále v práci budou konvexní a konkávní.

6 Vlastnosti reálných funkcí

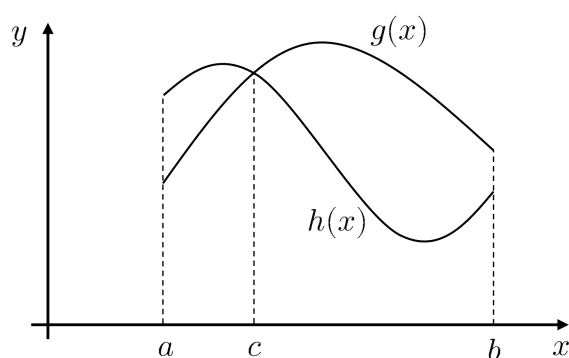
6.1 Věty reálné analýzy

Všechny uvedené věty v této kapitole a jejich důkazy jsou rozebrány v [5].

Věta 6.1.1. - Bolzanova věta: *Je-li reálná funkce f spojitá na $\langle a, b \rangle$ a platí $f(a) \cdot f(b) < 0$, pak existuje alespoň jeden bod $c \in (a, b) : f(c) = 0$.*

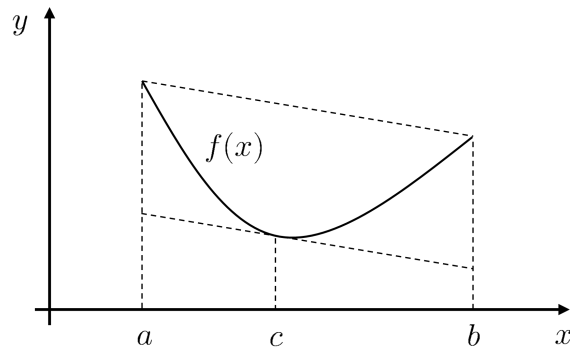
Lemma 6.1.1.: *Pro dvě reálné funkce g, h spojitě na $\langle a, b \rangle$, kde $g(a) \leq h(a) \wedge g(b) \geq h(b)$ existuje alespoň jeden bod $c \in \langle a, b \rangle : g(c) = h(c)$.*

Důkaz. Definujme funkci $i(x) = g(x) - h(x)$. Pak $i(a) \leq 0, i(b) \geq 0$ a tedy $i(a) \cdot i(b) \leq 0$. Jsou-li funkce g, h spojitě, je spojitá i funkce i a tedy z věty 6.1.1. vyplývá existence bodu $c \in \langle a, b \rangle : i(c) = 0 \implies g(c) = h(c)$. \square



Obrázek 31: Lemma 6.1.1.

Věta 6.1.2. - Lagrangeova věta o střední hodnotě: *Je-li reálná funkce f diferencovatelná na celém $\langle a, b \rangle$, pak existuje alespoň jeden bod $c \in (a, b) : f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.*



Obrázek 32: Lagrangeova věta o střední hodnotě

Věta 6.1.3.: Jsou-li reálné funkce f, g spojité na uzavřeném intervalu X , pak funkce:

$$f(x) + g(x)$$

$$f(x) \cdot g(x)$$

$$f(g(x))$$

jsou spojité funkce na X .

Věta 6.1.4.: Je-li reálná, spojitá funkce $f : X \rightarrow Y$ monotónní na uzavřeném X , pak $f^{-1} : Y \rightarrow X$ existuje a je spojitá na uzavřeném Y .

6.2 Konvexní a konkávní funkce

Definice 6.2.1.: Reálná funkce f definovaná na intervalu X je konvexní, pokud $\forall x_1, x_2 \in X, \forall \theta \in \langle 0, 1 \rangle$ platí nerovnost:

$$f(\theta x_1 + (1 - \theta)x_2) \leq \theta f(x_1) + (1 - \theta)f(x_2) \quad (29)$$

[1] Tato nerovnost nám říká, že přímka mezi body $[x_1, f(x_1)]$ a $[x_2, f(x_2)]$ je nad grafem f . Tato vlastnost se vyjasní, zavedeme-li substituci $z = \theta x_1 + (1 - \theta)x_2$, pak pro $\theta \in \langle 0, 1 \rangle$ máme $z \in \langle x_1, x_2 \rangle$ a za předpokladu, že $x_1 \neq x_2, f(x_1) \neq f(x_2)$ dostáváme:

$$z - x_2 = \theta(x_1 - x_2)$$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(z - x_2) = \theta(f(x_1) - f(x_2))$$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(z - x_2) + f(x_2) = \theta f(x_1) - \theta f(x_2) + f(x_2)$$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(z - x_2) + f(x_2) = \theta f(x_1) + (1 - \theta)f(x_2)$$

a tedy z nerovnosti (29) plyne, že $\forall z \in \langle x_1, x_2 \rangle$:

$$f(z) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(z - x_2) + f(x_2) \quad (30)$$

Pokud $f(x_1) = f(x_2)$, pak je tato nerovnost obdobně zaručena z (29). Nerovnosti (29) a (30) jsou ekvivalentní. Nerovnice (30) je pouze ve tvaru, z kterého je její geometrický význam zřetelnější. Funkce f je *ryze konvexní*, pokud nerovnost (30) platí ostře pro $z \in (x_1, x_2)$.

Zvažme znovu nerovnost (29). K oběma stranám nerovnice přičtíme $-(1 - \theta)f(x_2)$:

$$f(\theta x_1 + (1 - \theta)x_2) - (1 - \theta)f(x_2) \leq \theta f(x_1)$$

Vydělíme-li obě strany θ a zvažíme za předpokladu jeho existence $\lim_{\theta \rightarrow 0^+}$, pak:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{f(\theta x_1 + (1 - \theta)x_2) - (1 - \theta)f(x_2)}{\theta} \leq f(x_1)$$

Využijeme-li definici derivace funkce nebo L'Hopitalovo pravidlo na levé straně, pak

$\forall \{x_1 = x, x_2\} \in X$:

$$\tau(f, x_2)(x) = f'(x_2)(x - x_2) + f(x_2) \leq f(x) \quad (31)$$

Výraz $\tau(f, x_2)(x)$ je definován rovností v (31) a čtème ho jako tečna k funkci f v bodě x_2 . Tečna ke konvexní diferencovatelné funkci f tedy leží pod f . Z nerovnosti (31) máme:

$$f'(x_2)(x - x_2) \leq f(x) - f(x_2)$$

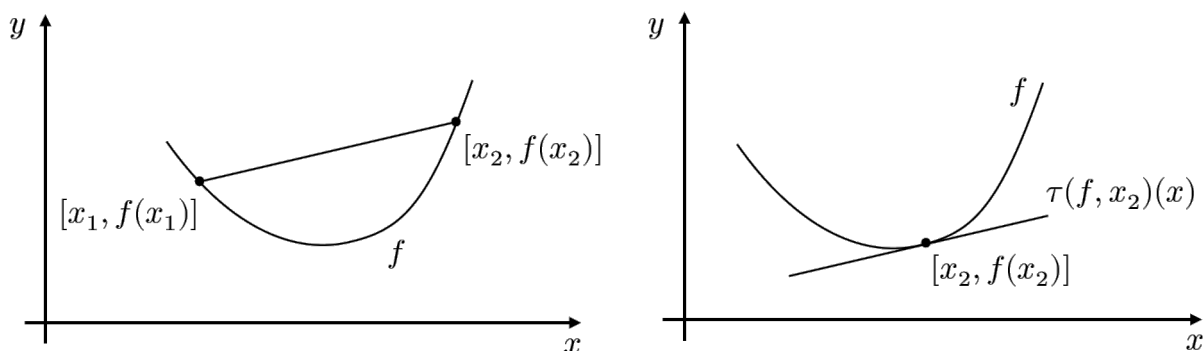
Vyměníme-li x za x_2 dostáváme platnou nerovnost:

$$f'(x)(x_2 - x) \leq f(x_2) - f(x) \iff f'(x)(x - x_2) \geq f(x) - f(x_2)$$

Sečtème-li tyto nerovnice, dostáváme:

$$f'(x)(x - x_2) \geq f'(x_2)(x - x_2) \iff (f'(x) - f'(x_2))(x - x_2) \geq 0$$

Pokud $x < x_2$, musí platit $f'(x) - f'(x_2) \leq 0 \iff f'(x) \leq f'(x_2)$, což dokazuje, že f' je neklesající. Je-li funkce ryze konvexní, pak rovnost v (31) nastává, pouze pokud $x_1 = x_2$ a f' je rostoucí.



Obrázek 33: Vlastnosti konvexních funkcí

Definice 6.2.2.: *Reálná funkce f je konkávní, je-li funkce $-f$ konvexní a ryze konkávní, je-li $-f$ ryze konvexní. [1]*

Z definice konkávní funkce je zřejmé, že její vlastnosti budou „opačné“ k vlastnostem konvexní funkce. Hlavní vlastnosti konkávní funkce f definované na intervalu X , které dále využijeme budou následující:

$$\forall x_1, x_2 \in X, \forall z \in \langle x_1, x_2 \rangle$$

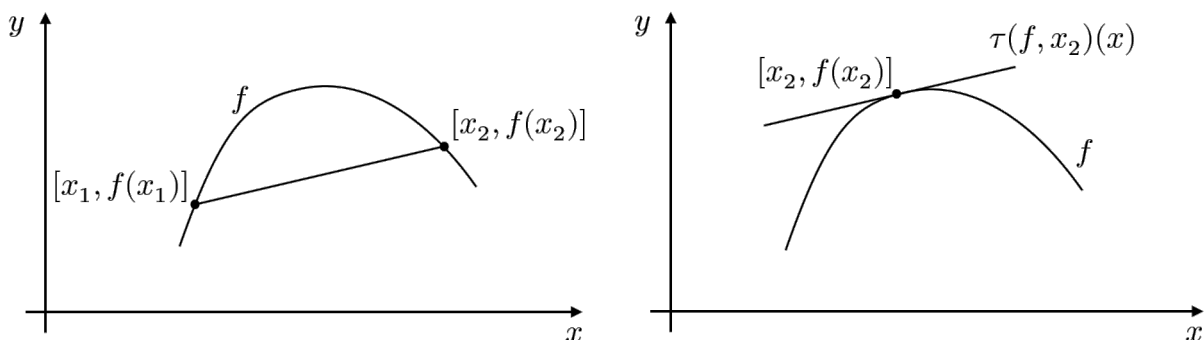
$$f(z) \geq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(z - x_1) + f(x_1) \quad (32)$$

Je-li konkávní funkce f na X diferencovatelná, pak $\forall \{x, x_2\} \in X$:

$$\tau(f, x_2)(x) = f'(x_2)(x - x_2) + f(x_2) \geq f(x) \quad (33)$$

a funkce f' je na X nerostoucí.

Je-li funkce f ryze konkávní, pak platí ostrá nerovnost v (32) $\forall z \in (x_1, x_2)$ a v (33) nastává rovnost pouze pokud $x = x_2$. První derivace ryze konkávní funkce je klesající.



Obrázek 34: Vlastnosti konkávních funkcí

7 Určování nejkratších křivek

V této kapitole určíme tvar nejkratší křivky při různě zadaných překážkách a okrajových bodech. V tvrzení 5.3. jsme zvažili speciální případ, kdy $l_{AB} \in \mathcal{A}$. V takovém případě je řešením právě l_{AB} . Dále rozebereme případy, které budou v jejich složitosti gradovat a budou stavět na vlastnostech funkcí a větách o funkcích uvedených v kapitole 6. Později se budu odkazovat i na dříve řešené případy.

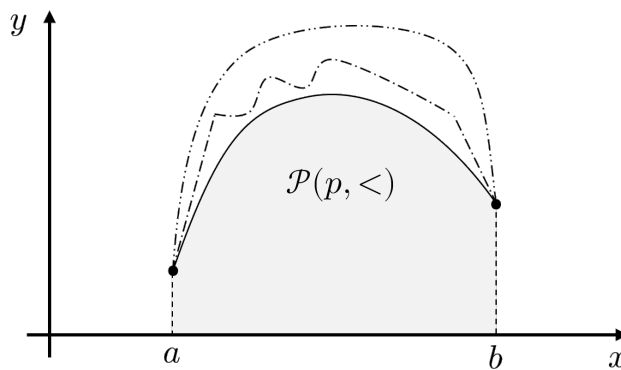
7.1 Úvodní problém

Máme-li pouze jednu zadanou překážku na $\langle \alpha, \beta \rangle \subseteq \langle a, b \rangle$ ve formě $\mathcal{P}(p, <)$, pak musí přípustná křivka $k \in \mathcal{A}$ definicí přípustné křivky a překážky splňovat nerovnost:

$$\forall x \in \langle \alpha, \beta \rangle : k(x) \geq p(x) \quad (34)$$

Zvažme případ, kdy je tato překážka zadána na $\langle a, b \rangle$ a funkce p udávající tuto překážku je na $\langle a, b \rangle$ konkávní a diferencovatelná. Okrajové body „splynou“ s překážkou. Tj.: $A = p(a)$, $B = p(b)$. Platí $p \in \mathcal{A}$, neboť p splňuje nutnou nerovnost (34). Intuice nám napovídá, že právě p bude nejkratší křivkou z \mathcal{A} . V tomto případě má množina $\mathcal{A} \subset C^{1,pw}[a, b]$ tvar:

$$\mathcal{A} = \{y | y \in C^{1,pw}[a, b], y(x) \geq p(x) \forall x \in \langle a, b \rangle, y(a) = p(a) \wedge y(b) = p(b)\} \quad (35)$$



Obrázek 35: První problém

Tvrzení 7.1.1.: Máme-li překážku ve formě $\mathcal{P}(p, <)$, kde p je konkávní a diferencovatelná na $\langle a, b \rangle$ a okrajové body $[a, A]$, $[b, B]$, kde $A = p(a)$, $B = p(b)$, pak nejkratší křivkou z \mathcal{A} je křivka p .

Důkaz. Tvrzení dokážeme sporem. Předpokládejme, že křivka $k \in \mathcal{A}$, různá alespoň v jednom bodě c od p na (a, b) , tj.: $p(c) < k(c)$, minimalizuje $L(k) = \int_a^b \sqrt{1 + (k')^2} dx$. Pro tečnu $\tau(p, c)(x) = p'(c)(x - c) + p(c)$ platí, že $\tau(p, c)(c) = p(c) < k(c)$. Z vlastnosti (33) konkávní funkce p , pak: $p(a) = k(a) \leq \tau(p, c)(a)$ a zároveň $p(b) = k(b) \leq \tau(p, c)(b)$. Lemma 6.1.1. pak za nutné spojitosti $k(x)$ a $\tau(p, c)(x)$ garantuje existenci bodu: $e_a \in \langle a, c \rangle : k(e_a) = \tau(p, c)(e_a)$ a bodu $e_b \in \langle c, b \rangle : k(e_b) = \tau(p, c)(e_b)$. Definujme funkci:

$$k_{pw}(x) = \begin{cases} k(x) & \text{pro } x \in \langle a, e_a \rangle \\ \tau(p, c)(x) & \text{pro } x \in \langle e_a, e_b \rangle \\ k(x) & \text{pro } x \in \langle e_b, b \rangle \end{cases}$$

Křivka k_{pw} je po částech hladká a je v \mathcal{A} . Platí $L(k_{pw}) < L(k)$:

$$L(k_{pw}) = \int_a^{e_a} \sqrt{1 + (k')^2} dx + \int_{e_a}^{e_b} \sqrt{1 + (\tau(p, c)'(x))^2} dx + \int_{e_b}^b \sqrt{1 + (k')^2} dx$$

Užitím aditivity integrálů máme:

$$L(k) = \int_a^{e_a} \sqrt{1 + (k')^2} dx + \int_{e_a}^{e_b} \sqrt{1 + (k')^2} dx + \int_{e_b}^b \sqrt{1 + (k')^2} dx$$

Protože k a $\tau(p, c)(x)$ splňují na $\langle e_a, e_b \rangle$ stejné okrajové podmínky a existuje $c \in (e_a, e_b) : \tau(p, c)(c) \neq k(c)$, pak tvrzení 5.3. zaručuje nerovnost:

$$\int_{e_a}^{e_b} \sqrt{1 + (\tau(p, c)'(x))^2} dx < \int_{e_a}^{e_b} \sqrt{1 + (k')^2} dx$$

A tedy $L(k_{pw}) < L(k)$, což je spor, neboť k měla minimalizovat L na \mathcal{A} . Za předpokladu existence nejkratší křivky v \mathcal{A} tato křivka nesmí být nikde na $\langle a, b \rangle$ různá od p a tedy p minimalizuje L na \mathcal{A} . \square

V tomto základním problému jsme schopni dokázat existenci minima přímo přes dokázání nerovnosti:

$$\int_a^b \sqrt{1 + (p')^2} dx \leq \int_a^b \sqrt{1 + (p' + d')^2} dx \quad (36)$$

Pro diferencovatelnou konkávní funkci p a diferencovatelnou funkci $d : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, kde aby $p + d \in \mathcal{A}$, pak musí $d(a) = d(b) = 0$. K důkazu této nerovnosti využijeme vlastností konvexních množin a konvexních funkcí uvedených v knize [2].

Definice 7.1.: *Nechť V je vektorový prostor. Množina $K \subseteq V$ je konvexní, pokud $\forall x, y \in K$ a $\forall t \in \langle 0, 1 \rangle$ je $tx + (1 - t)y \in K$. [2]*

Je zjevné, že například množina $C[a, b]$ je konvexní množina, neboť po vynásobení spojitě funkce reálným číslem dostáváme spojitou funkci. Sečteme-li dvě spojitě funkce, dostáváme také spojitou funkci a tedy musí být pro $x, y \in C[a, b]$ funkce $f = tx + (1-t)y \in C[a, b]$. Je-li množina K konvexní, její podmnožina konvexní být nemusí.

Tvrzení 7.1.2.: *Pro vektorový prostor $V = C^{1,pw}[a, b]$ je množina $\mathcal{A} \subset V$, definovaná v (35), konvexní.*

Důkaz. Mějme funkce $y_1 = p + d_1$ a $y_2 = p + d_2$, kde $C^{1,pw}[a, b] \ni \{d_1(x), d_2(x)\} \geq 0 \forall x \in \langle a, b \rangle$ a $d_1(a) = d_2(a) = d_1(b) = d_2(b) = 0$. Podle (35) jsou $\{y_1, y_2\} \in \mathcal{A}$. Aby byla množina \mathcal{A} konvexní, musí funkce $g = ty_1 + (1-t)y_2$, kde $t \in \langle 0, 1 \rangle$ splňovat všechny náležitosti z (35). Protože $\{y_1, y_2\} \in C^{1,pw}[a, b]$, pak $g \in C^{1,pw}[a, b]$. Platí $g(a) = p(a)$, $g(b) = p(b)$:

$$g(a) = t \cdot p(a) + (1-t)p(a) = p(a)$$

$$g(b) = t \cdot p(b) + (1-t)p(b) = p(b)$$

$\forall t \in \langle 0, 1 \rangle$. Aby $g \in \mathcal{A}$, musí $g(x) \geq p(x) \forall x \in \langle a, b \rangle$:

$$g = t(p + d_1) + (1-t)(p + d_2) \geq p$$

$$g = tp + td_1 + p + d_2 - tp - td_2 \geq p$$

$$td_1 + (1-t)d_2 \geq 0$$

Což je pravda $\forall t \in \langle 0, 1 \rangle$, $\forall x \in \langle a, b \rangle$, neboť všechny členy na levé straně nerovnice jsou v daných intervalech kladné. Množina \mathcal{A} je tedy konvexní. \square

Věta 7.1.1.: *Nechť O je podmnožina vektorového prostoru V a f reálná, diferencovatelná funkce definovaná na O . Je-li $X \subset O$ konvexní a $x, y \in X$, pak platí ekvivalence:*

$$f \text{ je konvexní na } X \iff f(y) - f(x) \geq f'(x)(y - x) \quad (37)$$

[2] Pro teď mějme vektorový prostor $V = C[a, b]$, jeho podmnožinu $O = C^{1,pw}[a, b]$, na které je reálná funkce, či funkcionál $L : C^{1,pw}[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definován. Množina $X = \mathcal{A} \subset O$ je podle tvrzení 7.1.2. konvexní. Zbývá ukázat, že funkcionál L je konvexní. Podle [2] je funkcionál $I(y) = \int_a^b F(x, y, y') dx$ konvexní, splňuje-li nerovnost

$$F(x, y + h, y' + k) - F(x, y, y') \geq h \frac{\partial F}{\partial y} + k \frac{\partial F}{\partial y'} \quad (38)$$

$\forall [x, y, y', h, k] \in \langle a, b \rangle \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Pro funkcionál $L(y) = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx$ máme odpovídající parciální derivace:

$\frac{\partial}{\partial y} \sqrt{1 + (y')^2} = 0, \frac{\partial}{\partial y'} \sqrt{1 + (y')^2} = \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}}$ Dosazením do (38) dostáváme:

$$\sqrt{1 + (y' + k)^2} - \sqrt{1 + (y')^2} \geq \frac{k \cdot y'}{\sqrt{1 + (y')^2}}$$

Obě strany vynásobíme $\sqrt{1 + (y')^2} > 0$:

$$\sqrt{1 + (y' + k)^2} \cdot \sqrt{1 + (y')^2} - 1 - (y')^2 \geq k \cdot y'$$

$$\sqrt{1 + (y' + k)^2} \cdot \sqrt{1 + (y')^2} \geq k \cdot y' + 1 + (y')^2$$

Protože levá strana je vždy kladná, umocnění a ponechání znaménka nerovnosti je ekvivalentní úpravou:

$$(1 + (y')^2 + 2y'k + k^2)(1 + (y')^2) \geq (y'k + [1 + (y')^2])^2$$

$$1 + (y')^2 + 2y'k + k^2 + (y')^2 + (y')^4 + 2(y')^3k + (y')^2k^2 \geq (y')^2k^2 + 2y'k(1 + (y')^2) + (1 + (y')^2)^2$$

$$1 + 2(y')^2 + 2y'k + k^2 + (y')^4 + 2(y')^3k + (y')^2k^2 \geq (y')^2k^2 + 2y'k + 2(y')^3k + 1 + 2(y')^2 + (y')^4$$

Po vykrácení dostáváme:

$$k^2 \geq 0$$

Což je pravda $\forall k \in \mathbb{R}$ a tedy funkcionál L je konvexní na $C^{1,pw}[a, b] \supset \mathcal{A}$. Nerovnost v (37) tedy platí a výraz $f'(x)(y - x)$ zde představuje Gâteauxův diferenciál funkcionálu f v x ve směru $y - x$. Zvolme $y = p + d, x = p$, kde $\{y, x\} \in \mathcal{A}$. Podmínky na p, d jsou uvedeny pod (36). Za funkci f zvolme funkcionál $L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + (\gamma')^2} dx$. Dostáváme platnou nerovnost:

$$\int_a^b \sqrt{1 + (p' + d')^2} dx - \int_a^b \sqrt{1 + (p')^2} dx \geq L'(p)d = \delta \left(\int_a^b \sqrt{1 + (p')^2} \right) d \quad (39)$$

Zaměříme se na pravou stranu této nerovnice. Za pomoci tvrzení 3.2.2. určíme $\delta L(p)d$:

$$\delta L(p)d = \int_a^b \frac{p'd'}{\sqrt{1 + (p')^2}} dx$$

Předpokládejme existenci a spojitost p'' . Provedeme integraci per partes. Nechť:

$$\begin{bmatrix} u & v' \\ u' & v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{p'}{\sqrt{1 + (p')^2}} & d' \\ \frac{p''\sqrt{1 + (p')^2} - \frac{(p')^2}{\sqrt{1 + (p')^2}}}{1 + (p')^2} & d \end{bmatrix}$$

Odsud:

$$\int_a^b \frac{p'd'}{\sqrt{1+(p')^2}} dx = \left[\frac{p'}{\sqrt{1+(p')^2}} \cdot d \right] \Big|_a^b - \int_a^b \left[\frac{p''\sqrt{1+(p')^2} - \frac{(p')^2}{\sqrt{1+(p')^2}}}{1+(p')^2} \cdot d \right] dx$$

Protože $d(a) = d(b) = 0$ dostáváme:

$$\int_a^b \frac{p'd'}{\sqrt{1+(p')^2}} dx = \int_a^b \left[\frac{\frac{(p')^2}{\sqrt{1+(p')^2}} - p''\sqrt{1+(p')^2}}{1+(p')^2} \cdot d \right] dx$$

Protože p je konkávní a tedy p' je klesající, pak $p'' \leq 0$ a tedy $-p'' \geq 0$. Protože $\sqrt{1+(p')^2} \geq 0$, $\frac{(p')^2}{\sqrt{1+(p')^2}} \geq 0$, pak $\frac{(p')^2}{\sqrt{1+(p')^2}} - p''\sqrt{1+(p')^2} \geq 0$. Protože obě funkce d , $\frac{1}{\sqrt{1+(p')^2}} \geq 0$, pak musí platit:

$$\int_a^b \frac{p'd'}{\sqrt{1+(p')^2}} dx \geq 0$$

Substitucí do (36) dostáváme:

$$\int_a^b \sqrt{1+(p'+d')^2} dx - \int_a^b \sqrt{1+(p')^2} dx \geq 0$$

A tedy platí hledaná nerovnost:

$$\int_a^b \sqrt{1+(p')^2} dx \leq \int_a^b \sqrt{1+(p'+d')^2} dx$$

Tím jsme dokázali existenci minima a našli samotnou funkci z \mathcal{A} udávající minimum L . Touto funkcí je právě funkce p .

Analogicky pro problém, kdy je překážka ve formě $\mathcal{P}(p_1, >)$ s konvexní diferencovatelnou funkcí p_1 a konečnými body $A = p_1(a)$, $B = p_1(b)$, je nejkratší přípustnou křivkou p_1 . Ke každému řešenému problému bude existovat takovýto analogický „opačný“ problém, jehož řešením se nebudeme přímo zabývat.

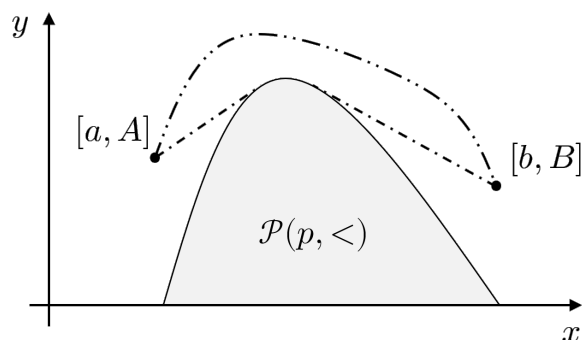
7.2 Úvodní problém s různými okrajovými body

Mějme danou překážku na $\langle \alpha, \beta \rangle \subseteq \langle a, b \rangle$ ve formě $\mathcal{P}(p, <)$, kde $p \in C^1[\alpha, \beta]$ je konkávní na $\langle \alpha, \beta \rangle$. Pokud $\langle \alpha, \beta \rangle = \langle a, b \rangle$, musí okrajové body splňovat nerovnosti: $p(a) < A$, $p(b) < B$ (aby se problém lišil od problému 7.1.). Opačná nerovnost nemůže nastat, neboť by pak $\mathcal{A} = \emptyset$ kvůli rozporu v koncových bodech. Pokud $\langle \alpha, \beta \rangle \subset \langle a, b \rangle$, pak můžeme okrajové body zvolit libovolně. Množinu všech přípustných křivek označme \mathcal{A} .

Pokud $l_{AB} \in \mathcal{A}$, pak je řešením právě l_{AB} (viz tvrzení 5.3.). Pokud $l_{AB} \notin \mathcal{A}$, tj. existuje-li bod $c \in (\alpha, \beta) : l_{AB}(c) < p(c)$, pak předpokládejme existenci bodů:

$$\begin{aligned} e_\alpha &\in \langle \alpha, c \rangle : l_{AB}(e_\alpha) = p(e_\alpha) \\ e_\beta &\in (c, \beta) : l_{AB}(e_\beta) = p(e_\beta) \end{aligned} \quad (40)$$

Existence bodů e_α, e_β je zaručena pouze pokud $\langle \alpha, \beta \rangle = \langle a, b \rangle$ a $p(a) < A, p(b) < B$ kvůli lemmatu 6.1.1. za spojitosti funkcí l_{AB}, p . Kvůli ostré nerovnosti $l_{AB}(c) < p(c)$ je funkce p ryze konkávní.



Obrázek 36: Úvodní problém s různými okrajovými body

Tvrzení 7.2.1.: Pokud $l_{AB} \notin \mathcal{A}$, pak za předpokladu (40) a $p \in C^1[\alpha, \beta]$ křivka $k \in \mathcal{A}$ ve tvaru;

$$k(x) = \begin{cases} \tau(p, c_a)(x) & \text{pro } x \in \langle a, c_a \rangle \\ p(x) & \text{pro } x \in \langle c_a, c_b \rangle, \\ \tau(p, c_b)(x) & \text{pro } x \in \langle c_b, b \rangle \end{cases} \quad (41)$$

kde $k(a) = A, k(b) = B$, existuje.

Důkaz. V (41) chceme dokázat existenci bodu c_a resp. c_b , z něhož vedená tečna k p protne A resp. B . p je ryze konkávní a tedy kvůli vlastnosti (32) platí, že $p(x) > l_{AB}(x) \forall x \in (e_\alpha, e_\beta)$. Protože p je spojitá, věta 6.1.2. garantuje existenci bodu $z \in (e_\alpha, e_\beta) : p'(z) = \frac{p(e_\beta) - p(e_\alpha)}{e_\beta - e_\alpha} = \frac{B - A}{b - a}$:

$$p(z) > l_{AB}(z)$$

K oběma stranám nerovnice přičteme $p'(z)(x - z) = \frac{B - A}{b - a}(x - z)$, kde $x \in \mathbb{R}$:

$$p'(z)(x - z) + p(z) = \tau(p, z)(x) > \frac{B - A}{b - a}(x - z) + l_{AB}(z) = l_{AB}(x)$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \implies \tau(p, z)(a) > A, \tau(p, z)(b) > B \quad (42)$$

$p \in C^1[e_\alpha, e_\beta]$ je ryze konkávní a tedy p' je klesající: $p'(e_\alpha) > p'(z) = \frac{B-A}{b-a} > p'(e_\beta)$.

Pro $a < e_\alpha \iff a - e_\alpha < 0$ dostáváme:

$$p'(e_\alpha)(a - e_\alpha) < \frac{B - A}{b - a}(a - e_\alpha)$$

K oběma stranám nerovnice přičteme $p(e_\alpha) = l_{AB}(e_\alpha)$ a upravíme pravou stranu:

$$\begin{aligned} p'(e_\alpha)(a - e_\alpha) + p(e_\alpha) &< \frac{B - A}{b - a}(a - e_\alpha) + l_{AB}(e_\alpha) \\ \tau(p, e_\alpha)(a) &< A \end{aligned} \quad (43)$$

Definujme funkci:

$$\Psi_a(x) = \tau(p, x)(a) = p'(x)(a - x) + p(a)$$

$\Psi_a(x)$ je spojitá na celém $\langle \alpha, \beta \rangle$ podle věty 6.1.3., neboť p, p', x, a jsou zde spojitě. Z (42) máme $\Psi_a(z) > A$ a z (43) $\Psi_a(e_\alpha) < A$. Lemma 6.1.1. pak za spojitosti $\Psi_a(x)$ zaručuje existenci bodu $c_a \in (e_\alpha, z) : \Psi_a(c_a) = \tau(p, c_a)(a) = A$, čímž jsme dokázali existenci bodu c_a v (41). Pro $b > e_\beta \iff b - e_\beta > 0$ dostáváme:

$$p'(e_\beta)(b - e_\beta) < \frac{B - A}{b - a}(b - e_\beta)$$

K oběma stranám nerovnice přičteme $p(e_\beta) = l_{AB}(e_\beta)$ a upravíme pravou stranu:

$$\begin{aligned} p'(e_\beta)(b - e_\beta) + p(e_\beta) &< \frac{B - A}{b - a}(b - e_\beta) + l_{AB}(e_\beta) \\ \tau(p, e_\beta)(b) &< B \end{aligned} \quad (44)$$

Definujme-li funkci:

$$\Psi_b(x) = \tau(p, x)(b),$$

pak obdobně lemma 6.1.1. kvůli (42) a (44) garantuje existenci bodu $c_b \in (z, e_\beta) : \Psi_b(c_b) = \tau(p, c_b)(b) = B$. Křivka $k \in \mathcal{A}$ ve tvaru (41) tedy existuje. \square

Všimněme si, že pro k (41) platí $k \geq l_{AB}$ na celém $\langle a, b \rangle$. Na tento fakt se dále v práci odkážeme.

Tvrzení 7.2.2.: *Křivka k ve tvaru (41) je nejkratší z \mathcal{A} pro tento problém za předpokladu existence nejkratší křivky.*

Důkaz. Tvrzení dokážeme sporem. Nejdříve dokažme jednoduchá tvrzení:

$$\tau(p, c_a)(b) > B \quad (45)$$

$$\tau(p, c_b)(a) > A \quad (46)$$

p' je klesající, tedy $p'(c_a) > \frac{B-A}{b-a} > p'(c_b)$. Protože $a < b \iff 0 < b-a$, pak:

$$p'(c_a)(b-a) > \frac{B-A}{b-a}(b-a) = B-A$$

K oběma stranám nerovnice přičtíme $p'(c_a)(a-c_a) + c_a = A$:

$$p'(c_a)(b-a) + p'(c_a)(a-c_a) + c_a > B$$

$$p'(c_a)(b-c_a) + c_a = \tau(p, c_a)(b) > B$$

Obdobně máme pro $a-b < 0$:

$$\frac{B-A}{b-a}(a-b) = A-B < p'(c_b)(a-b)$$

K oběma stranám nerovnice přičtíme $B = p'(c_b)(b-c_b) + p(c_b)$:

$$A < p'(c_b)(a-c_b) + p(c_b) = \tau(p, c_b)(a)$$

Tímto jsme dokázali nerovnosti (45) a (46).

Předpokládejme, že křivka $y_a \in \mathcal{A}$ různá alespoň v jednom bodě $\sigma_a \in (a, c_a)$ od k , tj.: $y_a(\sigma_a) \neq k(\sigma_a) = \tau(p, c_a)(\sigma_a)$ minimalizuje L na \mathcal{A} . Pro křivku y_a musí existovat bod $\varepsilon_a \in (c_a, b) : y_a(\varepsilon_a) = \tau(p, c_a)(\varepsilon_a)$, neboť $y_a(c_a) \geq \tau(p, c_a)(c_a) = p(c_a)$ a zároveň $y_a(b) = B < \tau(p, c_a)(b)$ (viz lemma 6.1.1.). Definujme funkci:

$$y_{pw,a} = \begin{cases} \tau(p, c_a)(x) & \text{pro } x \in \langle a, \varepsilon_a \rangle \\ y_a(x) & \text{pro } x \in \langle \varepsilon_a, b \rangle \end{cases}$$

Křivka $y_{pw,a} \in \mathcal{A}$ splňuje ostrou nerovnost $L(y_{pw,a}) < L(y)$:

$$L(y_{pw,a}) = \int_a^{\varepsilon_a} \sqrt{1 + (\tau(p, c_a)'(x))^2} dx + \int_{\varepsilon_a}^b \sqrt{1 + (y_a')^2} dx$$

$$L(y_a) = \int_a^{\varepsilon_a} \sqrt{1 + (y_a')^2} dx + \int_{\varepsilon_a}^b \sqrt{1 + (y_a')^2} dx$$

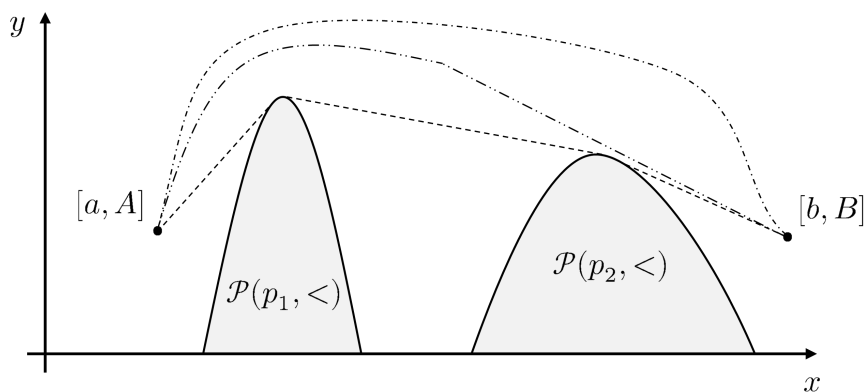
Protože na $\langle a, \varepsilon_a \rangle$ splňují $\tau(p, c_a)(x)$, y_a stejné okrajové podmínky a existuje bod σ_a , pak tvrzením 5.3. dostáváme ostrou nerovnost $L(y_{pw,a}) < L(y_a)$, což je spor. Za předpokladu

existence nejkratší křivky v \mathcal{A} tato křivka nesmí tedy být na $\langle a, c_a \rangle$ různá od $\tau(p, c_a)(x)$. Analogicky bychom za platnosti tvrzení (46) a faktu, že pro křivku $y \in \mathcal{A}$ musí platit $\tau(p, c_b)(c_b) = p(c_b) \leq y(c_b)$ dokázali, že nejkratší křivka nesmí být na $\langle c_b, b \rangle$ různá od $\tau(p, c_b)(x)$.

Nesmí-li být nejkratší křivka y na daných intervalech různá od $\tau(p, c_a)(x)$ a $\tau(p, c_b)(x)$, pak musí splňovat $y(c_a) = p(c_a), y(c_b) = p(c_b)$ a tvrzením 7.1.1. tedy na $\langle c_a, c_b \rangle$ nesmí být různá od p , což dokazuje, že nejkratší křivkou za předpokladu její existence pro tento problém je právě křivka (41). \square

7.3 Dvě překážky v rovině

Mějme dané dvě překážky $\mathcal{P}(p_1, <), \mathcal{P}(p_2, <)$, kde p_1 je ryze konkávní na $\langle \alpha_1, \beta_1 \rangle$ a p_2 je ryze konkávní na $\langle \alpha_2, \beta_2 \rangle$. Řekněme, že překážky mají spojitou první derivaci. Pro koncové body $[a, A], [b, B]$ platí: $a \leq \alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2 \leq b$. Pokud $a = \alpha_1$ resp. $b = \beta_2$, pak musí okrajové body splňovat nerovnost $p_1(a) < A$ resp. $p_2(b) < B$. Pokud $a < \alpha_1 < \beta_2 < b$, pak můžeme okrajové body zvolit libovolně. \mathcal{A} značí množinu všech přípustných křivek pro tento problém.



Obrázek 37: Dvě konkávní překážky v rovině

Existuje-li $c_1 \in \langle \alpha_1, \beta_1 \rangle : l_{AB}(c_1) < p_1(c_1)$ a tedy $l_{AB} \notin \mathcal{A}$, předpokládejme existenci bodů $e_{\alpha_1}, e_{\beta_1} : \alpha_1 \leq e_{\alpha_1} < e_{\beta_1} \leq \beta_1$:

$$\begin{aligned} l_{AB}(e_{\alpha_1}) &= p_1(e_{\alpha_1}) \\ l_{AB}(e_{\beta_1}) &= p_1(e_{\beta_1}) \end{aligned} \tag{47}$$

Existence těchto bodů není zaručena. Podle tvrzení 7.2.1. za předpokladu (47) existuje křivka ve tvaru:

$$k_1(x) = \begin{cases} \tau(p_1, c_{a_1})(x) & \text{pro } x \in \langle a, c_{a_1} \rangle \\ p_1(x) & \text{pro } x \in \langle c_{a_1}, c_{b_1} \rangle, \\ \tau(p_1, c_{b_1})(x) & \text{pro } x \in \langle c_{b_1}, b \rangle \end{cases} \quad (48)$$

kde $k_1(a) = A, k_1(b) = B$. Pokud $k_1 \in \mathcal{A}$, pak je podle tvrzení 7.2.2. k_1 nejkratší z \mathcal{A} (množina všech přípustných křivek pro problém 7.2. je nadmnožinou množině \mathcal{A} tohoto problému).

Existuje-li $c_2 \in \langle \alpha_2, \beta_2 \rangle : l_{AB}(c_2) < p_2(c_2)$, pak obdobně předpokládejme existenci bodů $e_{\alpha_2}, e_{\beta_2} : \alpha_2 \leq e_{\alpha_2} < e_{\beta_2} \leq \beta_2$:

$$\begin{aligned} l_{AB}(e_{\alpha_2}) &= p_2(e_{\alpha_2}) \\ l_{AB}(e_{\beta_2}) &= p_2(e_{\beta_2}) \end{aligned} \quad (49)$$

Podle tvrzení 7.2.1. za předpokladu (49) existuje křivka ve tvaru:

$$k_2(x) = \begin{cases} \tau(p_2, c_{a_2})(x) & \text{pro } x \in \langle a, c_{a_2} \rangle \\ p_2(x) & \text{pro } x \in \langle c_{a_2}, c_{b_2} \rangle, \\ \tau(p_2, c_{b_2})(x) & \text{pro } x \in \langle c_{b_2}, b \rangle \end{cases} \quad (50)$$

kde $k_2(a) = A, k_2(b) = B$. Pokud $k_2 \in \mathcal{A}$, pak je podle tvrzení 7.2.2. k_2 nejkratší z \mathcal{A} . Zajímá nás nyní případ, kdy $\{k_1, k_2\} \notin \mathcal{A}$.

Tvrzení 7.3.1.: *Existují-li za předpokladu (47) a (49) křivky k_1 resp. k_2 ve tvaru (48) resp. (50) a $\{k_1, k_2\} \notin \mathcal{A}$, pak existuje křivka $k \in \mathcal{A}$ ve tvaru;*

$$k(x) = \begin{cases} \tau(p_1, c_{a_1})(x) & \text{pro } x \in \langle a, c_{a_1} \rangle \\ p_1(x) & \text{pro } x \in \langle c_{a_1}, \chi_1 \rangle \\ \tau([p_1, p_2], [\chi_1, \chi_2])(x) & \text{pro } x \in \langle \chi_1, \chi_2 \rangle, \\ p_2(x) & \text{pro } x \in \langle \chi_2, c_{b_2} \rangle \\ \tau(p_2, c_{b_2})(x) & \text{pro } x \in \langle c_{b_2}, b \rangle \end{cases} \quad (51)$$

kde $\tau([p_1, p_2], [\chi_1, \chi_2])(x) = \tau(p_1, \chi_1)(x) = \tau(p_2, \chi_2)(x) \forall x \in \langle \chi_1, \chi_2 \rangle$

Důkaz. Existence první a poslední části křivky k v (51) jsou zaručeny podle tvrzení 7.2.1. Chceme tedy dokázat existenci dvojice bodů χ_1, χ_2 , z kterých vyvedené tečny

spolu „splynou“. $k_1 \notin \mathcal{A}$ a tedy pro $\tau(p_1, c_{b_1})(x)$ existuje $\gamma_2 \in \langle e_{\alpha_2}, e_{\beta_2} \rangle \subset \langle c_{b_1}, b \rangle$: $\tau(p_1, c_{b_1})(\gamma_2) < p_2(\gamma_2)$. Protože $\tau(p_1, c_{b_1})(x) \geq l_{AB}(x)$ pro $x \in \langle a, b \rangle \subset \langle e_{\alpha_2}, e_{\beta_2} \rangle$, pak za předpokladu (49) existují dva body průniku spojitých funkcí $\tau(p_1, c_{b_1})(x)$ a $p_2(x)$ (viz lemma 6.1.1.). Kvůli těmto bodům průniku pak Lagrangeova věta o střední hodnotě garantuje existenci bodu $\phi_2 \in \langle c_{\alpha_2}, e_{\beta_2} \rangle$:

$$p'_1(c_{b_1}) = p'_2(\phi_2) \iff \phi_2 = (p'_2)^{-1}(p'_1(c_{b_1})) \quad (52)$$

p_2 je konkávní a tedy z vlastností konkávních funkcí (32),(33) platí:

$$\tau(p_1, c_{b_1})(x) < \tau(p_2, \phi_2)(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (53)$$

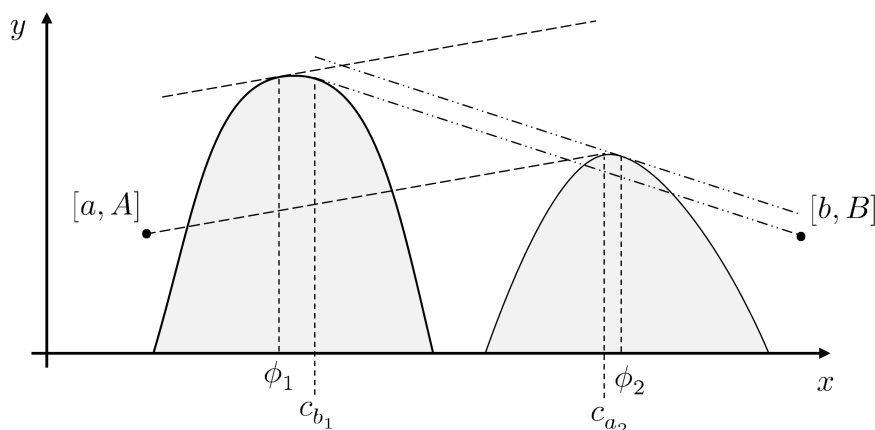
Obdobně protože $k_2 \notin \mathcal{A}$ a tedy pro $\tau(p_2, c_{a_2})(x)$ existuje $\gamma_1 \in \langle e_{\alpha_1}, e_{\beta_1} \rangle \subset \langle a, c_{a_2} \rangle$: $\tau(p_2, c_{a_2})(\gamma_1) < p_1(\gamma_1)$. Lagrangeova věta o střední hodnotě garantuje existenci bodu $\phi_1 \in \langle e_{\alpha_1}, e_{\beta_1} \rangle$:

$$p'_2(c_{a_2}) = p'_1(\phi_1) \iff c_{a_2} = (p'_1)^{-1}(p'_2(c_{a_2})) \quad (54)$$

p_1 je konkávní a tedy z vlastností konkávních funkcí (32),(33) platí:

$$\tau(p_1, \phi_1)(x) > \tau(p_2, c_{a_2})(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (55)$$

Nerovnosti (53) a (55) jsou zřetelné z obrázku 38:



Obrázek 38: Ilustrace nerovností (53) a (55)

Je zjevné, že $\phi_1 < c_{b_1}$ a $c_{a_2} < \phi_2$. Máme tedy dvě spojitě, klesající funkce:

$$\begin{aligned} p'_1 &: \langle \phi_1, c_{b_1} \rangle \rightarrow \langle p'_1(c_{b_1}), p'_1(\phi_1) \rangle \\ p'_2 &: \langle c_{a_2}, \phi_2 \rangle \rightarrow \langle p'_2(\phi_2), p'_2(c_{a_2}) \rangle = \langle p'_1(c_{b_1}), p'_1(\phi_1) \rangle \end{aligned} \quad (56)$$

p'_2 je klesající a tedy podle věty 6.1.4. existuje spojitá funkce $(p'_2)^{-1}$:

$$(p'_2)^{-1} : \langle p'_1(c_{b_1}), p'_1(\phi_1) \rangle \rightarrow \langle c_{a_2}, \phi_2 \rangle \quad (57)$$

Definujme funkci $\Delta\tau(z)$:

$$\Delta\tau(z) = \tau(p_1, z)(a) - \tau(p_2, (p'_2)^{-1}(p'_1(z)))(a) \quad (58)$$

Z definice $\tau(g, s)(x) = g'(s)(x - s) + g(s)$ je funkce $\Delta\tau(z)$ spojitá podle věty 6.1.3. a věty 6.1.4., neboť je „složeninou“ spojitých funkcí: $p_1, p_2, p'_1, p'_2, z, (p'_2)^{-1}$. Bod a je první souřadnice počátečního bodu $[a, A]$. Z (56) a (57) vidíme, že funkce $\Delta\tau(z)$ je spojitá $\forall z \in \langle \phi_1, c_{b_1} \rangle$. Pro $z = \phi_1 \implies \Delta\tau(\phi_1)$ kvůli (54) a (55) dostáváme:

$$\Delta\tau(\phi_1) = \tau(p_1, \phi_1)(a) - \tau(p_2, (p'_2)^{-1}(p'_1(\phi_1)))(a) = \tau(p_1, \phi_1)(a) - \tau(p_2, c_{a_2})(a) > 0$$

Pro $z = c_{b_1} \implies \Delta\tau(c_{b_1})$ kvůli (52) a (53) dostáváme:

$$\Delta\tau(c_{b_1}) = \tau(p_1, c_{b_1})(a) - \tau(p_2, (p'_2)^{-1}(p'_1(c_{b_1}))) (a) = \tau(p_1, c_{b_1})(a) - \tau(p_2, \phi_2)(a) < 0$$

Protože $\Delta\tau(z)$ je spojitá $\forall z \in \langle \phi_1, c_{b_1} \rangle$, pak Bolzanova věta (věta 6.1.1.) garantuje existenci bodu $\chi_1 \in (\phi_1, c_{b_1}) : \Delta\tau(\chi_1) = 0$. Máme tedy rovnost:

$$\tau(p_1, \chi_1)(a) = \tau(p_2, (p'_2)^{-1}(p'_1(\chi_1)))(a),$$

Kde kvůli (56) a (57) je $\chi_2 = (p'_2)^{-1}(p'_1(\chi_1)) \in (c_{a_2}, \phi_2) \iff p'_2(\chi_2) = p'_1(\chi_1)$. Z definice $\tau(\cdot, \cdot)(\cdot)$:

$$p'_1(\chi_1)(a - \chi_1) + p_1(\chi_1) = p'_2(\chi_2)(a - \chi_2) + p_2(\chi_2)$$

K oběma stranám přičtíme $p'_1(\chi_1)(x - a) = p'_2(\chi_2)(x - a)$, kde $x \in \mathbb{R}$:

$$p'_1(\chi_1)(a - \chi_1) + p_1(\chi_1) + p'_1(\chi_1)(x - a) = p'_2(\chi_2)(a - \chi_2) + p_2(\chi_2) + p'_2(\chi_2)(x - a)$$

$$p'_1(\chi_1)(x - \chi_1) + p_1(\chi_1) = p'_2(\chi_2)(x - \chi_2) + p_2(\chi_2)$$

$$\tau(p_1, \chi_1)(x) = \tau(p_2, \chi_2)(x) \quad \forall x \in \langle \chi_1, \chi_2 \rangle \subset \mathbb{R}$$

Tímto jsem dokázali existenci požadované dvojice bodů χ_1, χ_2 . Křivka k ve tvaru (51) tedy existuje a z vlastností konkávních funkcí (32) je přípustná. \square

Tvrzení 7.3.2.: *Křivka ve tvaru (51) je nejkratší křivkou z \mathcal{A} pro tento problém za předpokladu existence nejkratší křivky.*

Důkaz. Tvrzení opět dokážeme sporem. Je zjevné, že:

$$\tau(p_1, \chi_1)(a) > A$$

$$\tau(p_1, \chi_1)(b) > B$$

Tento fakt lze jednoduše dokázat například z nerovnosti $p'_1(c_{a_1}) > p'_1(\chi_1)$ a faktu, že $\tau(p_1, c_{a_1})(a) = A$. Druhou nerovnost lze dokázat například z faktu, že $p'_2(\chi_2) > p'_2(c_{b_2})$ a faktu, že $\tau(p_2, c_{b_2})(b) = B$. Tyto nerovnosti můžeme dokázat pomocí několika dalších nerovností.

Mějme křivku $y \in \mathcal{A}$, která je alespoň v jednom bodě $\sigma_\chi \in \langle \chi_1, \chi_2 \rangle$ splňuje $\tau(p_1, \chi_1)(\sigma_\chi) \neq y(\sigma_\chi)$. Kvůli faktu, že $\tau(p_1, \chi_1)(\chi_2) = p(\chi_1) \leq y(\chi_1)$ a $\tau(p_1, \chi_1)(a) > A = y(a)$ lemma 6.1.1. garantuje existenci bodu $\varepsilon_1 \in \langle a, \chi_1 \rangle : y(\varepsilon_1) = \tau(p_1, \chi_1)(\varepsilon_1)$. Obdobně je garantovaná existence bodu $\varepsilon_2 \in \langle \chi_2, b \rangle : y(\varepsilon_2) = \tau(p_1, \chi_1)(\varepsilon_2)$. Definujeme funkci:

$$y_{pw,\chi}(x) = \begin{cases} y(x) & \text{pro } x \in \langle a, \varepsilon_1 \rangle \\ \tau(p_1, \chi_1)(x) & \text{pro } x \in \langle \varepsilon_1, \varepsilon_2 \rangle \\ y(x) & \text{pro } x \in \langle \varepsilon_2, b \rangle \end{cases}$$

Pro $y_{pw,\chi} \in \mathcal{A}$ platí kvůli σ_χ ostrá nerovnost $L(y_{pw,\chi}) < L(y)$, protože funkce $y, y_{pw,\chi}$ splňují na $\langle \varepsilon_1, \varepsilon_2 \rangle$ stejné okrajové podmínky (viz tvrzení 5.3.). Nejkratší křivka tedy nesmí na χ_1, χ_2 být různá od $\tau(p_1, \chi_1)(x)$. Z tvrzení 7.2.2. víme, že nejkratší křivka nesmí být na $\langle a, c_{a_1} \rangle \cup \langle c_{b_2}, b \rangle$ různá od k z (51). Podle tvrzení 7.1.1. nesmí být nejkratší křivka na $\langle c_{a_1}, \chi_1 \rangle \cup \langle \chi_2, c_{b_2} \rangle$ různá od k z (51), kvůli konkávnosti p_1, p_2 . Křivka k v (51) všechny tyto náležitosti splňuje a tedy za předpokladu existence křivky je nejkratší křivkou z \mathcal{A} .

□

Diskuse

Tato práce k problému hledání nejkratší křivky v rovině s překážky přistupuje relativně neobvykle. Nenašel jsem na internetu žádnou práci, která by k problému přistupovala čistě analyticky. Většina prací na toto téma se zabývá vývojem algoritmu, který hledá nejkratší cestu mezi dvěma body v rovině s překážky. V práci [6] je uveden program napsaný v Pythonu, kterému můžeme zadat překážky, kolem kterých se algoritmus snaží najít optimální cestu. Tyto programy svoje využití v reálném životě najdou například v robotice. Na druhou stranu naše práce poskytuje čistě analytický přístup, který může najít uplatnění v dalších matematických problémech, či může poskytnout základy pro zobecnění analytického řešení takovýchto problémů. Dále můžeme využít nějakých postupů uvedených v práci, jako je nepřímé dokázání nějaké integrální nerovnosti.

Úvodní motivace k vypracování této práce bylo naučení se nové matematice. Po této stránce jsem velice spokojený, neboť mě můj úvodní problém, popsání nejkratší křivky v rovině s překážky, dovedl k moc hezké matematické disciplíně a to právě variačnímu počtu, kterému je věnována celá teoretická část. Metodami variačního počtu jsem byl schopný najít extrémy určitých funkcionalů. V kapitole 4 jsme dokonce určily extrémy funkcionalů za platnosti nějaké podmínky na funkci udávající extrém tohoto funkcionalu, což mě dovádí k otázce: Jakým způsobem je možné tuto práci vylepšit?

Měli bychom mít na paměti, že problematika řešená v praktické části je takzvaným *omezeným* variačním problémem. Chceme v podstatě minimalizovat funkcional $L : C^{1,pw}[a, b] \cap \{y(a) = A, y(b) = B\} \rightarrow \mathbb{R}$ ve tvaru $L(y) = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx$ za podmínky na y ve tvaru $y(x) \geq p_1(x) \forall x \in \langle \alpha_1, \beta_1 \rangle \subseteq \langle a, b \rangle$ resp. $y(x) \leq p_2(x) \forall x \in \langle \alpha_2, \beta_2 \rangle \subseteq \langle a, b \rangle$. Těchto nerovnostních podmínek na y může být několik. Naším cílem je najít nějakou nutnou podmínku, kterou musí taková nejkratší přípustná křivka splňovat. Tato nutná podmínka může být například ve formě nějaké diferenciální rovnice, podobně jako Euler-Lagrangeova rovnice.

V práci také pracujeme s několika předpoklady. Například předpokládáme, že řešení našeho problému vůbec existuje. V úvodním problému jsme byli schopni existenci řešení našeho problému dokázat. Dost možná podobným postupem je možné dokázat existenci řešení i u dalších uvedených problémů, neboť obecná množina všech přípustných křivek, není-li prázdnou množinou, je množinou konvexní. Protože funkcional udávající délku křivky je také konvexní, je zaručena nerovnost (37), která by mohla dokázat právě exis-

tenci minima. V tom případě by se důkaz zjednodušil a nemuseli bychom existenci minima dokazovat pomocí přímých metod variačního počtu.

V práci jsme vyřešili pouze tři úvodní varianty problému, což se může zdát málo. V minulé verzi práce jsem zvažil i případ, kdy máme dvě překážky $\mathcal{P}(p_1, <)$, $\mathcal{P}(p_2, >)$, kde p_1 je konkávní a p_2 konvexní. V problému jsem však předpokládal existenci až 8 bodů, což se mi zdá moc, proto jsem ho v této verzi neuvedl. Navíc nepřinesl hlubší porozumění problému, což je mým cílem. Rád bych poznamenal, že předpoklad existence bodů ve tvaru (47) a (49) je pouze jakési ujištění, že překážky jsou definovány pro dostatečně mnoho bodů roviny. Je zjevné, že problém má řešení i bez předpokladu existence takovýchto bodů. Práce by se dala vylepšit tedy také tím, že by předpoklad existence těchto bodů nebyl nutný.

Upřímně jsem velice spokojený s přínosem, který mi tato práce dala. Pořád ale vidím prostor pro zlepšení a proto se budu problematice dále věnovat.

Závěr

V praktické části práce jsme uvedli základní pojmy problematiky z pohledu matematické analýzy. Práce tak může posloužit jako vhodný úvod do problematiky, chceme-li její problémy řešit analyticky. K důkazu existence obecného tvaru nejkratší křivky pro daný problém jsme využili vět reálné analýzy a metod variačního počtu. Podpořili jsme tak lidskou intuici pro tuto problematiku a její správnost matematicky ověřili.

Literatura

- [1] BOYD, Stephen P. a Lieven VANDENBERGHE. *Convex optimization*. New York: Cambridge University Press, 2004. ISBN 978-0-521-83378-3.
- [2] COLEMAN, Rodney. *Calculus on normed vector spaces*. New York: Springer, 2012. Universitext. ISBN 978-1-4614-3893-9.
- [3] KIELHÖFER, Hansjörg. *Calculus of variations*. New York, NY: Springer Berlin Heidelberg, 2018. ISBN 978-3-319-71122-5.
- [4] LEVI, Mark. *Quick! Find a Solution to the Brachistochrone Problem*. SIAM News[online]. Philadelphia, USA: SIAM News, 2015 [cit. 2018-12-31]. Dostupné z: <https://sinews.siam.org/Details-Page/quick-find-a-solution-to-the-brachistochrone-problem>
- [5] RUDIN, Walter. *Principles of mathematical analysis*. New York: McGraw-Hill, 1976. ISBN 00-705-4235-X.
- [6] *Euclidean Shortest Path with Obstacles* [online]. USA, Indiana, 2011 [cit. 2019-03-14]. Dostupné z: <http://cs.indstate.edu/spendyala/pdf/cs695Project.pdf>. Projekt. Indiana State University.