

Středoškolská odborná činnost

ORIGAMI GEOMETRIE



Jana Bušová
Adéla Heroudková
Lucie Reichertová

Brno 2019

Středoškolská odborná činnost

ORIGAMI GEOMETRIE

Origami geometry

Autoři	Jana Bušová Adéla Heroudková Lucie Reichertová
Škola	Gymnázium Brno, třída Kapitána Jaroše, p.o.
Kraj	Jihomoravský
Obor	Matematika a statistika
Konzultant	Mgr. Petr Pupík

Brno 2019

Prohlášení

Prohlašujeme, že jsme svou práci SOČ vypracovaly samostatně a použily jsme pouze podklady (literaturu, projekty, SW atd.) uvedené v seznamu vloženém v práci SOČ.

Prohlašujeme, že tištěná a elektronická verze soutěžní práce SOČ jsou shodné.

Nemáme žádný závažný důvod proti zpřístupňování této práce v souladu se zákonem § 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon) v platném znění.

V _____ dne _____

podpisy _____



PODPORA SOČ

Poděkování

Chtěly bychom poděkovat Mgr. Petru Pupíkovi za spoustu užitečných rad a moc krásných připomínek a za neustálou podporu. Taktéž velmi děkujeme Tule za to, že nepožila naše origami modely.

Tato práce byla vypracována za finanční podpory JMK.

Abstrakt

Cílem naší práce je čtenáři přiblížit vlastnosti origami geometrie a co jsme pomocí nich schopni zkonstruovat. V práci se věnujeme i důkazu, jaká čísla jsme schopni sestrojít při použití prvních pěti axiomů. Také jsme v práci popsaly několik zajímavých konstrukcí, které v eukleidovské geometrii neseštrojíme. V příloze naleznete fotky našich vlastních origami modelů.

Klíčová slova

origami; axiomy; tělesa; konstrukce; antické problémy

Abstract

The aim of this thesis is to introduce the properties of origami geometry and what can be constructed thanks to this. We have also included a proof which says what numbers could be constructed by using the first five axioms. Furthermore, we have described a few interesting constructions that cannot be constructed in euclidean geometry. Photos of our own origami models are enclosed in the attachment.

Key words

origami; axioms; fields; construction; problems of antiquity

Obsah

1	Úvod	7
1.1	Historie	7
2	Budování geometrie	9
2.1	Axiomy eukleidovské geometrie	9
2.2	Axiomy origami geometrie	10
3	Základy algebry	13
3.1	Grupy	13
3.2	Okruhy	15
3.3	Tělesa	15
3.4	Polynomy	15
4	Origami konstrukce	17
4.1	Origami čísla	18
5	Srovnání origami geometrie s eukleidovskou geometrií	22
5.1	Trisekce úhlu	22
5.2	Hagova věta	24
5.3	Zdvojení krychle	25
5.4	Společná tečna dvou parabol	26
5.5	Kubické rovnice	28
5.6	Pravidelné n -úhelníky	30
6	Využití origami	35
6.1	Miura-Ori	35
6.2	Vesmírný teleskop	35
6.3	Stent	35
6.4	Airbagy	36
7	Závěr	37
	Literatura	38
8	Přílohy	39

Kapitola 1

Úvod

Pod pojmem „origami“ si většina představí pouze skládané papírové modely. My si ukážeme, že všechny modely jdou popsat také geometricky a že dokonce geometrie, kterou tvoří, je silnější než ta eukleidovská.

V první části blíže představíme origami axiomy. Poté za pomoci základních znalostí algebry dokážeme, co všechno lze sestrojít pomocí prvních pěti axiomů.

Na závěr popíšeme pár zajímavých konstrukcí, které v eukleidovské geometrii sestrojít nelze, ale v origami ano.

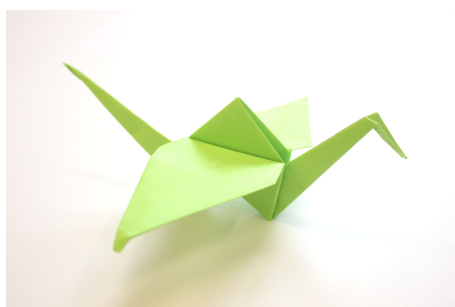
Kromě toho se věnujeme i skládání různých modelů, jejichž obrázky si můžete prohlédnout v příloze.

1.1 Historie

Origami je umění skládání z papíru bez pomoci lepidla či nůžek, které vzniklo okolo 9. století našeho letopočtu v Japonsku. Bylo vytvořeno spojením dvou japonských slov: oru - skládat, kami - papír. Japonsko ale není jediný stát, kde má skládání z papíru hluboké kořeny. Nezávisle na origami totiž vzniklo ve Španělsku velice podobné umění okolo 13. století našeho letopočtu, akorát pod názvem papiroflexia.

Z prvopočátku byly skládané papírové modely používány například jako ozdoby při různých ceremoniálech nebo se přikládaly k dárkům, něco jako současné blahopřání (toto origami má dokonce speciální název - noshi). Opravdu populární začalo být origami až v 17. století a jeho oblíbenost trvá dodnes. Umění origami se děti v Japonsku učí již od mateřské školy. Dokonce i maskoti zimních olympijských her, které se odehrály v roce 1998 v Japonsku, byli inspirováni tímto uměním.

O origami je v Japonsku vyprávěn jeden příběh o papírových jeřábích. Ten říká, že pokud složíme tisíc origami jeřábů, bůh nám splní jakékoliv přání. Jiné verze tohoto mýtu tvrdí, že nám to přinese nekonečné štěstí, dlouhý život nebo uzdravení ze zranění či nemoci.



S tímto mýtem se taky pojí jeden velice smutný příběh. Sadako Saomi byla dvouletá dívka, když v Hirošimě vybuchla atomová bomba. V důsledku ozáření radiací onemocněla leukémií. Ve dvanácti letech začala se skládáním tisíce jeřábů s nadějí, že jí to pomůže. Podle knihy, která byla sepsána na motivy jejího života, stihla Sadako seskládat pouze 664 jeřábů, než se dostala do fáze, kdy už nebyla schopna skládat dál a následně ve svých dvaceti pěti letech zemřela. Její rodiče a kamarádi se ale rozhodli její výzvu dokončit a poskládali zbývajících 336 jeřábů.

Pravdou ovšem je, že Sadako tisíc jeřábů poskládala a pokračovala v jejich skládání dál, dokud jí síly stačily. Nicméně její přání se nikdy nevyplnilo. V hirošimském Pamětním parku míru je postavena její socha, jak skládá jeřába jako památník dětem, které zemřely v důsledku výbuchu atomové bomby. Na japonský svátek Obon, obdobu českých dušiček, zde lidé nechávají své jeřáby na její památku.

Origami je v dnešní době již opravdu rozšířené a existuje mnoho různých druhů, například pohyblivé, se kterým se dá posunovat nebo kroutit. Dále je velmi populární modulární origami, někdy také 3D origami, které se většinou skládá z několika stejných dílů (v počtu klidně několika desítek), které se složí dohromady, čímž vznikne těleso.

Mezi moderní způsoby tvoření origami patří například mokré origami, které se skládá z mokrého papíru, který je lépe tvárný.

Kirikami je taktéž odvětvím origami. Jedná se o moderní verzi, která sice připouští používat nůžky, nicméně s lepidlem většinou nepracuje.

Postupem času se začali o origami zajímat nejen umělci, ale i vědci. Obzvláště matematikům se zalíbilo a začali zkoumat jeho vlastnosti. Jedním z nejuznávanějších současných origamistů je například Robert J. Lang, který díky aplikování matematických principů na origami vytváří užitečné věci.

Kapitola 2

Budování geometrie

Abychom dokázali popsat vlastnosti origami geometrie, musíme nejprve porozumět, jakým způsobem je tato geometrie vystavěna. Jako příklad nám může posloužit eukleidovská geometrie, na které si tento způsob výstavby ukážeme.

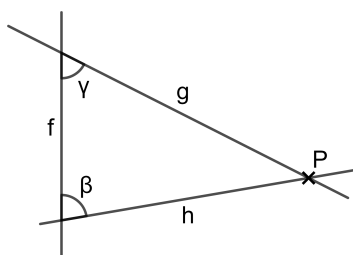
2.1 Axiomy eukleidovské geometrie

Jednou z možností vystavění geometrie je takzvaná axiomatická výstavba. Nejprve je potřeba si stanovit primitivní pojmy a axiomy. Pomocí nich zavedeme tvrzení a další pojmy, z nichž už můžeme odvodit celou geometrii a určit, co jsme v ní schopni sestrojít. Jako příklad můžeme použít nejznámější eukleidovskou geometrii, kterou se učíme již od základní školy.

Základy této geometrii dal již koncem 4. století před naším letopočtem řecký matematik Eukleidés ve své knize Základy. V knize popsal nejprve primitivní pojmy jako například bod a přímka.

Dále sepsal tzv. postuláty (Euklidovy axiomy):

1. Dvěma body lze vést přímku.
2. Úsečku lze neomezeně prodlužovat.
3. Ze zadaného středu lze opsat kružnici se zadaným poloměrem.
4. Všechny pravé úhly jsou stejné.
5. Jestliže úsečka protíná dvě úsečky tak, že v jedné polorovině je součet vnitřních přilehlých úhlů menší než dva pravé úhly, pak lze v této polorovině úsečky prodloužit tak, aby se tato jejich prodloužení protнула.



Pátý postulát je nejsložitější a spousta matematiků se proto snažila dokázat, že ho lze odvodit z předchozích postulátů. Zajímavé na něm je, že je ekvivalentní s několika dalšími tvrzeními, i když to možná není na první pohled patrné:

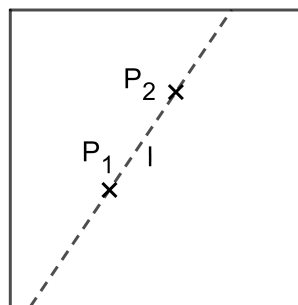
- Bodem mimo zadanou přímku lze vést s danou přímkou jedinou rovnoběžku.
- Protíná-li přímka jednu ze dvou rovnoběžek, protne i druhou.
- Součet vnitřních úhlů v trojúhelníku je roven dvěma pravým.
- Platí Pythagorova věta.
- Existuje alespoň jeden čtverec.

Když známe tyto primitivní pojmy a postuláty, známe již vše, co je pro pracování v eukleidovské geometrii potřeba, neboť vše ostatní z nich lze odvodit.

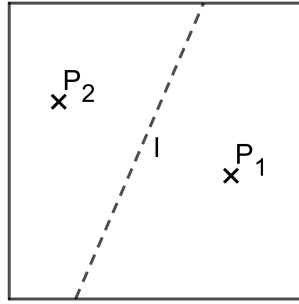
2.2 Axiomy origami geometrie

Dalším příkladem axiomatického vystavění geometrie je origami geometrie. Na Prvním mezinárodním srazu origami vědy a technologie, konaném v Itálii roku 1989, prezentoval Humaki Huzita šest odlišných způsobů, jak můžeme přeložit papír na sebe. Těchto šest operací vešlo ve známost jako Huzitovy axiomy. Za užití těchto axiomů bylo možné v origami sestrojít i spoustu konstrukcí, které v eukleidovské geometrii sestrojít nelze, a Huzitovy axiomy se staly na dlouhou dobu základem pro zkoumání origami. Proto bylo velkým překvapením, když v roce 2002 japonský skladatel Koshiro Hatori objevil nový způsob, jak přehnout papír, který nešel vyjádřit pomocí žádných z Huzitových axiomů. A tak vznikl sedmý axiom. Později se ovšem ukázalo, že Hatori nebyl první, kdo objevil sedmý axiom, neboť již v roce 1989 publikoval Jaques Justin 7 způsobů, jak přehnout papír, které byly shodné, jako Huzitovy axiomy spolu s Hatoriovým sedmým axiomem. Nyní jsou tyto axiomy známy pod názvem buď Huzito-Hatoriovy, nebo Huzito-Justinovy axiomy. Až do nedávna zůstala sada axiomů stejná, ale Jorge C. Lucero v roce 2017 objevil osmý axiom, který umožňuje složit hranu na již existující přímce, tudíž axiom nerozšířil možnosti origami geometrie, ale je nutný pro úplnost axiomů. Osm zmíněných axiomů zní takto:

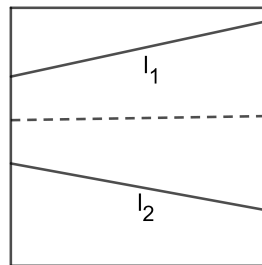
1. Máme-li dva body P_1 a P_2 , pak můžeme složit přehyb tak, aby oba body spojoval.



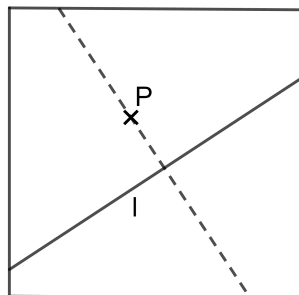
2. Máme-li dva body P_1 a P_2 , pak můžeme udělat přehyb tak, aby P_1 ležel na P_2 .



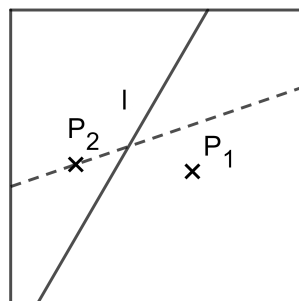
3. Máme-li dvě přímky l_1 a l_2 , pak můžeme udělat přehyb tak, aby l_1 ležela na l_2 .



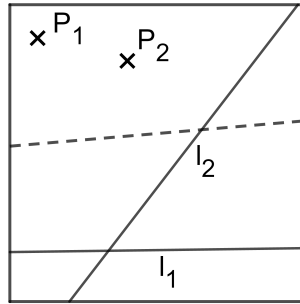
4. Máme-li bod P a přímku l , pak můžeme složit hranu kolmou na l , která bude procházet bodem P .



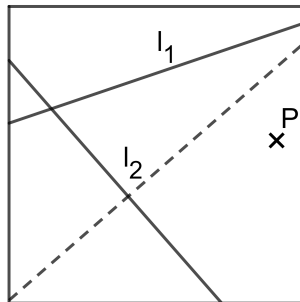
5. Máme-li body P_1 a P_2 a přímku l_1 , pak můžeme udělat přehyb, který přemístí P_1 na l_1 a zároveň bude procházet bodem P_2 .



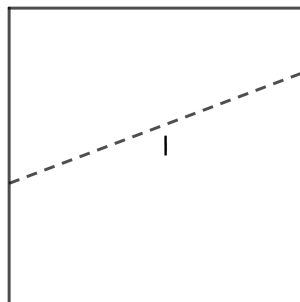
6. Máme-li body P_1 a P_2 a přímky l_1 a l_2 , pak můžeme udělat takový přehyb, aby P_1 ležel na l_1 a zároveň P_2 ležel na l_2 .



7. Máme-li bod P a přímky l_1 a l_2 , pak můžeme složit přehyb kolmý na l_2 , který umístí P na l_1 .



8. Máme-li přímku l , pak můžeme složit hranu tak, aby byla totožná s přímkou l .



Kapitola 3

Základy algebry

Než se zaměříme na samotnou origami geometrii, budeme si muset nejprve definovat pár pro nás důležitých algebraických pojmů, protože v důkazech, co nás následně čekají, se bez nich neobejdeme. Jako první se zaměříme na asi nejzákladnější pojem v algebře, a to je grupa.

3.1 Grupy

Nejprve se pojd'me podívat, co je to operace.

Definice 3.1.1. *Operací na množině G rozumíme zobrazení $G \times G \rightarrow G$. Tuto operaci si označíme \odot . Obraz dvojice $(a, b) \in G \times G$ v operaci \odot označme $a \odot b$.*

Nyní si ukážeme vlastnosti, které taková operace může mít.

Definice 3.1.2. *Operaci \odot na množině G nazveme **komutativní** právě tehdy, když pro libovolné $a, b, c \in G$ platí, že*

$$a \odot b = b \odot a,$$

*a **asociativní**, jestliže*

$$a \odot (b \odot c) = (a \odot b) \odot c.$$

Příkladem asociativních a komutativních operací nám může být klasické sčítání a násobení reálných čísel.

Po těchto základech již můžeme začít s definicemi, které nás pomalu dovedou až k samotným grupám.

Definice 3.1.3. *Množina G dohromady s operací \odot na G se nazývá **grupoid**. Označujeme její (G, \odot) .*

Příkladem nám mohou být celá čísla se sčítáním a odčítáním $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Z}, -)$. Jako protipříklad si uveďme přirozená čísla s odčítáním $(\mathbb{N}, -)$, která grupoid netvoří, protože například $1 - 2$ neleží v \mathbb{N} .

Další pojem, který se nám bude později hodit, obzvláště při definování okruhů, je takzvaná pologrupa.

Definice 3.1.4. Pokud je operace \odot asociativní, říkáme, že i grupoid je asociativní. Takový grupoid nazveme **pologrupou**.

Když se podíváme na předešlé příklady grupoidů, všimneme si, že $(\mathbb{Z}, +)$ pologrupou je, ale $(\mathbb{Z}, -)$ pologrupou není, neboť odčítání není asociativní.

Posledními definicemi před již zmíněnými grupami je takzvaný neutrální a inverzní prvek, pojmy pro grupu naprosto nezbytné.

Definice 3.1.5. Prvek $e \in G$ nazýváme **neutrálním prvkem** grupoidu G , pokud pro libovolné $a \in G$ platí, že

$$e \odot a = a \odot e = a.$$

Například v množině celých čísel spolu se sčítáním je neutrálním prvkem 0.

Definice 3.1.6. Necht' e je neutrální prvek pologrupy G . Prvek $a \in G$. Prvek $\bar{a} \in G$ nazveme **inverzním** k prvku a , jestliže

$$a \odot \bar{a} = \bar{a} \odot a = e.$$

Příkladem inverzního prvku k prvku a v celých číslech se sčítáním je $-a$. V tomto případě jej můžeme nazvat opačným.

Nyní již můžeme definovat očekávané grupy.

Definice 3.1.7. Pologrupu G nazýváme **grupou**, má-li jednotkový prvek a ke každému prvku existuje inverzní prvek.

Aby bylo definici lépe rozumět, pojd'me si uvést pár příkladů: Označme si \mathbb{Z}^* , \mathbb{Q}^* , \mathbb{R}^* , \mathbb{C}^* množiny nenulových celých, racionálních, reálných a komplexních čísel.

Jako příklady grup s klasickým násobením nám poslouží právě množiny \mathbb{Q}^* , \mathbb{R}^* , \mathbb{C}^* . Všechny jsou to asociativní grupoidy, neutrální prvek k násobení je 1 a inverzní prvek k a je $\frac{1}{a}$.

Množiny \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C} nejsou grupami s násobením, neboť neexistuje inverzní prvek k 0. Stejně tak \mathbb{Z}^* není grupa s násobením, protože $\frac{1}{a}$ neleží v \mathbb{Z}^* pro žádná a různá od 1 a -1 .

Příkladem grup se sčítáním nám mohou být množiny \mathbb{Z} , \mathbb{R} , \mathbb{Q} a \mathbb{C} . Neutrálním prvkem je vždy 0 a inverzní prvek k a je $-a$.

Dalším příkladem můžou být grupy zbytkových tříd $(\mathbb{Z}_n, +)$. Zbytková třída je množina všech čísel, jež dávají po dělení určitým n stejný zbytek, např. $[1]_n$ je množina čísel, která dávají po dělení n zbytek 1. \mathbb{Z}_n pak značíme množinu všech zbytkových tříd modulo n . V této grupě je neutrálním prvkem $[0]_n$ a k $[a]_n$ je inverzním neboli opačným prvkem $[-a]_n$.

Nakonec si pojd'me uvést ještě jeden speciální případ grupy.

Definice 3.1.8. **Abelova** nebo někdy také zvaná komutativní grupa je grupa, pro kterou platí, že operace \odot je komutativní.

Příkladem může být množina reálných čísel spolu se sčítáním nebo množina nenulových reálných čísel s násobením.

3.2 Okruhy

Definice 3.2.1. Množinu \mathcal{R} spolu s operacemi \oplus a \otimes nazýváme **okruhem**, jestliže splňuje následující podmínky:

- \mathcal{R} s \oplus je komutativní grupa.
- Pro každé x, y, z ležící v \mathcal{R} platí distributivní zákon, tedy

$$x \otimes (y \oplus z) = (x \otimes y) \oplus (x \otimes z) \quad \text{a zároveň} \quad (y \oplus z) \otimes x = (y \otimes x) \oplus (z \otimes x).$$

- \mathcal{R} spolu s \otimes tvoří pologrupu s neutrálním prvkem.

Okruhy budeme označovat $(\mathcal{R}, \oplus, \otimes)$. Příkladem okruhu je množina celých čísel se sčítáním a násobením $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, jelikož sčítání je komutativní i asociativní a násobení je asociativní, zároveň platí i distributivní zákon. Pro každé x ležící v \mathbb{Z} platí, že $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$, neutrální prvek je tudíž 1. Množina celých čísel tedy tvoří okruh. Stejně tak jsou okruhy $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ anebo již dříve zmiňované zbytkové třídy \mathbb{Z}_n .

Definice 3.2.2. Okruh nazveme **komutativním**, jestliže (\mathcal{R}, \otimes) je komutativní pologrupa.

3.3 Tělesa

Definice 3.3.1. **Tělesem** rozumíme takový komutativní okruh, jehož podmnožina nenulových prvků tvoří grupu s násobením.

Příkladem těles je $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ a $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$

3.4 Polynomy

Definice 3.4.1. Komplexnímu číslu α říkáme **algebraické číslo**, pokud je kořenem nějakého polynomu s racionálními koeficienty.

Kupříkladu $\sqrt{2}$ je algebraické číslo, jelikož je kořenem polynomu $x^2 - 2$, zatímco například π či e algebraickými čísly nejsou, jelikož neexistuje polynom, jehož kořeny by tato čísla byla. Důkaz tohoto tvrzení najdete například v literatuře [8].

Poznámka. Nechť \mathcal{R} je okruh, pak množinu polynomů s koeficienty z \mathcal{R} budeme značit $\mathcal{R}[x]$.

Definice 3.4.2. Nechť \mathcal{R} je okruh, polynom $p(x)$ z $\mathcal{R}[x]$ nazýváme **ireducibilní nad \mathcal{R}** , pokud je nekonstantní a zároveň platí, že ho nejde rozložit na součin dvou nekonstantních polynomů.

Jako příklad jsou uvedeny následující polynomy:

$$p_1(x) = x^2 + 5x + 6 = (x + 3)(x + 2)$$

$$p_2(x) = x^2 - 2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$$

Polynom p_1 není ireducibilní v $\mathbb{Z}[x]$, protože $(x + 3)$ i $(x + 2)$ jsou polynomy nad \mathbb{Z} . Zatímco polynom p_2 je ireducibilní jak v $\mathbb{Z}[x]$, tak v $\mathbb{Q}[x]$, nicméně je reducibilní nad \mathbb{R} .

Definice 3.4.3. *Minimální polynom* algebraického čísla α definujeme jako nekonstantní normovaný polynom s racionálními koeficienty nejmenšího stupně, jehož kořenem je α .

Například polynom $x^2 - 5$ je minimálním polynomem $\sqrt{5}$.

Definice 3.4.4. *Konjugáty* α z \mathbb{C} jsou kořeny minimálního polynomu α . Algebraické číslo je nazýváno **totálně reálné** právě tehdy, když jsou všechny jeho konjugáty reálné.

Jako příklad uvažujme číslo $\sqrt{3 + \sqrt{2}}$. Je to algebraické číslo, tudíž je kořenem nějakého polynomu ireducibilního nad $\mathbb{Q}[x]$. Kořeny tohoto polynomu budou jeho konjugáty, což jsou čísla $+\sqrt{3 + \sqrt{2}}$, $-\sqrt{3 + \sqrt{2}}$, $+\sqrt{3 - \sqrt{2}}$ a $-\sqrt{3 - \sqrt{2}}$.

$$\left(x + \sqrt{3 + \sqrt{2}}\right) \left(x - \sqrt{3 + \sqrt{2}}\right) \left(x + \sqrt{3 - \sqrt{2}}\right) \left(x - \sqrt{3 - \sqrt{2}}\right) = x^4 - 6x^2 + 7$$

Číslo $\sqrt{3 + \sqrt{2}}$ je totálně reálné, jelikož všechny jeho konjugáty jsou také reálné. Oproti tomu číslo $\sqrt{2 + \sqrt{5}}$ není totálně reálné, protože dva jeho konjugáty jsou imaginární: $+\sqrt{2 + \sqrt{5}}$, $-\sqrt{2 + \sqrt{5}}$, $+\sqrt{2 - \sqrt{5}}$ a $-\sqrt{2 - \sqrt{5}}$.

Kapitola 4

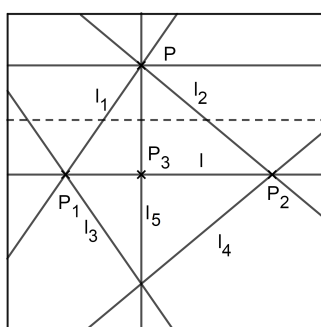
Origami konstrukce

V následujícím textu budeme pracovat pouze s prvními pěti axiomy a podíváme se, co všechno s těmito základními ohyby dokážeme sestrojít.

Lemma 4.0.1. *S pomocí origami je možné k jakékoli dané přímce sestrojít rovnoběžku procházející libovolným zadaným bodem.*

Mějme danou přímku l a bod P .

1. Vybereme dva body P_1 a P_2 na přímce l a sestrojíme přímky l_1 a l_2 dle prvního axiomu tak, aby po řadě spojovaly body P_1, P a P_2, P .
2. Pomocí osmého axiomu přehneme přímku l a tím sestrojíme přímky l_3 a l_4 , které jsou obrazem přímek l_1 a l_2 v osové souměrnosti podle l .
3. Nyní sestrojíme přímku l_5 opět pomocí prvního axiomu tak, aby na ní ležel průsečík přímek l_3 a l_4 a zároveň bod P . Bod, ve kterém se protly přímky l_5 a l , označme P_3 .
4. Poté uděláme dle třetího axiomu osu úsečky PP_3 a podle této osy uděláme obraz l do bodu P , obdobně jako v druhém bodu této konstrukce.



Důkaz. Neboť je průsečík l_3 a l_4 obrazem v osové souměrnosti bodu P podle l , musí být l_5 kolmá k l . Osa úsečky PP_3 je také kolmá k l_5 , tudíž je rovnoběžná s l . Z toho vyplývá, že i obraz l podle osy PP_3 bude rovnoběžný s l . \square

4.1 Origami čísla

Definice 4.1.1. Podmnožinu \mathbb{R}^2 *origami sestrojitelných bodů* \mathcal{P} definujeme jako množinu, jež obsahuje body $[0, 0]$, $[0, 1]$ a zároveň pomocí prvních pěti origami axiomů dokážeme sestrojiti všechny ostatní body z \mathcal{P} .

Definice 4.1.2. Množinu $\mathbb{F}_0 = \{\alpha \in \mathbb{R}; \exists V_1, V_2 \in \mathcal{P} \text{ takové, že } |\alpha| = |V_1, V_2|\}$ nazýváme *množina origami čísel*.

To znamená, že dokážeme sestrojiti body V_1, V_2 , které budou mít vzdálenost $|\alpha|$.

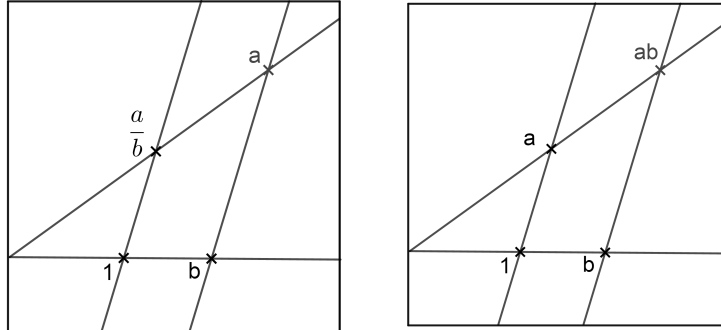
Lemma 4.1.1. Bod $[a, b] \in \mathbb{R}^2$ je sestrojitelný v origami právě tehdy, když $[a, 0]$ i $[0, b]$ jsou origami sestrojitelné body \mathbb{R} .

Důkaz. Pomocí origami můžeme přenášet vzdálenost podél rovnoběžek a zároveň můžeme tvořit rovnoběžky (Lemma 4.0.1). Tudíž bod $[a, b]$ může být sestrojen jako průsečík dvou rovnoběžek. Na druhou stranu, jestliže je $[a, b]$ sestrojitelný pomocí origami, pak můžeme zobrazit bod na osu x i y . Tudíž jsou souřadnice a i b origami sestrojitelné. \square

Lemma 4.1.2. Jestliže máme daná dvě reálná čísla a, b ; $a, b \in \mathbb{F}_0$, pak můžeme pomocí origami sestrojiti vzdálenost $a \pm b$, ab , $\frac{a}{b}$, \sqrt{a} .

Důkaz. Jsou dány vzdálenosti a, b . K sestrojení vzdáleností ab , respektive $\frac{a}{b}$, zkonstruujeme dvě rovnoběžné přímky tak, jak je ukázáno na obrázcích.

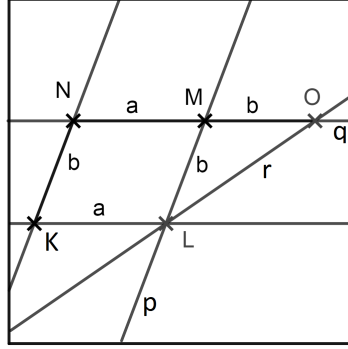
Z podobnosti trojúhelníků vyplývá, že: $\frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{b}}{1}$ a $\frac{a}{1} = \frac{ab}{b}$.



Pro $a \pm b$ nám stačí ukázat, že můžeme sestrojiti $a + b$.

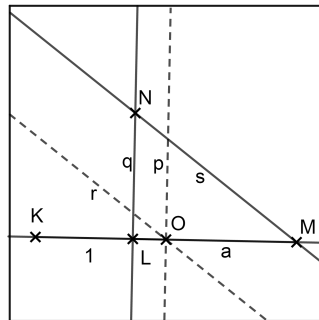
1. K daným úsečkám KL , KN ; $|KL| = a$, $|KN| = b$, povedeme body L a M rovnoběžky p a q . Průsečík p, q nazvěme M . Protože $KLMN$ je rovnoběžník, tak víme, že $|MN| = a$ a $|LM| = b$.
2. Nyní sestrojíme přímku r tak, aby se p přehla na KL , a průsečík q, r nazvěme O .

Neboť je q rovnoběžná s KL a r je osa úhlu, víme ze střídavých úhlů, že $\triangle LOM$ je rovnoramenný a zároveň $|LM| = |MO|$. Tudíž $|MO| = b$ a úsečka NO má délku $a + b$.



Nyní si ukážeme, jak sestrojít \sqrt{a} :

1. Pro dané vzdálenosti $1, a$ sestrojme KM tak, aby $|KL| = 1$ a $|LM| = a$.
2. Dále sestrojme osu úsečky KM a nazvěme ji p . Průsečík p a KM nazvěme O .
3. Nyní sestrojme přímku q tak, aby byla rovnoběžná s p a zároveň procházela bodem L .
4. Poté sestrojíme přímku r procházející bodem O tak, aby se bod K přehnul na q .
5. Nakonec sestrojme rovnoběžku k r procházející bodem M a nazvěme ji s . Průsečík q, s označme N .



Z konstrukce víme, že $|KO| = |ON| = \frac{1+a}{2}$. Z toho vyplývá, že trojúhelník KMN je pravoúhlý a $|LN|$ je výška, tudíž z Euklidovy věty ověšce plyne $|LN| = \sqrt{a}$. \square

Nyní dokážeme, že $\sqrt{1 + \alpha^2}$ je origami číslo právě tehdy, když α je origami číslo.

Věta 4.1.1. *Množina origami čísel \mathbb{F}_0 je těleso, ve kterém je unární operace $\alpha \mapsto \sqrt{1 + \alpha^2}$ uzavřená. (Tedy s každým α leží v tělese \mathbb{F}_0 i $\sqrt{1 + \alpha^2}$).*

Důkaz. Je vidět, že $-\alpha \in \mathbb{F}_0$ a v Lemmatu 4.1.2 jsme si dokázali, že i $\alpha \pm \beta, \alpha\beta, \frac{1}{\alpha}, 0, 1 \in \mathbb{F}_0$.

Dále uvažujme pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami o délkách 1 a α . Pak bude délka přepony $\sqrt{1 + \alpha^2}$. \square

O operaci $\alpha \mapsto \sqrt{1 + \alpha^2}$ víme, že nám produkuje origami čísla. Abychom zjistili, jaké všechny ohyby jsou v origami možné, musíme prozkoumat, zda existuje ještě další unární operace, která nám produkuje origami čísla.

Nyní si dokážeme, že žádná taková operace není.

Definice 4.1.3. Označme $\mathbb{F}_{\sqrt{1+\alpha^2}}$ nejmenší podtěleso reálných čísel uzavřené nad operací $\alpha \mapsto \sqrt{1+\alpha^2}$. Tj. pomocí operace na prvcích podtělěsa dostaneme pouze další prvky tohoto podtělěsa.

Z Věty 4.1.1 víme, že $\mathbb{F}_{\sqrt{1+\alpha^2}} \subseteq \mathbb{F}_0$, neboť logicky nejmenší podtěleso operace $\alpha \mapsto \sqrt{1+\alpha^2}$ nám dává pouze origami čísla.

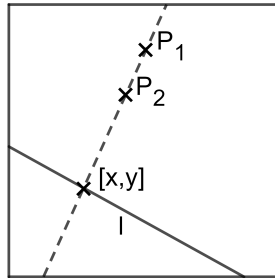
V následující větě si dokonce ukážeme, že $\mathbb{F}_{\sqrt{1+\alpha^2}} = \mathbb{F}_0$. Tedy, že \mathbb{F}_0 je nejmenší těleso uzavřené nad $\alpha \mapsto \sqrt{1+\alpha^2}$.

Věta 4.1.2. Pro množinu origami čísel platí, že $\mathbb{F}_{\sqrt{1+\alpha^2}} = \mathbb{F}_0$.

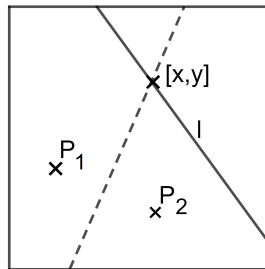
Důkaz. Vzhledem k tomu, že již víme, že $\mathbb{F}_{\sqrt{1+\alpha^2}} \subseteq \mathbb{F}_0$, stačí nám dokázat, že $\mathbb{F}_0 \subseteq \mathbb{F}_{\sqrt{1+\alpha^2}}$. Což znamená, že potřebujeme dokázat, že všechna origami čísla jsme schopni nalézt pouze pomocí základních operací (sčítání, násobení) a operace $\mathbb{F}_{\sqrt{1+\alpha^2}}$.

V předchozí části jsme si představili pět základních axiomů origami geometrie. Pomocí nich si nyní ukážeme čtyři možné způsoby získání nového bodu pouze pomocí přímek:

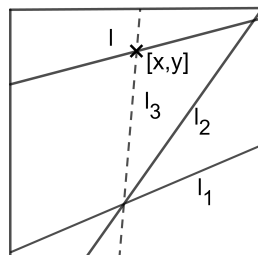
1. Mějme body P_1 a P_2 . Vedme jimi ohyb. Ten protne danou přímku l v bodě $[x, y]$.



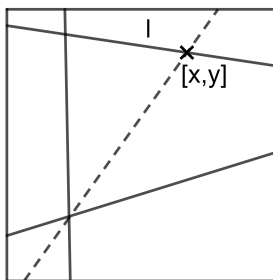
2. Vedme ohyb osou osové souměrnosti bodů P_1 a P_2 . Tato přímka protne danou přímku l v bodě $[x, y]$.



3. Zobrazením přímky l_1 v osové souměrnosti podle osy l_2 vytvoříme přímku l_3 , která protne danou přímku l v bodě $[x, y]$.



4. Vedme ohyb osou úhlu, tato přímka protne danou přímku l v bodě $[x, y]$.



V této části si předchozí tvrzení dokážeme pouze pro první z možností, neboť zbylé fungují na stejném principu.

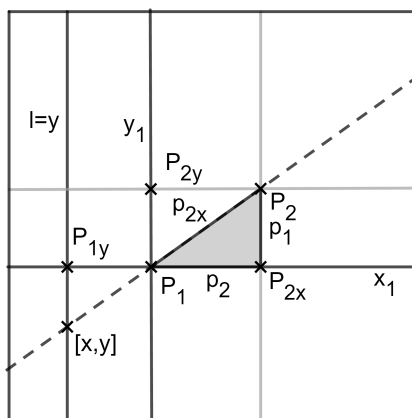
Začneme tím, že posuneme bod P_1 na počátek souřadnic tak, že přičteme hodnoty P_{1x} , P_{1y} , protože víme, že přičítáním origami čísel dostaneme origami číslo. Dále dokažme, že můžeme uvažovat, že bod P_2 leží na jednotkové kružnici. K tomuto kroku budeme potřebovat prodloužit/zkrátit osy x , y . Prodloužení/zkrácení provedeme pomocí vynásobení koeficientem, který dostaneme z Pythagorovy věty:

$$\sqrt{P_{2x}^2 + P_{2y}^2} = \sqrt{P_{2x}^2 \left(1 + \frac{P_{2y}^2}{P_{2x}^2}\right)} = |P_{2x}| \sqrt{1 + \frac{P_{2y}^2}{P_{2x}^2}}$$

v této operaci tedy není nic jiného než násobení $\alpha(\sqrt{1 + \alpha^2})$, jak můžeme vidět na obrázku níže.

Nyní jsme tedy dostali P_2 na jednotkovou kružnici a teď by se nám hodilo pootočit osami tak, aby bod P_2 ležel na ose x . To můžeme udělat tím, že otočíme papírem. Že to můžeme udělat, lze dokázat pomocí analytického vyjádření rotace. Tím pádem jsme již schopni najít původní bod $[x, y]$, neboť se nachází na průsečíku osy x a přímky l , kterou můžeme zapsat jako $L(x) = ax + b$. Tudíž bod $[x, y] = [-\frac{a}{b}; 0]$.

Při nacházení tohoto bodu jsme tedy potřebovali pouze operace sčítání, násobení a operaci $\alpha \mapsto \sqrt{1 + \alpha^2}$. Ke stejnému závěru bychom došli i při zbylých třech možnostech nalezení bodu. Proto tedy platí $\mathbb{F}_{\sqrt{1+\alpha^2}} = \mathbb{F}_0$.



□

Kapitola 5

Srovnání origami geometrie s eukleidovskou geometrií

V roce 1995 D. Auckly a J. Cleveland dokázali, že všechno, co je sestrojitelné v origami geometrii jen s prvními pěti axiomy, je sestrojitelné i v euklidovské geometrii a také, že je taková origami geometrie méně silná než eukleidovská. Ale s přidáním šestého a sedmého axiomu je origami geometrie již mnohem silnější. Příkladem nám mohou být dva velmi známé antické problémy: trisekce úhlu a zdvojení krychle, nebo ještě některé případy pravidelných n -úhelníků.

Připomeňme si nyní tyto dva axiomy:

- Máme-li body P_1 a P_2 a přímky l_1 a l_2 , pak můžeme udělat takový přehyb, aby P_1 ležel na l_1 a zároveň P_2 ležel na l_2 .
- Máme-li bod P a přímky l_1 a l_2 , pak můžeme složit přehyb kolmý na l_1 , který umístí P na l_2 .

Důvodem, proč nejsme schopni vyřešit některé antické problémy v eukleidovské geometrii, je, že v ní nelze obecně sestrojít kořeny kubické rovnice.

V origami jsou kubické rovnice, především díky šestému axiomu, sestrojitelné. Díky tomu jsme schopni již zmiňovanou trisekci úhlu a zdvojení krychle sestrojít. To je důvodem, proč origami geometrie převyšuje eukleidovskou.

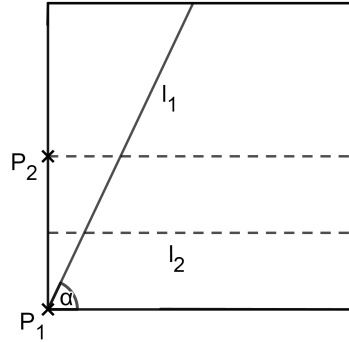
Nyní si ukážeme, jak některé tyto zajímavosti v origami skutečně sestrojít.

5.1 Trisekce úhlu

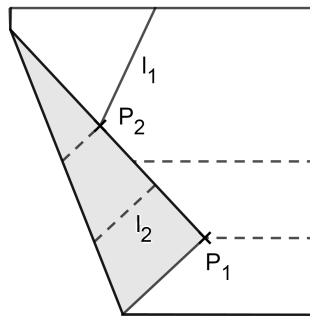
Jako první se můžeme podívat na trisekci úhlu, o níž bylo v 19. století dokázáno, že v eukleidovské geometrii není možná. Kdežto v origami geometrii ji zvládneme pomocí několika málo přehybů.

H. Abeho metoda:

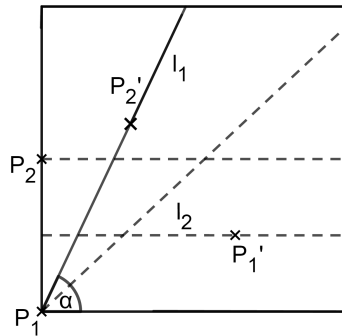
1. Nechť vrchol P_1 úhlu α je dolní roh čtvercového papíru a jeho spodní rameno je spodní hrana papíru. Jeho druhé rameno nazvěme l_1 .
2. Nejdříve přehneme papír vodorovně na poloviny a tam, kde se hrana protne s levým okrajem papíru umístíme bod P_2 a spodní půlku ještě rozdělíme na čtvrtiny hranou l_2 .



3. Dále přeložíme bod P_1 na l_2 a bod P_2 na l_1 a jejich obrazy pojmenujeme P'_1 a P'_2 .

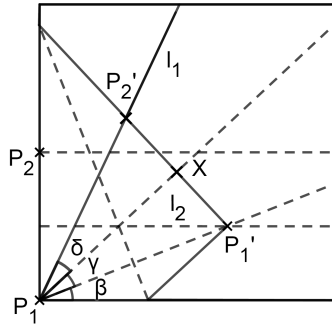


4. Osa úsečky $P'_1 P'_2$ bude procházet $\frac{1}{3}$ úhlu α a nakonec ještě uděláme osu většího úhlu, na který jsme rozdělili úhel α .



Nyní si dokážeme, že touto konstrukcí jsme skutečně roztřetili úhel:

Důkaz. Nejdříve si části úhlu α pojmenujeme β , γ a δ tak, jako na obrázku a průsečík přímky $P'_1 P'_2$ s osou úhlu $P'_1 P_1 P'_2$ si pojmenujeme X . Z konstrukce je zřejmé, že úhly γ a β jsou stejné, neboť vznikly rozdělením úhlu na poloviny. Protože je l_2 kolmá k $P_2 P_1$ a zároveň ji půlí, musí i její zobrazení podle osy $P_1 X$ být osou úsečky $P_1 P_2$. Navíc trojúhelníky $P_1 X P_2$ a $P_1 P_1 X$ mají společnou stranu $P_1 X$, tudíž jsou shodné podle věty SsÚ a úhly δ a γ jsou stejné, což jsme chtěli dokázat.



□

5.2 Hagova věta

Japonský učitel biologie Kauzo Haga přišel se způsobem, jak jednoduchým způsobem dostat na hraně origami papíru úsečku délky $\frac{1}{n}$, kde n je jakékoliv přirozené číslo.

Důkaz. Začneme tím, že si ukážeme způsob, jakým dostat $\frac{1}{3}$. Vezměme si čtvercový papír o hraně délky 1, označme ho $ABCD$. Tento čtverec nyní přehneme tak, že bod A bude ležet v polovině CD . Nyní označme F průsečík BC a $A'B'$ a E bod, kde se přehla strana DA . Tím dostaneme dva podobné trojúhelníky. $A'DF$ a $A'CE$. Nyní z Pythagorovy věty dopočítáme, kolik se rovná DF , označme tuto délku x :

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + x^2 = (1-x)^2$$

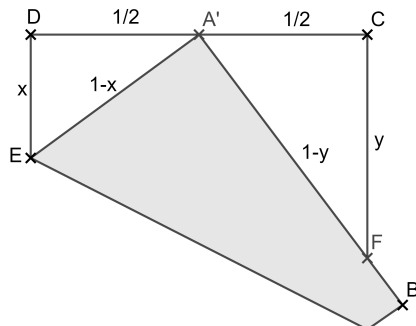
$$\frac{3}{8} = x$$

A z podobnosti trojúhelníků nyní dopočítáme y :

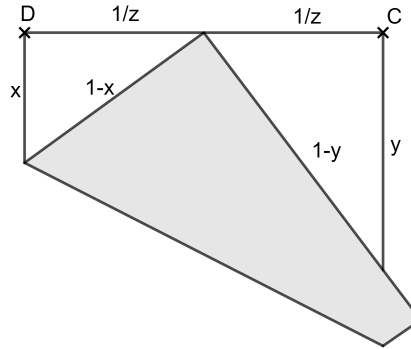
$$\frac{y}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{x}$$

$$y = \frac{2}{3}$$

Když nyní přehneme y na půl, dostaneme požadovanou délku $\frac{1}{3}$.



Zjistíme, že stejným způsobem jsme schopni z jakéhokoliv zlomku $\frac{1}{n}$ dostat $\frac{1}{n+1}$. Pojdme si to ukázat:



Jako v prvním důkazu začneme tím, že z Pythagorovy věty dosadíme za x proměnnou z :

$$\left(\frac{1}{z}\right)^2 + x^2 = (1-x)^2$$

$$\frac{z^2 - 1}{2z^2} = x$$

Opět z podobnosti trojúhelníků zjistíme, čemu se rovná y :

$$\frac{y}{z-1} = \frac{\frac{1}{z}}{\frac{z^2-1}{2z^2}}$$

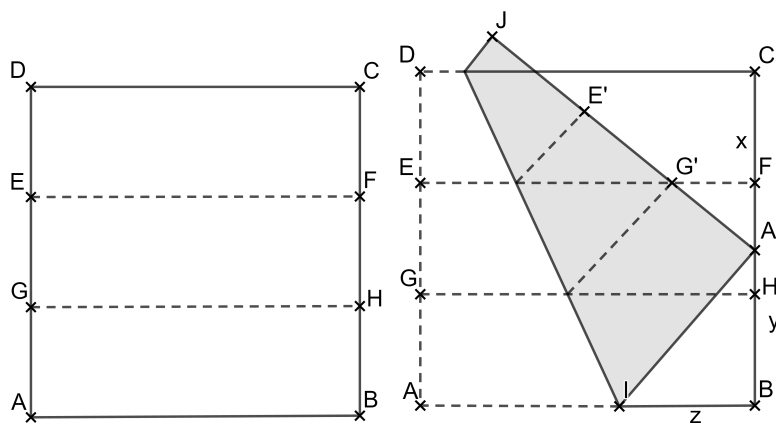
$$y = \frac{2}{z+1}$$

Nakonec, když přehneme z na polovinu, dostaneme hledanou délku $\frac{1}{z+1}$. □

5.3 Zdvojení krychle

Teď se podívejme na zmiňovaný druhý antický problém, zdvojení krychle, jehož důkaz o nekonstruovatelnosti v eukleidovské geometrii uveřejnil až v 19. století Pierre Wantzel. Přesné znění je: Nalezněte konstrukci, pomocí níž bude k libovolné krychli možné zkonstruovat hranu krychle o dvojnásobném objemu. Hledaná délka hrany pro krychli o délce hrany 1 je $\sqrt[3]{2}$.

Důkaz. Tento důkaz budeme předvádět na čtvercovém papíru, označme si jej $ABCD$. Tento čtverec teď budeme chtít rozdělit na třetiny. Pomocí bodů E, G ležících na AD a bodů F, H ležících na BC . K tomu použijeme již zmiňovanou Hagovu větu. Když máme papír na třetiny, můžeme AD přehnout tak, že A bude ležet na BC , označme tento bod jako A' , a G na EF , označme tento bod G' . Bod, v němž se přehýbá strana AB , označme I , vzdálenost $|CA'|$ označme x , $|A'B| = y$ a $|IB| = z$. Strana čtverce $ABCD$ je pak $x + y$.



Nyní použijeme Pythagorovu větu:

$$\begin{aligned} IB^2 + BA'^2 &= A'I^2 \\ z^2 + y^2 &= (x + y - z)^2 \\ z &= \frac{x^2 + 2xy}{2(x + y)} \end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že úhly IBA' , $A'FG'$ i $IA'G'$ jsou pravé úhly, jsou trojúhelníky IBA' a $G'FA'$ podobné.

Velikosti stran $G'A'$, $A'F$ a $A'I$ můžeme vyjádřit jako:

$$\begin{aligned} G'A' &= \frac{x + y}{3} \\ A'F &= x - \frac{x + y}{3} = \frac{2x - y}{3} \\ A'I &= y + x - z \end{aligned}$$

Z podobnosti trojúhelníků tedy dostaneme rovnost:

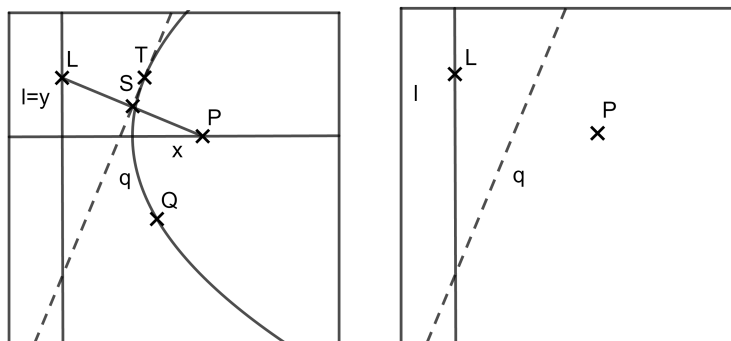
$$\begin{aligned} \frac{G'A'}{A'F} &= \frac{A'I}{IB} \\ \frac{\frac{x+y}{3}}{\frac{2x-y}{3}} &= \frac{x + y - \frac{x^2+2xy}{2(x+y)}}{\frac{x^2+2xy}{2(x+y)}} \\ x^3 + 3x^2y + 2xy^2 &= 2x^3 + 3x^2y + 2xy^2 - 2y^3 \\ x &= \sqrt[3]{2} \cdot y \end{aligned}$$

Z toho vyplývá, že pomocí origami je tento antický problém řešitelný. □

5.4 Společná tečna dvou parabol

Další zajímavou konstrukcí je sestrojení společné tečny dvou parabol, což v euklidovské geometrii opět nedokážeme.

Začneme tím, že si ukážeme, jak lze sestrojiti tečnu k jedné parabole. Tečnou k parabole p se zadanou řídicí přímkou l a ohniskem P je totiž vždy každá osa souměrnosti LP , kde L je libovolný bod na přímce l . Takovouto osu souměrnosti dostaneme prostým přehybem bodu P na zvolený bod L .



Nyní si dokážeme, že vzniklá přímka (označme si ji q) je skutečně tečnou k dané parabole.

Řekněme si, že přímka l je osa y a že bod P leží na ose x . Souřadnice následujících dvou bodů si určíme jako $P = [k, 0]$ a $L = [0, l]$. Střed S úsečky LP , ležící na přímce q , má souřadnice $[\frac{k}{2}, \frac{l}{2}]$. Přímku q můžeme zapsat ve tvaru $ax + by + c = 0$. Vzhledem k tomu, že je přímka q osou úsečky LP , tak víme, že její normálový vektorem je $\vec{n} = (k, -l)$, což znamená, že přímka q je ve tvaru:

$$kx - ly + c = 0$$

Víme, že na ní leží bod S , takže ho můžeme dosadit do rovnice a dostaneme:

$$c = \frac{l^2 - k^2}{2}$$

Nyní do rovnice dosadíme c :

$$kx - ly + \frac{l^2 - k^2}{2} = 0$$

Pro každý bod paraboly $Q = [x, y]$ platí, že má stejnou vzdálenost od řídicí přímky l a od ohniska P , $|lQ| = |PQ|$. Délku úsečky PQ můžeme vyjádřit jako $\sqrt{y^2 + (k - x)^2}$ a vzdálenost bodu Q od přímky l je x . Nyní, když doplníme za úsečky jejich hodnoty, dostaneme:

$$\sqrt{y^2 + (k - x)^2} = |x|$$

Tudíž parabolu p můžeme zapsat ve tvaru

$$p : y^2 + k^2 - 2kx = 0.$$

Abychom dostali společné body paraboly p a přímky q , stačí nám vyřešit soustavu rovnic p, q pro neznámé x, y .

Z rovnice paraboly p dostáváme, že:

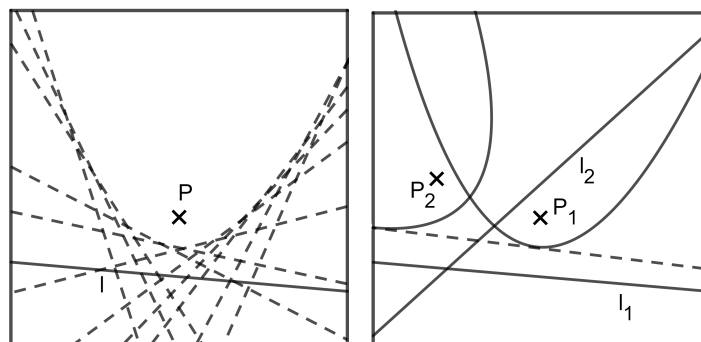
$$kx = \frac{y^2 + k^2}{2}$$

Když to dosadíme do rovnice pro přímku q , dostaneme:

$$\frac{y^2 + k^2}{2} - ly + \frac{l^2 - k^2}{2} = 0$$

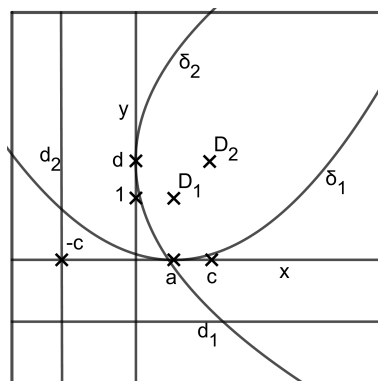
Diskriminant této rovnice se rovná $D = 4l^2 - 4l^2 = 0$, což znamená, že parabola p má s přímkou q právě jeden společný bod, a tudíž je q tečna této paraboly. K sestrojení paraboly nám tudíž stačí sestrojít tečny této paraboly a vyznačit na nich body dotyku.

To znamená, že pokud chceme sestrojít tečnu paraboly, musíme přehnout ohnisko na řídicí přímku, kterou je parabola zadána. Tudíž máme-li dvě paraboly zadané pomocí P_1, l_1 a P_2, l_2 , pak bychom sestrojili jejich společnou tečnu, stačí udělat přehyb tak, aby bod P_1 ležel na l_1 a P_2 na l_2 , což je přesně ohyb šestého axiomu.



5.5 Kubické rovnice

Uvažujme rovnici $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, pro $a, b, c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$. Zvolme si v rovině bod D_1 se souřadnicemi $[a, 1]$ a bod D_2 se souřadnicemi $[c, b]$. Dále si zvolme přímky $d_1 : y = -1$ a $d_2 : x = -c$. Sestrojíme parabolu δ_1 s ohniskem D_1 a řídicí přímkou d_1 a parabolu δ_2 s ohniskem D_2 a řídicí přímkou d_2 . Když nyní podle šestého axiomu sestrojíme společnou tečnu t těchto dvou parabol, pak její směrnice bude řešením dané rovnice.



Důkaz. Neboť t zřejmě není rovnoběžná s y , můžeme rovnici t zapsat ve tvaru:

$$t : y = mx + n \quad (5.1)$$

O parabole δ_1 víme, že bude mít rovnici

$$\delta_1 : (x - a)^2 = 4y \quad (5.2)$$

Souřadnice bodu dotyku t s parabolou P_1 označme $[x_1, y_1]$. Neboť je tento bod součástí paraboly, musí platit rovnost:

$$(x_1 - a)^2 = 4y_1 \quad (5.3)$$

Zároveň, protože je t tečnou δ_1 , má rovnici:

$$(x_1 - a)(x - x_1) = 2(y - y_1) \quad (5.4)$$

Nyní si vyjádříme koeficienty z funkce tečny a dosadíme do rovnice (5.4):

$$m = \frac{x_1 - a}{2} \quad (5.5)$$

$$n = y_1 - \frac{x_1(x_1 - a)}{2} \quad (5.6)$$

Když to nyní dosadíme do rovnic (5.2) a (5.4), dostaneme:

$$4y_1 = (x_1 - a)^2 \quad (5.7)$$

$$= 4 \left(\frac{x_1 - a}{2} \right)^2$$

$$= 4m^2$$

$$y_1 = m^2 \quad (5.8)$$

Po dosazení vztahů (5.8) a (5.5) do (5.6) nám vyjde:

$$n = y_1 - \frac{x_1(x_1 - a)}{2} \quad (5.9)$$

$$= m^2 - \frac{(x_1 - a)^2}{2} - a \frac{x_1 - a}{2}$$

$$= mk^2 - 2m^2 - am$$

$$= -m^2 - am$$

Nyní zopakujeme celý postup i pro parabolu δ_2 , která má rovnici:

$$\delta_2 : (y - b)^2 = 4cx \quad (5.10)$$

Když si bod dotyku t a δ_2 označíme $[x_2, y_2]$, musí platit:

$$(y_2 - b)^2 = 4cx_2 \quad (5.11)$$

Neboť je t zároveň i tečnou δ_2 , má rovnici:

$$(y_2 - b)(y - y_2) = 2c(x - x_2) \quad (5.12)$$

Nyní si opět vyjádříme z (5.12) koeficienty a dosadíme do (5.1):

$$m = \frac{2c}{y_2 - b} \quad (5.13)$$

$$n = y_2 - \frac{2cx_2}{y_2 - b} \quad (5.14)$$

Když si to dosadíme stejně jako u první paraboly, dostaneme

$$n = b + \frac{c}{m} \quad (5.15)$$

Z toho vyplývá:

$$-m^2 - am = b + \frac{c}{m} \quad (5.16)$$

$$m^3 + am^2 + bm + c = 0 \quad (5.17)$$

Tudíž je m řešením rovnice $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, což jsme chtěli dokázat. \square

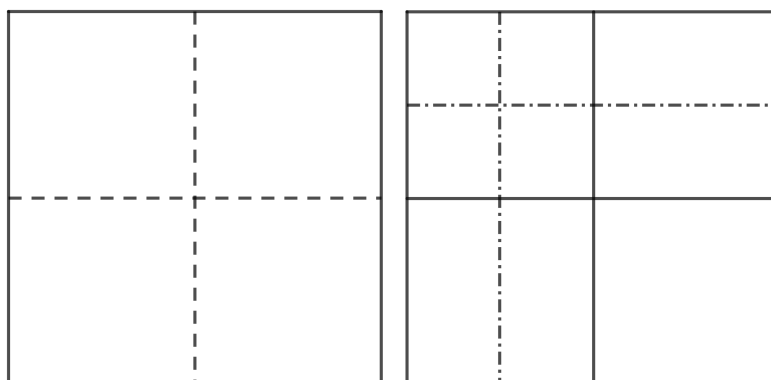
5.6 Pravidelné n -úhelníky

Díky kombinaci trisekce a rozpůlení úhlu jsme schopni rozdělit jednotkovou kružnici do spousty různých zlomků, nebo-li zkonstruuje takový pravidelný n -úhelník, kde n je ve tvaru $2^i 3^j$ pro $i, j \in \mathbb{N}_0$. Tedy za pomoci skládání rozdělíme úhel na poloviny, třetiny, čtvrtiny, šestiny, osminy, devítiny a tak dále.

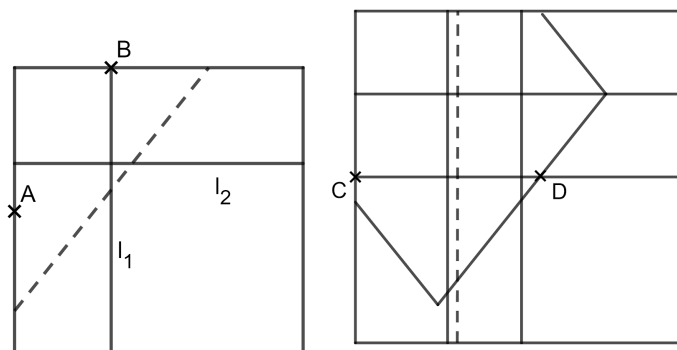
Pro určité případy, kdy je naší snahou rozčlenit kruh na n shodných částí, se dostaneme ke skupině origami konstrukcí objevených rakouským matematikem Robertem Geretschlägerem pomocí konstrukcí z 19. století. Geretschläger ukázal obecnou metodu pro sestavení pravidelného n -úhelníku, kde n je prvočíslo ve tvaru $2^i 3^j + 1$. Tyto konstrukce ve spojení s rozpůlením a trisekcí úhlu dávají za vzniku n -úhelníkům tvaru $2^l 3^m p_1 \dots p_k$, kde každé p_h je tvaru $p_h = 2^i 3^j + 1$. Důkaz je uveden například v literatuře [4]. Při těchto možných konstrukcích jediným nekonstruovatelným n -úhelníkem pro $n \leq 20$ je pravidelný 11-úhelník.

Nyní si ukážeme, jak sestavit takový pravidelný 7-úhelník.

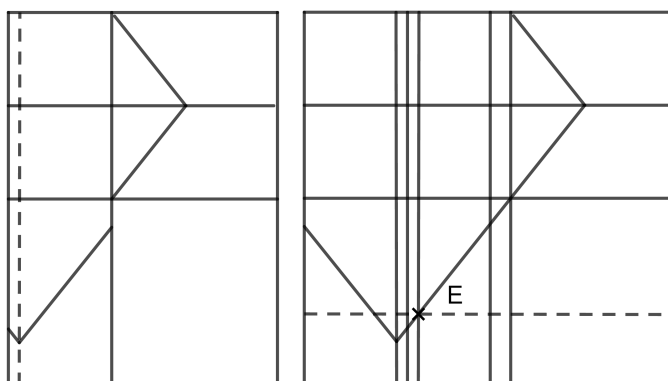
1. Mějme čtvercový papír. Přehněme jej v polovině jak horizontálně, tak vertikálně.
2. Udělejme přehyby dozadu, takzvané hřbety, ve čtvrtinách papíru, jak lze vidět na obrázku.



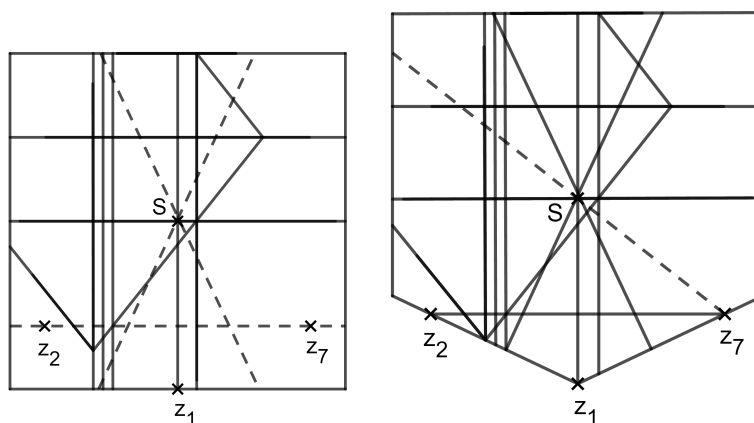
3. Vytvořme takový ohyb, aby bod A , nacházející se v polovině levé strany, ležel na l_1 a zároveň bod B , nacházející se ve třetině horní strany, ležel na l_2 .
4. Papír rozložme. Sestrojme hranu tak, aby bod C , nacházející se v polovině levé strany ležel na D , jenž je průsečíkem přehybu z minulého kroku a horizontálního ohybu v polovině papíru.



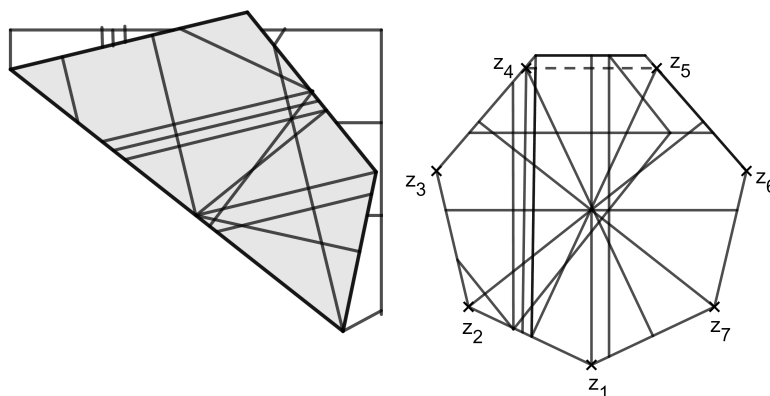
- Přeložme obě vrstvy podle již vyznačené hrany ve čtvrtině celého papíru.
- Celý čtverec rozložme. Vytvořme horizontální hranu procházející E , jenž je průsečíkem hran z kroků 3 a 5.



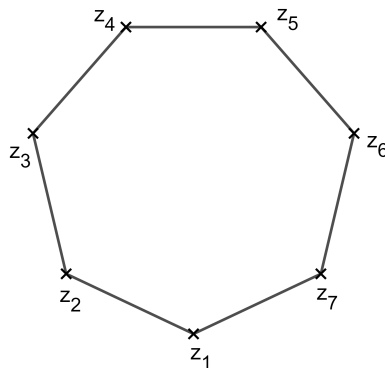
- Přehneme podle obou přímek procházejících S tak, aby bod z_1 ležel na hraně z kroku 6. Vzniknou nám body z_2 a z_7 . (S je střed sedmiúhelníku a z_1, z_2, z_7 jeho vrcholy.) Dále udělejme hřbety podle polopřímek z_1z_2 a z_1z_7 .
- Přeložme podle přímky Sz_7 .



- Zohněme dozadu spodní vrstvu podle úseček z_2z_1 a z_1z_7 , díky čemuž nám vzniknou další dvě strany sedmiúhelníku. Následně rozložíme a zopakujeme kroky 8. a 9. v osové souměrnosti podle osy Sz_1 .
- Nyní už jen vytvořme hřbet spojující vrcholy z_3 a z_4 .



Pravidelný sedmiúhelník je právě hotov.



Pojďme se podívat, proč je pravidelný sedmiúhelník složitelný. Budeme postupovat podobně, jako v [6].

Důkaz. O vrcholech sedmiúhelníku můžeme uvažovat jako o sedmi řešeních rovnice

$$z^7 - 1 = 0 \quad (5.18)$$

v komplexní rovině. To implikuje, že jednotková kružnice je kružnicí opsanou našemu sedmiúhelníku a že jeden z vrcholů bude bod $z_1 = 1$ na reálné ose. Jelikož jedno řešení již známe, zbylých šest budou kořeny rovnice

$$\frac{z^7 - 1}{z - 1} = z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0. \quad (5.19)$$

Pro každé z vyhovující této rovnici, konjugát \bar{z} je taktéž řešením, jelikož reálná osa je osou souměrnosti sedmiúhelníku. Zároveň jelikož

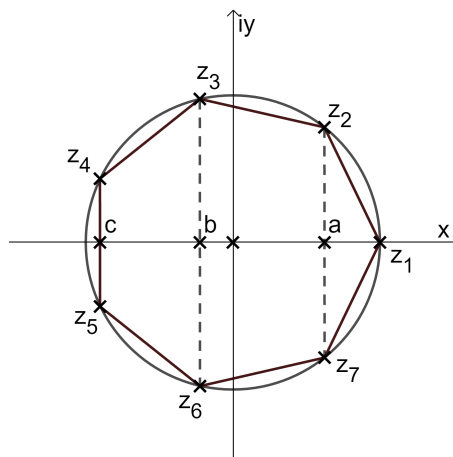
$$|z| = |\bar{z}| = 1$$

a taky

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2 = |\bar{z}|^2 = 1,$$

dostáváme, že $\bar{z} = \frac{1}{z}$. Můžeme si tedy zavést

$$\zeta = z + \frac{1}{z} = z + \bar{z} = 2 \cdot \operatorname{Re} z. \quad (5.20)$$



$$\begin{aligned}
z_1 &= 1 + i \cdot 0 & z_6 &= \cos \frac{10\pi}{7} + i \cdot \sin \frac{10\pi}{7} \\
z_2 &= \cos \frac{2\pi}{7} + i \cdot \sin \frac{2\pi}{7} & z_7 &= \cos \frac{12\pi}{7} + i \cdot \sin \frac{12\pi}{7} \\
z_3 &= \cos \frac{4\pi}{7} + i \cdot \sin \frac{4\pi}{7} & a &= \cos \frac{2\pi}{7} = \operatorname{Re} z_2 = \operatorname{Re} z_7 \\
z_4 &= \cos \frac{6\pi}{7} + i \cdot \sin \frac{6\pi}{7} & b &= \cos \frac{4\pi}{7} = \operatorname{Re} z_3 = \operatorname{Re} z_6 \\
z_5 &= \cos \frac{8\pi}{7} + i \cdot \sin \frac{8\pi}{7} & c &= \cos \frac{6\pi}{7} = \operatorname{Re} z_4 = \operatorname{Re} z_5
\end{aligned}$$

Po dělení z^3 vidíme, že (5.19) je ekvivalentní k

$$z^3 + z^2 + z + 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} = 0,$$

poněvadž 0 není kořen, a protože

$$\begin{aligned}
\zeta^3 &= \left(z + \frac{1}{z}\right)^3 = z^3 + 3z + \frac{3}{z} + \frac{1}{z^3} \\
&= z^3 + \frac{1}{z^3} + 3\left(z + \frac{1}{z}\right) = z^3 + \frac{1}{z^3} + 3\zeta \\
\iff \zeta^3 - 3\zeta &= z^3 + \frac{1}{z^3}
\end{aligned}$$

a také

$$\begin{aligned}
\zeta^2 &= z + \frac{1}{z^2} = z^2 + 2 + \frac{1}{z^2} \\
\iff \zeta^2 - 2 &= z^2 + \frac{1}{z^2},
\end{aligned}$$

což nám dává

$$\begin{aligned}
\left(z^3 + \frac{1}{z^3}\right) + \left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) + \left(z + \frac{1}{z}\right) + 1 &= 0 \\
\zeta^3 - 3\zeta + \zeta^2 - 2 + \zeta + 1 &= 0 \\
\zeta^3 + \zeta^2 - 2\zeta - 1 &= 0.
\end{aligned}$$

Z (5.20) vidíme, že všechny kořeny rovnice

$$\zeta^3 + \zeta^2 - 2\zeta - 1 = 0 \tag{5.21}$$

jsou reálné a že jsou rovny dvojnásobku společné reálné části dvou konjugátů komplexních řešení (5.18). Tím pádem je možné najít šest komplexních kořenů (5.18) v komplexní rovině nalezením kořenů (5.21), jejich vydělením dvěma, nalezením přímk rovnooběžných s imaginární osou v přesně těchto vzdálenostech od ní a nakonec nalezením průsečíků těchto rovnooběžek s jednotkovou kružnicí.

Uvažujme, že v prvním kroku skládání jsme vytvořili přehyby představující osy x a y systému kartézských souřadnic, přičemž délka hrany papíru jsou čtyři jednotky. Počátek

je tedy střed čtverce $S [0, 0]$ a konečné body ohybů mají souřadnice $[-2, 0]$, $[2, 0]$, $[0, 2]$ a $[0, -2]$.

Řešení (5.21) tedy získáme nalezením společné tečny parabol s ohnisky

$$F_1 [-1, -1] \quad \text{a} \quad F_2 \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

a řídicími přímkami

$$l_1 : x = 0 \quad \text{a} \quad l_2 : y = -\frac{1}{2}.$$

Vzhledem k tomu, že sklon společné tečny se nezmění při posunutí parabol rovnoběžně s osou y , můžeme výhodně použít

$$F_1 \left[-1, -\frac{1}{2}\right] \quad \text{a} \quad F_2 [0, 1]$$

a

$$l_1 : x = 0 \quad \text{a} \quad l_2 : y = 0.$$

Tohle přesně jsme udělali ve 3. kroku skládání. Bod F_1 je A , bod F_2 je B . Přehyb, který vytvoříme, je pak jediná společná tečna parabol s kladným sklonem, a tedy dvojnásobek reálné části řešení (5.18) ležících vpravo od osy y nerovnajících se 1. Jinými slovy sklon tohoto ohybu je roven $2 \cdot \cos \frac{2\pi}{7}$.

V krocích 4-6 je pak délka jednotky převedena tak, že E v kroku 6 má y souřadnici $-2 \cdot \cos \frac{2\pi}{7}$. Jelikož v kroku 7 je bod z_1 vzdálen od S 2 jednotky, jsou i body z_2 a z_7 vzdáleny od S také o 2 jednotky, body z_7, z_1, z_2 tedy tvoří 3 po sobě jdoucí vrcholy sedmiúhelníku. Dalším krokem složíme první 2 strany sedmiúhelníku a v následujících dvou krocích využíváme jeho souměrností k vytvoření zbylých stran. \square

Kapitola 6

Využití origami

Origami však není významné pouze v rámci matematiky, ale má své využití i v jiných vědách, vesmíru, lékařství a podobně. Pojdme se nyní podívat na některé příklady.

6.1 Miura-Ori

Japonský astrofyzik Koryo Miura vymyslel metodu skládání, která nám umožňuje složit objekty velkých rozměrů do pouhého zlomku jejich velikosti a následně je jedním pohybem opět rozložit. To bylo uplatněno v roce 1995, kdy byl přesně takto složen na zemi solární panel, v této podobě přepraven do vesmíru a opět rozložen do své původní velikosti na japonské družici Space Flyer Unit. Metoda se podle svého objevitele nazývá Miura-Ori.

6.2 Vesmírný teleskop

Abychom zlepšili kvalitu výsledků pozorování, musíme zvětšit rozměry teleskopu. Inženýři v Národní laboratoři v Livermore vymysleli teleskop, o průměru 100 metrů a nazvali ho „Eyeglass“. Bylo potřeba ho dostat na geosynchronní dráhu do výšky 40 000 kilometrů. Pro jeho transportaci je však nutné ho několikanásobně zmenšit. Oslovili tedy jednoho z nejznámějších současných origamistů Roberta Langa a společně vyvinuli způsob, který umožní složení jakéhokoliv rovného prstence nebo disku do úhledného kompaktního válce. To použili na první prototyp, kdy byl zkonstruován 5 metrový teleskop složitelný do 1,5 metrového válce. V budoucnosti však bude možné díky origami vyslat i Eyeglass.

6.3 Stent

Stále tu řešíme problém něčeho, co musí být velké v cílové poloze, ale malé na cestu. Tento princip funguje, ať se potřebujeme dostat do vesmíru nebo do lidského těla. Zhong You a Kaoru Kuribayashi z Oxforské univerzity vynalezli trubičku, takzvaný stent, která v místě určení drží zanesenou či ucpanou tepnu otevřenou, ale na cestu cévami musí být menší, což je díky origami možné.

6.4 Airbagy

Designéři airbagů řeší, jak umístit ploché věci do malých prostorů. Ukázalo se, že jeden Langův origami algoritmus nachází uplatnění při počítačových simulacích rozložení airbagu.

Kapitola 7

Závěr

Jak jste si mohli přečíst, origami není pouhé skládání z papíru, ale jde o obor, který by neměl být vědci opomenut.

V naší práci jsme ukázaly, co vše jsou sestrojitelná čísla pomocí prvních pěti axiomů. Tedy, že s každým sestrojitelným číslem α jsme schopni sestrojiti i $\sqrt{1 + \alpha^2}$.

Také jsme popsaly několik zajímavých konstrukcí, které jsou ilustrací, že origami geometrie je silnější než geometrie eukleidovská. Jako jsou například dva ze tří antických problémů nebo velice podstatné kubické rovnice.

V příloze jsme vyfotily i několik z našich poskládaných modelů.

Origami jsme schopni uplatnit nejen v matematice, ale najdeme využití taktéž v lékařství, při dopravování solárních panelů do vesmíru nebo při designu airbagů.

Nicméně věříme, že i tak jsme čtenáře přesvědčily, že origami není jen dětskou skládkou, ale že je za ním skryto mnoho matematiky a dalších vědních disciplín.

Literatura

- [1] YIN, Sheri. The Mathematics of Origami (2009)
- [2] ROSICKÝ, Jiří. Algebra. *Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta, Brno* (2007)
- [3] AUCKLY, D., and CLEVELAND, J. Totally real origami and impossible paper folding. *American Mathematics Monthly* 102 (1995), 215 – 226
- [4] LEE, Hwa Young. Origami-constructible numbers. *The University of Georgia* (2017)
- [5] LANG, Robert J. Origami and Geometric Constructions (2010)
- [6] GERETSCHLÄGER, Robert. Folding the Regular Heptagon. *Cruz Mathematicorum Vol. 23 No. 2* (1997)
- [7] HIRAOKA, Kenji and Laura KOKOT: Trisection an Angle and Doubling the Cube Using Origami Method (2016)
- [8] LIAW, Constanze. Transcendence of e and π (2006)
- [9] <https://langorigami.com/>
- [10] <https://plus.maths.org/>

Kapitola 8

Přílohy

