

# STŘEDOŠKOLSKÁ ODBORNÁ ČINNOST

Obor č. 2: Fyzika

## Oscilační módy buzeného nelineárního oscilátoru

Pavel Štěpánek  
Moravskoslezský kraj

Opava, 2018

# STŘEDOŠKOLSKÁ ODBORNÁ ČINNOST

Obor č. 2: Fyzika

**Oscilační módy buzeného nelineárního oscilátoru**

**Modes of Oscillation of Driven Nonlinear Oscillator**

**Autor:** Pavel Štěpánek

**Škola:** Mendelovo gymnázium, Opava, příspěvková organizace

**Kraj:** Moravskoslezský kraj

## Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou práci SOČ vypracoval/a samostatně a použil/a jsem pouze prameny a literaturu uvedené v seznamu bibliografických záznamů.

Prohlašuji, že tištěná verze a elektronická verze soutěžní práce SOČ jsou shodné.

Nemám závažný důvod proti zpřístupňování této práce v souladu se zákonem č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon) ve znění pozdějších předpisů.

V Opavě dne 18. 3. 2018

.....

Pavel Štěpánek

## Poděkování

Tuto práci píšu na samém konci střední školy. Vnímám ji tak trošku jako dlouhý dopis na rozloučenou. Čtyři roky jsem se na gymnáziu zabýval fyzikou a v neposlední řadě kyvadly – netuším proč, nějak mi přirostla k srdci...

Chtěl bych poděkovat celé řadě lidí, kteří mne něco naučili a motivovali mne. Děkuji panu Pavlu Gavendovi, který byl mým učitelem ještě na základní škole, v té době mne začala fyzika opravdu bavit. Velké díky rodině za pomoc a pochopení a přátelům za celé to krásné období bezstarostného středoškolského bádání ve fyzikální laboratoři.

Chtěl bych poděkovat vyučujícím fyziky u nás na MGO, se kterými jsem se setkával a kteří naše aktivity v laboratoři velkoryse tolerovali – paní Monice Klapkové, která považuje tajemství fyziky za něco doopravdy krásného, paní Daně Černínové, jejíž zapálení pro věc a temperament jsou zkrátka nepopsatelné, panu Milanu Kořínkovi, v jehož hodinách se nenuceně setkává fyzika a filozofie a samozřejmě své třídní, paní Dáše Zemkové, okouzující ženě neuvěřitelného nadhledu a pochopení.

Chtěl bych poděkovat prof. Tomáši Opatrnému z Univerzity Palackého, mimořádnému člověku, který mne spoustu věcí naučil a konečně – panu řediteli Petru Pavlíčkovi, na kterého budu s láskou vzpomínat, nejen jako na ikonu Mendelova gymnázia v požehnaném období školy, které jsem ještě stihl zažít, ale rovněž jako na člověka nesmírně vtipného, ochotného a laskavého.

Mohl bych jmenovat dál – děkuji, děkuji, děkuji.

A teď fyzika.

V Opavě dne 21. ledna 2018

## Anotace

V této práci se zabývám odlišnými typy chování, které vykazuje slabě tlumený nelineární oscilátor při buzení periodickou silou, konkrétně fyzikální kyvadlo. Předpokládané chování kyvadla v různých režimech potvrzují numerickým řešením diferenciálních rovnic, které pohyb kyvadla popisují, a výsledky experimentu.

Oproti prostudované literatuře přináším navíc bližší popis toho, jak konkrétně se kyvadlo chová v různých oblastech rezonanční křivky, jaká je vazba mezi kyvadlem a buzením, dále přináším řadu specifických grafů, které chování buzeného kyvadla popisují, např. plošnou rezonanční mapu. Diferenciální rovnice řeším ve vlastních skriptech v jazyce Python, mohu tedy na základě mnohačetných simulací zobrazit prakticky libovolnou závislost.

Teoretické výsledky porovnávám s experimentem. Nelineárním oscilátorem je zde fyzikální kyvadlo s vlastní periodou kolem frekvencí kolem 0,7 Hz, kyvadlo je buzeno DC motorem ovládaným Arduinem. Shoda numerických řešení a experimentu je vynikající.

## Klíčová slova

nelineární oscilátor, buzené kmity, rezonance, vazba, fyzikální kyvadlo, oscilační módy

## Annotation

In this paper I study different types of behaviour of driven nonlinear oscillator (specifically physical pendulum), which is driven by periodic force. The assumed behaviour of pendulum in different regimes is confirmed by numerical solutions of differential equations, describing the pendulum movement, and by results of experimental data.

Beside the studied literature, in this work there is a closer description of how pendulum behaves in different areas of resonance curve, what coupling is observed between pendulum and driving force. Furthermore, there are many specific graphs describing the pendulum behaviour, e. g. maps of resonance. The ODEs are solved in own easily modifiable scripts written in Python language, therefore it is possible to show essentially every dependence of parameters.

The theoretical results are compared to the experiment (nonlinear physical pendulum with natural frequency about 0.7 Hz driven by DC motor and Arduino). The agreement between theoretical solution and experiment is very good.

## Keywords

nonlinear oscillator, driven oscillations, resonance, coupling, physical pendulum, modes of oscillation

# Obsah

1	Úvod.....	6
2	Matematický rozbor .....	7
2.1	Elementární fyzikální rozbor.....	7
2.2	Tlumení kmitů .....	7
2.3	Buzení kyvadla.....	8
2.4	Konkrétní numerická řešení pro jednoduché kyvadlo .....	9
2.5	Mechanické nelineární oscilátory v literatuře.....	11
2.6	Numerická řešení.....	13
3	Oscilační módy nelineárního oscilátoru .....	14
3.1	2D „rezonanční mapy“ .....	14
3.2	Oscilační módy.....	15
3.3	Bližší popis oscilačních módů.....	17
3.4	Mód harmonizace vysokou amplitudou – mód 4.....	20
3.5	Jak je možné, že dochází k harmonizaci.....	22
3.6	Frekvence a amplituda kmitů v oscilačním módu 4 .....	24
3.7	Harmonizace kyvadla a buzení.....	26
3.8	Hranice mezi módem 1 a 4.....	27
3.9	Oscilační mód 4 a práce Danila Doubochinského .....	28
3.10	Vliv odporových sil.....	29
3.11	Diskuse .....	30
4	Experiment.....	31
4.1	Experimentální aparatura.....	31
4.2	Lehké kyvadlo.....	31
4.3	PASCO senzor rotace .....	31
4.4	Motor.....	32
4.5	Odporové síly, tlumení kyvadla, finální diferenciální rovnice .....	34
5	Shoda numerických řešení a experimentu.....	36
5.1	Diferenciální rovnice pro pohyb kyvadla a její finální znění .....	36
5.2	Konkrétní ukázka shody experimentu a numerického řešení .....	36
5.3	Kritická amplituda.....	39
5.4	Rezonanční křivka.....	40
6	Závěr .....	43
7	Reference .....	44

# 1 ÚVOD

Pojmy kmitání a vlnění jsou ve velké míře zastoupeny nejspíše ve všech myslitelných oblastech fyziky – kmity a vlny jsou snad určitým způsobem fundamentálním jevem našeho vesmíru. Kmity a vlny jsou na mnoha úrovních v pozorovatelném vesmíru všudypřítomné.

Zdá se, že i v oblasti klasické mechaniky stále existují jevy, které stojí za to studovat. Domnívám se, že právě specifické chování nelineárních oscilátorů by mohl být jeden z nich.

V rámci své práce se zabývám chováním buzeného nelineárního oscilátoru, konkrétně chováním buzeného fyzikálního kyvadla s velkým rozkmitem. Domnívám se, že jsem pozoroval několik odlišných oscilačních módů, které jsou mezi sebou dobře rozlišitelné.

Při jednom z těchto módů dochází k zvláštní harmonizaci kyvadla a periodické budící síly. Jak je známo, frekvence nelineárního oscilátoru závisí na amplitudě kmitů. Zdá se, že kyvadlo směřuje vždy k takovému kmitání, aby bylo v rezonanci s frekvencí zdroje – za podmínky, že je budící síla dostatečně velká.

Kyvadlo má tendenci „naladit se“ na frekvenci buzení, je-li frekvence buzení dosažitelná při určité amplitudě kmitů kyvadla.

**matematické kyvadlo** v této práci označuje hmotný bod na nehmotném závěsu o určité délce, k žádné další aproximaci nedochází – tedy i matematické kyvadlo se může chovat jako nelineární oscilátor při velkém rozkmitu

**fyzikální kyvadlo** v této práci označuje reálné kyvadlo, kdy těžiště neleží na volném konci kyvadla a závěs kyvadla není nehmotný

**oscilační mód** v této práci označuje režim kmitů, který je popsitelný, pozorovatelný a odlišitelný od ostatních

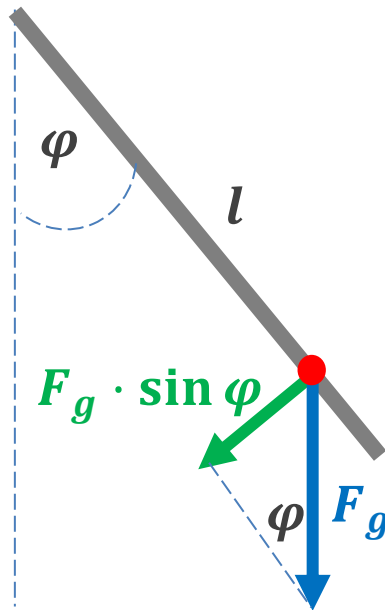
## 2 MATEMATICKÝ ROZBOR

### 2.1 Elementární fyzikální rozbor

Matematický popis fyzikálního kyvadla je dobře známý a poměrně jednoduchý.

Dle zákona síly, úhlové zrychlení je dáno podílem momentu síly a momentu setrvačnosti. Vychýlení kyvadla je vyjádřeno úhlem  $\varphi$ , zrychlení kyvadla je tedy druhou derivací úhlu  $\varphi$  podle času.

Těžiště kyvadla je ve vzdálenosti  $l$  od osy otáčení,  $m$  je hmotnost kyvadla a  $g$  je tíhové zrychlení.



Obrázek 1

Moment síly:  $M = mg \cdot \sin \varphi \cdot l$

Moment setrvačnosti necht' je značen  $J$ .

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi} = -\frac{mgl}{J} \sin \varphi \quad [1]$$

Znaménko minus na pravé straně se objevuje v důsledku toho, že vektor zrychlení působí „proti“ okamžité výchylce.

### 2.2 Tlumení kmitů

Rovnice [1] je diferenciální rovnicí popisující netlumené a nebuzené kmity fyzikálního kyvadla. Vzhledem k tomu, že počítáme s velkým úhlovým rozkmitem, není možné nahradit sinus lineární funkcí a tato rovnice je tedy řešitelná analyticky poměrně obtížně (1), přičemž se nabízí alternativa v podobě řešení numerického.

Dalším krokem bude popsání odporových sil, v prvním přiblížení se nabízí klasický popis známý z rovnic pro tlumený harmonický oscilátor, kde je intenzita tlumení přímo úměrná rychlosti, v tomto případě úhlové rychlosti, tj. první derivaci úhlu podle času, tedy



$$\ddot{\varphi} = -c\dot{\varphi} - \frac{mgl}{J}\sin\varphi \quad [2]$$

$c$  necht' je konstantou

Abychom vztah [3] zpřehlednili a zjednodušili, provedeme substituci

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{J}}$$

a konstantu  $c$  vyjádříme analogicky jako v rovnici klasického tlumeného harmonického oscilátoru.

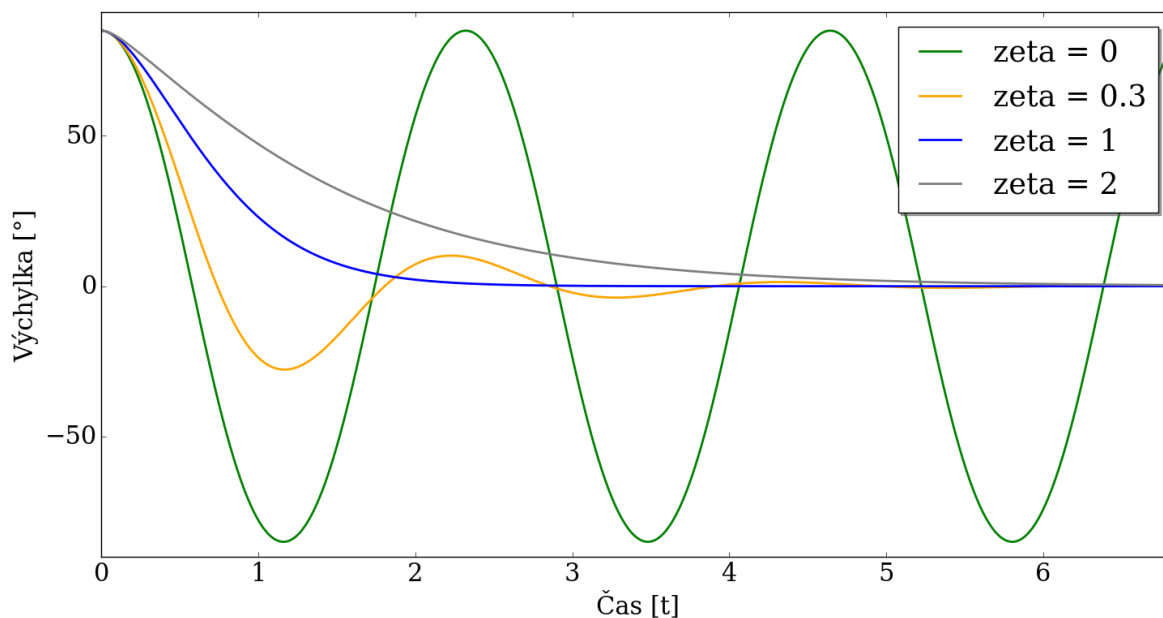
$$c = 2\zeta\omega_0$$

Získáváme následující rovnici:

$$\ddot{\varphi} = -2\zeta\omega_0\dot{\varphi} - \omega_0^2\sin\varphi \quad [3]$$

Graf 1 ukazuje tlumené kmity kyvadla (1 m dlouhé matematické kyvadlo, počáteční výchylka 85°) v závislosti na stupni tlumení, je-li  $\zeta = 0$ , pozorujeme netlumené kmity, je-li  $\zeta < 1$ , zaznamenáváme tlumené kmity, při  $\zeta = 1$  hovoříme o kritickém tlumení.

Graf 1 – kmitání kyvadla v závislosti na stupni tlumení



### 2.3 Buzení kyvadla

Diferenciální rovnici [4] nyní rozšíříme o člen buzení – prozatím uvažujme buzení jednoduchou periodickou funkcí, jako je *sin* nebo *cos*.

$$\ddot{\varphi} = -2\zeta\omega_0\dot{\varphi} - \omega_0^2 \sin \varphi - A \sin \omega t \quad [4]$$

Výraz  $A \sin \omega t$  představuje periodické buzení o amplitudě  $A$  a úhlové frekvenci  $\omega$ , znaménko před tímto členem není rozhodující, ovlivňuje pouze, zda periodické buzení začne působit v kladném nebo záporném směru.

Finální zápis diferenciální rovnice bude následující:

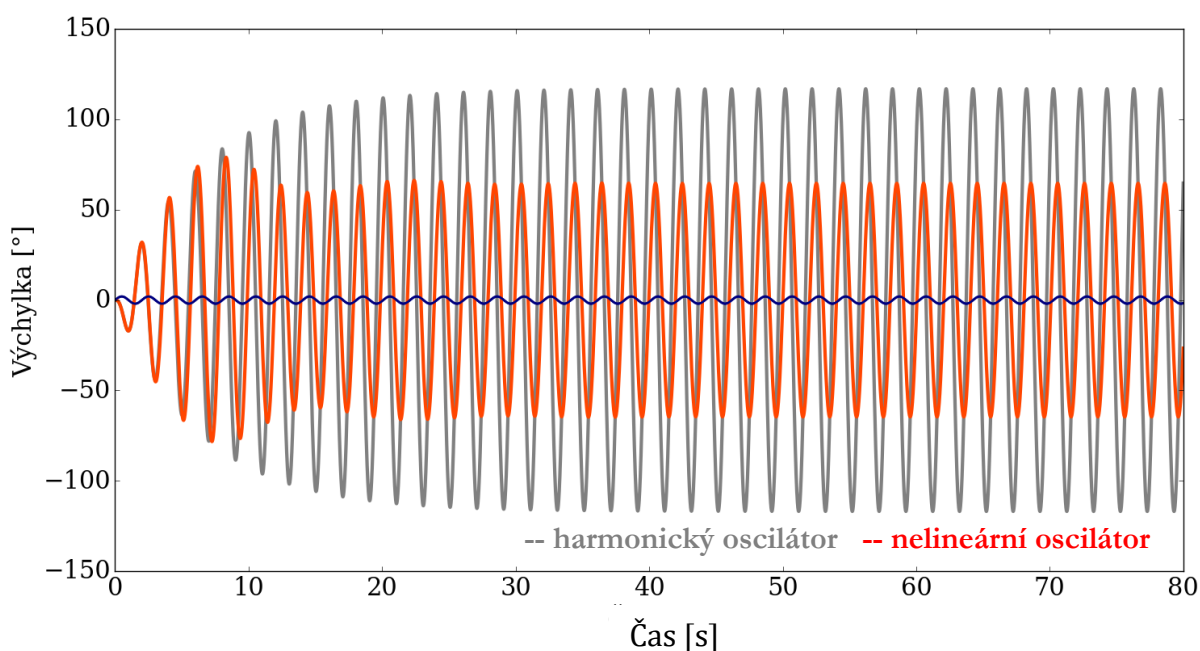
$$\ddot{\varphi} + 2\zeta\omega_0\dot{\varphi} + \omega_0^2 \sin \varphi + A \sin \omega t = 0 \quad [5]$$

Tato rovnice je řešitelná numericky.

## 2.4 Konkrétní numerická řešení pro jednoduché kyvadlo

Níže zobrazíme několik numerických řešení rovnice [5], pro názornost pro buzené **1 m dlouhé „matematické“ kyvadlo** (ve smyslu - veškerá hmotnost je v bodě 1 m vzdáleném od osy otáčení). Vlastní frekvence takového kyvadla pro malé výchylky je přibližně 0.498 Hz, tj. vlastní perioda kolem 2 s.

Graf 2 – chování harmonického a nelineárního oscilátoru



**Oranžová křivka** v grafu 2 reprezentuje numerické řešení této diferenciální rovnice pro konstanty  $\varphi_0 = 0$ ,  $\zeta = 0.05$ ,  $A = 2$ ,  $\omega = \omega_0 \cong 2\pi \cdot 0.498$  (kyvadlo je na počátku v klidové poloze, vlivem budící síly je uvedeno do pohybu). Modrá křivka znázorňuje buzení (pouze kvalitativně).

**Šedá křivka** je numerické řešení s naprosto stejnými počátečními podmínkami jako u červené křivky, ovšem po linearizaci řešené diferenciální rovnice [5] (nahrazení sinu lineární funkcí) –  $\omega_0^2 \sin \varphi \approx \omega_0^2 \varphi$ . Oranžová křivka tedy symbolizuje rozkmitání kyvadla z klidové polohy za předpokladu, že by se kyvadlo chovalo jako harmonický oscilátor.

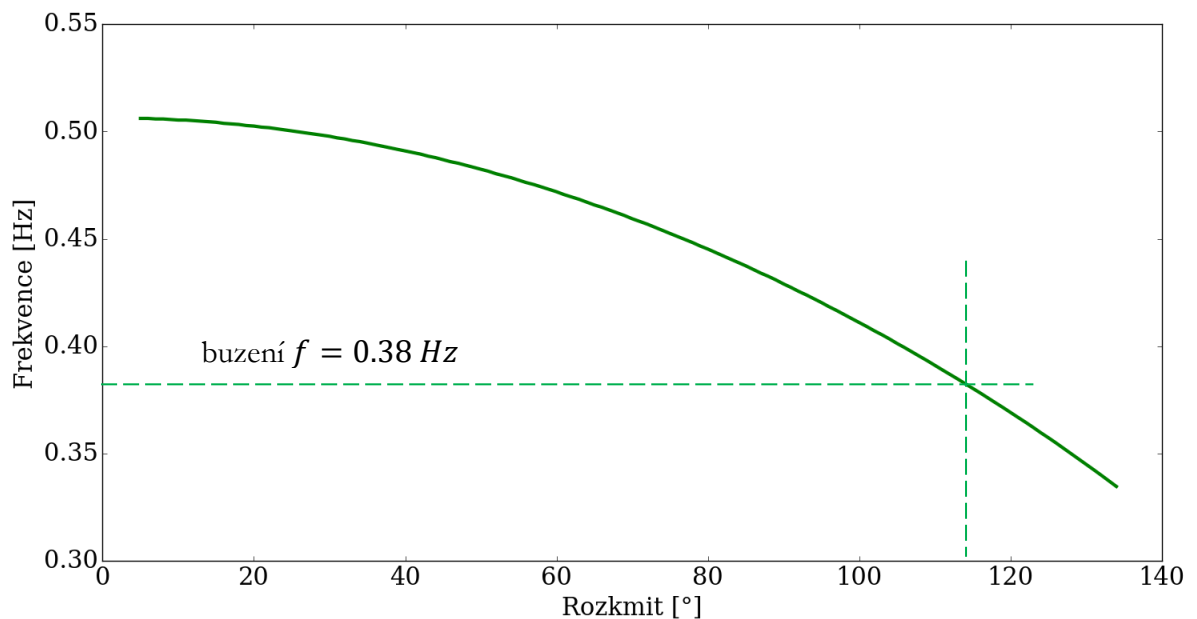
Rozdíly mezi **šedou** (harmonický oscilátor) a **oranžovou** křivkou (neharmonický oscilátor), jsou jasně patrné.

Jak je zřejmé, harmonický oscilátor (šedá křivka) dosáhl při buzení o své vlastní frekvenci (frekvence buzení a vlastní frekvence kmitů byla ekvivalentní) **vyšší amplitudy**, vyšší amplitudy, než jaké v tomto konkrétním případě dosahuje oscilátor nelineární, tj. reálné kyvadlo. Tato skutečnost má jednoduché vysvětlení – frekvence harmonického oscilátoru nijak nezávisí na amplitudě – jeho vlastní frekvence je stejná i při vysoké amplitudě. Oproti tomu vlastní frekvence nelineárního oscilátoru závisí na rozkmitu (amplitudě) – jeho amplituda je tedy v tomto případě nižší, aby zůstala zachována rezonance (poměr vlastní a budící frekvence 1:1).

Podívejme se na porovnání reálného kyvadla a analogického harmonického oscilátoru ještě v dalším případě. Opět rozkmitáme kyvadlo i analogický harmonický oscilátor z klidové polohy externí periodickou silou, ovšem lehce snížíme frekvenci buzení.

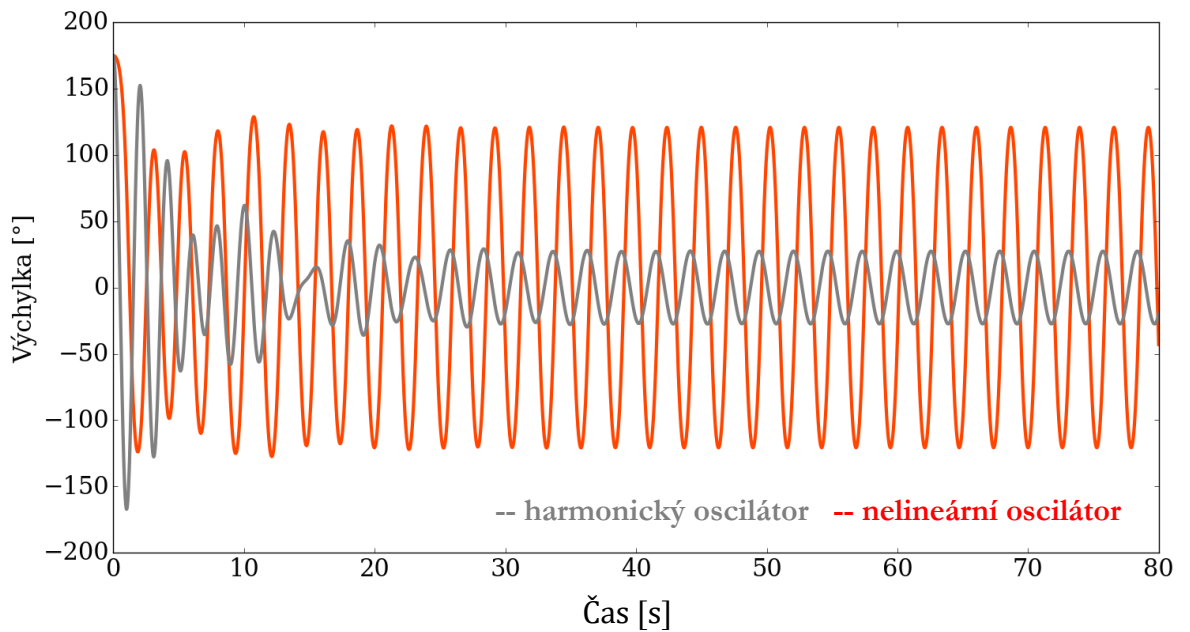
Pro tento názorný ilustrační příklad **1m dlouhého kyvadla s těžištěm na volném konci** je závislost vlastní frekvence na úhlovém rozkmitu následující (bez odporových jevů):

Graf 3 – závislost vlastní frekvence kyvadla na úhlovém rozkmitu



Jak je zřejmé, vlastní frekvence reálného kyvadla klesá s úhlovým rozkmitem. Není tedy překvapující, že pokud vytvoříme další numerické řešení (graf 3) **pro stejné počáteční podmínky**  $\varphi_0 = 0$ ,  $\zeta = 0.05$ ,  $A = 2$  s o **něco nižší frekvenci buzení** - 0.42 Hz -  $\omega = 2\pi \cdot 0.42$  - **oproti původní frekvenci 0.498 Hz**, bude frekvence nelineárního oscilátoru – tj. kyvadla vyšší, než frekvence analogického harmonického oscilátoru. Dle grafu 3 klesá vlastní frekvence kyvadla s rozkmitem, kyvadlo (šedá křivka) tedy osciluje na vyšší amplitudě, neboť jsme snížili frekvenci buzení a systém má tendenci zůstat v rezonanci.

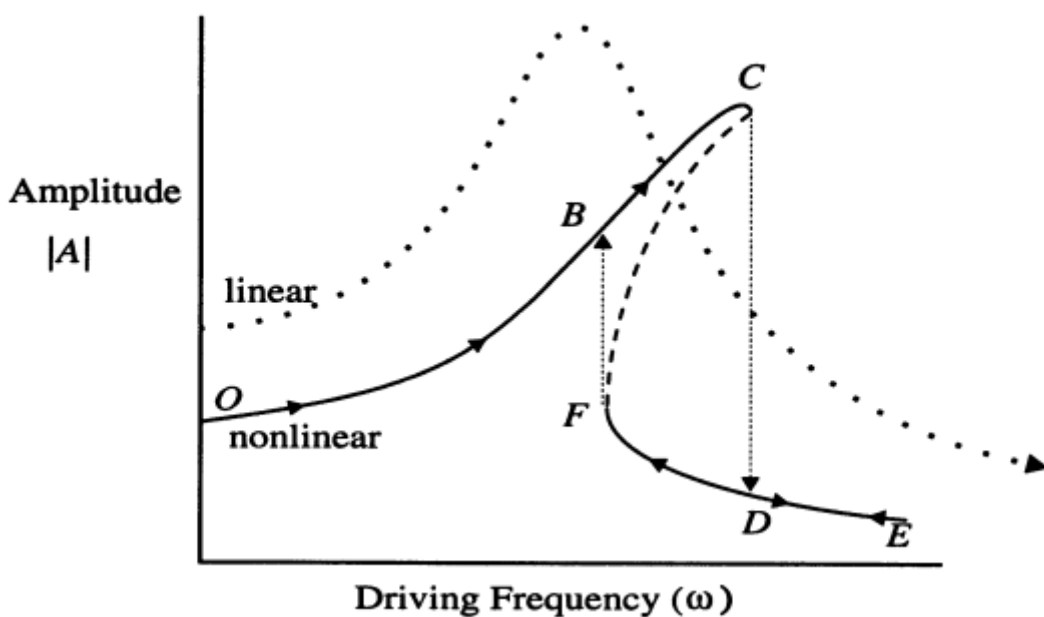
Graf 4 - chování harmonického a nelineárního oscilátoru, buzení 0.38 Hz



Podíváme-li se na amplitudu kyvadla po ustálení, pohybuje se kolem hodnoty  $120^\circ$ , při takovéto amplitudě by dle grafu 3 mělo kyvadlo přirozeně kmitat na stejné frekvenci, jako je nyní frekvence buzení (v tomto případě 0,38 Hz). Kyvadlo zůstává vůči budící síle v rezonanci právě díky tomu, že přizpůsobilo svoji amplitudu změnou úhlového rozkmitu.

## 2.5 Mechanické nelineární oscilátory v literatuře

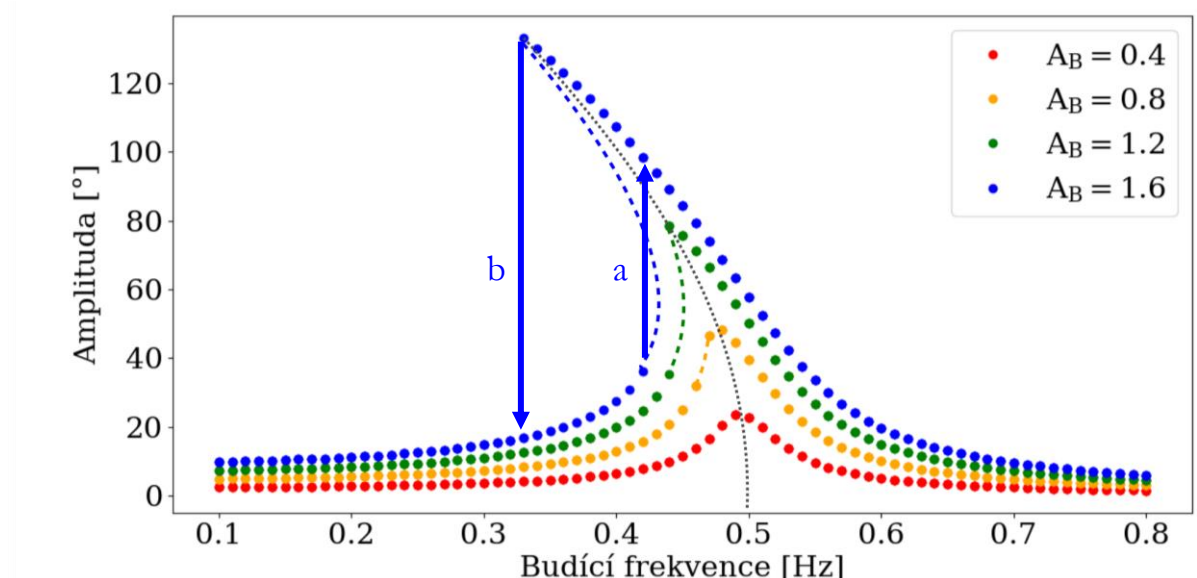
Resonanční křivka nelineárního oscilátoru je dobře známá, díky svému excentrickému tvaru je nazývána v anglickojazyčné literatuře jako *foldover* efekt (2).



Pík běžné rezonanční křivky se nachází na vlastní frekvenci harmonického oscilátoru. Pík rezonanční křivky nelineárního oscilátoru se nenachází na vlastní frekvenci, ale v její těsné blízkosti. Podobnou rezonanční křivku můžeme vytvořit pro fyzikální kyvadlo z diferenciální rovnice [5]

Rezonanční křivka pro buzené tlumené kyvadlo ( $f_0 = 0,5$  Hz) vypadá následovně:

Graf 5 – rezonanční křivka pro kyvadlo



Plné body vznikly numerickým řešením diferenciální rovnice [5], pro každou amplitudu buzení pro různé počáteční výchylky ( $\zeta = 0.05$ ,  $\omega_0 = 2\pi \cdot 0.498$ ). Pro frekvence o něco nižší než  $f_0$  může kyvadlo kmitat buď na nízké, nebo naopak velice vysoké amplitudě. Možným logickým vysvětlením je právě to, že se kyvadlo vysokou amplitudou „naladí“ na frekvenci buzení.

Pokud budeme budit kyvadlo z klidové polohy nízkou frekvencí, kterou budeme postupně zvyšovat, bude se zvyšovat amplituda kmitů dle rezonanční křivky, až přeskóčí (a) do jiného „módu“ a začne při dalším zvyšování budící frekvence postupně opět klesat. Začneme-li s vysokou budící frekvencí, kterou budeme postupně snižovat, dostaneme se do oblasti vysoké amplitudy a po překročení jisté kritické frekvence se amplituda kyvadla prudce sníží (b) a bude se dále lehce snižovat.

V odborných člancích k tématu se velice často uvádí výše uvedené rezonanční křivky, zdá se ale, že tato práce může blíže objasnit, jak se konkrétně kyvadlo v různých oblastech křivky chová, jaká je jeho odezva na buzení apod. Podobnému tématu se věnuje článek Extraordinary oscillations of an ordinary driven pendulum (Neobvyklé oscilace obvykle buzeného kyvadla) (3) otištěný v European Journal of Physics, který popisuje určité typy chování kyvadla, rovněž popisované v této práci. Pojem „mód“ se v tomto článku objevuje v podobném významu jako v této práci.

Další článek, který popisuje odlišné typy chování kyvadla, je eprint z databáze arXiv: Resonance oscillation of a damped driven simple pendulum, který namísto pojmu „mód“ používá pojem „stav“.

Zajímavých výsledků s nelineárním oscilátorem dosáhl také Doubochinski, který budil kyvadlo vysokou frekvencí, přičemž budící síly na kyvadlo působí jen v blízkosti klidové výchylky ( $0^\circ$ ). Amplituda kyvadla se poté „kvantuje“, aby zůstal zachován určitý frekvenční poměr mezi frekvencí buzení a frekvencí kyvadla.

## 2.6 Numerická řešení

V případě této práce numericky řešíme obyčejné diferenciální rovnice, nevyskytují se zde v žádné podobě parciální derivace, volíme tedy jednu z klasických numerických metod.

Nabízí se možnost využít jednu z numerických metod vyššího řádu (metody Runge-Kutta, RK4, ...), které jsou nejvhodnější v poměru **chyba řešení – zvolený časový krok** (je možné získat velice přesné řešení i pro poměrně velký časový krok).

Diferenciální rovnice uvedené v této práci se ovšem jeví jako nenáročné z hlediska volby numerické metody (nejeví zvláštní citlivost na počáteční podmínky, chyba řešení se v průběhu simulace viditelně nezvyšuje), volíme tedy klasickou Eulerovu metodu s konstantním časovým krokem ( $\Delta t = 0,001$  s), která je přehledná, srozumitelná a umožňuje snadné pozměňování vytvořeného skriptu i rovnic.

Z diferenciální rovnice [5] si vyjádříme úhlové zrychlení následujícím způsobem:

$$\ddot{\varphi} + 2\zeta\omega_0\dot{\varphi} + \omega_0^2 \sin \varphi + A \sin \omega t = 0$$
$$\ddot{\varphi} = -2\zeta\omega_0\dot{\varphi} - \omega_0^2 \sin \varphi - A \sin \omega t$$

Následně probíhá simulace v krocích:

$$\dot{\varphi}_{n+1} = \dot{\varphi}_n + \ddot{\varphi}_n \cdot \Delta t$$
$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + \dot{\varphi}_n \cdot \Delta t$$

Jednotlivé skripty pro numerická řešení píšeme v jazyce Python 3, což umožňuje obecně mnohem širší práci s daty a zpracování teoretických i experimentálních výsledků oproti využití klasických, již vyvinutých aplikací pro numerická řešení.

Pro případné vytváření Rychlé Fourierovy transformace (FFT) používáme modul **numpy**.

### 3 OSCILAČNÍ MÓDY NELINEÁRNÍHO OSCILÁTORU

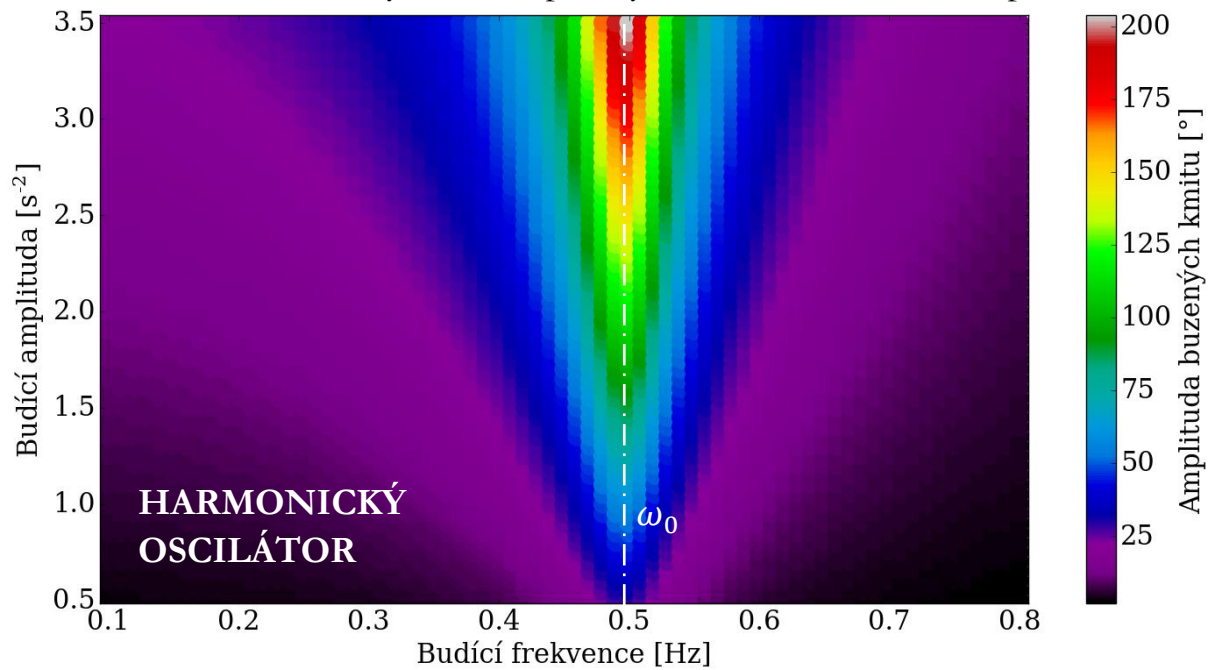
#### 3.1 2D „rezonanční mapy“

Následující barevné grafy jsou opět řešením diferenciální rovnice [5] a srovnáním harmonického a nelineárního oscilátoru, podmínky opět stejné -  $\varphi_0 = 0$ ,  $\zeta = 0.05$ ,  $\omega_0 = 2\pi \cdot 0.498$

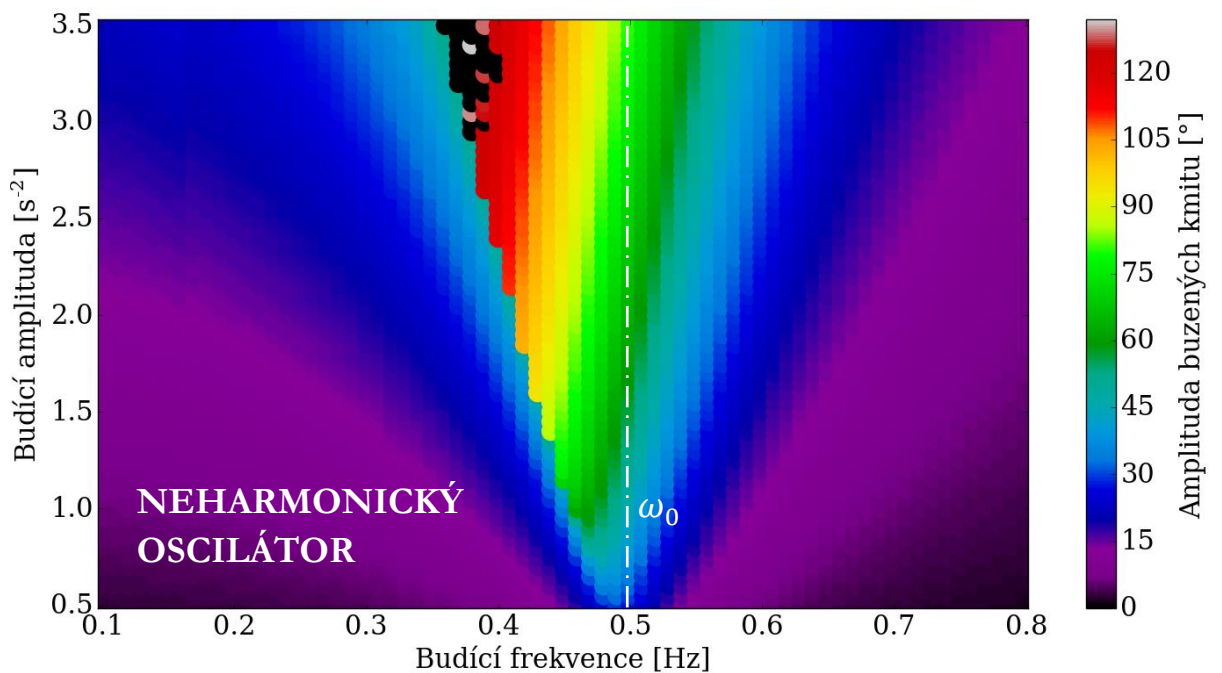
graf 6 -  $\ddot{\varphi} + 2\zeta\omega_0\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi + A \sin \omega t = 0$  – po linearizaci (harmonický oscilátor)

graf 7 -  $\ddot{\varphi} + 2\zeta\omega_0\dot{\varphi} + \omega_0^2 \sin \varphi + A \sin \omega t = 0$  – v původním znění (nelineární oscilátor)

Graf 6 – závislost výsledné amplitudy na budící frekvenci a amplitudě



Graf 7 – závislost výsledné amplitudy na budící frekvenci a amplitudě

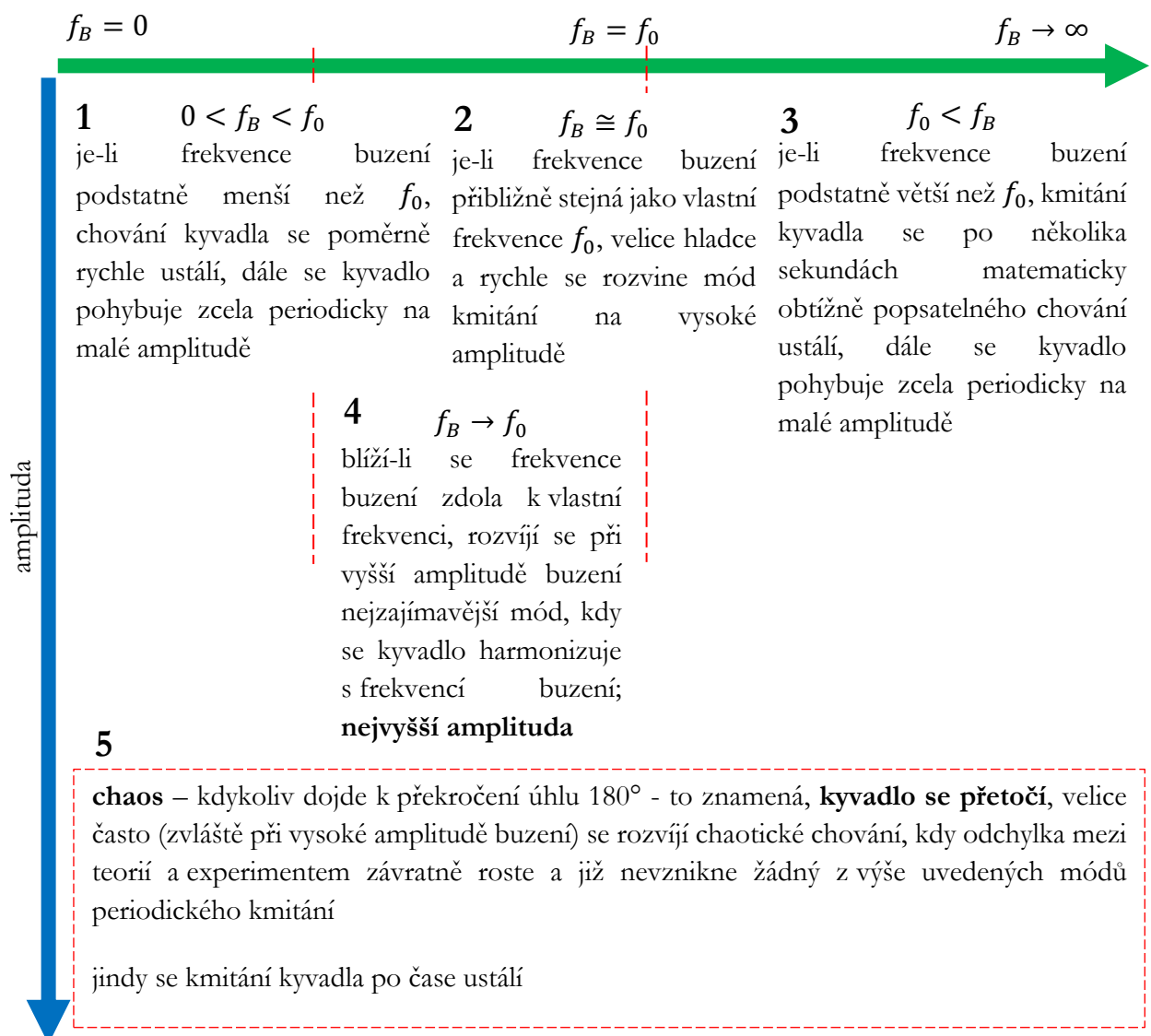


Jak je zřejmé, v **grafu 6 pro harmonický oscilátor** se objevuje obecně nejvyšší amplituda, pokud je **frekvence oscilátoru stejná jako frekvence buzení**. Harmonický oscilátor se chová perfektně podle klasické rezonanční křivky, což je i v grafu 6 dobře viditelné. Budící amplituda má fyzikální rozměr sekundy na méně druhou, jde a amplitudu zrychlení vyvolaného externí silou.

Oproti tomu v **grafu 7 se objevují nejvyšší hodnoty amplitudy** pro frekvenci buzení lehce nižší oproti  $\omega_0$ . To je možné vysvětlit tím, že „vlastní“ frekvence nelineárního oscilátoru (kyvadla) závisí na rozkmitu, viz graf 3.

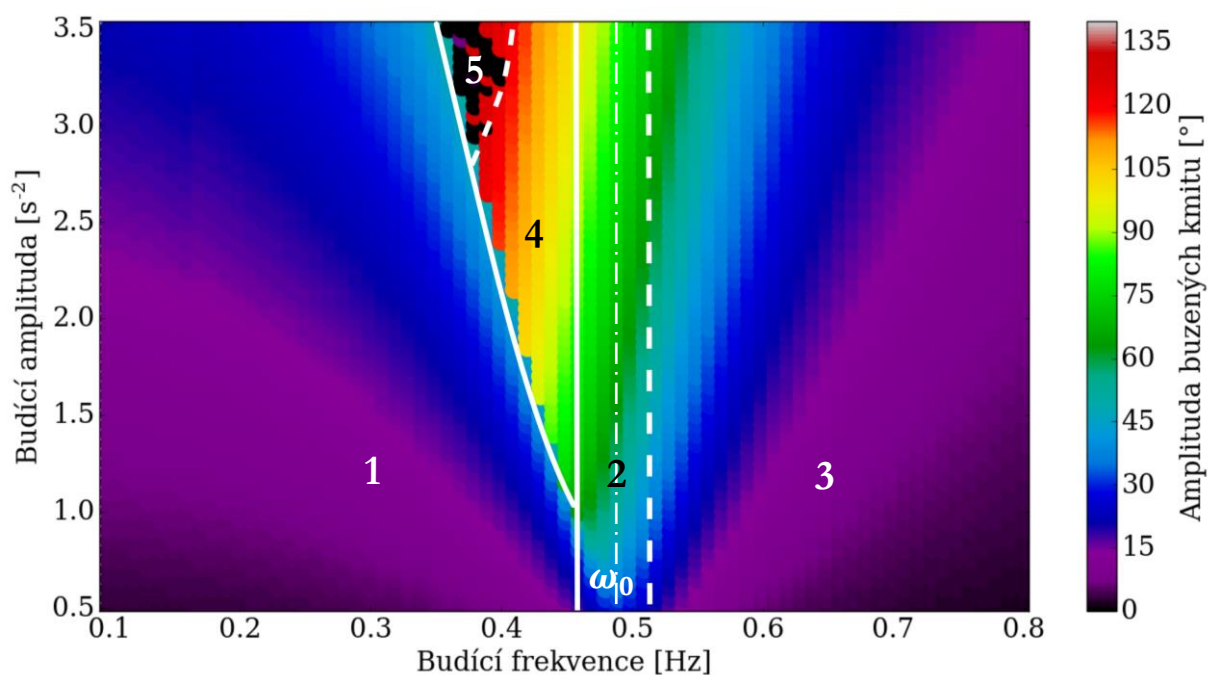
### 3.2 Oscilační módy

Dále se zdá, že **buzený nelineární oscilátor vykazuje několik konkrétních typů chování** v závislosti na budící frekvenci  $f_B$  a amplitudě  $A$ .





Graf 8 – oscilační módy



Graf 8 opět ukazuje výslednou amplitudu kmitů kyvadla po uvedení do pohybu z klidové polohy periodickou silou. Černé body znamenají, že došlo k přetočení kyvadla (viz mód 5).

Graf je mnohačetným řešením již zmíněné rovnice:  $\ddot{\varphi} + 2\zeta\omega_0\dot{\varphi} + \omega_0^2 \sin \varphi + A \sin \omega t = 0$  pro konstanty  $\varphi_0 = 0$ ,  $\zeta = 0.05$ ,  $\omega_0 = 2\pi \cdot 0.498$ .

V grafu 8 jsou oblasti, které jsou příslušné postupně všem výše popsaným oscilačním módům. Nejzajímavějším oscilačním módem je mód 4, z grafu je zřejmé, že právě v oblasti módu čtyři je amplituda nejvyšší. V této oblasti se totiž kyvadlo frekvenčně harmonizuje s frekvencí zdroje, která je nižší než jeho vlastní frekvence. Obecně lze říci, že nižších frekvencí dosahuje kyvadlo při vyšším rozkmitu – proto vysoká amplituda.

Dále se budeme jednotlivým módům věnovat podrobněji.

### 3.3 Blížeší popis oscilačních módů

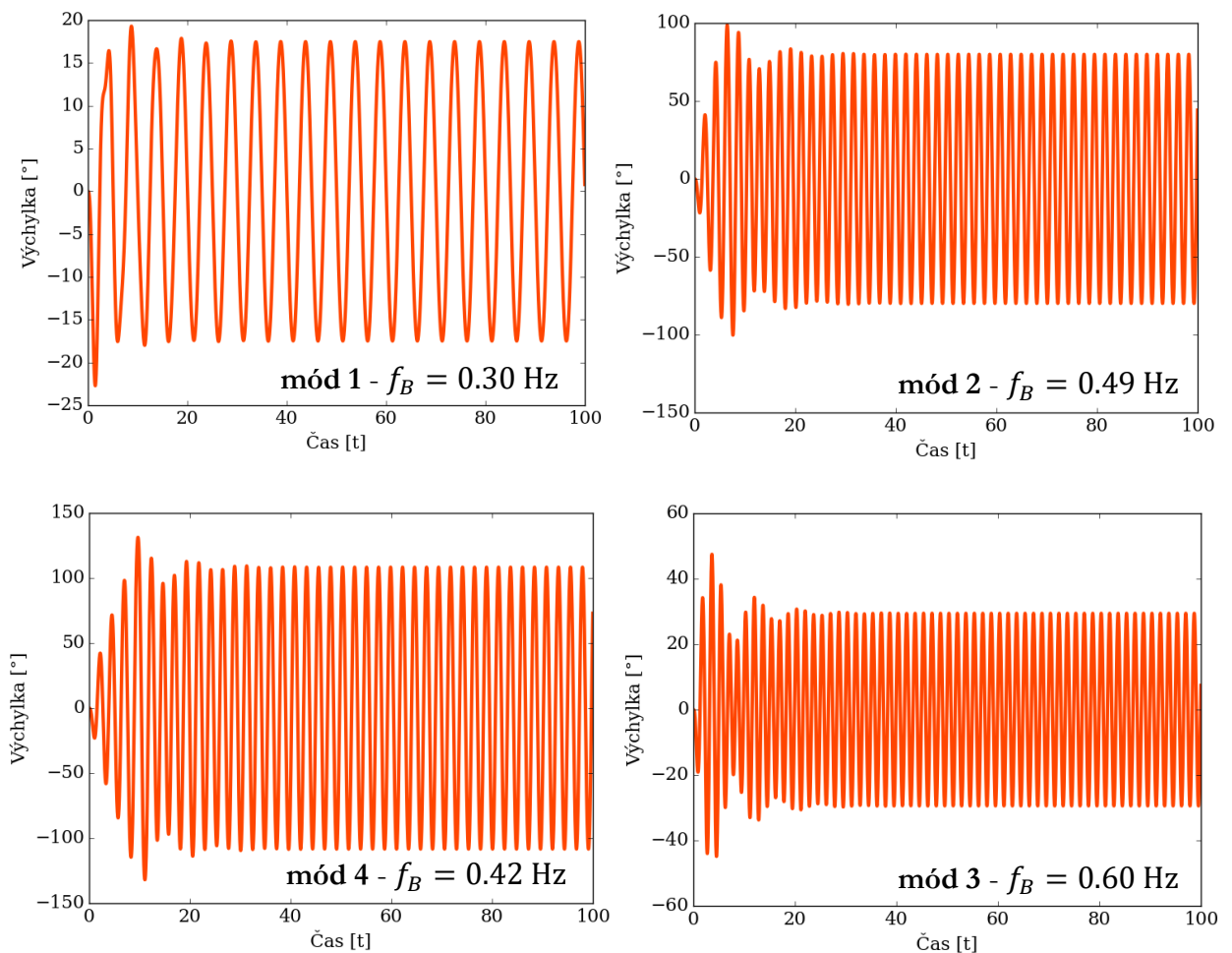
„Oscilační“ mód 5 leží mimo oblast našeho zájmu, neboť v souvislosti s tímto módem kyvadlo nevykazuje známky pravidelného periodického pohybu a specifické závislosti pohybu na buzení.

Obecně lze říci, že lze dosáhnout kteréhokoliv oscilačního módu z libovolné počáteční výchylky kyvadla v závislosti na nastavených konstantách.

Níže uvedeme důkazy, že se dané oscilační módy od sebe skutečně liší. Následující numerická řešení jsou opět jako v předchozích příkladech vytvořena pro 1 m dlouhé kyvadlo, nízké tlumení; počáteční výchylka nulová.

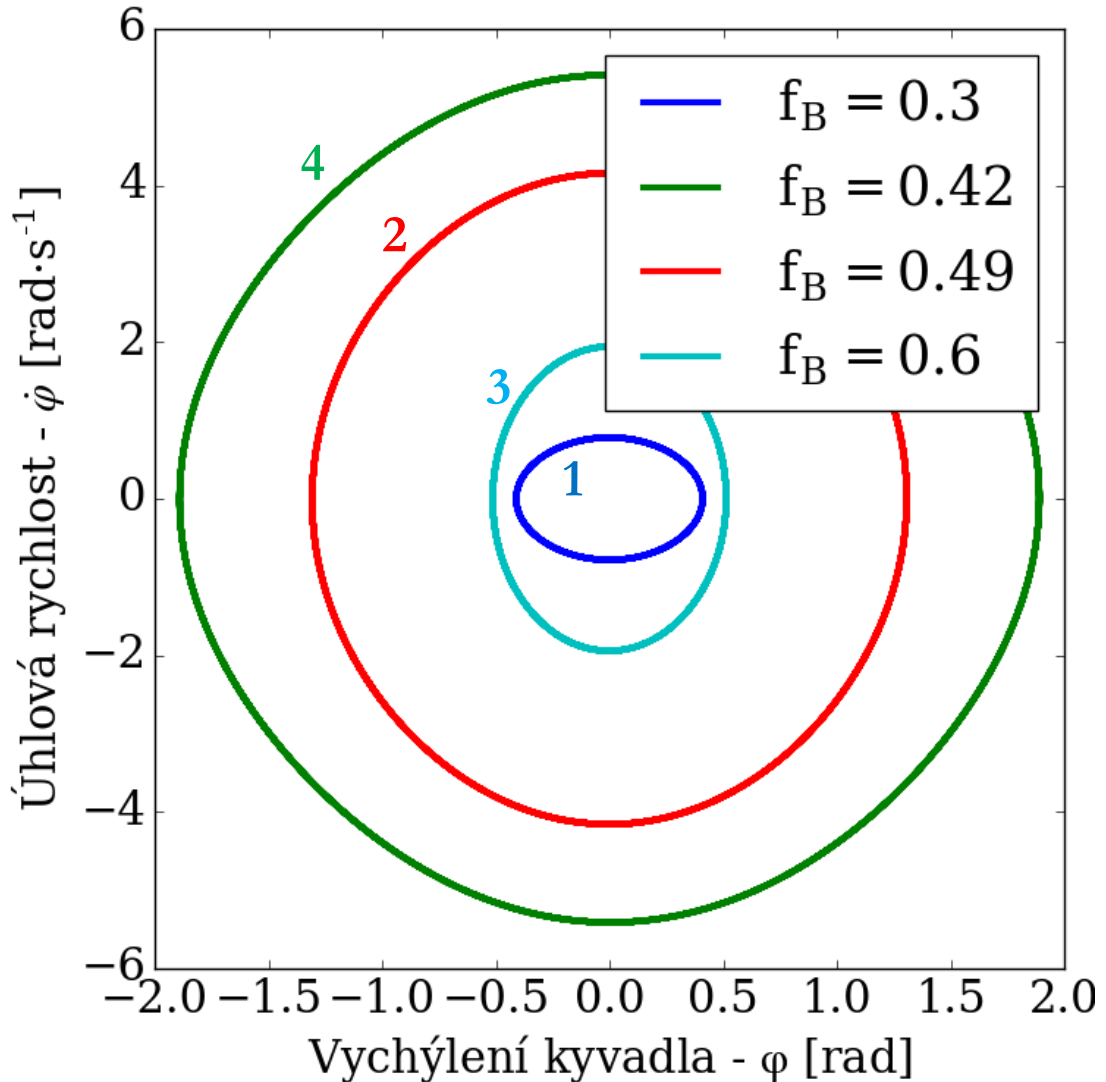
Následující křivky zobrazují rozkmitání kyvadla z klidu vnější periodickou silou, opět řešení diferenciální rovnice ( $\varphi_0 = 0$ ,  $\zeta = 0.05$ ,  $A = 2.5$ ,  $\omega_0 = 2\pi \cdot 0.498$ ).

Graf 9 – pohyb kyvadla v různých oscilačních módech



Zobrazíme-li si fázový prostor po ustálení kmitů, výsledky budou pro jednotlivé oscilační módy následující:

Graf 10 – fázový prostor pro oscilační módy 1 - 4



$$\varphi_0 = 0, \quad \zeta = 0.05, \quad A = 2.5, \quad \omega_0 = 2\pi \cdot 0.498$$

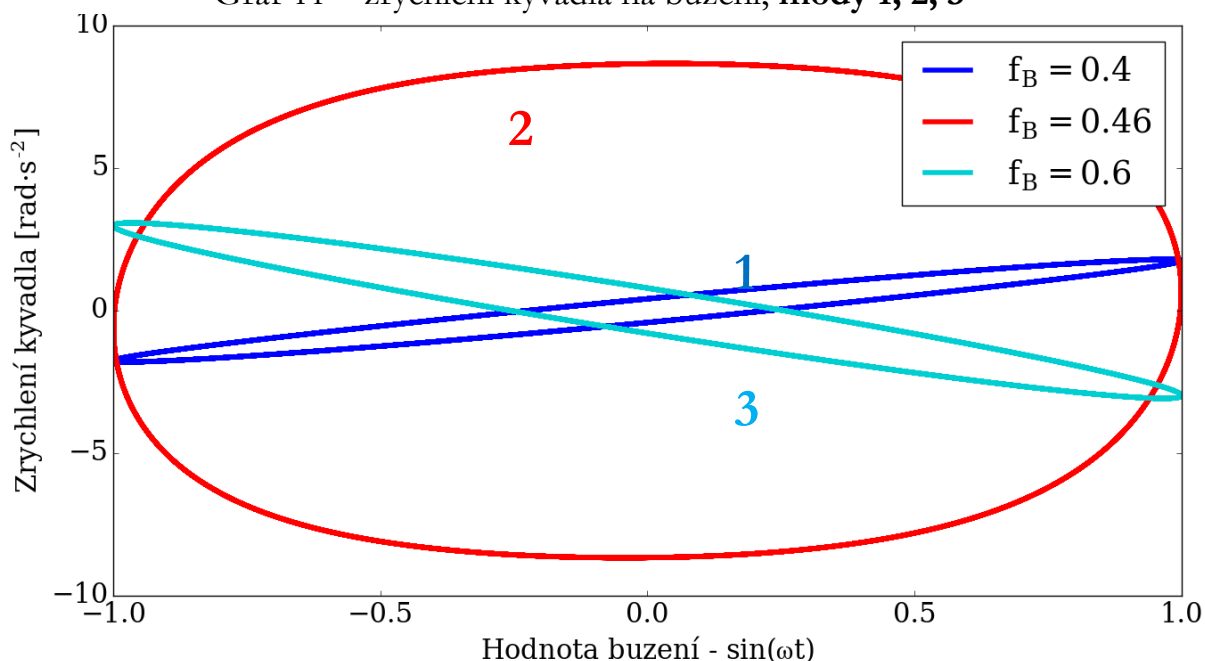
Nastavená amplituda buzení i frekvence buzení je v tomto srovnávacím grafu pro všechny módy opět naprosto stejná (graf 10 je vytvořen z grafu 9).

Jak je zjevné, křivky módů 1,2 a 3 se od sebe opticky příliš neliší, závislost je eliptická až kruhová, odlišuje je pouze velikost – výsledný rozkmit kyvadla v módech 1 a 3 je mnohem menší.

Částečně vybočuje mód 4 – **mód harmonizace vysokou amplitudou**, kdy se frekvence kyvadla a přizpůsobí. Zde se vyobrazená závislost připomíná spíše zaoblený čtverec.

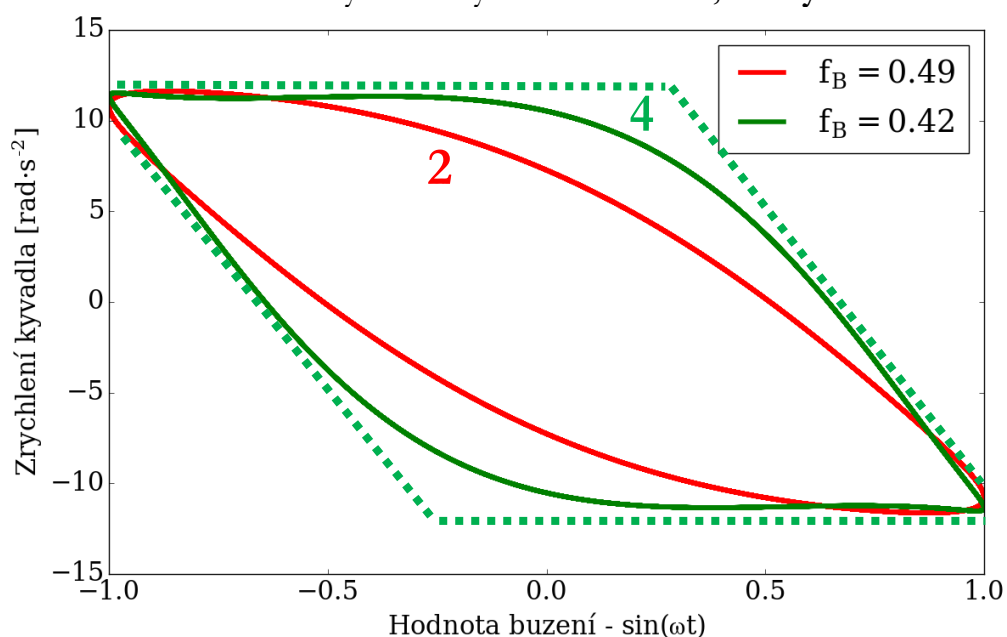
Významnější a zajímavější rozdíly jsou v závislosti okamžitého zrychlení kyvadla na fázi buzení po ustálení pohybu.

Graf 11 – zrychlení kyvadla na buzení, módy 1, 2, 3



Rozdíly mezi jednotlivými módy jsou dobře patrné. Je-li frekvence buzení nízká (mód 1), křivka závislosti zrychlení na buzení směřuje z třetího kvadrantu do prvního, je-li frekvence buzení podobná jako  $f_0$  (mód 2), prochází tato křivka symetricky všemi kvadranty. Kolem  $f_0$  (lehce pod ní) dochází ke zlomu a pro vyšší frekvence (mód 3) výsledný útvar směřuje z druhého kvadrantu do čtvrtého. Křivky popisující závislost okamžitého zrychlení na fázi buzení jsou pro mód 2 a 4 podobné ( $\varphi_0 = 0, \zeta = 0.05, A = 2.5, \omega_0 = 2\pi \cdot 0.498$ ):

Graf 12 – zrychlení kyvadla na buzení, módy 2 a 4



Křivka módu 4 se ovšem od křivky módu 2 liší. Křivka módu 4 na rozdíl od ostatních není symetrická (osově souměrná) a objevuje se zvláštní skutečnost – během trvání první a třetí

čtvrtperiody buzení je hodnota celkového **zrychlení kyvadla de facto konstantní**, zatímco během trvání druhé a čtvrté čtvrtperiody celkové zrychlení kyvadla velmi přibližně lineárně roste (znázorněno přerušovanou čarou).

Pokud tento numerický experiment zopakujeme pro jiné počáteční výchylky, dostaneme naprosto stejné křivky závislosti, pokud budeme měnit hodnotu tlumení, zůstanou křivky pro jednotlivé módy kvalitativně stejné, kvantitativně se pozmění.

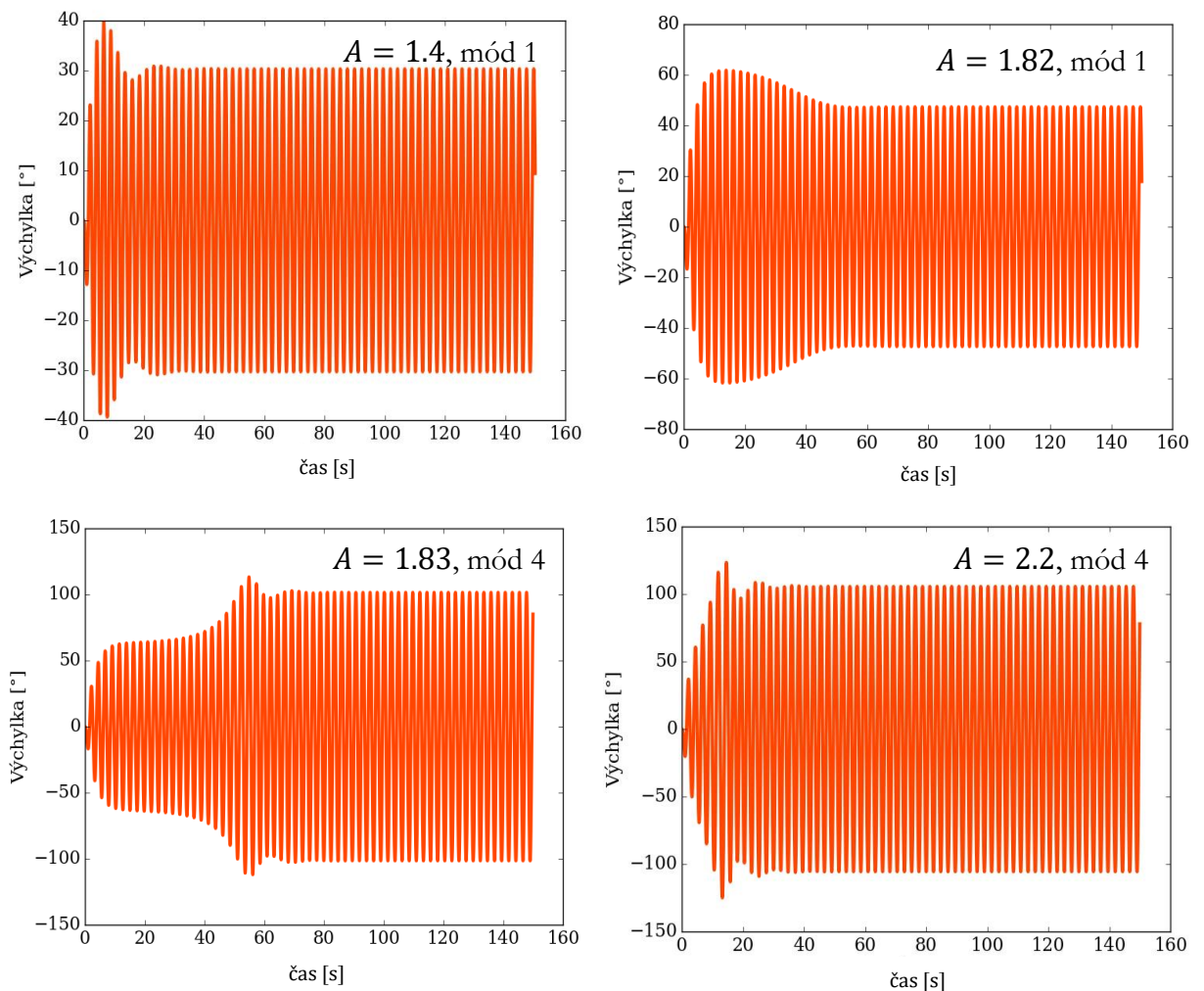
Je možné obecně říci, že každý oscilační mód má svoji závislost zrychlení na fázi buzení a tato závislost je pro jednotlivé oscilační módy charakteristická.

### 3.4 Mód harmonizace vysokou amplitudou – mód 4

Dalším přesvědčivým argumentem, že mód 4 skutečně existuje jako specifický druh odezvy kyvadla na buzení, a není pouhou „superpozicí“ ostatním módů, je skutečnost, že se objeví skokově.

Pokud budeme budit kyvadlo o něco nižší frekvencí, než je jeho vlastní, například  $f_B = 0.42$ , měli bychom se dle grafu 8 při zvýšení amplitudy na určitou úroveň tento mód pozorovat.

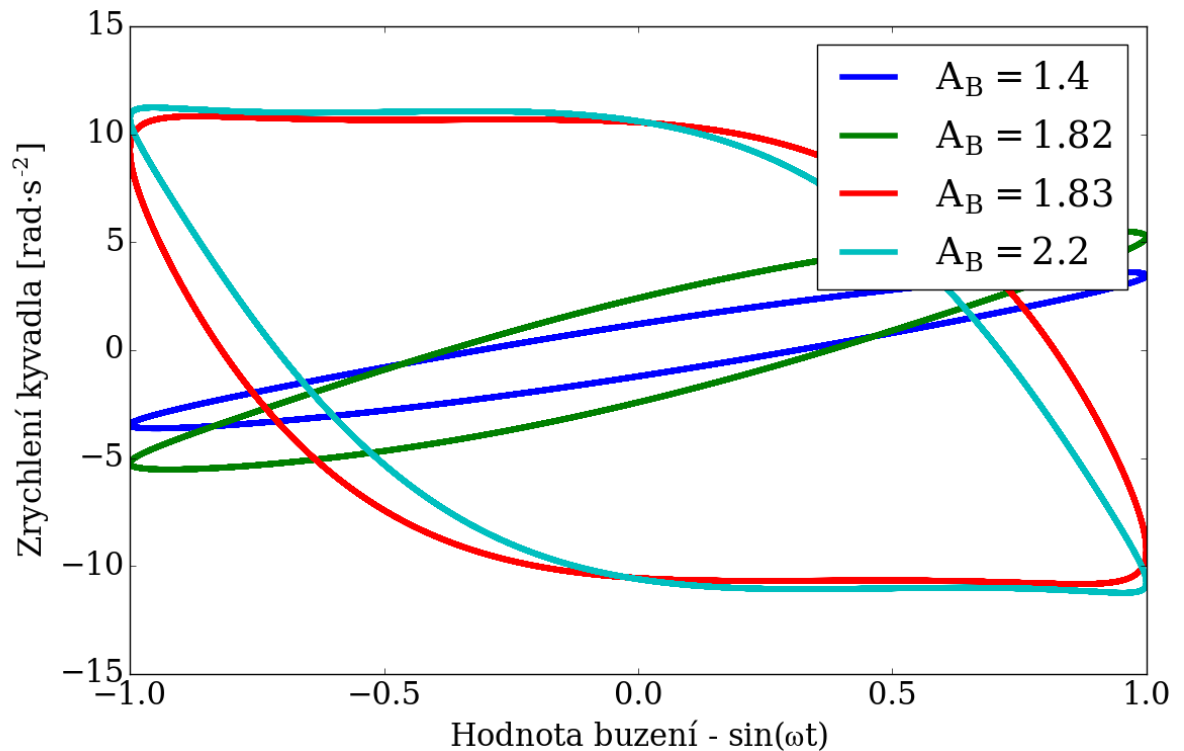
Graf 13 – pohyb kyvadla v čase ( $\varphi_0 = 0$ ,  $\zeta = 0.05$ ,  $\omega_0 = 2\pi \cdot 0.498$ )



Je evidentní, že pokud postupně zvyšujeme amplitudu buzení v módu 1, zvyšuje se amplituda kyvadla, poté dochází při nepatrné konkrétní změně amplitudy (zde z 1.82 na 1.83) ke skokové změně výsledné amplitudy oscilací (z 50° na 100°), přičemž se kyvadlo dostává do oscilačního módu 4, dále se při zvyšování budící amplitudy výsledná amplituda kyvadla příliš nemění.

Předchozí výsledky můžeme rovněž uvést jako závislost zrychlení kyvadla na buzení:

Graf 14 – zrychlení na buzení, **módy 1 a 4**

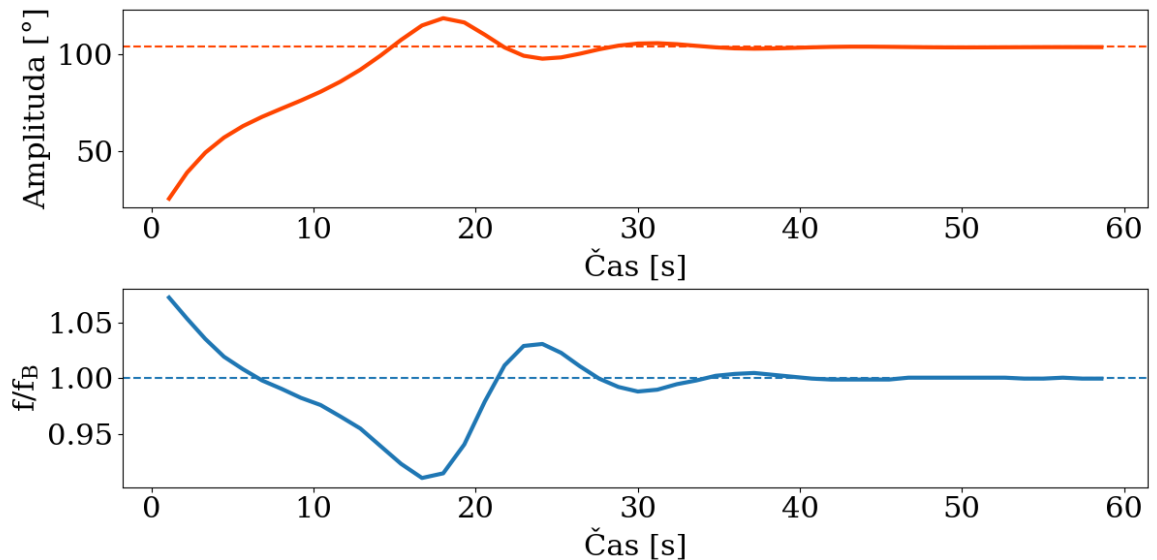


Opět je zřetelné, že po nepatrné konkrétní změně budící amplitudy (z 1.82 na 1.83), tedy při překročení kritické hodnoty se systém skokově vyvíjí jiným způsobem.

To, že k významné změně chování kyvadla dochází při nepatrné změně počátečních podmínek, můžeme rovněž považovat za silný argument proto, že oscilačního mód 4 je definovatelný a popsitelný.

### 3.5 Jak je možné, že dochází k harmonizaci

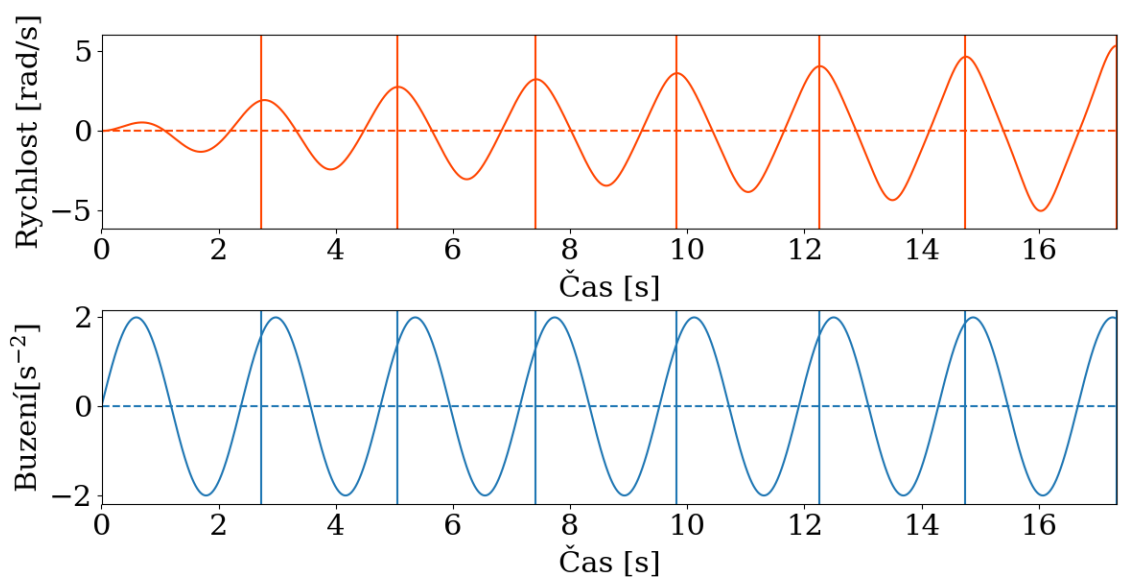
To, že ve čtvrtém oscilačním módu dochází k harmonizaci kyvadla a buzení vysokou amplitudou, přímo vyplývá z řešení diferenciálních rovnic, ovšem vysvětlit, z jakého důvodu a jakým způsobem k harmonizaci dochází, je možné i logicky.



Graf 15

Etapy postupné harmonizace uvedené v grafu 15 dále rozebereme. Uvažujme, že kyvadlo budíme o něco nižší frekvencí, než je jeho vlastní. Na počátku je kyvadlo v klidu, periodická síla jej rozkmitá z klidové polohy do malých úhlů, kde je jeho frekvence přibližně  $f_0$ , tedy vyšší, než frekvence buzení. Poměr frekvence kyvadla a frekvence buzení je tedy na počátku o něco vyšší než jedna.

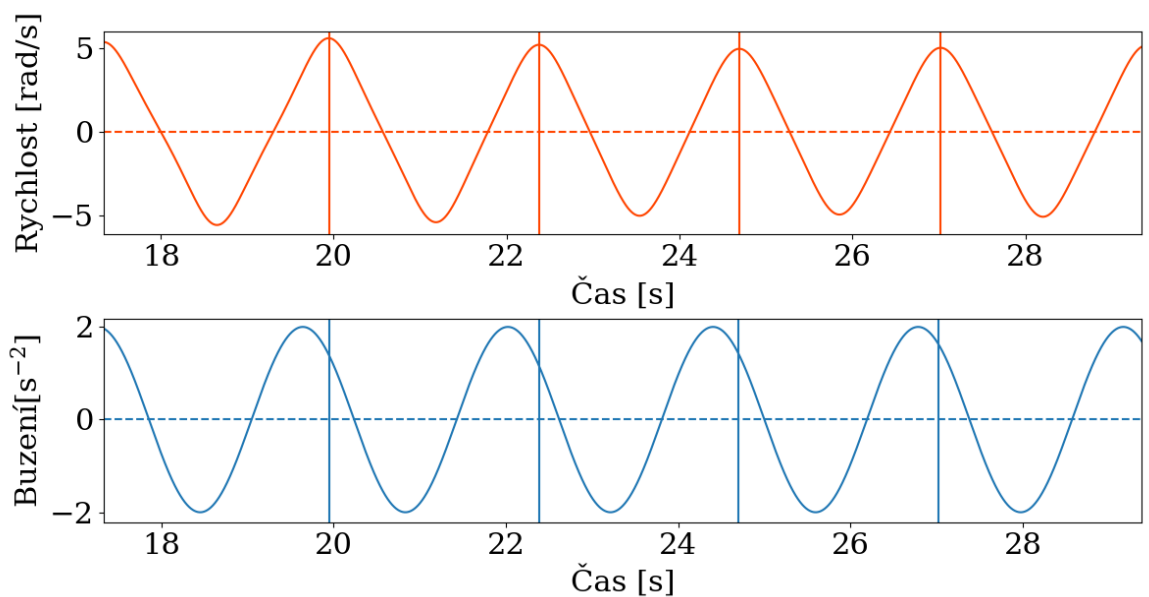
Frekvenční skluz je zřejmý i v grafu rychlosti a buzení:



Graf 16

V důsledku frekvenčního skluzu vzniká asymetrie, zde během prvních sedmi celých cyklů kyvadla pozorujeme sedm a půl kladných půlperiod buzení a sedm záporných půlperiod (graf 15). Je-li buzení takto nevyrovnané, systém je **přímo předurčen ke změně**. Buzení na počátku lehce předbíhá rychlost kyvadla, mezi kyvadlem a buzením ovšem není nijak závratný, to znamená, budící síla kyvadlo poměrně účinně uvádí do pohybu (buzení nepůsobí proti pohybu, kyvadlo „nebrzdí“) – v tomto případě tedy postupně roste amplituda.

Jak se zvyšuje amplituda kmitů, klesá frekvence kyvadla, mění se poměr frekvence kyvadla a buzení a zároveň se mění fázový posun mezi kyvadlem a buzením – rychlost kyvadla začne předbíhat buzení, amplituda se postupně lehce sníží.



Graf 17

Dokud poměr frekvencí není jednotkový, stále je přítomna asymetrie v buzení – změna systému je nevyhnutelná – zde tedy dochází pro změnu k mírnému snížení amplitudy.

Tento regulační mechanismus způsobuje to, že se poměr frekvencí vždy směřuje k hodnotě jedna, ať už je zmíněný poměr frekvencí vyšší, nebo nižší než jedna. Hodnotu jedna zde můžeme považovat za atraktor, ke kterému vývoj systému směřuje. Je-li poměr jednotkový, buzení působí symetricky a systém se chová stabilně, dále již nedochází k modulaci amplitudy.

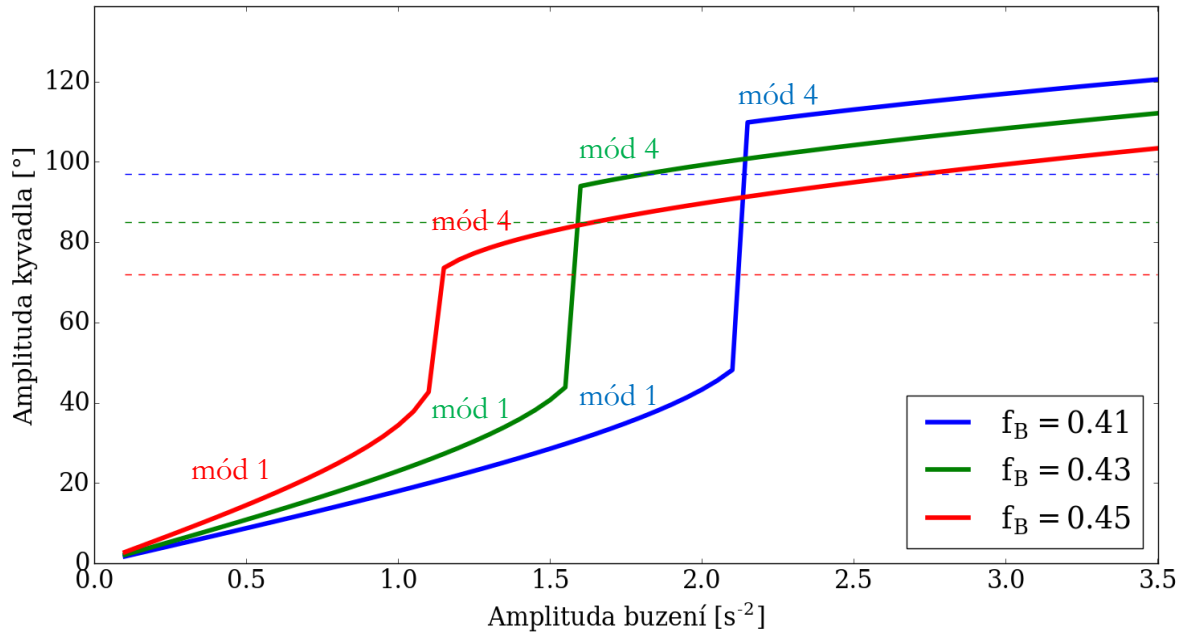
Budíme-li oscilátor periodickou funkcí o prakticky jakékoliv frekvenci, ze zmíněných důvodů se frekvence buzení a oscilátoru po čase vyrovnají, nikoliv pouze ve speciálně popsáném módu 4. Dochází k tomu ale jiným způsobem. V případě oscilačního módu čtyři se mohou frekvence buzení a kyvadla synchronizovat právě tak, že si kyvadlo „sedne“ na amplitudu příslušnou určité frekvenci. Právě takto vzniká zajímavý oscilační režim.



### 3.6 Frekvence a amplituda kmitů v oscilačním módu 4

V módu 1 a 3 dlouhou dobu platí lineární závislost mezi budící amplitudou a výslednou amplitudou kyvadla. Oproti tomu v módu 4 je amplituda na budící frekvenci závislá mnohem méně:

Graf 18 – závislost amplitudy na budící amplitudě

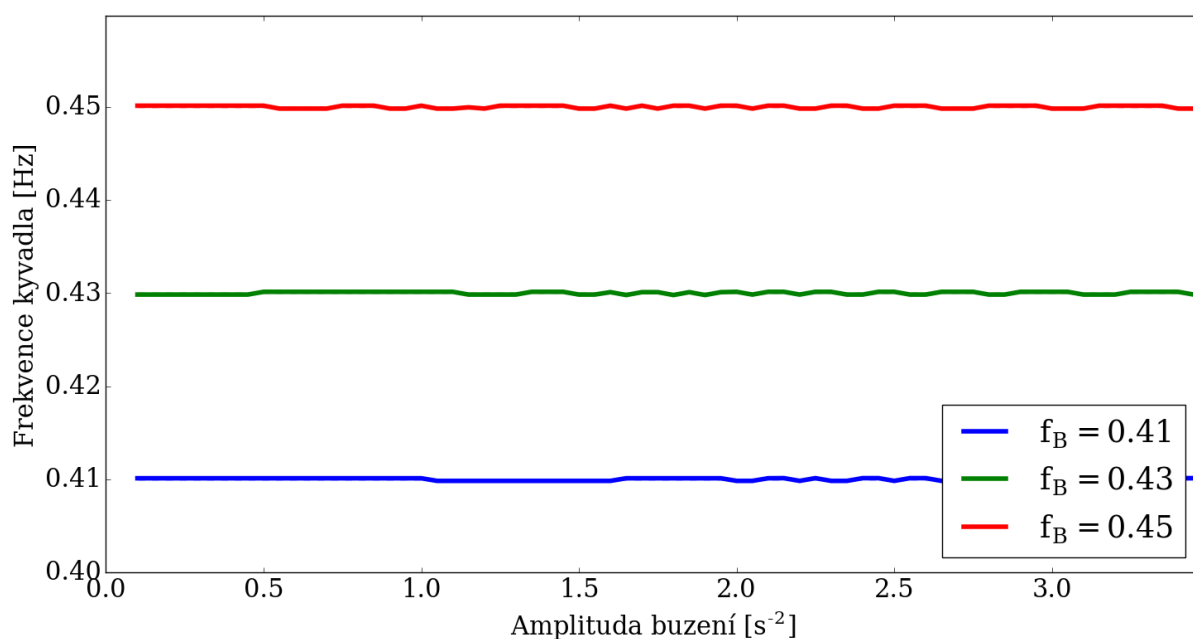


Graf ukazuje závislost výsledné amplitudy kyvadla na vstupní budící amplitudě pro různé frekvence buzení ( $\varphi_0 = 0$ ,  $\zeta = 0.05$ ,  $\omega_0 = 2\pi \cdot 0.498$ ). Pokud zesílujeme buzení, roste amplituda kyvadla – poté při překročení kritické hodnoty dochází k přeskoku na čtvrtý oscilační mód a dále se amplituda kyvadla příliš nezvyšuje (snížíme-li frekvenci buzení ještě více, je závislost na amplitudě buzení v tomto módu ještě méně významná).

Přerušované čáry ukazují rozkmit, při kterém by netlumené kyvadlo mělo stejnou frekvenci, jako je frekvence buzení. Podle výše uvedeného předpokladu, amplituda kyvadla v módu 4 by se měla blížit příslušné hodnotě. Jak je zřejmé, v „harmonizačním“ módu se hodnoty amplitudy blíží této hodnotě, ovšem reálné hodnoty amplitudy jsou o něco vyšší.

Skutečností zůstává, že průměrná frekvence kyvadla je ovšem vždy po ustálení rovna frekvenci buzení (v každém oscilačním módu), ačkoliv je konkrétně zde v numerickém experimentu amplituda kyvadla vyšší, než předpovězená hodnota (přerušovaná čára) – což by bylo možné vysvětlit například lineárním tlumením, které je závislé na rychlosti. Frekvenci kyvadla neovlivňuje pouze rozkmit, ale i tlumení a buzení jako takové.

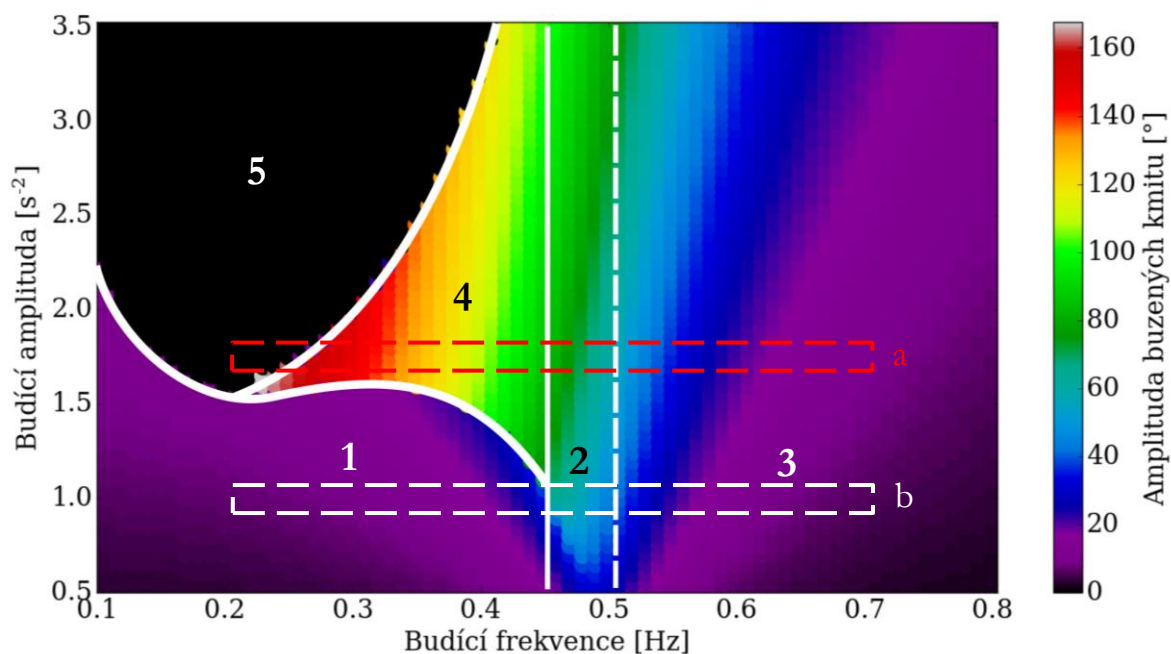
Graf 19 – frekvence kyvadla po ustálení v závislosti na budící amplitudě



Doposud jsme diferenciální rovnice řešili pro nulovou počáteční výchylku kyvadla. Pokud bude výchylka kyvadla dostatečně velká, například  $160^\circ$ , stačí obecně nižší amplituda, aby se kyvadlo udrželo v oscilačním módu 4.

Rezonanční mapa pro velkou počáteční výchylku kyvadla bude vypadat následovně:

Graf 20 – rezonanční mapa pro velkou počáteční výchylku



$$\varphi_0 = 160^\circ, \quad \zeta = 0.05, \quad \omega_0 = 2\pi \cdot 0.498$$

Jak je zřejmé, díky velké počáteční amplitudě stačí menší budící amplituda, aby kyvadlo setrvalo ve čtvrtém oscilačním módu (není zde energetická bariéra, kterou je potřeba překonat). V černé oblasti došlo k přetočení kyvadla (mód 5).

### 3.7 Harmonizace kyvadla a buzení

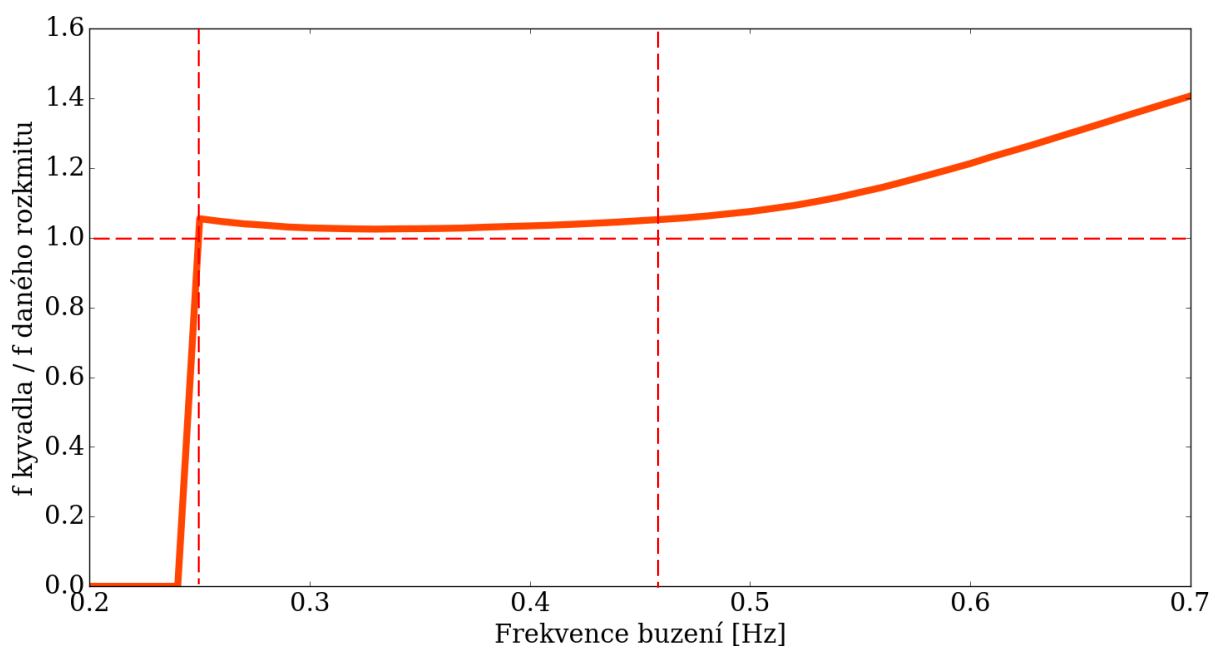
Jak již psáno výše, po ustálení pohybu kyvadla je pozorovaná frekvence jeho kmitů vždy rovna frekvenci buzení – výslednou periodu kyvadla neovlivňuje pouze rozkmit, ale rovněž odporové síly a buzení „samo o sobě“.

Již mnohokrát bylo zmíněno, že frekvence (netlumeného, nebuzeného) kyvadla závisí na úhlovém rozkmitu – s vyšší amplitudou poté klesá frekvence.

Je-li pohyb kyvadla v módu 4, pozorovaná (numericky, případně experimentálně) amplituda kyvadla odpovídá frekvenci příslušné pro daný úhlový rozkmit pro nebuzené, netlumené kyvadlo.

Zobrazíme-li si **červený výřez (a)** z grafu 20, budou výsledky následující:

Graf 21 – poměr skutečné frekvence kyvadla a frekvence příslušné pro daný úhlový rozkmit

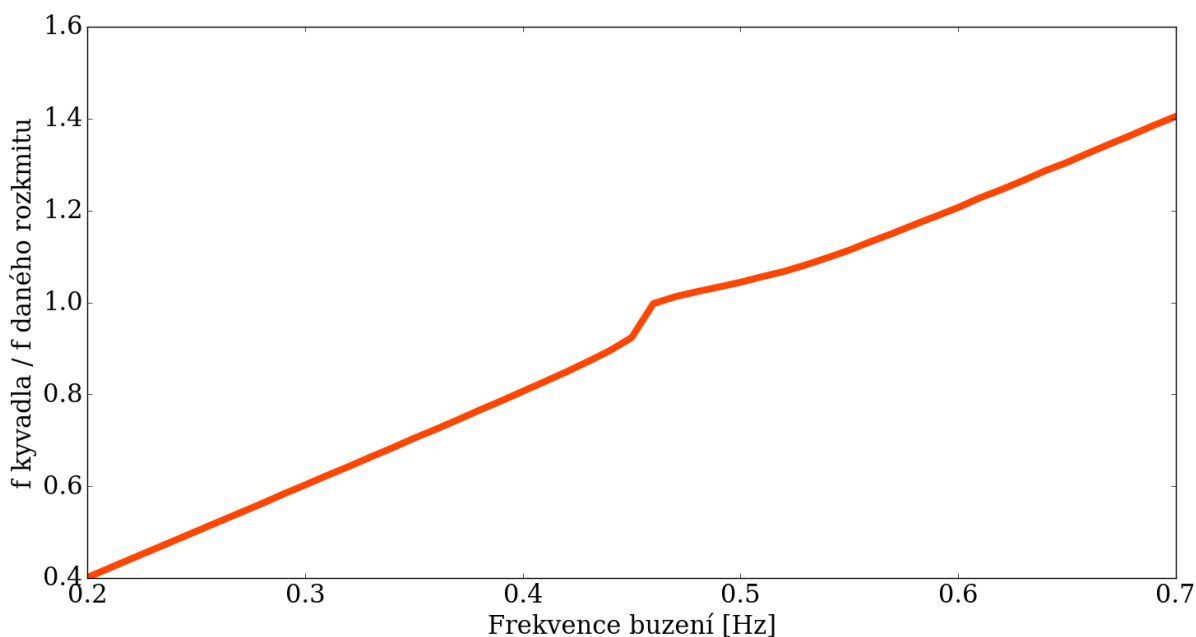


$$\varphi_0 = 160^\circ, \quad \zeta = 0.05, \quad A = 1.7, \quad \omega_0 = 2\pi \cdot 0.498$$

Skutečně, ve frekvenčním rozsahu příslušícím módu 4 je poměr zjištěné frekvence kyvadla a frekvence teoreticky příslušící pro daný úhlový rozkmit přibližně jednotkový (nepatrně vyšší). Kyvadlo si tedy v tomto módu opravdu „sedá“ na amplitudy příslušné dané frekvenci buzení.

Oproti tomu, **bílý výřez z grafu 20 (b)**, který nezasahuje do oblasti módu 4, vypadá následovně:

Graf 22 – poměr skutečné frekvence kyvadla a frekvence příslušné pro daný úhlový rozkmit



$$\varphi_0 = 160^\circ, \quad \zeta = 0.05, \quad A = 1.7, \quad \omega_0 = 2\pi \cdot 0.498$$

V tomto případě je poměr jednotkový pouze ve velmi krátké oblasti módu 3, kdy je frekvence buzení blízká  $f_0$ .

Zdá se tedy, že je oprávněné pojmenovat mód 4 jako mód harmonizace vysokou amplitudou, neboť se systém udržuje v rezonanci právě díky výše popsanému vztahu rozkmitu a „vlastní“ frekvence kyvadla.

### 3.8 Hranice mezi módem 1 a 4

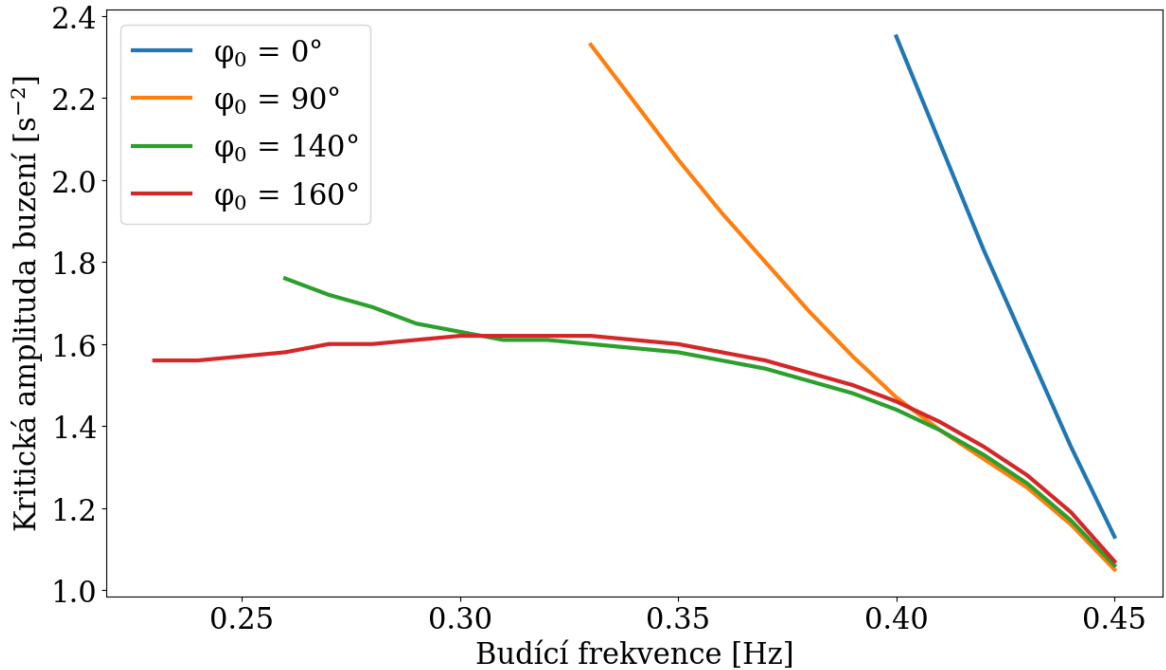
Jak je zřejmé, hranice mezi módem 1 a 4 je dána amplitudou buzení. Uvolníme-li kyvadlo z velké výchylky a je-li amplituda dostatečná, kyvadlo se udržuje v módu 4. Rozkmitáváme-li kyvadlo z nulové výchylky, je potřebná vyšší budící amplituda, aby se pohyb kyvadla ustálil v módu 4.

Mnohačetným numerickým řešením diferenciálních rovnic získáme křivky, které závislost kritické amplitudy umožňující oscilační mód 4 popisují.

Je-li počáteční kyvadla velká, postačí obecně nižší amplituda, aby se kyvadlo v módu 4 udrželo. Díky nízké amplitudě buzení se kyvadlo tak často nepřetáčí, v důsledku čehož se nerozvíjí chaotické

trajektorie (mód 5) a kyvadlo se frekvenčně přizpůsobuje ve velmi široké oblasti (0.20 Hz – 0.45 Hz).

Graf 23 – závislost kritické amplitudy na frekvenci



$$\zeta = 0.05, \quad \omega_0 = 2\pi \cdot 0.498$$

Budíme-li kyvadlo amplitudou pod úrovní příslušné křivky, rozvine se oscilační mód 1, překročíme-li pouze nepatrně kritickou hodnotu, rozvine se oscilační mód 4. Mezní hodnoty frekvencí jsou 0.22 Hz a 0.45 Hz, oscilační mód 4 je pro toto nastavení pozorován pouze v tomto frekvenčním rozsahu. Nejnižší frekvence 0.22 Hz odpovídá rozkmitu přibližně 170°.

### 3.9 Oscilační mód 4 a práce Danila Doubochinského

Doubochinského kyvadlo je poměrně známým fenoménem. Jedná se o lehké kyvadlo s magnetem na volném konci, které se pohybuje nad cívkou napájenou střídavým proudem s řádově vyšší frekvencí. Kyvadlo interaguje s cívkou pouze tehdy, je-li cívce velice blízko, jinak je efekt vzájemného ovlivňování cívky a kyvadla zanedbatelný.

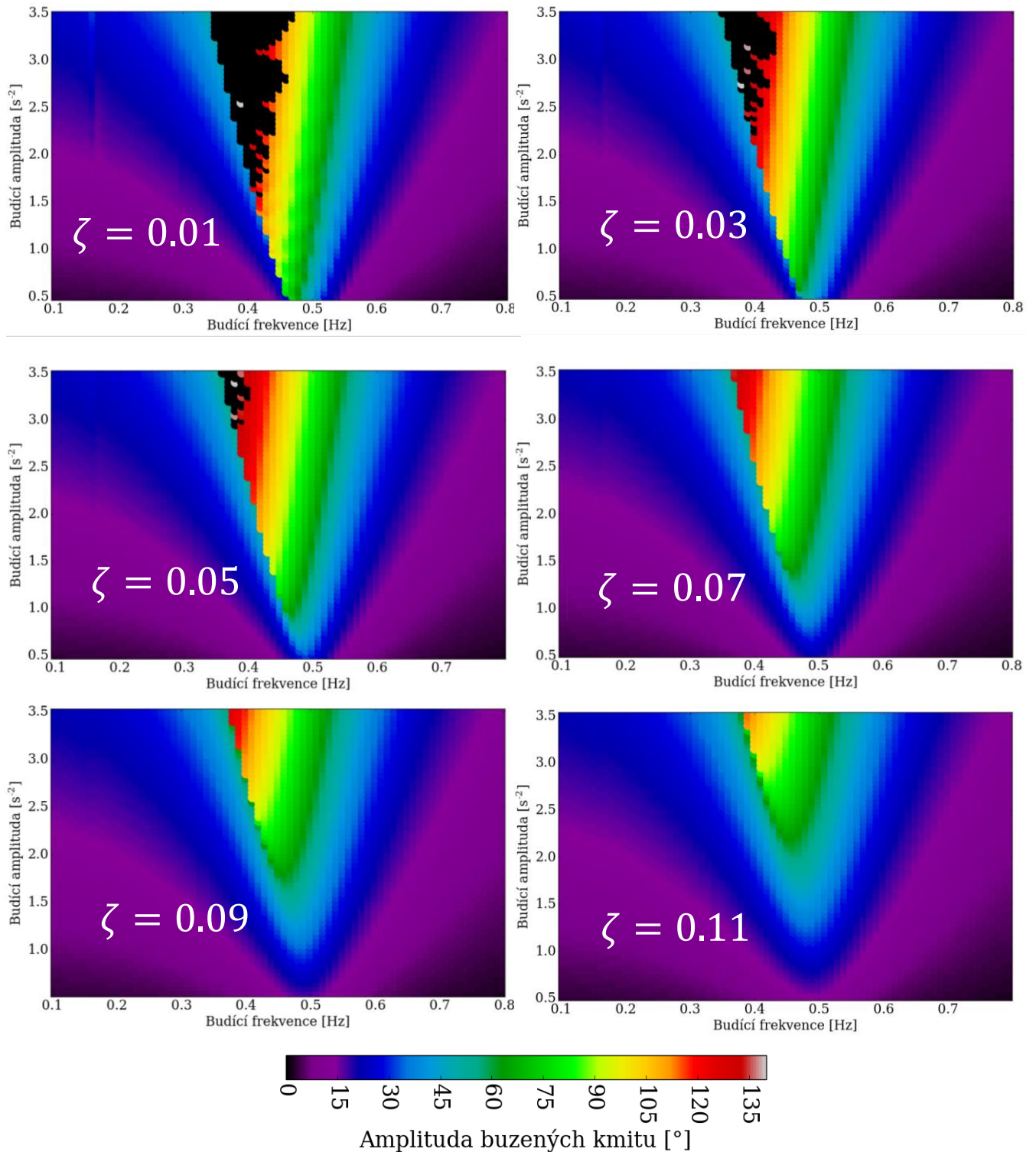
Je-li budící síla dostatečně velká, amplituda kyvadla se „kvantuje“, aby byl zachován určitý poměr mezi frekvencí střídavého proudu a frekvencí kyvadla (celé liché číslo). Dle Doubochinského je takováto amplituda de facto nezávislá na síle buzení, je-li budící síla dostatečně velká.

Zdá se, že můžeme hovořit o analogii mezi popsáním 4. oscilačním módem a kvantovanými amplitudami v práci Danila Doubochinského.

V módu harmonizace vysokou amplitudou se rovněž kyvadlo frekvenčně přizpůsobuje změnou rozkmitu a dále je ustálená amplituda víceméně nezávislá na zvyšování budící amplitudy, dokud budící amplituda nepřekročí kritické hodnoty.

### 3.10 Vliv odporových sil

Následující barevné mapy popisují závislost mezi ustálenou amplitudou kyvadla, budící frekvencí, budící amplitudou a konstantou  $\zeta$  vyjadřující tlumení ( $\varphi_0 = 0$ ,  $\omega_0 = 2\pi \cdot 0.498$ ):



Je-li tlumení velmi malé, dochází snáze k velkému rozkmitu a přetočení kyvadla – oblast módu 5 je velká.

Hranice mezi módem 1 a módem 4 je obecně velice ostrá – v grafech je patrné, jak prostřední oblast vysokých amplitud ostře vystupuje do popředí – je-li ovšem tlumení příliš velké, jeví se tato hranice jako neostrá a rozmazaná – přechod mezi módem 2 a módem 4 již dále není dokonale „skokový“.

Zjistíme, že hodnota tlumení  $\zeta$  se optimálně pohybuje v řádu setin až tisícín, aby bylo možné pozorovat popsaný oscilační mód 4. Autoři článku (4) hovoří o zajímavých výsledcích při hodnotách tlumení (po přepočítání) v rozsahu:  $0.035 \leq \zeta \leq 0.08$ , to znamená, zeta v řádu setin, v závislosti na počátečních podmínkách však můžeme vybírat z širšího intervalu tlumící konstanty a stále pozorovat všechny oscilační módy.

### 3.11 Diskuse

Předchozí numerické výsledky ve všech podobách byly pro názornou demonstraci vytvořeny pro kyvadlo o vlastní frekvenci kolem 0,5 Hz. Z numerických simulací ovšem vyplývá, že je možné zmíněné typy chování kyvadla a oscilační módy pozorovat pochopitelně nezávisle na nějaké konkrétní vlastní frekvenci kyvadla.

Změní-li se vlastní frekvence kyvadla významně, pochopitelně se změni i rozsahy požadovaných hodnot budící amplitudy, budící frekvence, případně i hodnoty tlumení, aby bylo možné pozorovat všechny výše popsané módy chování kyvadla.

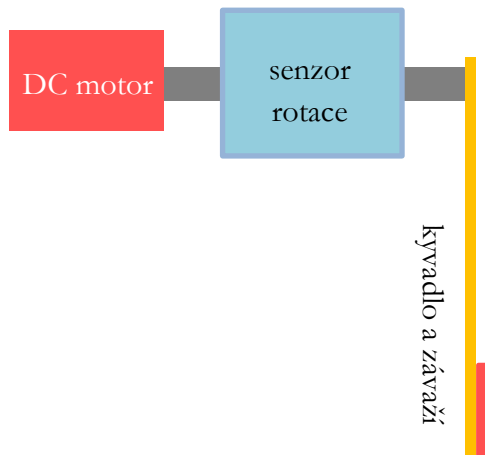
Výše uvedené příklady vybral autor s maximální pečlivostí, aby srozumitelně a jasně demonstroval možné způsoby chování systému a všechny výsledky uvedl čestně a pravdivě tak, jak jsou.

## 4 EXPERIMENT

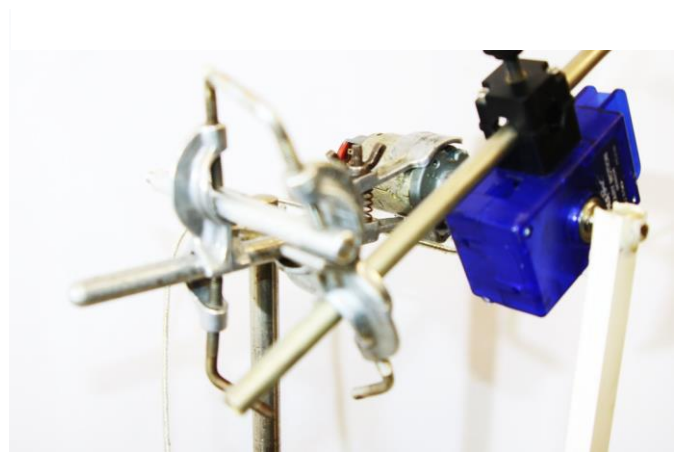
### 4.1 Experimentální aparatura

Experimentální aparatura je tvořena lehkým kyvadlem se závažím na volném konci, senzorem rotace PASCO a DC motorem.

Obrázek 3



Obrázek 2 – motor, senzor rotace, závěs kyvadla



Obrázek 4 – aparatura

### 4.2 Lehké kyvadlo

Přibližně půlmetrové kyvadlo je tvořeno lehkou plastovou tyčí a kovovým závažím (obr. 4, obr. 6).

#### měření parametry kyvadla:

vzdálenost těžiště od osy otáčení:  $l = (46,1 \pm 0,1) \text{ cm}$

celková délka kyvadla:  $l' = (61,8 \pm 0,1) \text{ cm}$

vlastní frekvence:  $f_0 = (0,683 \pm 0,003) \text{ Hz}$

hmotnost kyvadla:  $m = (90,9 \pm 0,1) \text{ g}$

moment setrvačnosti:  $J = \frac{mgl}{\omega_0^2} = \frac{mgl}{4\pi^2 f^2}$

$J = (0,0223 \pm 0,0002) \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

### 4.3 PASCO senzor rotace

Velice přesný senzor rotace zaznamenává výchylku v čase (a to se samplovací frekvencí až 1000 Hz). Senzor rotace zároveň propojuje samotné kyvadlo a budící motor.





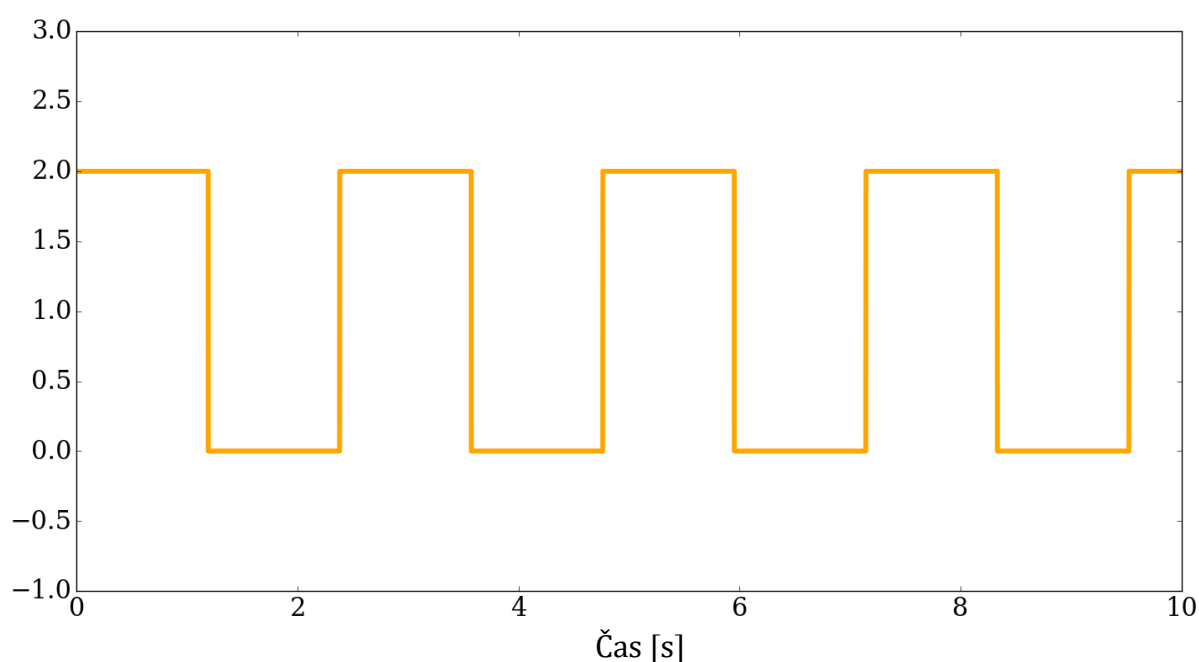
## 4.4 Motor

### 4.4.1 Zapojení motoru, řídicí elektronika

Periodické buzení kyvadla je zajištěno DC motorem, který je ke kyvadlu trvale připojen. Motor je periodicky zapínán a vypínán polovodičovým relé řízeným programovatelnou deskou Arduino UNO. Toto řešení je konstrukčně jednoduché a zároveň umožňuje spínání poměrně velkých proudů.

Budící síla je tedy teoreticky vyjádřena obdélníkovou funkcí, která osciluje mezi hodnotou nula a konkrétní nastavenou hodnotou budící síly, viz kvalitativně graf 5.

Graf 24 – obdélníkové buzení



Poměrně překvapivě reaguje kyvadlo velmi obdobně na nesymetrické obdélníkové buzení jako na symetrický sinus, kmity kyvadla jsou ovšem lehce posunuté po vertikální ose (středem symetrie kmitů není klidová poloha, ale jiná blízká výchylka).

### 4.4.2 Měření momentu síly

Vzhledem k tomu, že maximální rychlost nezátíženého motoru je ostře menší než rychlosti, kterých motor běžně dosahuje během pohybu kyvadla, považujeme moment síly motoru za konstantní po celou dobu zapnutí, pokud působí na kyvadlo stojící i pohybující se, neboť se jedná o klasický DC motor. (5)

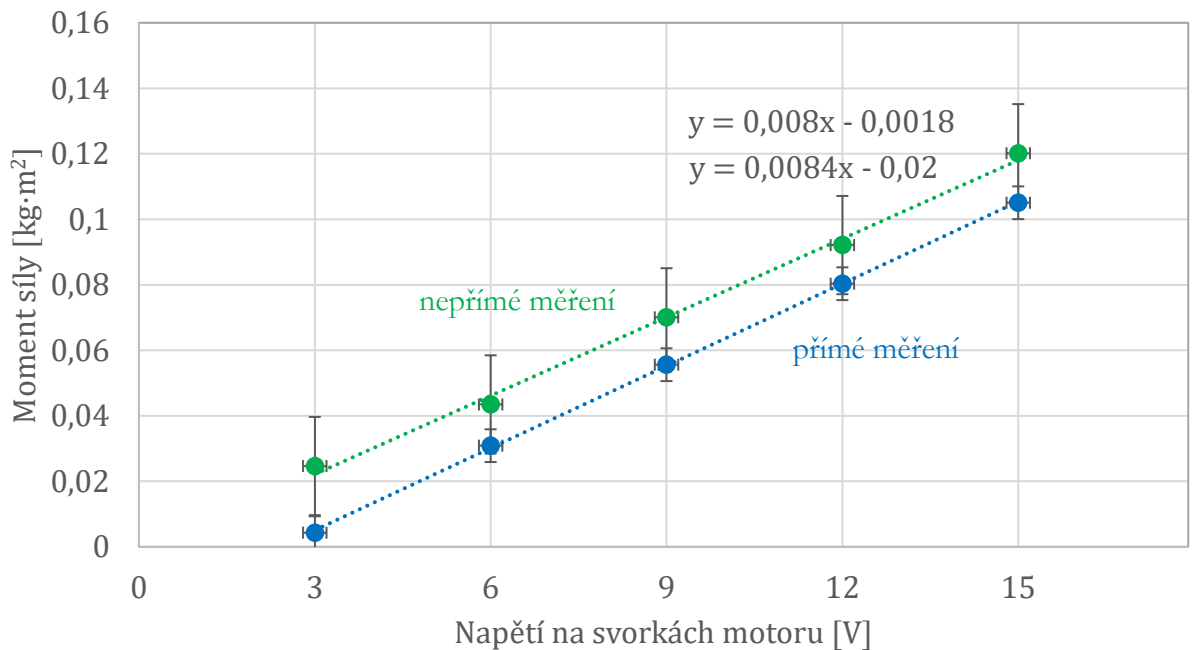
Moment síly vytvořený motorem je velmi důležitý parametr ovlivňující chování kyvadla, měříme jej tedy dvěma nezávislými metodami.

I. **Přímo pomocí PASCO senzoru síly** s vysokým rozlišením, který je umístěn na volném konci kyvadla v klidové poloze. Po zapnutí motoru při příslušném napětí hodnota měřené síly skokově vzroste. Výsledky po přepočítání jsou uvedeny v grafu 6 a naměřená závislost je dokonale lineární.

Chybová úsečka vertikální je vypočítaná vzhledem k přesnosti odečítání hodnoty působící síly, chybová úsečka horizontální je odhadnutá.

II. **Nepřímo pomocí PASCO senzoru rotace**, který zaznamenává výchylku kyvadla po zapnutí motoru. Trvale zapnutý motor lehce vychýlí kyvadlo z klidové polohy, až se moment tíhové síly a moment síly motoru ustálí v rovnováze. Takto nepřímo dopočítáváme moment síly motoru. Vertikální chybová úsečka je spočítána z nepřesnosti určení výchylky kyvadla (odhad  $1^\circ$ ). Horizontální chybová úsečka je odhadnutá.

Graf 25 – moment síly v závislosti na napětí



Jak je zjevné, hodnoty naměřené odlišnými způsoby jsou téměř totožné, fit je v každém případě lineární, vzhledem k velikosti chybových úseček jedno měření nevyklučuje správnost druhého a naopak.

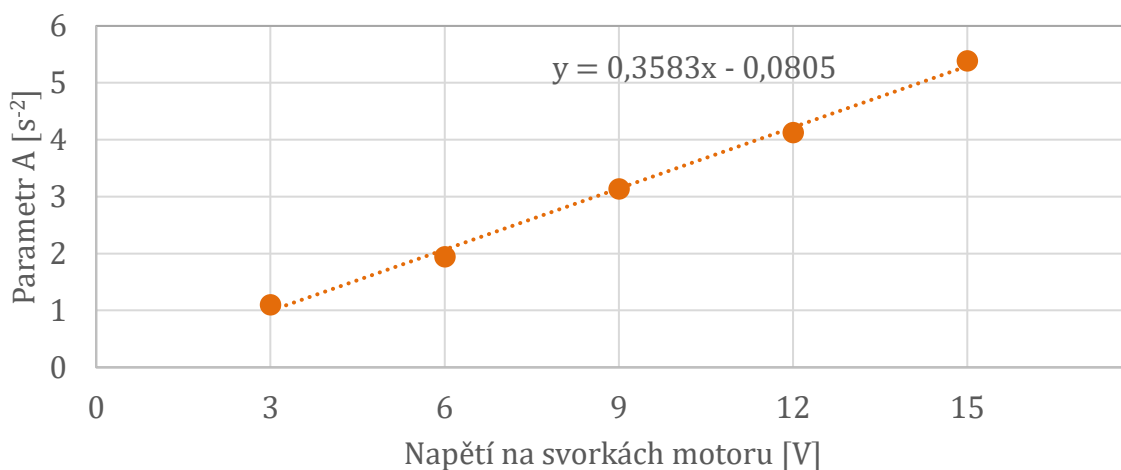
Hodnoty naměřené přímo jsou nepatrně nižší než hodnoty naměřené nepřímo, což je možná způsobeno vnitřní dynamikou elektromotoru, který by mohl dosahovat o něco vyššího momentu až po drobném pootočení apod.

Pro další práci s hodnotami momentu síly volíme data **z měření nepřímého**, lineární fit tohoto měření směřuje téměř dokonale do počátku  $[0, 0]$  a po dosažení těchto naměřených hodnot do diferenciálních rovnic jsou poté jejich numerická řešení bližší experimentu.

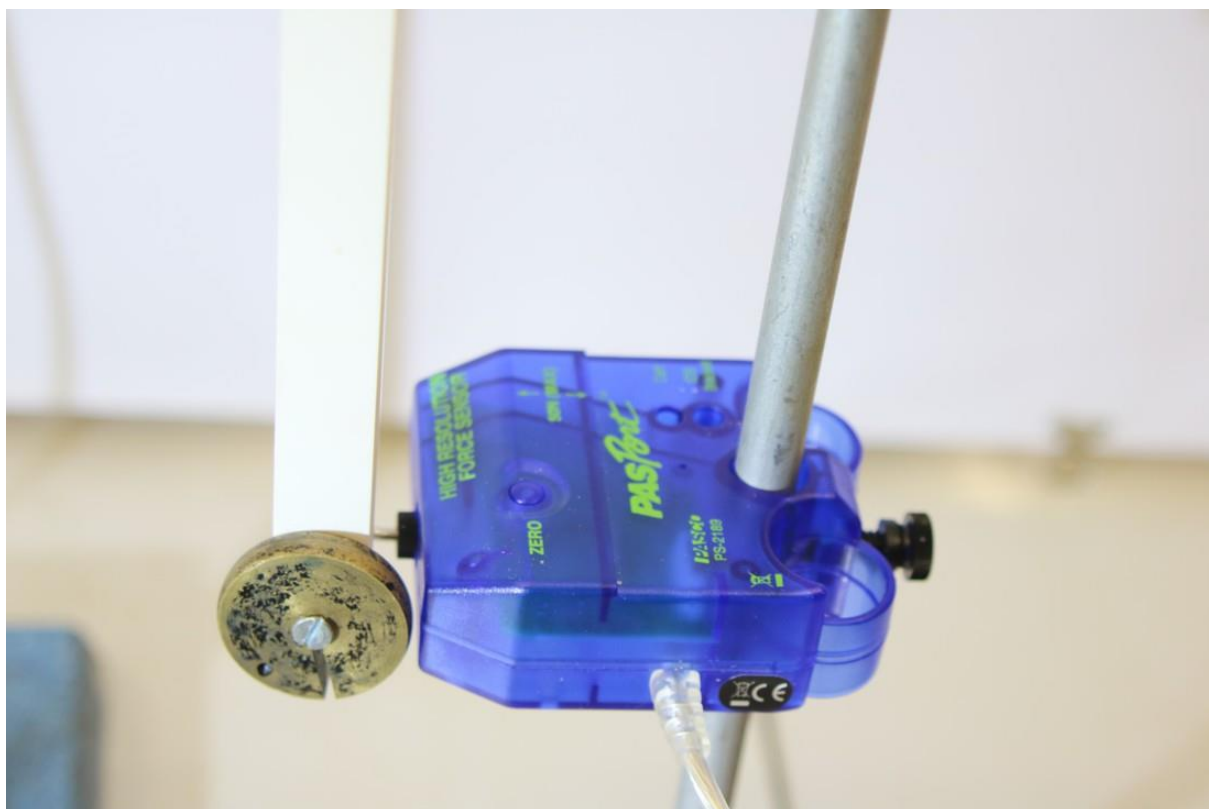
V diferenciální rovnici [5] se objevuje člen pro periodické buzení  $A \sin \omega t$ , kde amplituda  $A$  je podíl momentu síly motoru  $M$  a momentu setrvačnosti kyvadla  $J$ , hodnota amplitudy se pohybuje někde v rozmezí od  $1 \text{ s}^{-2}$  do  $5 \text{ s}^{-2}$  pro nastavitelná napětí motoru 3 V až 15 V.

Do diferenciálních rovnic tedy uvádíme jako vstupní podmínku hodnotu parametru  $A$  z grafu 23.

Graf 26 – závislost parametru A na napětí



Obrázek 5 – měření momentu síly přímo, volný konec kyvadla a siloměr

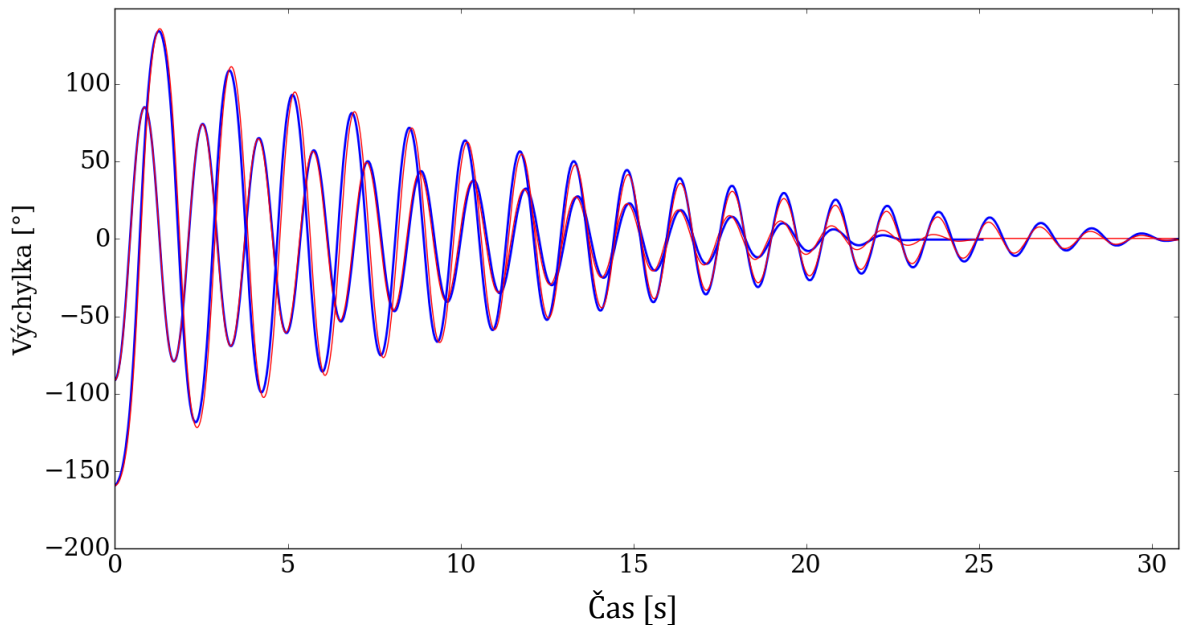


#### 4.5 Odporové síly, tlumení kyvadla, finální diferenciální rovnice

Tlumení je další charakteristickou vlastností kyvadla, rovněž zapsané diferenciální rovnice reagují na hodnotu tlumení velice citlivě. Proto je nezbytně nutné tlumení správným způsobem popsat. Pozorované tlumení kmitů kyvadla není možné uspokojivě popsat pouze pomocí exponenciálního tlumení známého z diferenciálních rovnic pro tlumený harmonický oscilátor, proto se pokusíme maximálně přiblížit fyzikální realitě vhodnějším matematickým modelem.

V grafu 27 je zaznamenané postupné tlumení kmitů kyvadla, které bylo uvolněno z výchylek  $90^\circ$  a  $160^\circ$  a dále kmitalo samovolně (2 modré křivky). Amplitudy kmitů neleží na čistě exponenciální funkci, proto tedy není možné najít vhodnou konstantu tlumení (člen  $2\zeta\omega_0\dot{\varphi}$ , rovnice 6), aby výsledné numerické řešení diferenciální rovnice korespondovalo s naměřenou křivkou tlumení.

Graf 27 – pozorované tlumení kmitů kyvadla



Zdá-se, že elektromotor sám působí jako další tlumící prvek. Uvažujeme-li, že motor klade kyvadlu konstantní odpor působící proti směru pohybu, matematický popis rozšíříme následujícím způsobem.

$$\ddot{\varphi} + 2\zeta\omega_0\dot{\varphi} + \varepsilon \cdot z(\dot{\varphi}) + \omega_0^2 \sin \varphi + A \sin \omega t = 0 \quad [7]$$

$$z(x) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } x \geq 0 \\ -1 & \text{pokud } x < 0 \end{cases}$$

Člen  $\varepsilon$  je hodnota konstantního tlumení, funkce  $z$  zajišťuje, že tlumení působí proti okamžité rychlosti.

Shoda mezi teorií a experimentem je pro obě naměřené křivky výborná pro následující parametry

$$\zeta = 0.012$$

$$\varepsilon = 0.19$$

a je rovněž uvedena v grafu 25, ve kterém 2 modré křivky popisují experiment a 2 červené křivky simulace.

Zdá se tedy, že tento předpoklad byl dostatečně správný, aby poskytl přijatelně dobrý popis tlumení, který poslouží pro další matematické simulace. Tento popis tlumení je ale pochopitelně rovněž aproximační, hodnota tlumení by se mohla lišit například tehdy, pokud elektromotorem protéká proud (magnet se pohybuje v magnetickém poli), nicméně i přesto se tento popis tlumení jeví jako přijatelně dobrý.

## 5 SHODA NUMERICKÝCH ŘEŠENÍ A EXPERIMENTU

### 5.1 Diferenciální rovnice pro pohyb kyvadla a její finální znění

V první části této práce jsou uvedeny výsledky numerických simulací jasné a srozumitelné rovnice [5] pro názorné pochopení toho, jak se buzené nelineární systémy mohou chovat. V této části práce budeme porovnávat naměřená data s numerickými řešeními diferenciální rovnice, kterou jsme ovšem pozměnili, aby správně reflektovala podmínky experimentu.

Poslední nutnou změnou rovnice [7] je upravení členu pro vnější sílu tak, aby odpovídal „obdélníkové funkci“, kterou kyvadlo budíme.

$$\ddot{\varphi} + 2\zeta\omega_0\dot{\varphi} + \omega_0^2 \sin \varphi + A \sin \omega t = 0 \quad [5]$$
$$\ddot{\varphi} + 2\zeta\omega_0\dot{\varphi} + \varepsilon \cdot z(\dot{\varphi}) + \omega_0^2 \sin \varphi + A \cdot f(\omega t) = 0 \quad [8]$$

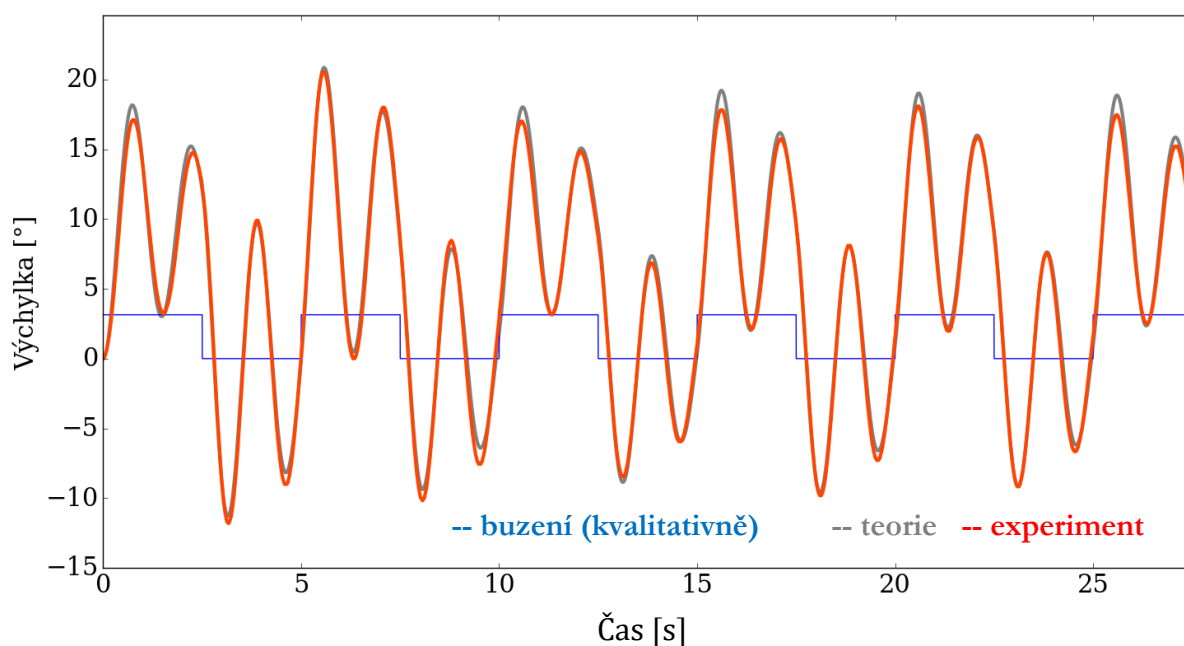
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } \sin x \geq 0 \\ 0 & \text{pokud } \sin x < 0 \end{cases}$$

Porovnáme-li diferenciální rovnice [5] a [8], obě rovnice popisují stejnou fyzikální realitu, přirozeně tlumené kmitání kyvadla, které je buzené externí periodickou silou. Rovnice [8] je pouze pozměněna tak, aby po stránce buzení i tlumení ideálně popisovala jednotlivé experimenty.

### 5.2 Konkrétní ukázka shody experimentu a numerického řešení

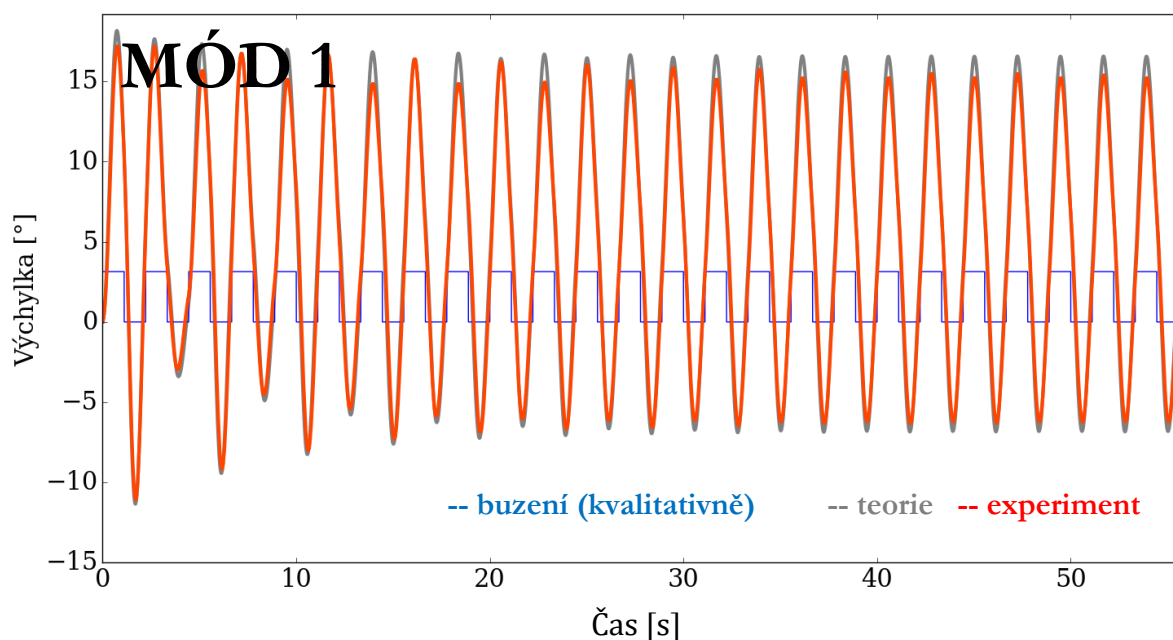
Dále uvedeme porovnání teorie a experimentu při různých módech chování kyvadla. Amplitudu uvádíme v sekundách na méně druhou (resp. v radiánech krát sekunda na méně druhou), neboť se jedná o „amplitudu zrychlení“ vyvolanou externí silou. Počáteční výchylka je nulová, buzení spouštíme ve fázi nula (bez fázového posunu).

Graf 28 – frekvence buzení  $f = 0.20$  Hz, amplituda  $A = 3.14 \text{ s}^{-2}$



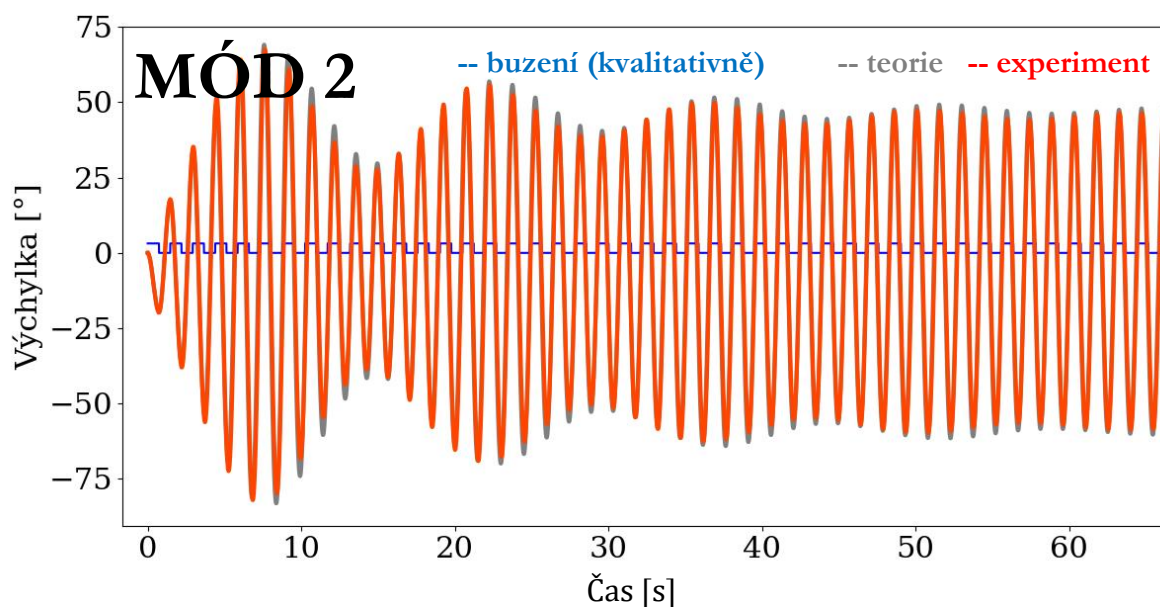
Předchozí graf ukazuje, že diferenciální rovnice předpovídají i komplikovaný vývoj kmitů velice přesně. Výsledky uvádíme tak, jak jsou, bez jakékoliv modifikace, se vstupními podmínkami dříve zjištěnými z jednotlivých experimentů. Shoda je ve všech případech výborná.

Graf 29 – frekvence buzení  $f = 0.45$  Hz, amplituda  $A = 3.14$  s<sup>-2</sup>



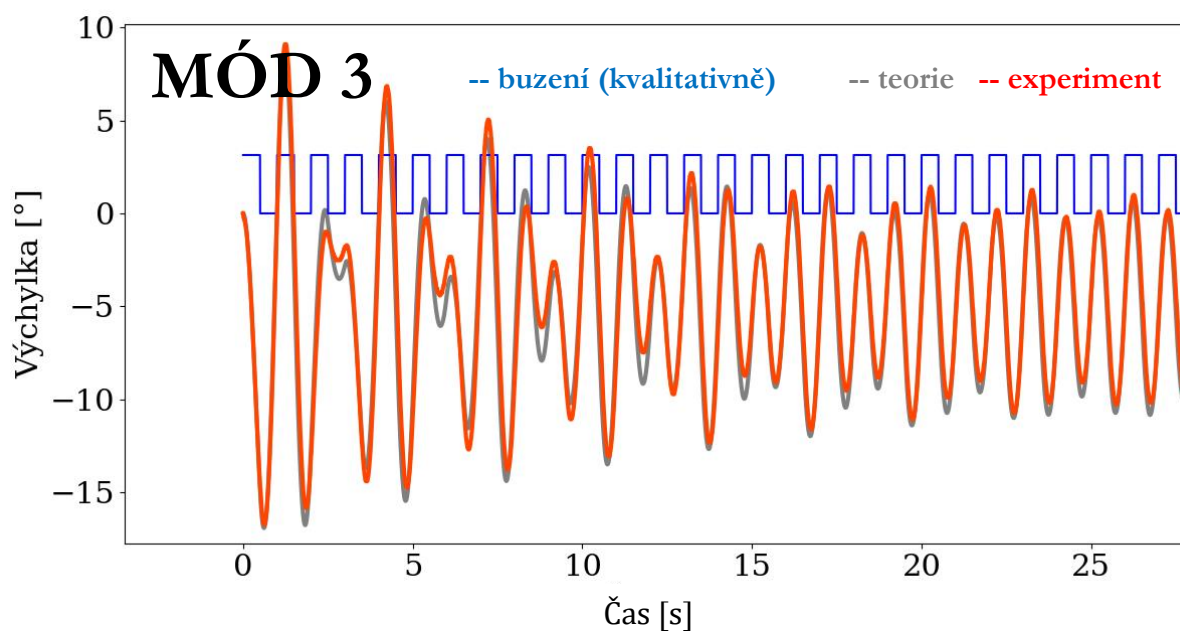
Graf 29 – jednoduché malé kmity při buzení pod vlastní frekvencí kyvadla, typický průběh.

Graf 30 – frekvence buzení  $f = 0.683$  Hz, amplituda  $A = 3.14$  s<sup>-2</sup>



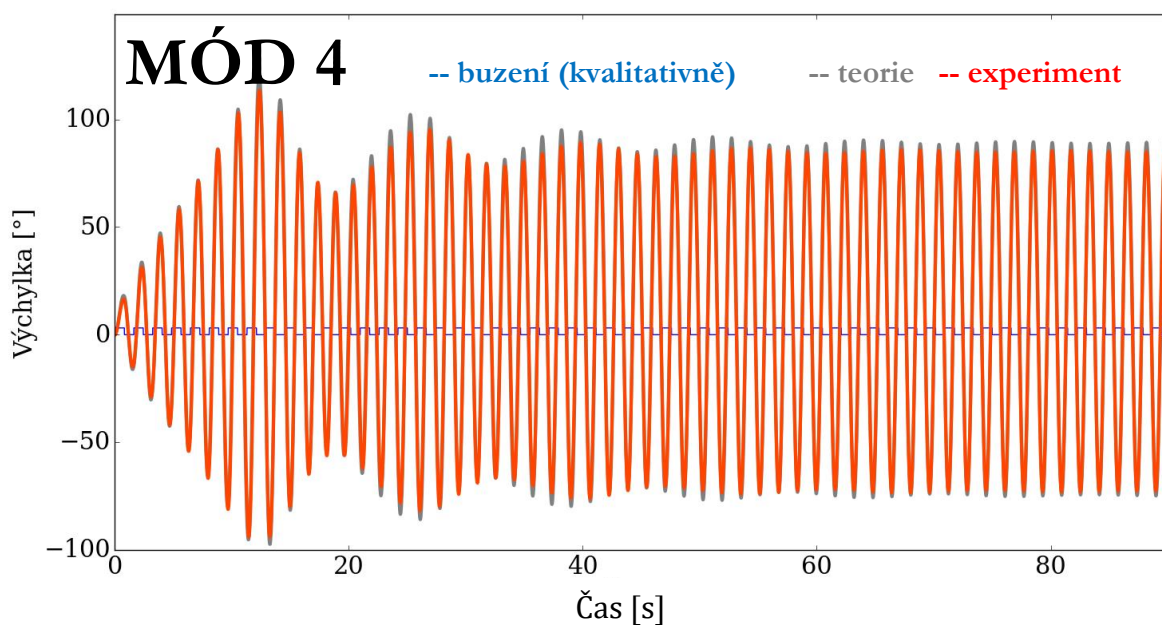
Graf 30 – po ustálení poměrně velké stabilní kmity při  $f_B = f_0$ .

Graf 31 – frekvence buzení  $f = 1 \text{ Hz}$ , amplituda  $A = 3.14 \text{ s}^{-2}$



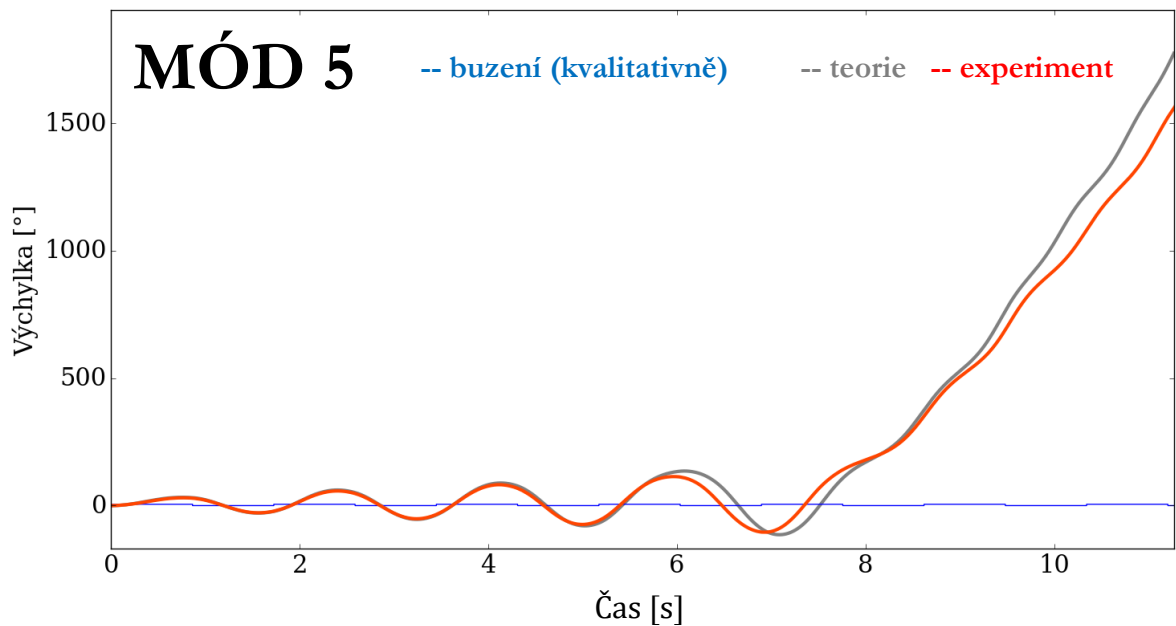
Graf 31 – po komplikovaném vývoji během ustalování stabilní malé kmity, je dobře zřejmá asymetrickost (posun na vertikální ose) v důsledku nesymetrického buzení.

Graf 32 – frekvence buzení  $f = 0.62 \text{ Hz}$ , amplituda  $A = 3.14 \text{ s}^{-2}$



Graf 32 – mód harmonizace vysokou amplitudou, kyvadlo se vysokou výchylkou nastavuje na frekvenci buzení. Velmi vysoká amplituda.

Graf 33 – frekvence buzení  $f = 0.58 \text{ Hz}$ , amplituda  $A = 5.39 \text{ s}^{-2}$



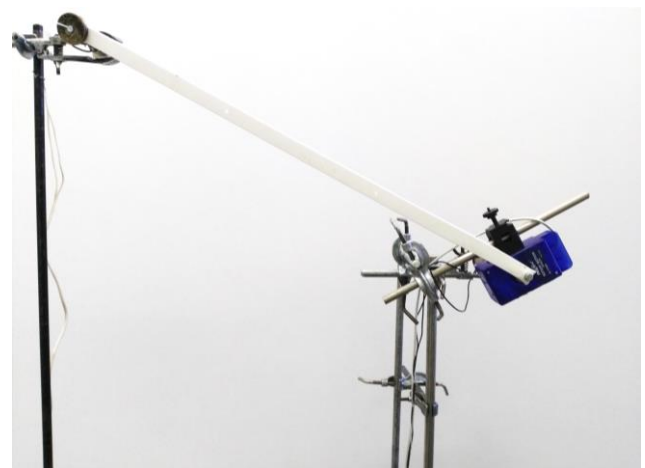
Graf 33 – kyvadlo je z klidové pozice vlivem působící síly rozkmitáno do kritických úhlů ( $160^\circ$  a více), až se přetočí a začne rotovat.

Shoda teorie a experimentu je zpočátku velice dobrá, při extrémně velkých výchylkách se již kyvadlo chová nestandardně a po přetočení vykazuje často známky chaotického pohybu (což není v případě nelineárních oscilátorů nepředvídatelné), jako částečně i v tomto případě, kdy začíná po přetočení růst chyba mezi teorií a experimentem.

### 5.3 Kritická amplituda

Jak již bylo zmíněno, při buzení v určitém frekvenčním rozsahu pod vlastní frekvenci kyvadla se rozvíjí nejzajímavější oscilační mód 4, je-li amplituda buzení vyšší než kritická amplituda; je-li amplituda buzení nižší, rozvíjí se oscilační mód 1.

Abychom mohli prozkoumat kritickou amplitudu v širokém frekvenčním rozpětí, uvolňujeme kyvadlo z velké amplitudy (zde  $120^\circ$ ). Kyvadlo spouštíme velice přesně ve fázi s buzením díky elektromagnetu řízeném Arduinem, který kyvadlo ve správném okamžiku uvolní.

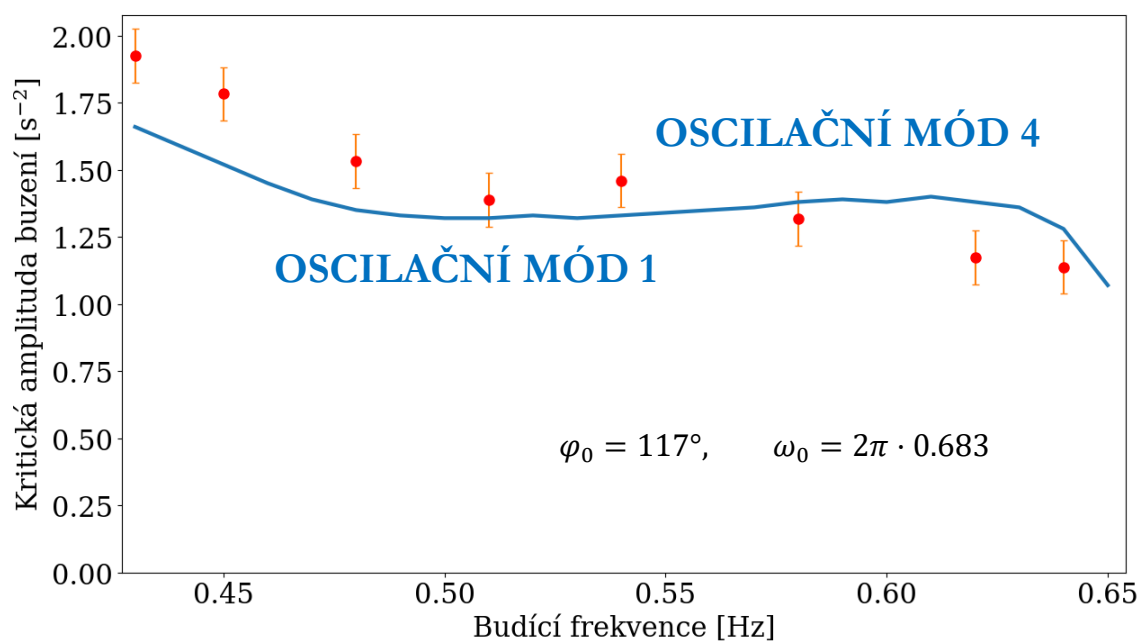


Obrázek 6

Porovnání teorie a experimentu je následující (modrá křivka je dána mnohačetným řešením poslední diferenciální rovnice):



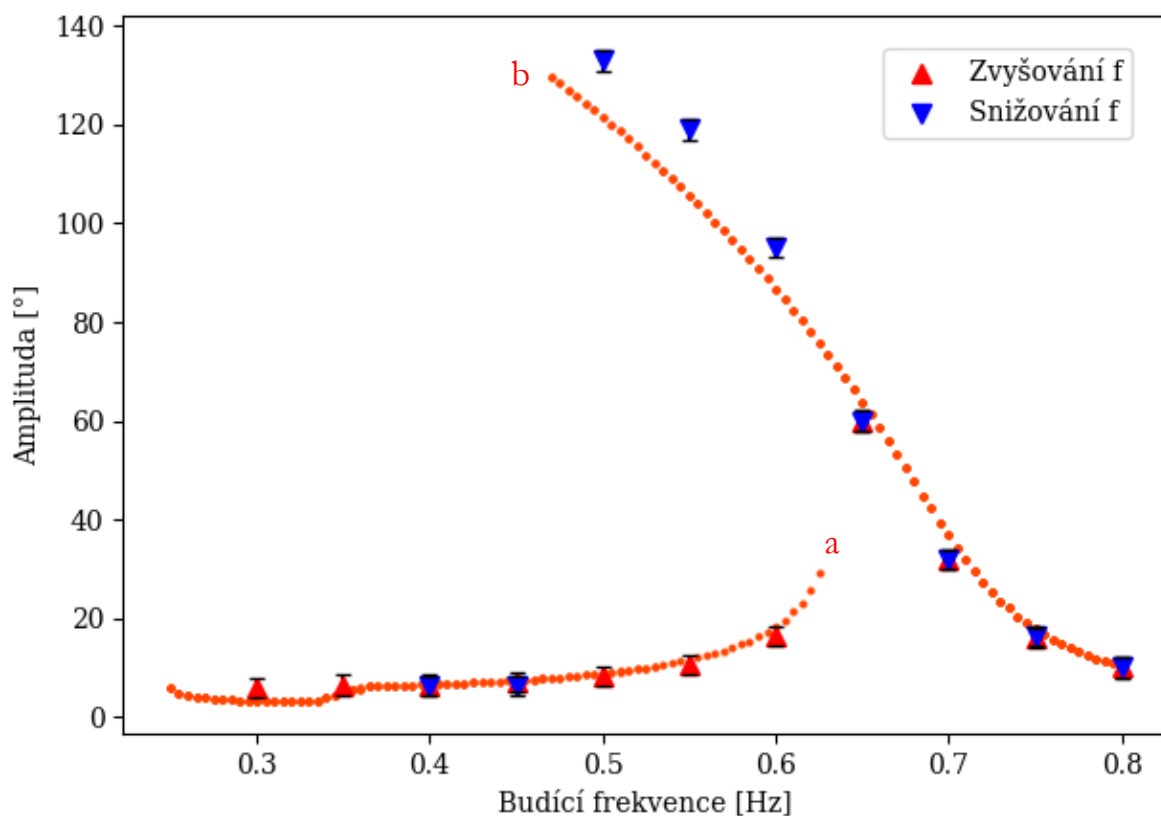
Graf 34 – kritická amplituda – teoretická předpověď a experimentální data



#### 5.4 Rezonanční křivka

Rezonanční křivka pro použité kyvadlo a dané konstanty (včetně experimentálních dat):

Graf 35 – rezonanční křivka kyvadla,  $A = 2 \text{ (s}^{-2}\text{)}$



Zobrazená rezonanční křivka je dána mnohonásobným řešením diferenciální rovnice a je proložena výsledky dvou experimentů.

V případě prvního experimentu bylo kyvadlo buzeno na počátku nízkou frekvencí (0.3 Hz), která byla v pravidelných intervalech navyšována o 0.05 Hz)

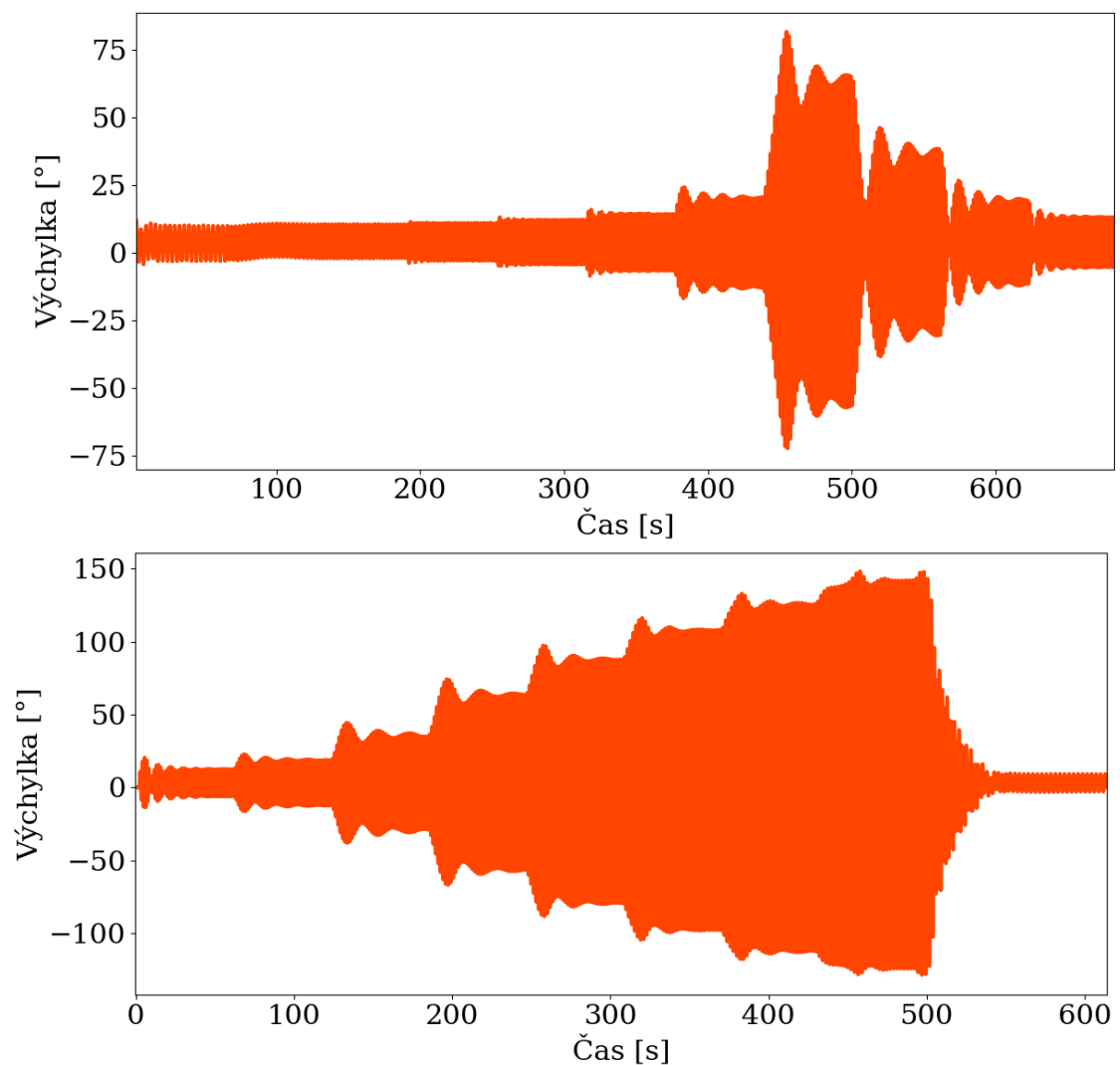
Druhý experiment probíhal obdobně, počáteční frekvence buzení (0.8 Hz) byla postupně snižována.



Obrázek 7 – Elektronika ovládající aparaturu

Oba experimenty byly bezobslužně řízeny Arduinem, nedocházelo tedy k přímému ovlivnění či zásahu do měření. Průběhy jednotlivých experimentů:

Graf 36 – zvyšování a snižování frekvence



Výsledky jednotlivých experimentů téměř bezechyby potvrzují očekávání. Při **zvyšování** budící frekvence se výsledná amplituda jemně zvyšuje až na konec křivky „a“, poté dochází k přeskoku na křivku „b“ a postupnému snižování.

Naopak v druhém případě při **snižování** budící frekvence se amplituda zvyšuje do velkých hodnot na konci křivky „b“, poté dochází k seskoku na křivku „a“, přičemž amplituda kmitů prudce poklesne.

Setkají-li se v jednom bodě jedné ze dvou křivek dvě experimentální hodnoty, rozdíl mezi nimi je zanedbatelně malý (experimenty jsou dobře reprodukovatelné). Tyto dvojice překrývajících se bodů nejsou na první pohled v grafu dobře patrné.

Shoda experimentu a teorie je výborná pro všechny amplitudy, kromě několika málo nejvyšších. Vysvětlení s největší pravděpodobností spočívá v tlumení. Tlumící síly budou zřejmě při takto vysokém rozkmitu lehce odlišné oproti přiblížení, které nabízí řešená diferenciální rovnice. Dalším možným vysvětlením by mohly být otřesy aparatury při velkých rychlostech apod.

## 6 ZÁVĚR

Tato práce se zabývá fyzikálním kyvadlem coby nelineárním oscilátorem a důsledky, které nelinearita má v souvislosti s různými typy buzení.

Na základě numerických řešení diferenciální rovnice se podařilo popsat chování kyvadla, typově i ve specifických příkladech. Mnohočetné řešení diferenciálních rovnic umožnilo vznik rozličných grafů popisujících specifické závislosti.

Dalším aspektem této práce bylo vysvětlení, proč se kyvadlo vždy přizpůsobí frekvenci buzení a jakým způsobem. Faktory, díky kterým je po ustálení frekvence kyvadla vždy rovna frekvenci buzení, jsou budící síly jako takové, tlumící síly a úhlový rozkmit.

Vzhledem k tomu, že frekvence kyvadla klesá s úhlovým rozkmitem, pozorujeme zajímavý oscilační mód s velkou amplitudou kmitů, je-li frekvence buzení o něco menší než  $f_0$ .

V této práci rozlišujeme čtyři oscilační módy v závislosti na frekvenci buzení:

1. frekvence buzení ostře menší než  $f_0$
2. frekvence buzení přibližně stejná jako  $f_0$
3. frekvence buzení vyšší než  $f_0$
4. frekvence buzení o něco menší než  $f_0$

V případě, že dochází k přetočení kyvadla, vykazuje kyvadlo často známky chaotického chování.

Experimentální výsledky velmi dobře potvrdily věrohodnost matematického popisu a naměřené výsledky výborně zapadají do obrazu **resonanční křivky buzeného tlumeného kyvadla**.

## 7 REFERENCE

1. **A. Beléndez, C. Pascual, D.I. Méndez, T. Beléndez, C. Neipp.** Exact solution for the nonlinear pendulum. *Rev. Bras. Ensino Fis.* 29, 2007.
2. **Enns, R.H., McGuire, G.C.** Nonlinear Resonance Curve: Mechanical. *Nonlinear Physics with Mathematica for Scientists and Engineers.* Boston : Birkhäuser, Boston, MA, 2004.
3. **Butikov, Eugene I.** Extraordinary oscillations of an ordinary driven pendulum. *European Journal of Physics.* 29, 2008.
4. **Ivan Skhem Sawkmie, Mangal C. Mahato\*.** The Two Dynamical States of a Driven Underdamped Classical Pendulum. [Online] 2016. arXiv:1608.06138.
5. **Hu, Hao.** Analysis of the Mechanical Characteristics And Determination of Power Relationship for DC Motor. *Procedia Engineering.* 2011, stránky 531-535.
6. **D. Kharkongor, Mangal C. Mahato.** Resonance oscillation of a damped driven simple pendulum. [Online] 2017. arXiv:1712.01032.