STŘEDOŠKOLSKÁ ODBORNÁ ČINNOST

Zajímavé číselné konfigurace

Jakub Havlíček

Jan Tóth

Teplice 2015

STŘEDOŠKOLSKÁ ODBORNÁ ČINNOST

Obor SOČ: 1. Matematika a statistika

Zajímavé číselné konfigurace

Interesting Numerical Configurations

Autoři: **Jakub Havlíček**

Jan Tóth

Škola: Gymnázium Teplice

Čs. dobrovolců 11

415 01 Teplice

Kraj: Ústecký

Konzultant: **Prof. RNDr. Jiří Cihlář, CSc.**
Katedra matematiky, Přírodovědecká fakulta UJEP
Ústí nad Labem

Teplice 2015

Prohlášení

Prohlašujeme, že jsme naši práci SOČ vypracovali samostatně a použili jsme pouze podklady uvedené v seznamu vloženém v práci SOČ.

Prohlašujeme, že tištěná verze a elektronická verze soutěžní práce SOČ jsou shodné.

Nemáme závažný důvod proti zpřístupňování této práce v souladu se zákonem č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon) v platném znění.

V Teplicích dne ……………   podpisy: …………………   ……………………

Poděkování

Děkujeme panu prof. Jiřímu Cihlářovi za obětavou pomoc a podnětné připomínky, které nám během práce poskytoval. Také si velice vážíme pomoci našich vyučujících matematiky Mgr. Blanky Dvořákové a RNDr. Věry Ševčíkové.

ANOTACE

Naše práce se zabývá matematickými číselnými konfiguracemi. Vysvětluje tento pojem i jeho problematiku a snaží se čtenáře vtáhnout do světa matematiky. Jmenovitě sleduje Pascalův či Ragnarův trojúhelník nebo magické pravoúhelníky.

Klíčová slova: *číselná konfigurace; Pascalův trojúhelník; magický čtverec; magický obdélník; kytičkové věty*

ANNOTATION

Our work follows up mathematical numerical configurations. It explains this concept and its issue and tries to draw the reader into the world of mathematics. It particularly follows up Pascal's or Ragnar's triangle or magical rectangles.

Keywords: *numerical configuration; Pascal's triangle; magical square; magical rectangle; flower theorems*

Obsah

1. Úvod

Naše práce se zabývá matematickými číselnými konfiguracemi. Matematické číselné konfigurace jsou unikátní uspořádání čísel s někdy až podivuhodnými vlastnostmi, které jsou mnohdy, jak jsme pocítili na vlastní kůži, důkladně skryty. Konkrétně se budeme věnovat číselným konfiguracím, jako jsou Pascalův či Ragnarův trojúhelník nebo magické pravoúhelníky. V magických pravoúhelnících, jež spadají do oboru takzvané rekreační matematiky, se zaměříme především na magické obdélníky, jelikož na ně není upřeno tolik pozornosti, kolik si zaslouží.

Naše práce slouží k rozšíření matematických znalostí studentů gymnázií i jiných středních škol. Vycházíme ze základních znalostí a poznatků, které jsme na střední škole nabyli. Přejeme si, aby vás tematika naší práce zaujala natolik, jako zaujala nás.

2. Trojúhelníkové konfigurace

2.1. Pascalův trojúhelník

2.1.1. Seznámení

Pascalův trojúhelník je velice zajímavá a tajuplná číselná konfigurace proslavená díky své symetrii a skrytým vztahům. Můžete v něm objevit velké množství identit, z nichž jen malá část byla zmapována. V této kapitole se na Pascalův trojúhelník zaměříme a ukážeme vám známé i méně známé vlastnosti – některé námi objevené. Některé z vlastností, které vám představíme, mohou mít i praktické využití. Všechny jsou velmi zajímavé a stojí za to jim věnovat svou pozornost.

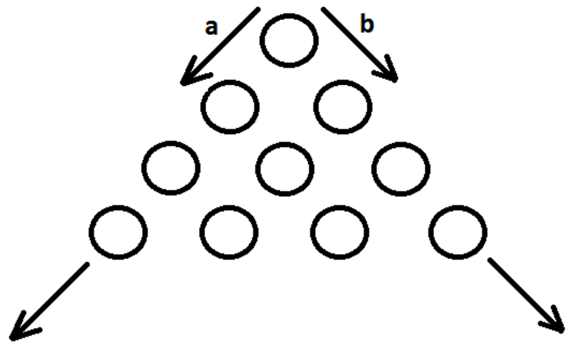
Pascalův trojúhelník nese jméno francouzského matematika, fyzika a spisovatele Blaise Pascala. Blaise Pascal ale ani zdaleka nebyl prvním, kdo se touto konfigurací zabýval. Trojúhelník, který dnes nazýváme Pascalův, byl znám už učencům středověké Číny (zabývali se jím JiaXian v 11. století nebo YangHui ve 13. století) či Persie (Al-Karaji v 10. století nebo Omar Khayyám v 11. století), kteří pro něj ale neměli široké využití. Blaise Pascal se tímto trojúhelníkem začal zabývat v polovině 17. století, kdy shromáždil veškeré poznatky již zmíněných matematiků, sepsal je do jedné knihy a sám začal v trojúhelníku hledat různé skryté vlastnosti.

Obr. 1

2.1.2. Definice

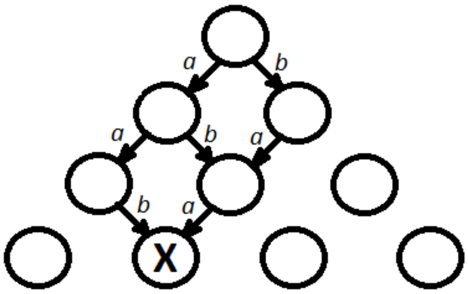
Než zapíšeme přesnou definici, nastiňme si nejdříve, jak se tato číselná konfigurace tvoří.

Uvažujme následující nekonečné schéma:



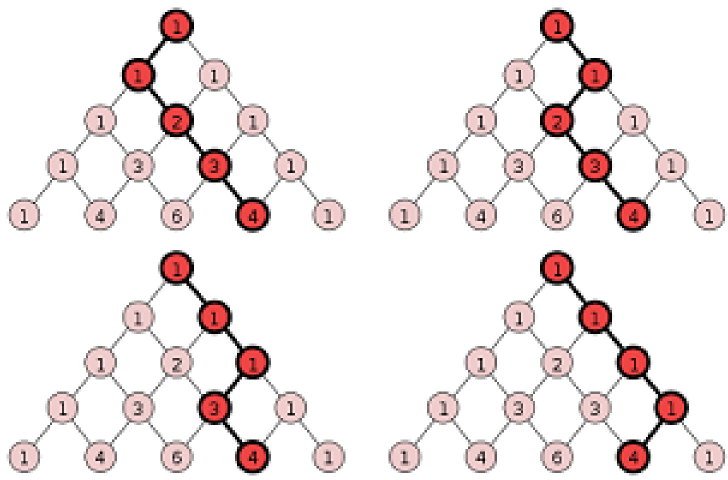
Existují právě dva směry, označme je *a*, *b*, kterými se lze ve schématu pohybovat (viz obrázek). Do políček schématu vpisujeme počet cest, kterými lze z nejhořejšího políčka do daného políčka dojít. Řekněme ještě, že do nejhořejšího políčka vede právě jedna cesta. Schéma se nazývá Pascalův trojúhelník – v naší práci je často označován zkratkou PT.

Příklad:



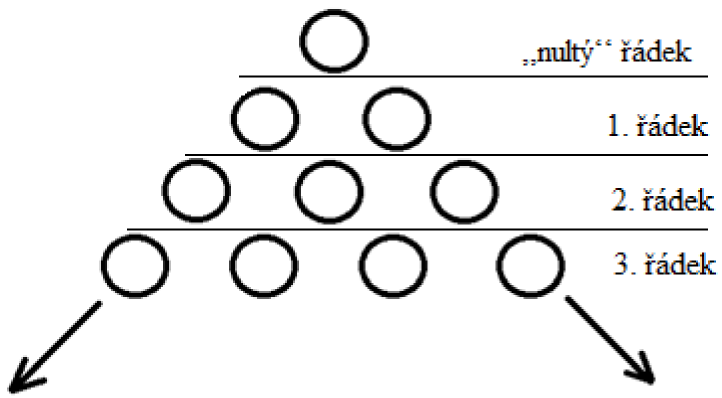
Do políčka X vedou tyto tři cesty: *aab*, *aba*, *baa*. A proto číslo, které vepíšeme do políčka X, je 3.

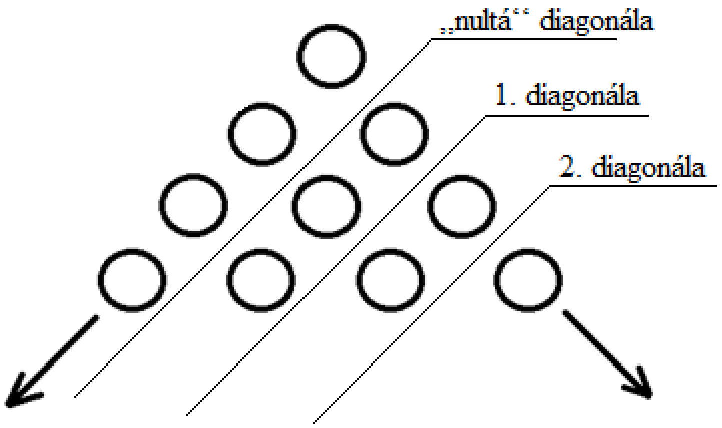
Pro jistotu uveďme ještě jeden názorný příklad:



Obr. 2

Očíslujme si nyní řádky a diagonály PT:





Definice: Číslo $C(n,k) \wedge n,k \in N_0 \wedge n \geq k$ definujme takto:

- Pro všechna n platí, že $C(n,0) = C(n,n) = 1$.
- Pro všechna $n \geq 1 \wedge k < n$ platí, že $C(n+1,k+1) = C(n,k) + C(n,k+1)$

Písmenem *n* rozumíme řádek PT a písmenem *k* rozumíme diagonálu PT.

První bod definice znamená, že se v krajních diagonálách objevují pouze jedničky, protože do tamějších políček vede pouze jedna cesta.

Do políček, jež neleží v krajních diagonálách, vedou cesty pouze ze dvou políček, která se nacházejí přímo nad ním. Celkový počet cest vedoucích do takových políček je tedy roven součtu počtů cest, které vedou do dvojice políček nad nimi. To je patrné z druhého bodu definice.

Nyní ještě uvedeme souvislost mezi číslem $C(n,k)$ a kombinačním číslem. Kombinační číslo $\binom{n}{k}$; $n \geqq k \wedge n \in N_0 \wedge k \in N_0$ je definováno takto:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Více o kombinačních číslech a jejich vlastnostech, stejně jako vlastnostech faktoriálů, lze nalézt v učebnici *Matematika pro gymnázia Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika*.

Věta: $\mathrm{C(n,k)} = \binom{\mathrm{n}}{\mathrm{k}}$

Důkaz[1]: Důkaz provedeme matematickou indukcí

I. n libovolné, k = 0 nebo k = n

$$C(n,0) \stackrel{?}{=} \binom{0}{0} \wedge C(n,n) \stackrel{?}{=} \binom{n}{n}$$

$$1 = 1 \wedge 1 = 1$$

II.

$$\forall\, n,k \in N_0; n \geqq k: \left\{[C(n,k) = \binom{n}{k}] \wedge [C(n,k+1) = \binom{n}{k+1}]\right\}$$
$$\Rightarrow [C(n+1,k+1) = \binom{n+1}{k+1}]$$

Nechť předpoklad platí, pak

$$C(n,k) + C(n,k+1) \stackrel{?}{=} \binom{n+1}{k+1}$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} \stackrel{?}{=} \binom{n+1}{k+1}$$

$$\frac{n!}{k!\,(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!} \stackrel{?}{=} \frac{(n+1)!}{(k+1)!\,(n-k)!}$$

$$\frac{n!}{k!\,(n-k)(n-k-1)!} + \frac{n!}{(k+1)k!\,(n-k-1)!} \stackrel{?}{=} \frac{(n+1)n!}{(k+1)k!\,(n-k)(n-k-1)!}$$

$$\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k+1} \stackrel{?}{=} \frac{n+1}{(k+1)(n-k)}$$

$$\frac{n-k+k+1}{(k+1)(n-k)} \stackrel{?}{=} \frac{n+1}{(k+1)(n-k)}$$

$$1 = 1$$

Q.E.D.

1) Znak rovnítka s otazníkem ($\stackrel{?}{=}$) používaný v důkazech vyjadřuje předpokládanou, avšak nedokázanou rovnost.

Takto vypadá schéma PT, pokud políčka vyjádříme pomocí kombinačních čísel:

$$
\begin{array}{c}
\binom{0}{0} \\[6pt]
\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1} \\[6pt]
\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2} \\[6pt]
\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3} \\[6pt]
\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4} \\[6pt]
\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5}
\end{array}
$$

Obr. 3

Vyjádříme-li si kombinační čísla v PT nebo čísla udávající počet cest, můžeme si všimnout, že součet dvou sousedních čísel na řádku se nachází mezi nimi o řádek níž. Vyplývá to z druhého bodu definice $C(n+1, k+1) = C(n, k) + C(n, k+1)$. Bez znalosti jakékoliv definice si tak může PT sestavit úplně každý.

$$
\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1 \\
1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1
\end{array}
$$

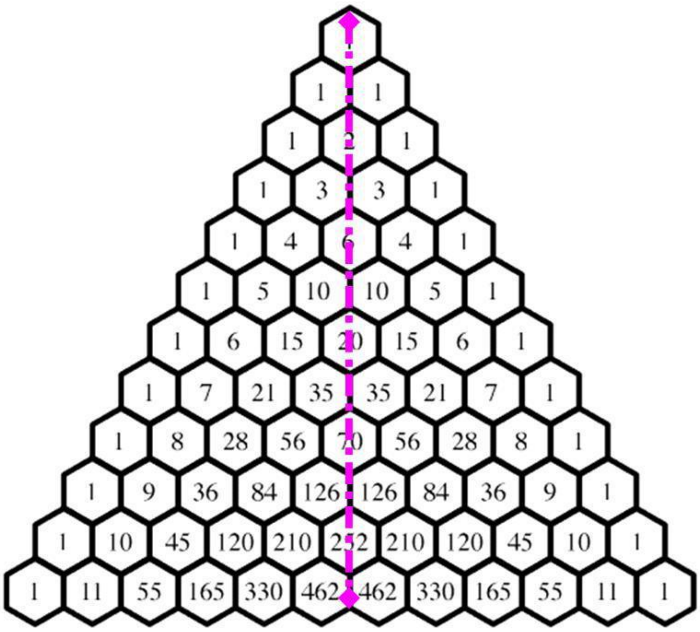
Obr. 4

2.1.3. Identity v Pascalově trojúhelníku

Symetrie Pascalova trojúhelníku

Věta: Pascalův trojúhelník se všemi svými členy je symetrický podle osy vedené jeho jediným vrcholem kolmo k jeho řádkům.

Příklad:



Obr. 5

Ukázaná část Pascalova trojúhelníku je symetrická.

Důkaz: Důkazem tohoto tvrzení budiž vlastnost kombinačních čísel, která říká, že se počet prvků jejich doplňkových množin rovná.

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Členy ležící na ose jsou samodružné body, které se zobrazí samy na sebe, a tudíž symetrii neporušují.

S ohledem na tuto vlastnost je možné uvažovat dva různé směry diagonál (v definici PT označeny písmeny *a* a *b*. Pracovat budeme převážně s *a*-diagonálami. Na případné výjimky předem upozorníme.

Mocniny dvou na řádcích Pascalova trojúhelníku

Věta: Součet všech členů n-tého řádku Pascalova trojúhelníku je roven číslu 2^n.

Příklad:

$$1 = 2^0 = 1$$
$$1 + 1 = 2^1 = 2$$
$$1 + 2 + 1 = 2^2 = 4$$
$$1 + 3 + 3 + 1 = 2^3 = 8$$
$$1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 2^4 = 16$$
$$1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 2^5 = 32$$
$$1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 2^6 = 64$$
$$1 + 7 + 21 + 35 + 35 + 21 + 7 + 1 = 2^7 = 128$$

Obr. 6

Důkaz: Důkaz provedeme pomocí binomické věty. Členy jednotlivých řádků Pascalova trojúhelníku jsou binomické koeficienty. Za účelem sčítání pouze samotných koeficientů tedy budeme umocňovat dvojčlen *(1+1)*.

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{a}^{\mathrm{n-k}} \mathrm{b}^{k} = (a+b)^n$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = (1+1)^n$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

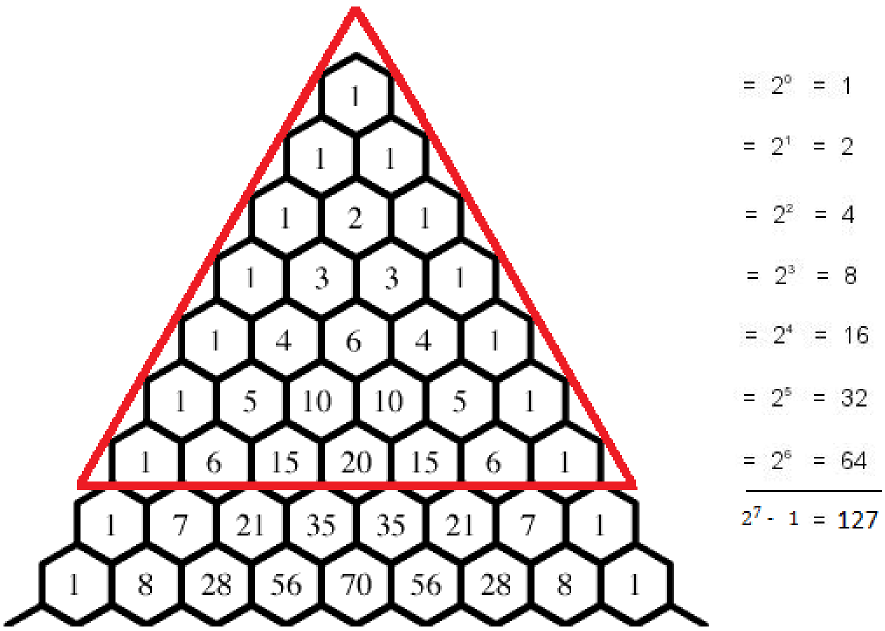
Q.E.D.

Trojúhelníkové součty řádků Pascalova trojúhelníku

Věta: Součet všech čísel Pascalova trojúhelníku od nultého řádku po n-tý řádek je roven číslu $2^{n+1} - 1$.

Příklad:

$n = 6$



Důkaz: Důkaz provedeme matematickou indukcí.

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n \stackrel{?}{=} 2^{n+1} - 1$$

I. $n = 0$

$$2^0 \stackrel{?}{=} 2^1 - 1$$

$$1 = 1$$

II.

$$\forall\, n \in N_0\colon\ [2^0 + 2^1 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1] \implies$$

$$[\,2^0 + 2^1 + \dots + 2^n + 2^{n+1} = 2^{n+2} - 1]$$

Nechť předpoklad platí, pak

$$(2^{n+1} - 1) + (2^{n+1}) \stackrel{?}{=} 2^{n+2} - 1$$

$$2 * 2^{n+1} - 1 \stackrel{?}{=} 2^{n+2} - 1$$

$$2^{n+2} - 1 = 2^{n+2} - 1$$

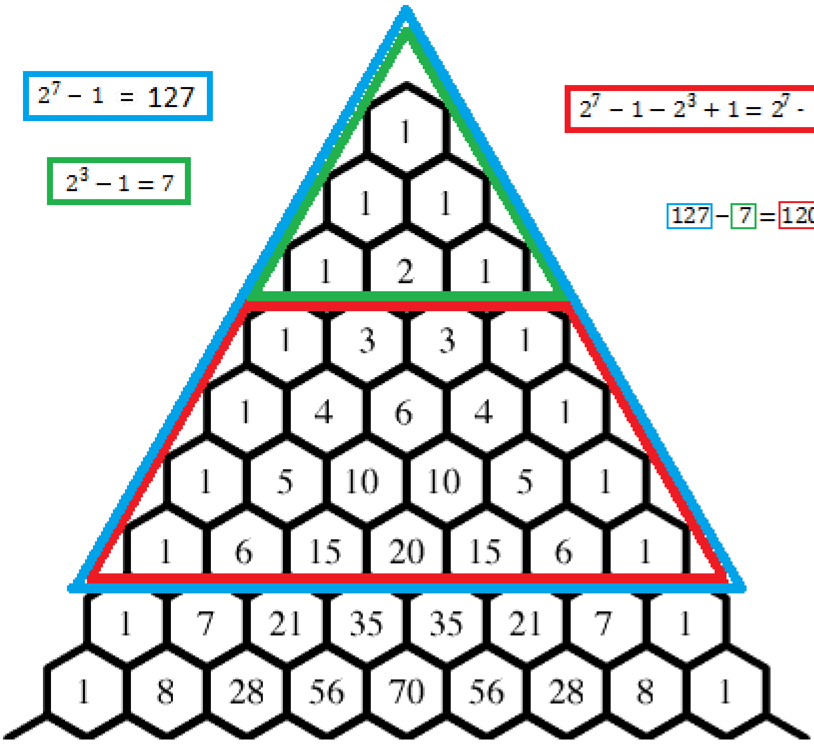
Q.E.D.

Lichoběžníkové součty řádků Pascalova trojúhelníku

Věta: Pro $m < n$ (m, n jsou přirozená čísla) platí, že součet od $(m+1)$-tého po n-tý řádek Pascalova trojúhelníku je roven $(2^{n+1} - 2^{m+1})$.

Příklad:

$m = 2$
$n = 6$



Důkaz: Z předešlého důkazu vyplývá:

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^m = 2^{m+1} - 1$$

A tedy platí:

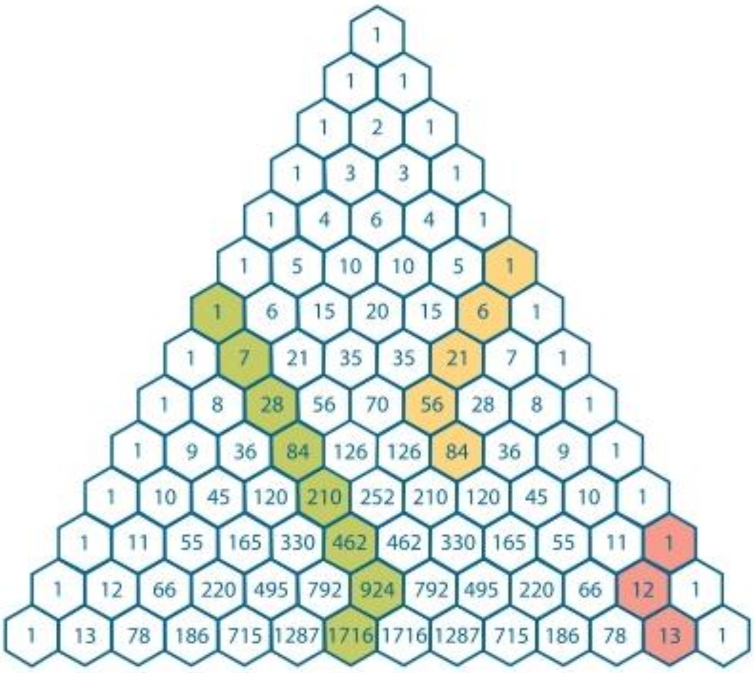
$$(2^{n+1} - 1) - (2^{m+1} - 1) = 2^{n+1} - 2^{m+1}$$

Q.E.D.

Diagonální součty do L v Pascalově trojúhelníku

Věta: Součet členů v k-té diagonále Pascalova trojúhelníku až po n-tý řádek je roven hodnotě členu na *(n+1)*-tém řádku a v *(k+1)*-té diagonále.

Příklad:



Obr. 7

Důkaz: Důkaz provedeme matematickou indukcí.

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \binom{k+2}{k} + \cdots + \binom{n}{k} \stackrel{?}{=} \binom{n+1}{k+1}$$

I. $n = k$

$$\binom{k}{k} \stackrel{?}{=} \binom{k+1}{k+1}$$

$$1 = 1$$

II. $\forall\, n, k \in N_0; k \leq n$:

$$\left[\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \binom{k+2}{k} + \cdots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \binom{k+2}{k} + \cdots + \binom{n}{k} + \binom{n+1}{k} = \binom{n+2}{k+1}\right]$$

Nechť předpoklad platí, potom

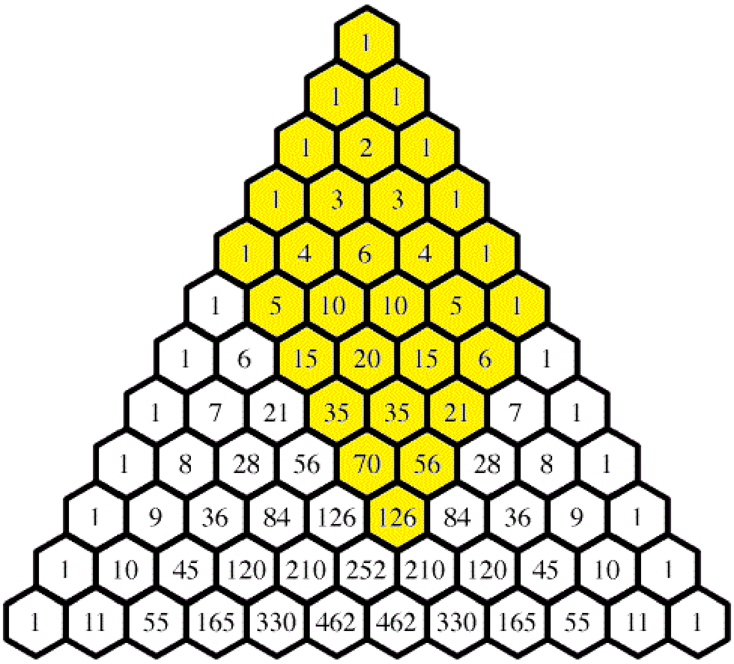
$$\binom{n+1}{k+1} + \binom{n+1}{k} \stackrel{?}{=} \binom{n+2}{k+1}$$

$$\binom{n+2}{k+1} = \binom{n+2}{k+1}$$

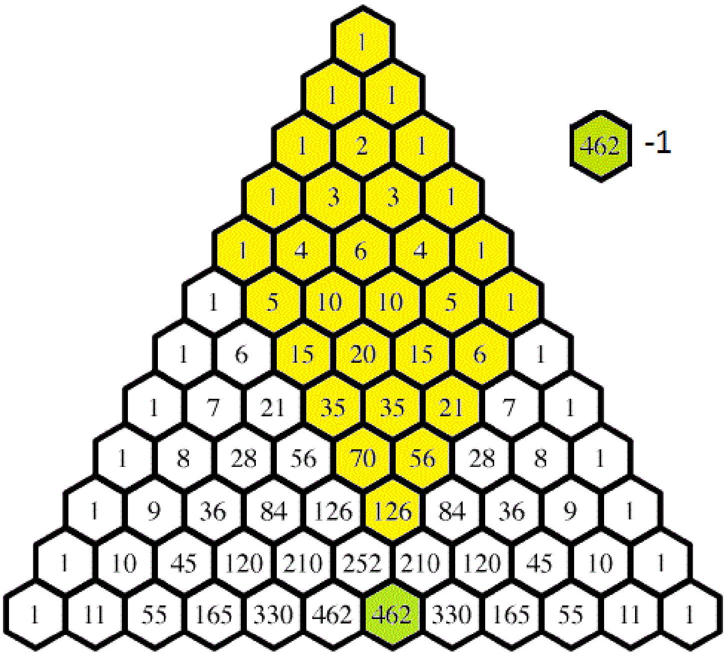
Q.E.D.

Jak je již z obrázku v příkladu jasné, tuto vlastnost lze pozorovat i v opačně orientovaných diagonálách Pascalova trojúhelníku. Je to dáno již dokázanou symetrií tohoto útvaru.

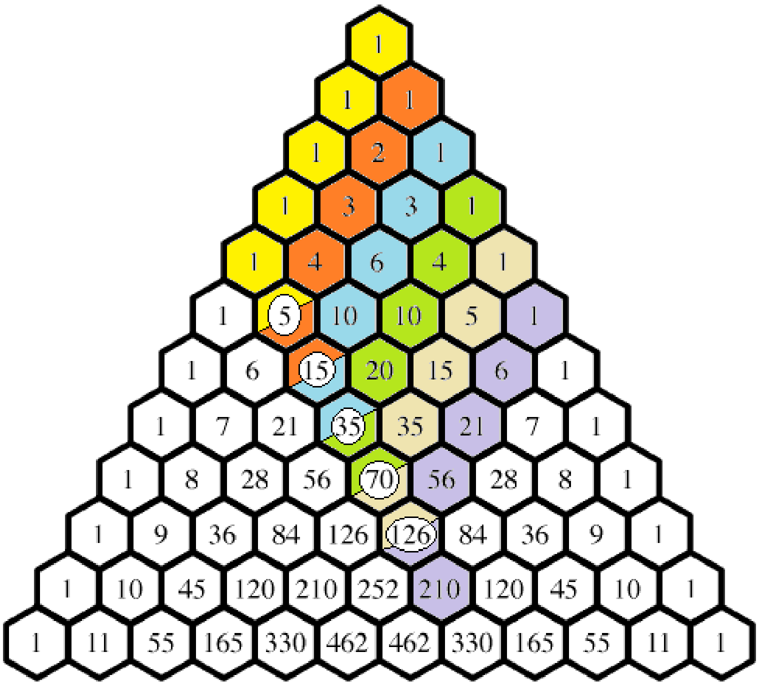
Dokážete nyní pomocí námi dokázané vlastnosti sečíst všechny členy takového útvaru?



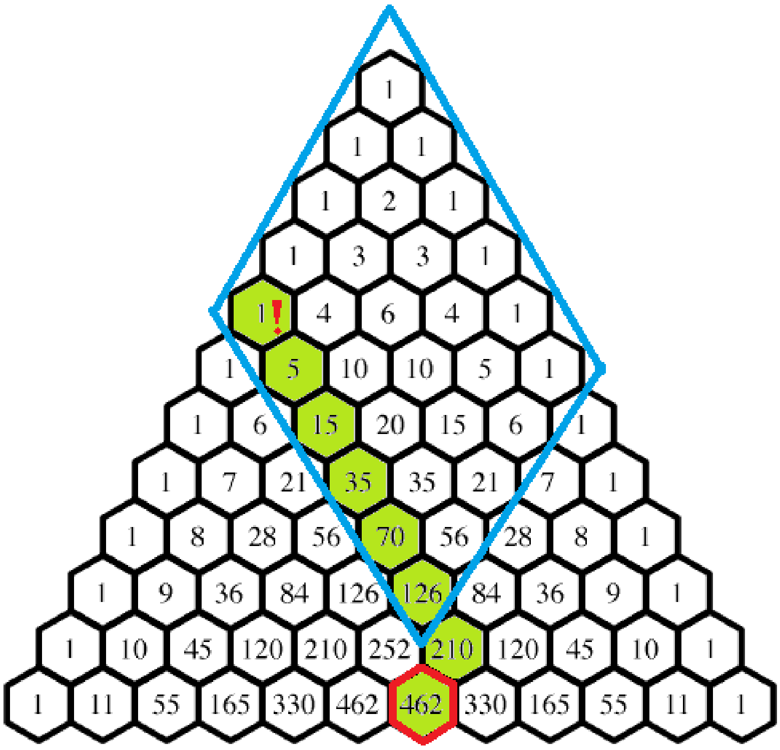
Řešení je velice prosté:



Rozdělme si daný útvar na jednotlivé diagonály, jejichž členy již sčítat umíme:



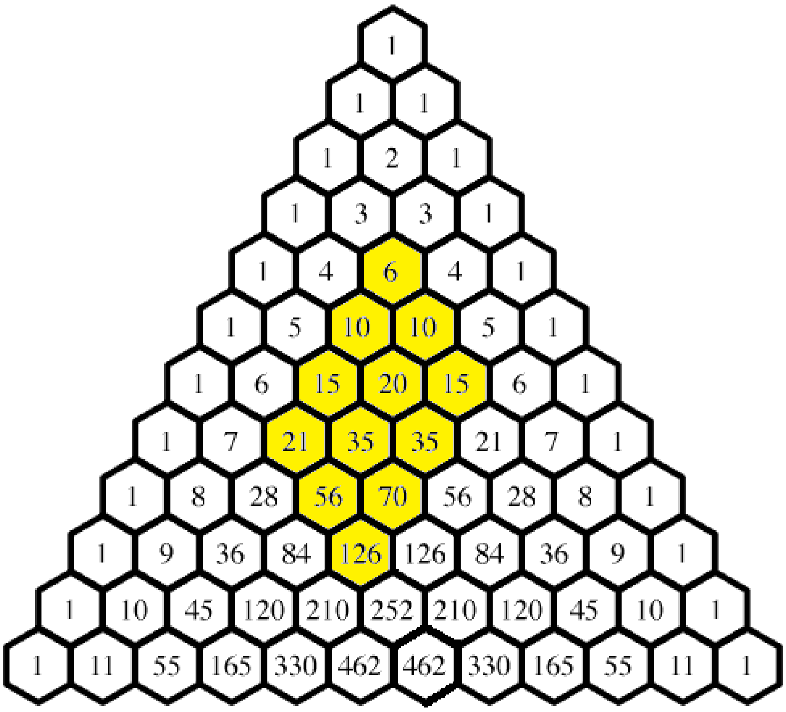
Součty jednotlivých diagonál tvoří novou diagonálu, jejíž součet nalezneme:



Tak dostaneme součet všech polí zvoleného obrazce. Jediný problém vzniká ve vykřičníkem označené jedničce, kterou jsme přičítali dvakrát, proto ji od výsledné hodnoty jednou odečteme.

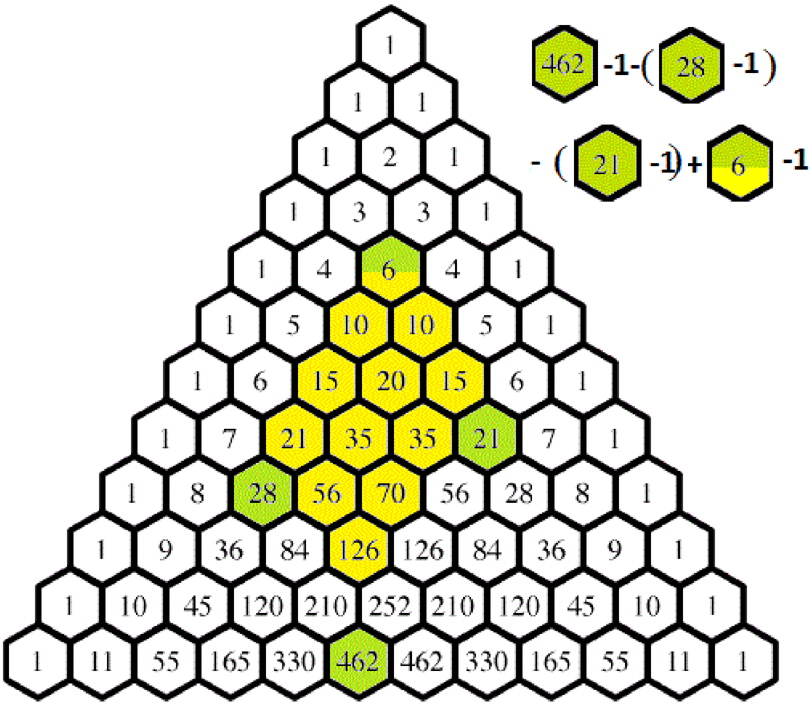
Pokud tedy pojmenujeme největší číslo vyznačeného útvaru $\binom{n}{k}$, výsledný součet všech členů náležících útvaru je roven číslu $\binom{n+2}{k+1} - 1$.

Zkusme nyní něco trochu obtížnějšího. Zvolme si rovnoběžník, který se nedotýká stran Pascalova trojúhelníku:



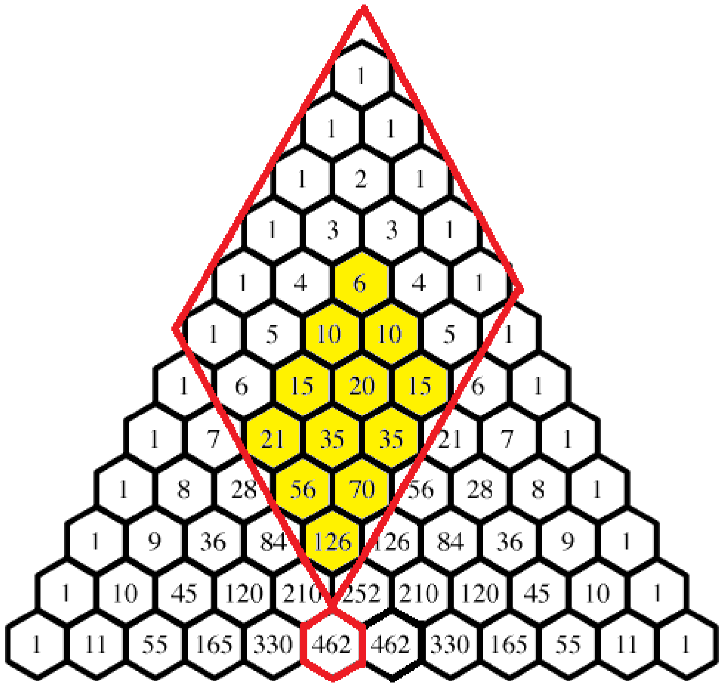
Dokážete najít součet tentokrát?

Ani tentokrát není řešení nijak složité:

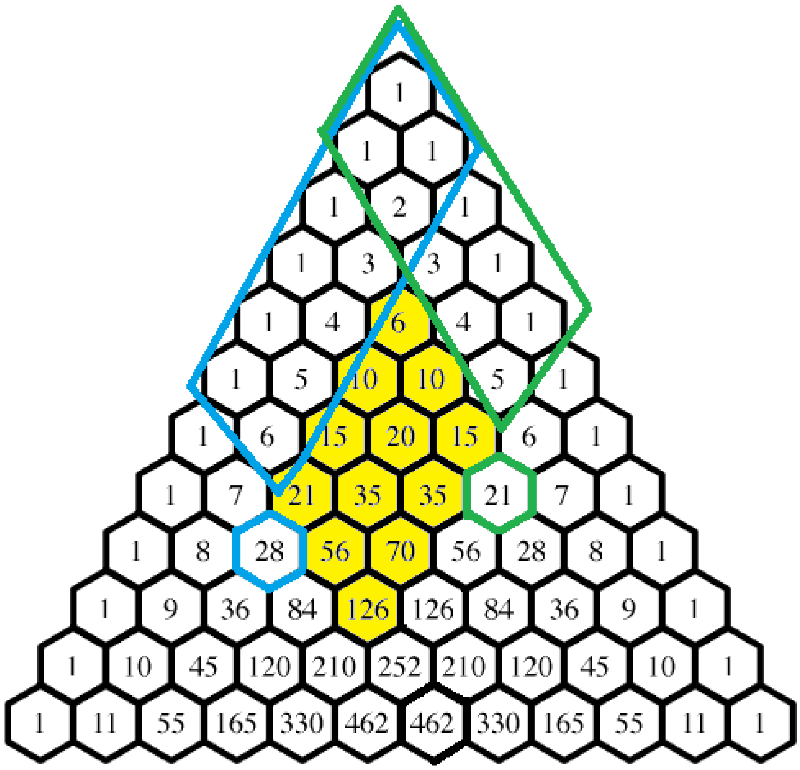


I u tohoto příkladu si podrobněji rozeberme postup, jakým je výsledek nalezen.

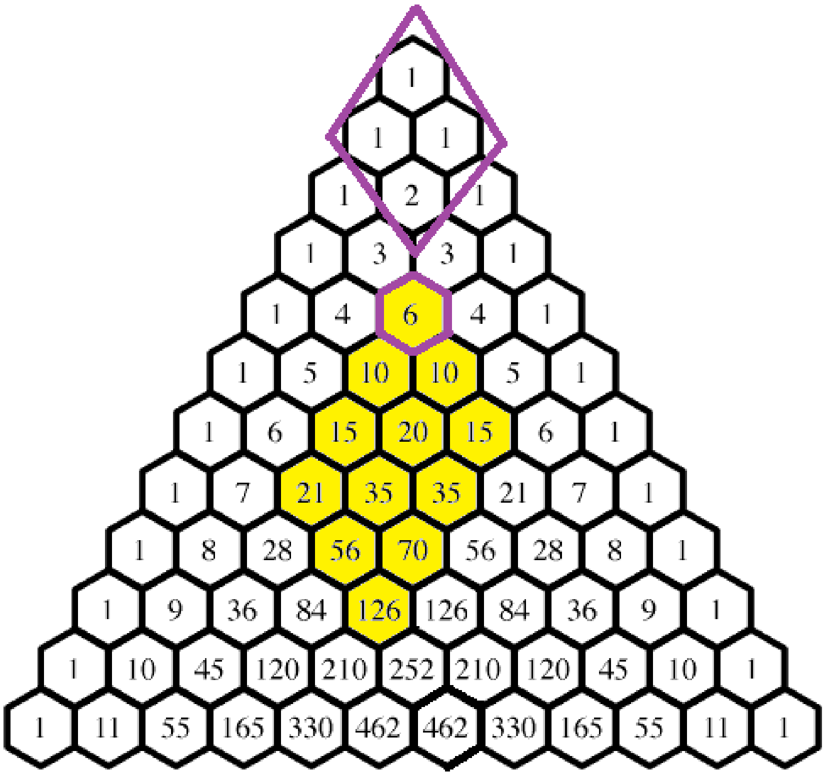
Začněme s tím, že dokážeme nalézt součet všech členů rovnoběžníku, který se stran Pascalova trojúhelníku dotýká:



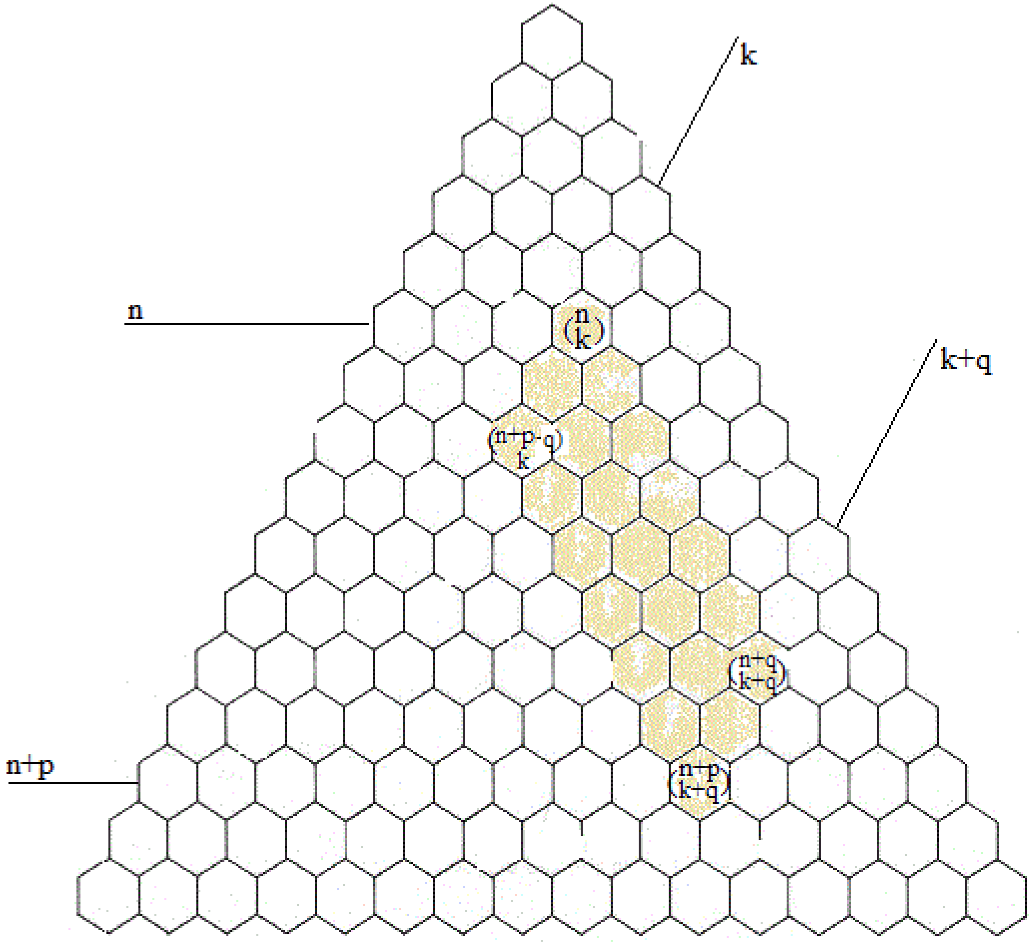
Víme, že součet tohoto útvaru je hodnota červeně vytaženého políčka zmenšená o jednu. Nyní ještě odečtěme hodnoty obrazců, které zvolenému rovnoběžníku nenáleží (jsou to modře a zeleně vytažené políčko, obě zmenšená o jednu):



Na závěr ale ještě musíme zpětně přičíst hodnotu obrazce, který byl od původního červeného rovnoběžníku odečten dvakrát, která je rovna hodnotě fialově vytaženého políčka zmenšené o jednu:



Rovnoběžník, který se nedotýká stran PT, můžeme obecně definovat takto:



Definuje ho číslo $\binom{n}{k}$; $n \geq 2 \wedge n > k > 0$ a přirozené parametry p a q, pro které platí, že $p > q > 0$.

Obecné řešení takovéhoto typu úloh vypadá takto:

$$\left[\binom{n+p+2}{k+q+1} - 1\right] - \left[\binom{n+q+1}{k+q+1} - 1\right] - \left[\binom{n+p-q+1}{k} - 1\right] + \left[\binom{n}{k} - 1\right]$$

$$\binom{n+p+2}{k+q+1} - \binom{n+q+1}{k+q+1} - \binom{n+p-q+1}{k} + \binom{n}{k}$$

Výčet členů řádků Pascalova trojúhelníku aneb řádky PT jako posloupnosti

Zkoumali jsme členy každého řádku PT, zda by bylo možné je vyjádřit obecně jako posloupnost. Každý řádek má právě *n+1* členů. Každý první (v našem případě ho budeme označovat nultý) a poslední člen řádku je vždy roven 1.

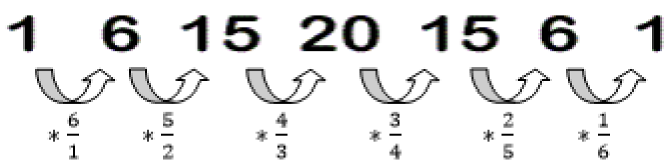
Věta:
Každý řádek PT lze vyjádřit jako posloupnost tímto rekurentním zápisem:

$$a_0 = \binom{n}{0} = 1$$

$$a_{k+1} = a_k * \frac{n-k}{k+1} \wedge k \in N_0$$

Člen a_k je číslo $C(n,k)$ a člen a_{k+1} je číslo $C(n,k+1)$.

Příklad:
6. řádek, *n* = 6



$$a_0 = 1$$

$$a_1 = a_0 * \frac{n-k}{k+1} = \binom{6}{0} * \frac{6-0}{0+1} = 6$$

$$a_2 = a_1 * \frac{n-k}{k+1} = \binom{6}{1} * \frac{6-1}{1+1} = 15$$

$$a_3 = a_2 * \frac{n-k}{k+1} = \binom{6}{2} * \frac{6-2}{2+1} = 20$$

$$a_4 = a_3 * \frac{n-k}{k+1} = \binom{6}{3} * \frac{6-3}{3+1} = 15$$

$$a_5 = a_4 * \frac{n-k}{k+1} = \binom{6}{4} * \frac{6-4}{4+1} = 6$$

$$a_6 = a_5 * \frac{n-k}{k+1} = \binom{6}{5} * \frac{6-5}{5+1} = 1$$

Důkaz:

$$\binom{n}{k} * \frac{n-k}{k+1} \stackrel{?}{=} \binom{n}{k+1}$$

$$\frac{n!}{(n-k)! * k!} * \frac{n-k}{k+1} \stackrel{?}{=} \binom{n}{k+1}$$

$$\frac{n!}{(n-k-1)! * (k+1)!} \stackrel{?}{=} \binom{n}{k+1}$$

$$\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k+1}$$

Q.E.D.

Poznámka: Na stránce jsme poprvé použili znak hvězdičky ($*$), který bude nahrazovat znak pro násobení. Udělali jsme to z důvodu lepší čitelnosti.

Výčet členů diagonál Pascalova trojúhelníku

Taktéž jsme zkoumali členy každé diagonály PT za stejným účelem. Každá diagonála má nekonečně mnoho členů, pokud tedy půjde o posloupnost, pak bude nekonečná. Každý první (pro nás opět nultý) člen je vždy opět roven 1. Závěr zde byl stejný, i každou diagonálu PT lze vyjádřit jako posloupnost.

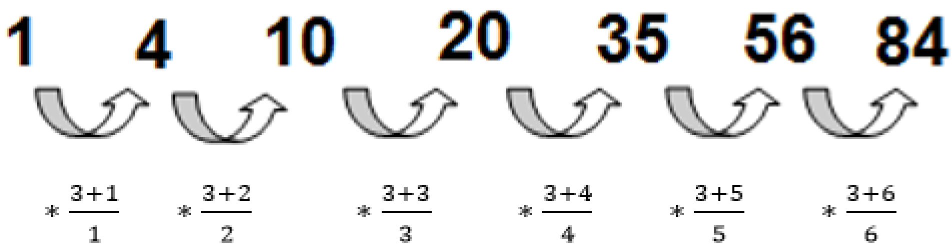
Věta: Každou diagonálu PT lze vyjádřit jako posloupnost tímto rekurentním zápisem:

$$a_0 = \binom{k}{k} = 1$$

$$a_{x+1} = a_x * \frac{n+1}{n-k+1} \wedge x \in N_0$$

Člen a_x je číslo $C(n,k)$ a člen a_{x+1} je číslo $C(n+1,k)$. Index *x* značí, o kolikátý člen posloupnosti se jedná.

Příklad:
část 3. diagonály, *k* = 3



$$a_0 = 1$$

$$a_1 = a_0 * \frac{n+1}{n-k+1} = \binom{3}{3} * \frac{3+1}{3-3+1} = 1 * \frac{4}{1} = 4$$

$$a_2 = a_1 * \frac{n+1}{n-k+1} = \binom{4}{3} * \frac{4+1}{4-3+1} = 4 * \frac{5}{2} = 10$$

$$a_3 = a_2 * \frac{n+1}{n-k+1} = \binom{5}{3} * \frac{5+1}{5-3+1} = 10 * \frac{6}{3} = 20$$

$$a_4 = a_3 * \frac{n+1}{n-k+1} = \binom{6}{3} * \frac{6+1}{6-3+1} = 20 * \frac{7}{4} = 35$$

Důkaz:

$$\binom{n}{k} * \frac{n+1}{n-k+1} \stackrel{?}{=} \binom{n+1}{k}$$

$$\frac{n!}{(n-k)!\,k!} * \frac{n+1}{n-k+1} \stackrel{?}{=} \binom{n+1}{k}$$

$$\frac{(n+1)!}{(n-k+1)!\,k!} \stackrel{?}{=} \binom{n+1}{k}$$

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n+1}{k}$$

Q.E.D.

Tato vlastnost platí i v opačně orientovaných diagonálách. To vyplývá z již dokázané symetrie Pascalova trojúhelníku. Členy pak ale násobíme místo výrazu $\frac{n+1}{n-k+1}$ výrazem $\frac{n+1}{k+1}$.

Vzorce pro výčet prvků na řádcích a v diagonálách PT lze prakticky využít například v programování při generování nebo definování PT či počítání kombinačních čísel.

Mocniny čísla jedenáct na řádcích Pascalova trojúhelníku

Věta: Pokud jednotlivé členy *n*-tého řádku Pascalova trojúhelníku vynásobíme výrazem 10^k, kde *k* značí diagonálu, ve které se aktuálně násobený člen nachází, a výsledná čísla sečteme, výsledek bude roven číslu 11^n.

Příklad:

2. řádek

$$1 * 10^0 + 2 * 10^1 + 1 * 10^2 = 121 = 11^2$$

7. řádek

$$1 * 10^0 + 7 * 10^1 + 21 * 10^2 + 35 * 10^3 + 35 * 10^4 + 21 * 10^5 + 7 * 10^6 + 1 * 10^7 = \\ = 19\,487\,171 = 11^7$$

Důkaz: Důkaz provedeme opět pomocí binomické věty

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} * a^{n-k} * b^k = (a+b)^n$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} * 10^k \stackrel{?}{=} 11^n$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} * 10^k = (1+10)^n$$

Q.E.D.

K mocninám čísla jedenáct můžeme dojít i násobením členů jednotlivých řádků zprava doleva. Tento úkaz vychází ze symetrie Pascalova trojúhelníku.

2.1.4. Náměty pro další bádání

V Pascalově trojúhelníku jistě existuje mnohem více identit, než kolik jich zmiňujeme v naší práci. Mezi ty, o kterých víme, ale už jsme je nezkoumali dopodrobna, patří např. Fibonacciho posloupnost při sčítání členů šikmých diagonál, fraktálové obrazce při užití kongruence podle modulu 2 anebo výskyt trojúhelníkových čísel ve druhé a pyramidových čísel ve třetí diagonále.

2.2. Ragnarův trojúhelník

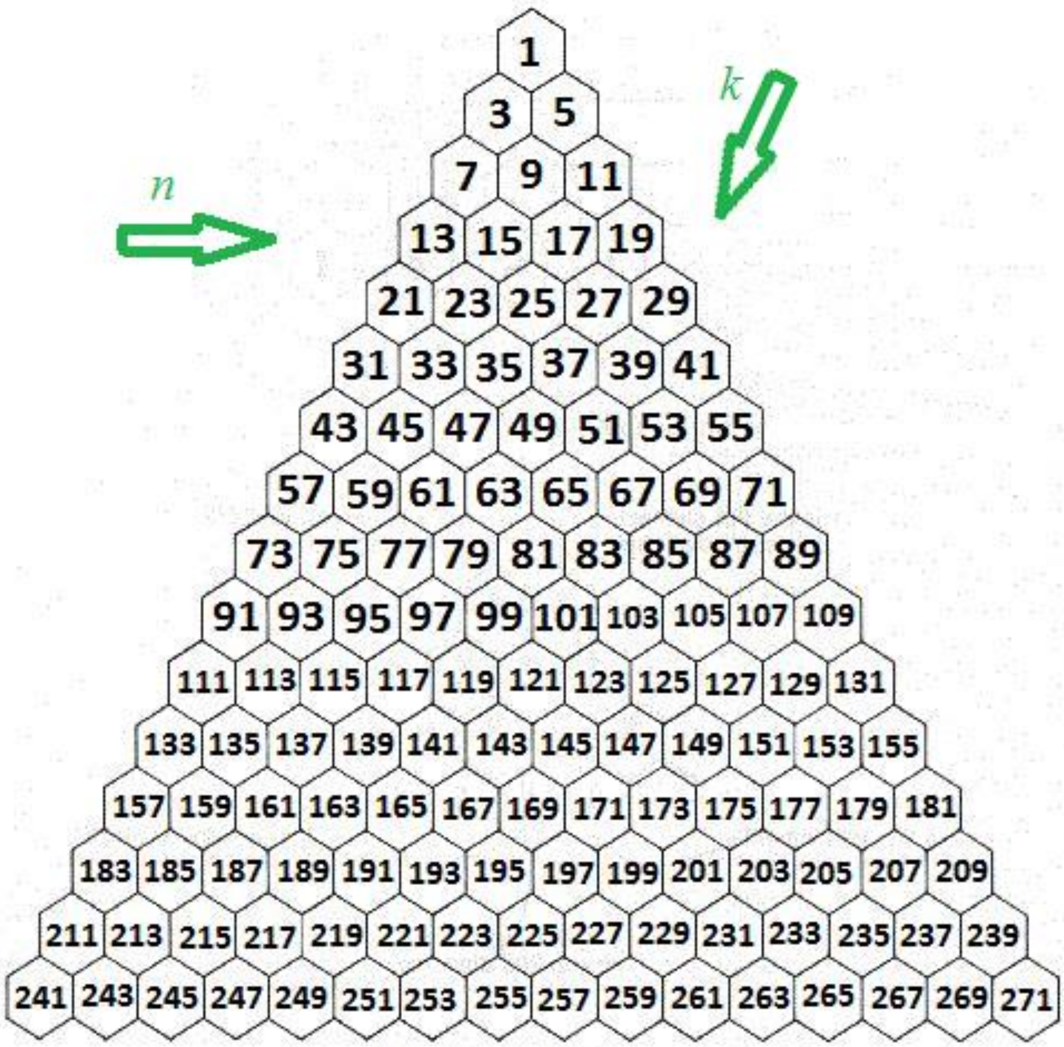
2.2.1. Seznámení/Definice

Ragnarův trojúhelník (v naší práci často označován RT) je číselná konfigurace, která pochází z hlavy norského profesora matematiky Ragnara Solvanga z univerzity v Oslo. Jedná se o posloupnost čísel podobnou trojúhelníku Pascalovu – zapisujeme ji též do schématu ve tvaru trojúhelníku, avšak jejími členy jsou postupně všechna lichá čísla.

Definice: Číslo $\mathrm{R}(n,k) \wedge n,k \in N_0 \wedge n \geq k$ definujme takto

Pro všechna n,k platí, že $R(n,k) = n^2 + n + 1 + 2k$

Písmenem *n* rozumíme řádek RT a písmenem *k* rozumíme diagonálu RT (viz obrázek).

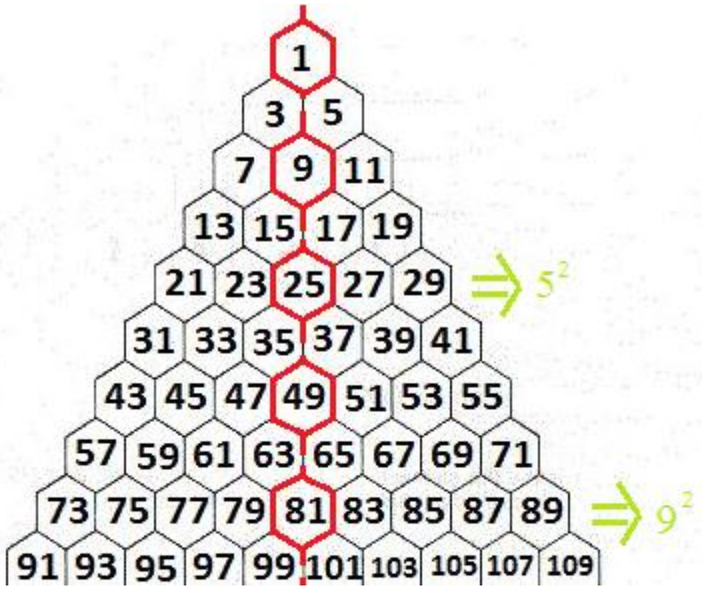


2.2.2. Identity v Ragnarově trojúhelníku

Osa Ragnarova trojúhelníku

Věta: Osa Ragnarova trojúhelníku (mluvíme pouze o symetrii útvaru, nikoliv o symetrii členů) prochází na *n*-tém řádku Ragnarova trojúhelníku členem, který je roven $(n+1)^2$, přičemž $n \in \{0; 2; 4; \dots\}$

Příklad:



Důkaz:

Pro čísla $R(n,k)$ ležící na ose RT platí, že:

$$n = 2a \wedge k = a \wedge a \in N_0$$

$$R(n,k) = n^2 + n + 1 + 2k$$

$$R\left(n,\frac{n}{2}\right) = 4a^2 + 2a + 1 + 2a$$

$$R\left(n,\frac{n}{2}\right) = 4a^2 + 4a + 1$$

$$R\left(n,\frac{n}{2}\right) = (2a+1)^2$$

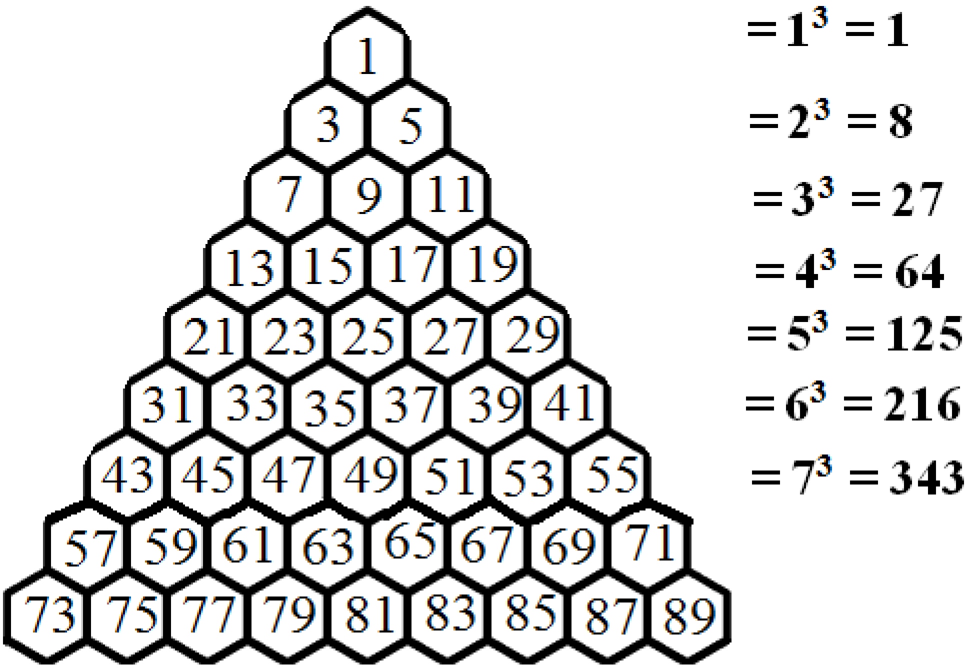
$$R(n,\frac{n}{2}) = (n+1)^2$$

Q.E.D.

Třetí mocniny na řádcích Ragnarova trojúhelníku

Věta: Součet všech členů n-tého řádku Ragnarova trojúhelníku je roven číslu $(n+1)^3$.

Příklad:



Důkaz:

$$R(n,0)+R(n,1)+R(n,2)+\cdots+R(n,n) \stackrel{?}{=} (n+1)^3$$

$$(n^2+n+1)+(n^2+n+3)+(n^2+n+5)+\cdots+(n^2+n+1+2n) \stackrel{?}{=} (n+1)^3$$

$$\frac{(n+1)[(n^2+n+1)+(n^2+n+1+2n)]}{2} \stackrel{?}{=} (n+1)^3$$

$$(n+1)(n^2+2n+1) \stackrel{?}{=} (n+1)^3$$

$$(n+1)^3=(n+1)^3$$

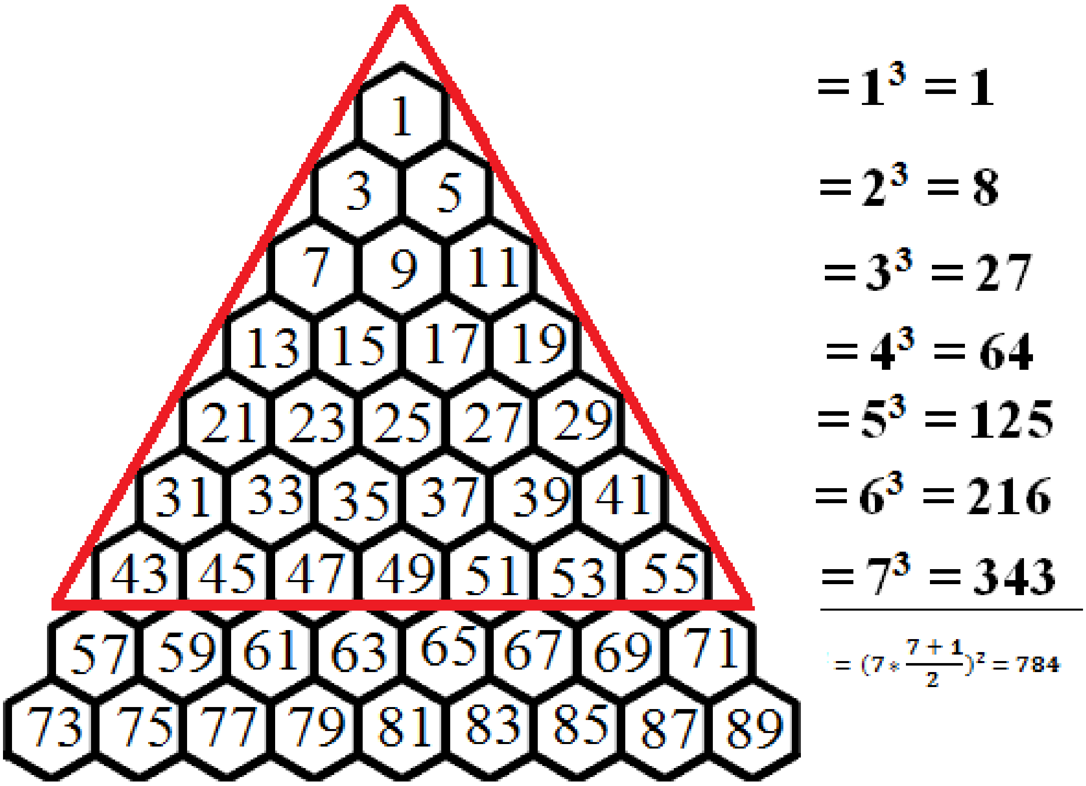
Q.E.D.

Trojúhelníkové součty řádků Ragnarova trojúhelníku

Věta: Součet všech čísel Pascalova trojúhelníku od nultého řádku po n-tý řádek je roven číslu $\left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2$.

Příklad:

$n = 6$



Důkaz: Důkaz provedeme matematickou indukcí.

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + (n+1)^3 \stackrel{?}{=} \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2$$

I. $n = 0$

$$1^3 \stackrel{?}{=} 1$$

$$1 = 1$$

II.

$\forall\, n \in N_0$:

$$\left\{1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + (n+1)^3 = \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + (n+1)^3 + (n+2)^3 = \left[\frac{(n+2)(n+3)}{2}\right]^2\right\}$$

Nechť předpoklad platí, pak

$$\left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2 + (n+2)^3 \stackrel{?}{=} \left[\frac{(n+2)(n+3)}{2}\right]^2$$

$$\left[\frac{(n+2)}{2}\right]^2 * \left[(n+1)^2 + 4(n+2)\right] \stackrel{?}{=} \left[\frac{(n+2)(n+3)}{2}\right]^2$$

$$\left[\frac{(n+2)}{2}\right]^2 * (n^2 + 2n + 1 + 4n + 8) \stackrel{?}{=} \left[\frac{(n+2)(n+3)}{2}\right]^2$$

$$\left[\frac{(n+2)}{2}\right]^2 * (n^2 + 6n + 9) \stackrel{?}{=} \left[\frac{(n+2)(n+3)}{2}\right]^2$$

$$\left[\frac{(n+2)}{2}\right]^2 * (n+3)^2 \stackrel{?}{=} \left[\frac{(n+2)(n+3)}{2}\right]^2$$

$$\left[\frac{(n+2)(n+3)}{2}\right]^2 = \left[\frac{(n+2)(n+3)}{2}\right]^2$$

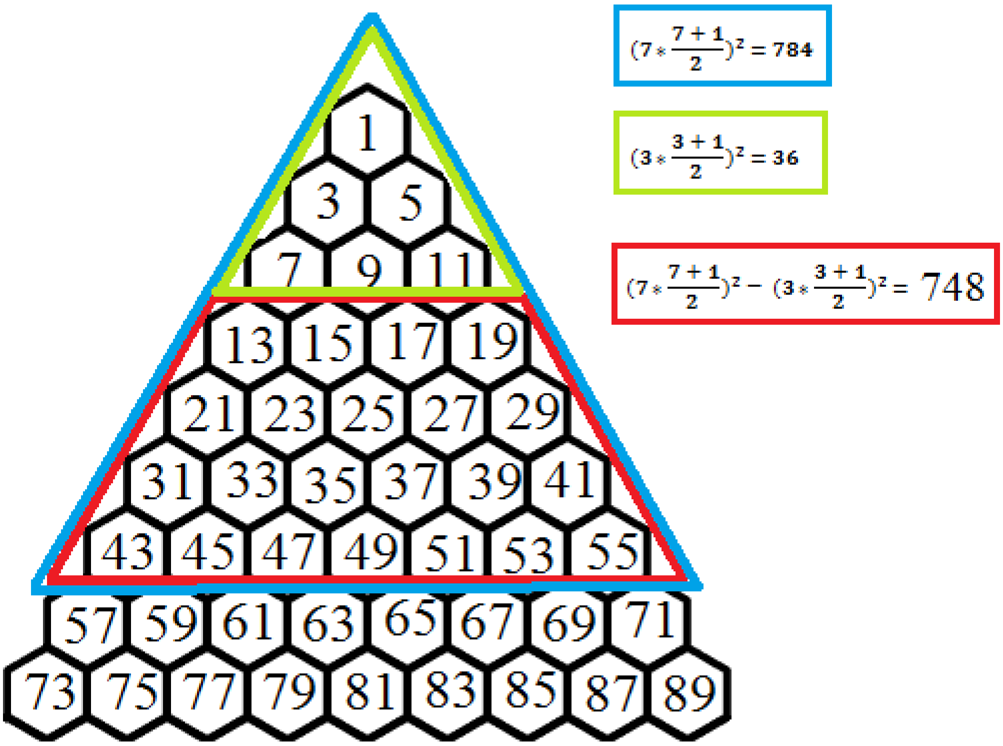
Q.E.D.

Lichoběžníkové součty řádků Ragnarova trojúhelníku

Věta: Pro $m < n$ (*m*, *n* jsou přirozená čísla) platí, že součet od *(m+1)*-tého po *n*-tý řádek Ragnarova trojúhelníku je roven $\left[\frac{(n+1)(n+2)-(m+1)(m+2)}{2}\right]^2$.

Příklad:

m = 2
n = 6



Důkaz: Z předešlého důkazu vyplývá:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + (n+1)^3 = \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + (m+1)^3 = \left[\frac{(m+1)(m+2)}{2}\right]^2$$

A tedy platí, že součet od *(m+1)*-tého po *n*-tý řádek RT, je roven:

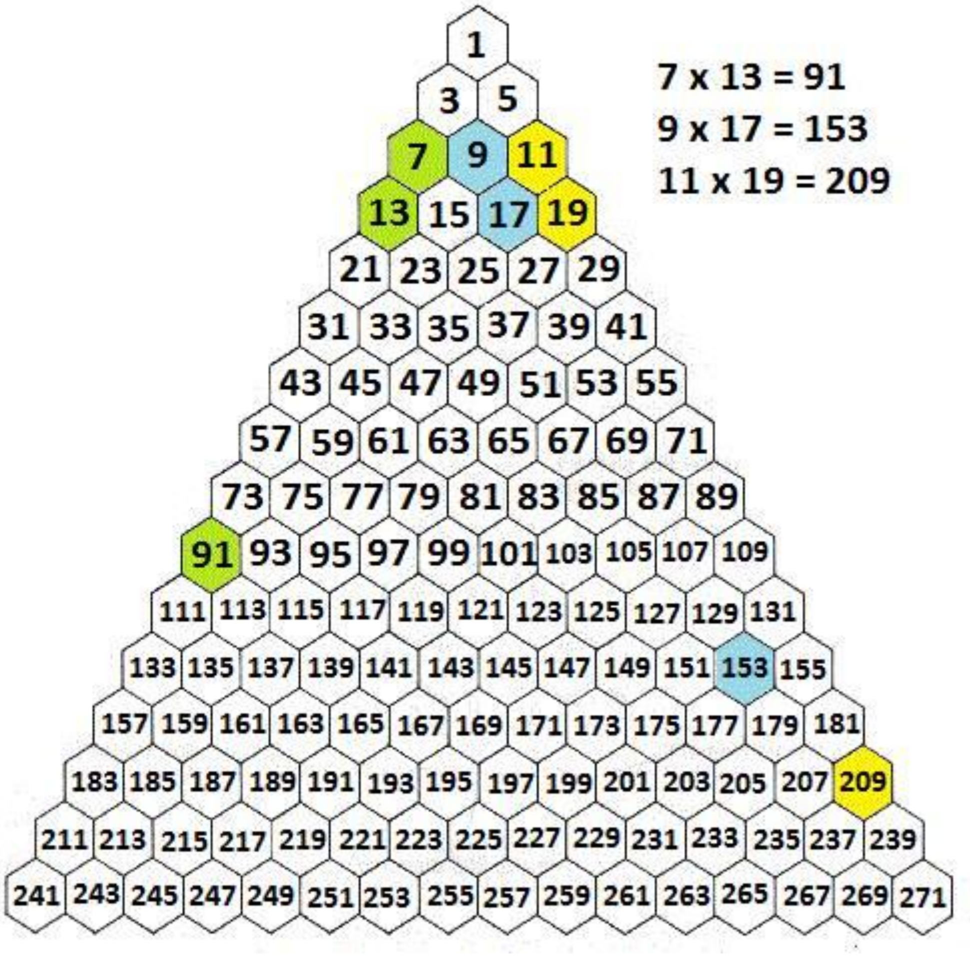
$$\left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2 - \left[\frac{(m+1)(m+2)}{2}\right]^2 = \left[\frac{(n+1)(n+2)-(m+1)(m+2)}{2}\right]^2$$

Q.E.D.

Součiny v diagonálách Ragnarova trojúhelníku

Věta: Pokud vynásobíme dva po sobě jdoucí členy *k*-té diagonály Ragnarova trojúhelníku, přičemž ani jeden není roven jedné, výsledné číslo leží v téže diagonále a zároveň mezi ním a větším ze součinitelů leží právě tolik členů dané diagonály, kolik se rovná hodnota menšího ze součinitelů zmenšená o dva.

Příklad:



Důkaz:

$$R(n,k) * R(n+1,k) \stackrel{?}{=} R\{n+1+[R(n,k)-2]+1,k\}$$

$$(n^2+n+1+2k)(n^2+2n+1+n+1+1+2k) \stackrel{?}{=} R(n^2+2n+1+2k,k)$$

$$(n^2+n+1+2k)(n^2+3n+3+2k) \stackrel{?}{=} [(n+1)^2+2k]^2+n^2+2n+1+2k+1+2k$$

$$n^4+4n^3+3n^2+2n^2k+4n^2+3n+2nk+3n+3+2k+2n^2k+6nk+6k+4k^2 \stackrel{?}{=}$$
$$\stackrel{?}{=} n^4+4n^3+6n^2+4n+1+4k^2+4n^2k+8nk+4k+n^2+2n+1+2k+1+2k$$

$$n^4+4n^3+7n^2+6n+8nk+4n^2k+8k+4k^2+3=$$
$$=n^4+4n^3+7n^2+6n+8nk+4n^2k+8k+4k^2+3$$

$$0=0$$

Q.E.D.

Tuto identitu můžeme (jak je zjevné v příkladu) sledovat i v opačně orientovaných diagonálách Ragnarova trojúhelníku, dokažme tedy ještě dodatečně:

$$R(n,k) * R(n+1,k+1) \stackrel{?}{=}$$
$$\stackrel{?}{=} R\{n+1+[R(n,k)-2]+1,k+1+[R(n,k)-2]+1\}$$

$$(n^2+n+1+2k)(n^2+2n+1+n+1+1+2k+2) \stackrel{?}{=}$$
$$\stackrel{?}{=} R(n^2+2n+1+2k,n^2+n+1+3k)$$

$$(n^2+n+1+2k)(n^2+3n+5+2k) \stackrel{?}{=}$$
$$\stackrel{?}{=} [(n+1)^2+2k]^2+n^2+2n+1+2k+1+2n^2+2n+2+6k$$

$$n^4+4n^3+5n^2+2n^2k+4n^2+5n+2nk+3n+5+2k+2n^2k+6nk+10k+4k^2 \stackrel{?}{=}$$
$$\stackrel{?}{=} n^4+4n^3+6n^2+4n+1+4k^2+4n^2k+8nk+4k+n^2+4n+1+8k+3+2n^2$$

$$0=0$$

Q.E.D.

2.3. Kytičkové věty

2.3.1. Co jsou to kytičkové věty?

Dosud jsme o Pascalově a Ragnarově trojúhelníku mluvili jako o izolovaných číselných konfiguracích, které se podobají pouze svým výsledným tvarem. Tyto konfigurace jsou však propojené více, než se na první pohled může zdát. Tímto jejich vzájemným vztahem se zabývají námi pojmenované kytičkové věty. Toto jméno je odvozeno od útvarů připomínající květy rostlin, jak na následujících obrázcích uvidíte.

2.3.2. Kytičková věta v Pascalově trojúhelníku

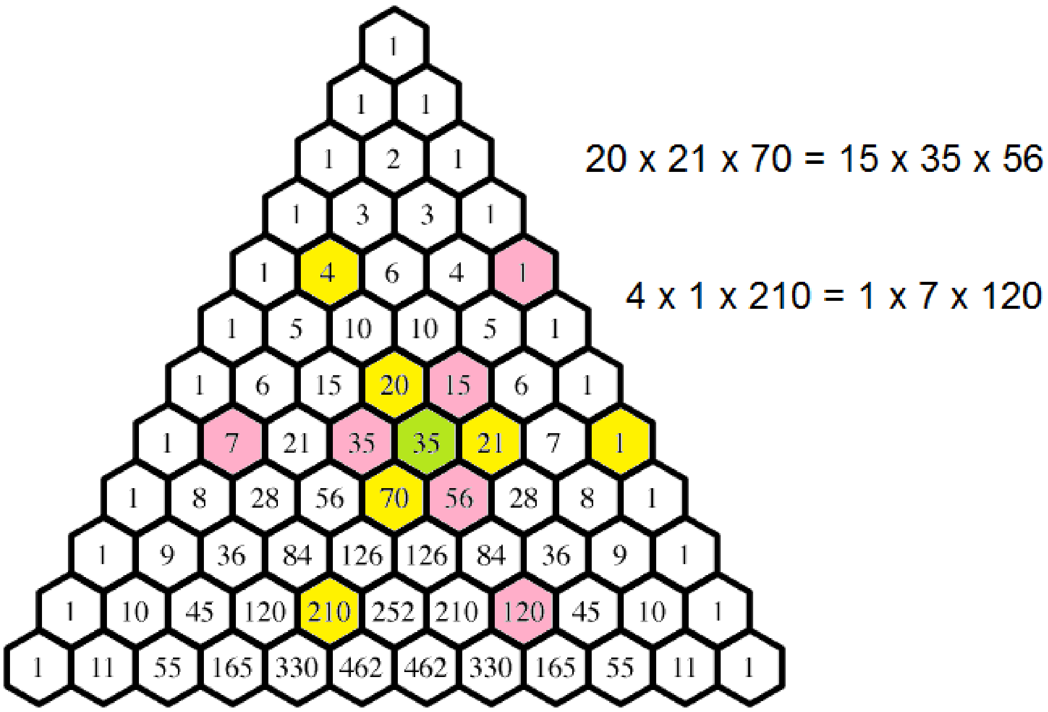
Věta: Vybereme libovolné číslo Pascalova trojúhelníku $\binom{n}{k}$, které budeme označovat jako centrální číslo, přičemž platí $1 \leq k < n$. Vypočteme-li číslo $\binom{n-1}{k-1} * \binom{n}{k+1} * \binom{n+1}{k}$, bude se rovnat číslu $\binom{n-1}{k} * \binom{n}{k-1} * \binom{n+1}{k+1}$ a pokud je $\binom{n}{k} \neq 2$, potom je výsledný součin dělitelný centrálním číslem $\binom{n}{k}$.

Tento vztah můžeme v rámci Pascalova trojúhelníku i rozšířit. Pak zavedeme parametr $p;\ 0 \leq p \leq min\{k, n-k\}$. S parametrem potom platí, že

$$\binom{n-p}{k-p} * \binom{n}{k+p} * \binom{n+p}{k} = \binom{n-p}{k} * \binom{n}{k-p} * \binom{n+p}{k+p}$$

a pokud jsou alespoň dva ze součinitelů na obou stranách rovnosti různé od 1, potom je výsledný součin opět dělitelný centrálním číslem $\binom{n}{k}$.

Příklad:



Důkaz:

$$\binom{n-p}{k-p} * \binom{n}{k+p} * \binom{n+p}{k} \stackrel{?}{=} \binom{n-p}{k} * \binom{n}{k-p} * \binom{n+p}{k+p}$$

$$\frac{(n-p)!}{(k-p)! * (n-k)!} * \frac{n!}{(k+p)! * (n-k-p)!} * \frac{(n+p)!}{k! * (n-k+p)!} \stackrel{?}{=}$$

$$\stackrel{?}{=} \frac{(n-p)!}{k! * (n-k-p)!} * \frac{n!}{(k-p)! * (n-k+p)!} * \frac{(n+p)!}{(k+p)! * (n-k)!}$$

$$0 = 0$$

Q.E.D.

Nyní ještě dokážeme dělitelnost výsledného součinu centrálním číslem. Naše otázka zní, zda platí:

$$\binom{n}{k} \Big/ \binom{n-p}{k-p} * \binom{n}{k+p} * \binom{n+p}{k}$$

$$\binom{n}{k} \Big/ \frac{(n-p)!}{(k-p)! * (n-k)!} * \frac{n!}{(k+p)! * (n-k-p)!} * \frac{(n+p)!}{k! * (n-k+p)!}$$

$$\binom{n}{k} \Big/ \binom{n}{k} * \frac{(n-p)!}{(k-p)!} * \frac{1}{(k+p)! * (n-k-p)!} * \frac{(n+p)!}{(n-k+p)!}$$

Zápis ${}^{a}/_{b}$ nenajdeme ve školské matematice. Znamená, že *a* dělí *b*.

Závěrem je, že centrální číslo dělí výsledný součin. Protože jsme na předešlé stránce dokázali, že součiny jsou identické, stačí nám v tomto důkazu pouze jeden z nich.

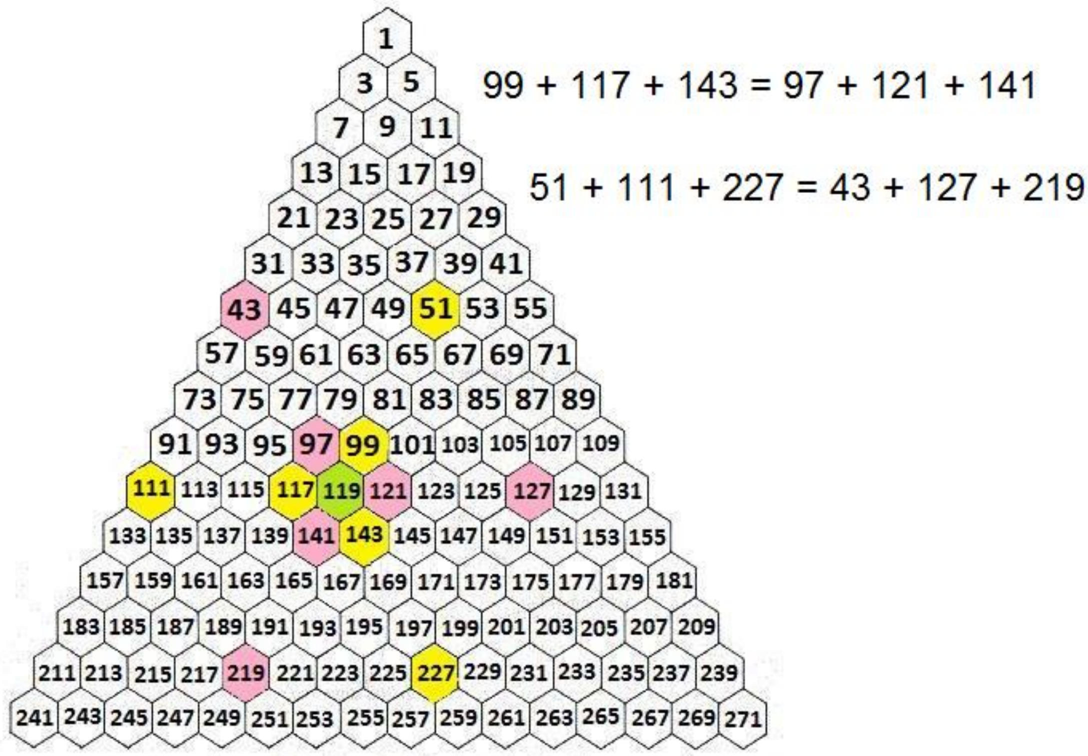
2.3.3. Kytičková věta v Ragnarově trojúhelníku

Věta: Vybereme libovolné číslo Ragnarova trojúhelníku $R(n,k)$, které budeme též označovat jako centrální číslo, přičemž platí $1 \leq k < n$. Pokud vypočteme číslo $R(n-1,k) + R(n,k-1) + R(n+1,k+1)$, bude se rovnat číslu $R(n-1,k-1) + R(n,k+1) + R(n+1,k)$.

Tento vztah můžeme v rámci Ragnarova trojúhelníku i rozšířit. Pak zavedeme parametr p; $0 \leq p \leq min\{k, n-k\}$. S parametrem potom platí, že:

$$
\begin{aligned}
&R(n-p,k) + R(n,k-p) + R(n+p,k+p) = \\
&\qquad = R(n-p,k-p) + R(n,k+p) + R(n+p,k)
\end{aligned}
$$

Příklad:



Důkaz:

$$
\begin{aligned}
&R(n-p,k) + R(n,k-p) + R(n+p,k+p) \stackrel{?}{=} \\
&\qquad \stackrel{?}{=} R(n-p,k-p) + R(n,k+p) + R(n+p,k)
\end{aligned}
$$

$$n^2 + n + 1 + 2(k+p) + (n-p)^2 + n - p + 1 + 2(k-p) + (n+p)^2 + (n+p) + 1 + 2k$$

$$\stackrel{?}{=}$$

$$(n+p)^2 + (n+p) + 2 + 2(k+p) + n^2 + n + 2(k-p) + (n-p)^2 + (n-p) + 1 + 2k$$

$$0 = 0$$

Q.E.D.

3. Magické pravoúhelníky

3.1. Magické čtverce

3.1.1. Seznámení

Pod pojmem magický čtverec si můžeme představit čtvercovou mřížku vyplněnou přirozenými čísly tak, že součty na řádcích, ve sloupcích a v úhlopříčkách jsou konstantní (další kapitola obsahuje přesnou definici). Magický čtverec může být též doplněn pouze prvočísly nebo písmeny či jen různými znaky podle určitých pravidel. Jedním z nich může být vpisování čísel postupně do políček tak, jak by táhl šachovnicový kůň. Zabýval se jím například Leonhard Euler, který tímto způsobem vyplnil čtverec 8x8 zpaměti, když už byl slepý. Jediným jeho nedostatkem byly rozdílné součty diagonál. Čtverec poté vylepšil šachista Jaenisch, který dosáhl konstantního součtu členů i v diagonálách a dokázal se z posledního políčka (tedy čísla 64) pohybem šachového koně opět vrátit na políčko první (tedy číslo 1).

Řešení magických čtverců spadá podobně jako sudoku a různé hry a hlavolamy založené na matematice do oboru rekreační matematiky.

Jedním z nejznámějších a nejmagičtějších čtverců obsahujícím pouze písmena je čtverec *Sator*, o jehož původu víme velmi málo. První zmínky o něm pochází ze starověku a užíván byl nejspíše k magickým praktikám.

S	A	T	O	R
A	R	E	P	O
T	E	N	E	T
O	P	E	R	A
R	O	T	A	S

Obr. 8

Číselné magické čtverce znali lidé již v roce 650 př. n. l. v Číně z legendy o Lo Shu, ve které se magický čtverec řádu 3 objevuje na krunýři želvy. Některé čtverce se dochovaly na kamenných i kovových tabulkách a amuletech, některé na obrazech a v architektuře, například čtverec řádu 4 na Gaudího katedrále v Barceloně. První čtverce řádu 5 a 6 objevené v encyklopedii z Bagdádu pocházejí z roku 983 n. l. První písemné zmínky o čtvercích v Evropě pocházejí z roku 1300 od Řeka Manuela Maschopula. Dále se jimi zabýval Ital Luca Pacioli v roce 1450 a Heinrich Cornelius Agrippa v roce 1510. Domníváme se, že magické čtverce měly numerologický a astrologický význam, někdy byly také využívány v okultismu. Na následujícím obrázku je výstřižek pravého horního rohu obrazu Melancholie I. německého umělce Albrechta Dürera z roku 1514.

Obr. 9

3.1.2. Definice

Magický čtverec je schéma přirozených čísel vpisovaných do jednotkových čtverečků čtverce tak, že součet členů v každém řádku, každém sloupci a obou diagonálách je konstantní. Čísla jsou vpisována postupně od jedničky až do druhé mocniny rozměru čtverce.

3.1.3. Konkrétní příklady

Nejmenší možný čtverec o rozměrech 1x1 řešit v naší práci nebudeme.

Druhý nejmenší čtverec o rozměrech 2x2 neexistuje. Důkaz provedeme v kapitole 3.2.2.

První nejmenší a zároveň existující magický čtverec má rozměry 3x3. Společně s několika dalšími čtverci vyšších řádů ho můžete vidět na následujících obrázcích.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Obr. 10

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Obr. 11

1	35	34	3	32	6
30	8	28	27	11	7
24	23	15	16	14	19
13	17	21	22	20	18
12	26	9	10	29	25
31	2	4	33	5	36

Obr. 12

177	186	195	1	10	19	28	128	137	146	99	108	68	77
185	194	154	9	18	27	29	136	145	105	107	116	76	78
193	153	155	17	26	35	37	144	104	106	115	124	84	86
152	161	16	172	34	36	45	103	112	114	123	132	85	94
160	162	171	33	42	44	4	111	113	122	131	140	93	53
168	170	179	41	43	3	12	119	121	130	139	141	52	61
169	178	187	49	2	11	20	120	129	138	147	100	60	69
30	39	48	148	157	166	175	79	88	97	50	59	117	126
38	47	7	156	165	174	176	87	96	56	58	67	125	127
46	6	8	164	173	182	184	95	55	57	66	75	133	135
5	14	163	25	181	183	192	54	63	65	74	83	134	143
13	15	24	180	189	191	151	62	64	73	82	91	142	102
21	23	32	188	190	150	159	70	72	81	90	92	101	110
22	31	40	196	149	158	167	71	80	89	98	51	109	118

Obr. 13

Konstrukce magických čtverců vyšších řádů může být náročná jak časově, tak i numericky. To ale neplatí o libovolně velkém čtverci s lichými rozměry. Techniku pro sestrojení takového čtverce totiž objevil již v polovině 18. století uznávaný matematik Leonhard Euler. První číslo, a sice jedničku, vepíšeme do prostředního políčka prvního řádku. Každé další číslo vepíšeme o jeden řádek výš a jeden sloupec doprava. Nad prvním řádkem se nachází řádek poslední a vpravo od posledního sloupce sloupec první. Pokud je pozice pro číslo *(n+1)* obsazena, vepíšeme dané číslo pod číslo *n*.

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

Obr. 14

30	39	48	1	10	19	28
38	47	7	9	18	27	29
46	6	8	17	26	35	37
5	14	16	25	34	36	45
13	15	24	33	42	44	4
21	23	32	41	43	3	12
22	31	40	49	2	11	20

Obr. 15

3.2. Magické obdélníky

3.2.1. Seznámení/Definice

Již odnepaměti byli lidé fascinováni magickými čtverci. Málokdo se ale pozastavil nad možnou existencí magických obdélníků. Obdélníky totiž postrádají jednak diagonály, a jednak je velmi nepravděpodobné, že součty řádků daného obdélníku budou rovny součtům sloupců. Určitě je ale možné docílit toho, že součet každého řádku je konstantní a součet každého sloupce též.

Na základě této motivace můžeme tedy vyslovit definici:

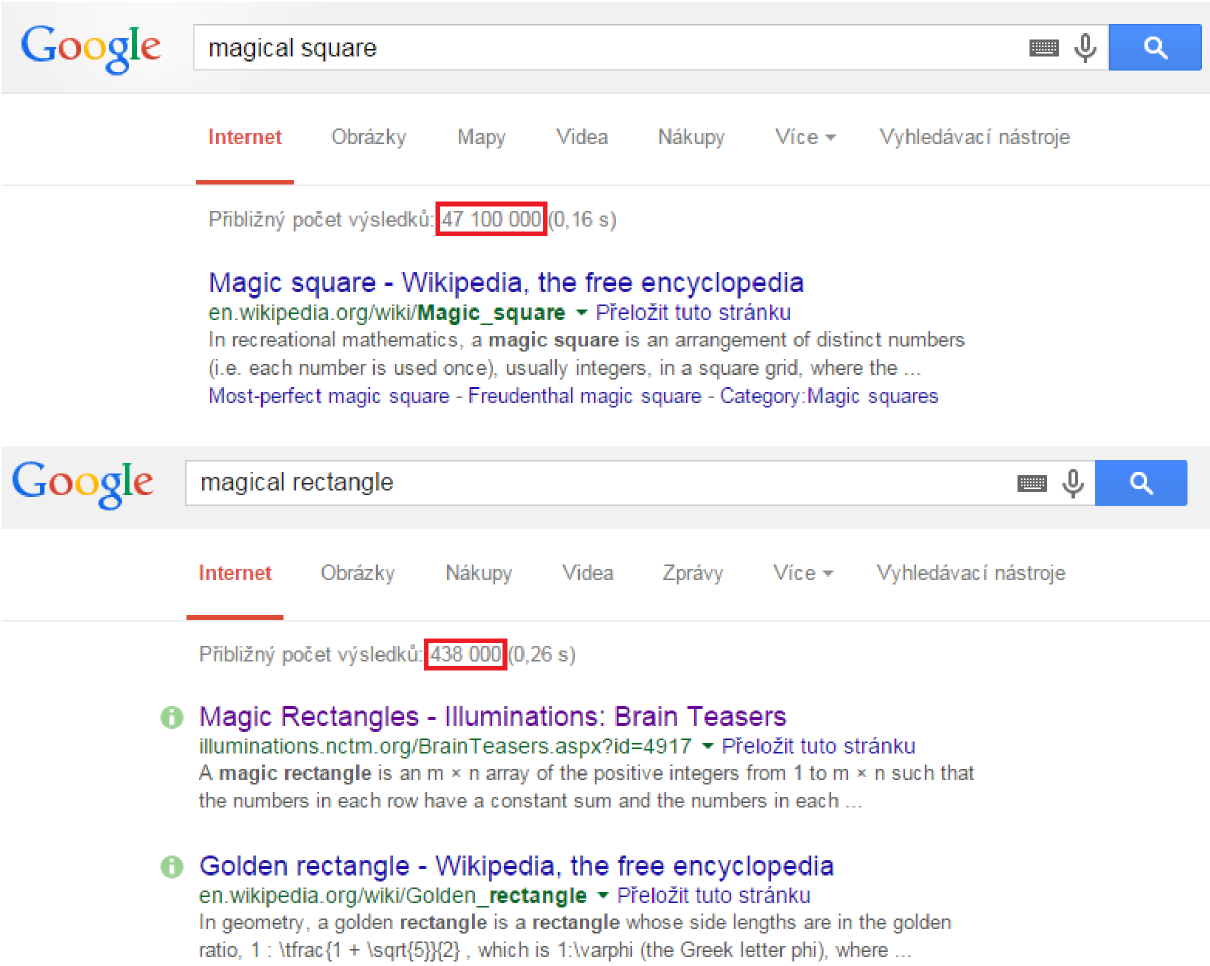
Definice: Magický obdélník je schéma přirozených čísel vpisovaných do jednotkových čtverečků obdélníku. Čísla jsou vpisována tak, aby součet členů v každém řádku byl konstantní a v každém sloupci také. Tyto součty nemusí být stejné. Do políček vpisujeme postupně čísla 1, 2, 3…rs kde r značí počet řádků a s počet sloupců daného magického obdélníku. Čísla r a s jsou čísla přirozená taková, že $2 \leq r \leq s$.

Zaveďme dále u magických obdélníků přehledné a snadno pochopitelné značení. Libovolný magický obdélník o rozměrech r, s budeme značit $O(r, s)$.

Ujasněme si ještě vztah mezi magickými čtverci a magickými obdélníky. V celé této kapitole budeme magické čtverce považovat za speciální případ magického obdélníku. Pokud budeme konstruovat magický čtverec, pak nebudeme brát ohled na součty členů diagonál, protože kterékoliv jiné magické obdélníky diagonály nemají.

3.2.2. Věty o magických obdélnících

Jak bylo již zmíněno výše, magickým obdélníkům se pravděpodobně velké množství lidí nevěnovalo. Pokud ano, rozhodně bychom o nich dnes věděli přinejmenším tolik, kolik toho víme o magických čtvercích. Porovnejme nyní výsledky hledání v internetovém vyhledávači Google pro hesla „magical square“ a „magical rectangle“ (tedy „magický čtverec“ a „magický obdélník“):

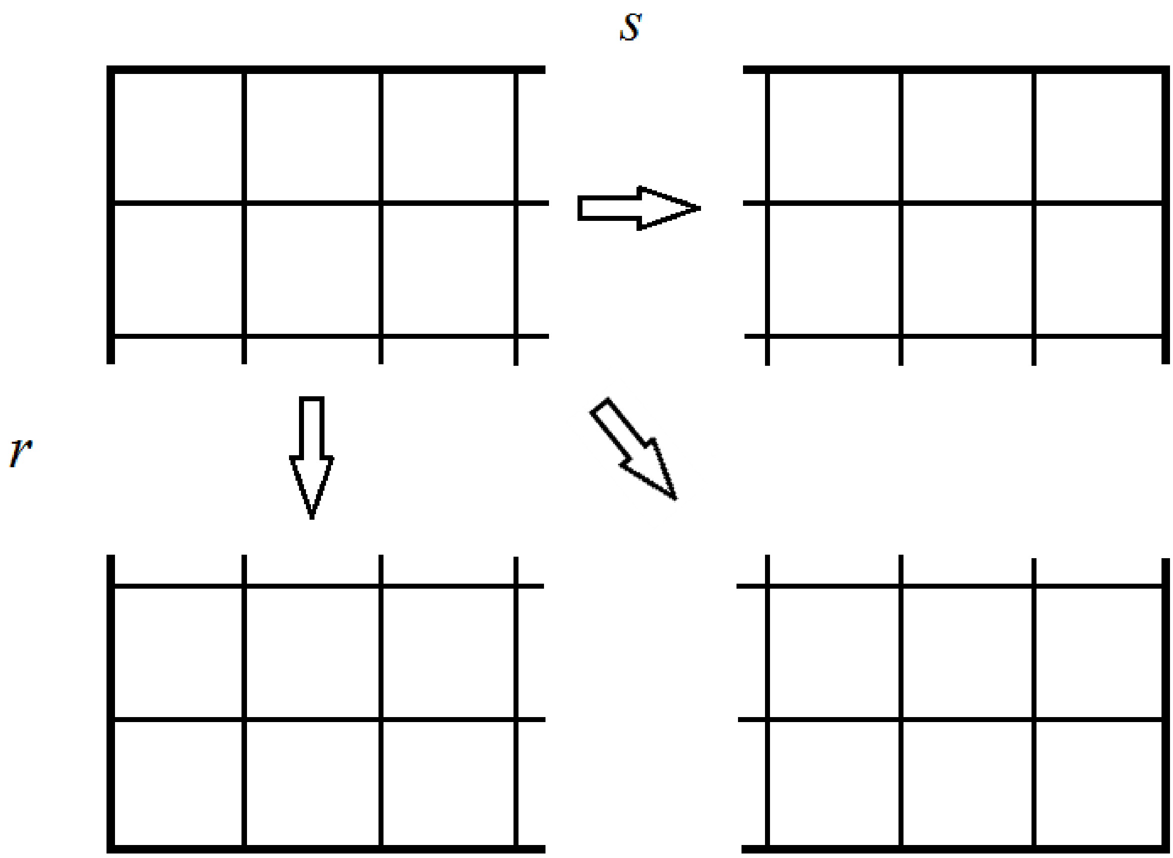


Obr. 16

Ještě je nutno podotknout, že počet výsledků hledání u hesla „magical rectangle“ je zkreslený, neboť drtivá většina výsledků nás totiž odkazuje úplně jinam než k magickým obdélníkům.

Nyní vás seznámíme s několika vlastnostmi magických obdélníků, na které jsme během našeho zkoumání narazili.

Uvažujme magický obdélník o rozměrech *r* a *s*:



Označme součet všech čísel vepsaných do magického obdélníku *S*. Platí, že:

$$S = \frac{rs * (1 + rs)}{2}$$

Dále označme součet všech čísel každého řádku magického obdélníku S_r a součet všech čísel každého sloupce magického obdélníku S_s. Potom platí, že:

$$S_r = \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{r}} = \frac{s * (1 + rs)}{2}$$

$$S_s = \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{s}} = \frac{r * (1 + rs)}{2}$$

Tyto vztahy vyplývají ze vzorce pro součet prvních *n* členů aritmetické posloupnosti.

$$S_n = \frac{n * (a_1 + a_n)}{2}$$

Též je zjevné, že čísla S, S_r a S_s jsou čísla přirozená.

Věta: Obdélník $O(2,2)$ neexistuje.

Důkaz:

Sestrojme $O(2,2)$ tak, aby součty na řádcích byly konstantní.

1	4
2	3

Nyní existují právě dva způsoby, jak uspořádat čísla ve sloupcích.

1	4
3	2

1	4
2	3

Ani jedno uspořádání nevyhovuje definici magického obdélníku, a tudíž $O(2,2)$ neexistuje.

Q.E.D.

Věta: Součty S_r a S_s jsou rovny pouze pro $r = s$.

Důkaz:

$$S_r = S_s$$

$$\frac{s * (1 + rs)}{2} = \frac{r * (1 + rs)}{2}$$

$$s * (1 + rs) = r * (1 + rs)$$

$$s = r$$

Q.E.D.

Odtud tedy plyne, že S_r a S_s budou rovny pouze v případě magického čtverce.

Věta: Existují pouze takové magické obdélníky, jejichž rozměry r a s mají stejnou paritu.

Důkaz: Důkaz provedeme sporem.

Nechť čísla r a s mají různou paritu. Z toho vyplývá, že součin $\mathrm{r} * \mathrm{s}$ je sudé číslo. Z toho důvodu je součet $(1 + \mathrm{rs})$ číslo liché.

Protože je výraz $(1 + \mathrm{rs})$ liché číslo a zároveň je jedno z čísel r, s liché, je i jeden ze součinů $s * (1 + rs),\ r * (1 + rs)$ lichý.

Aby byla čísla S_r a S_s čísla přirozená, musely by být oba součiny $s * (1 + rs)$ a $r * (1 + rs)$ sudá čísla, jelikož jsou děleny dvěma. Jeden ze součinů je ale lichý, čímž docházíme ke sporu.

Q.E.D.

V důsledku této skutečnosti zavedeme dva typy magických obdélníků, a sice sudé magické obdélníky a liché magické obdélníky.

Definice: Sudý magický obdélník je takový magický obdélník, který vyhovuje podmínkám definice magického obdélníku a jehož rozměry r, s jsou sudá přirozená čísla.

Definice: Lichý magický obdélník je takový magický obdélník, který vyhovuje podmínkám definice magického obdélníku a jehož rozměry r, s jsou lichá přirozená čísla.

Definovali jsme, co znamená lichý a sudý magický obdélník. To ale ještě neznamená, že každý tento obdélník půjde sestrojit. Pokusme se tedy nyní u některých magických obdélníků dokázat, že existují.

Zaměřme se nejdříve na obdélníky $O(2, s)$.

Nejjednodušším obdélníkem takového typu je $O(2{,}4)$. Pokud ho vyplníme vhodnou technikou (viz následující obrázek), můžeme si okamžitě zajistit konstantní součty ve sloupcích.

1	2	3	4
8	7	6	5

$$S_r = \frac{4 * (1+8)}{2} = 18$$

Abychom na obou řádcích docílili ideálního součtu, tedy S_r, musíme proházet některá čísla. Abychom ale neporušili konstantní S_s, musíme čísla prohazovat pouze v rámci těch sloupců, ve kterých jsou již napsána.

Spočítejme si nyní, o kolik se musí součty na jednotlivých řádcích změnit, abychom dosáhli S_r.

Označme součet na prvním řádku S_1 a součet na druhém S_2.

$$S_1 = \frac{4 * (1+4)}{2} = 10$$

$$S_2 = \frac{4 * (5+8)}{2} = 26$$

Abychom dosáhli S_r, musí se S_1 navýšit o 8 a S_2 se musí o 8 snížit.

Nyní si spočítejme, jaké jsou diference mezi členy v jednotlivých sloupcích.

	1	2	3	4
	8	7	6	5
dif =	7	5	3	1

Je jasné, že S_r dosáhneme právě tehdy, když proházíme čísla tvořící ty diference, jejichž součet je 8.

1	2	3	4
8	7	6	5

$$\text{dif} = \quad 7 \quad 5 \quad 3 \quad 1$$

$$5 + 3 = 8$$

Výsledný obdélník pak vypadá takto:

1	7	6	4
8	2	3	5

Dalším obdélníkem je $O(2,6)$. Konstrukci začněme úplně stejně jako u $O(2,4)$.

1	2	3	4	5	6
12	11	10	9	8	7

$$S_r = \frac{\frac{1+12}{2} * 12}{2} = 39$$

$$S_1 = \frac{6 * (1 + 6)}{2} = 21$$

$$S_2 = \frac{6 * (7 + 12)}{2} = 57$$

S_1 tedy musíme zvětšit o 18 a S_2 o stejnou hodnotu zmenšit. Spočtěme si tedy opět diference členů v jednotlivých sloupcích:

	1	2	3	4	5	6
	12	11	10	9	8	7
dif =	11	9	7	5	3	1

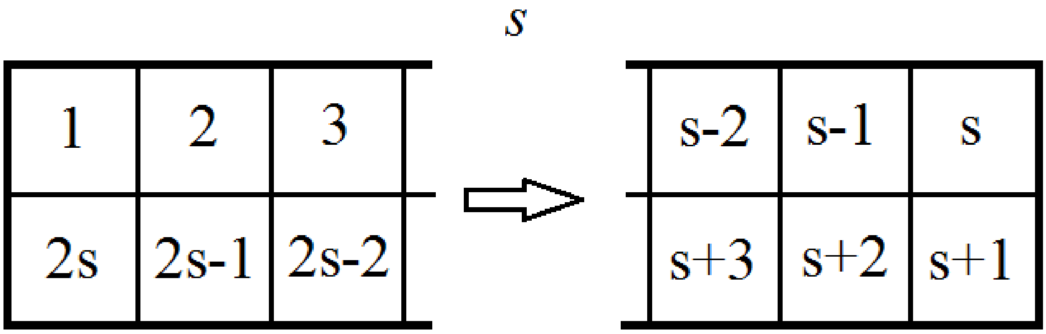
11 + 7 = 18

Výsledný obdélník tedy vypadá takhle:

12	2	10	4	5	6
1	11	3	9	8	7

Použijme naše poznatky z předešlých dvou konstrukcí a pokusme se řešit obecně obdélníky $O(2, s)$.

Začněme s vyplňováním zcela stejně:



$$S_r = \frac{\frac{1+2s}{2} * 2s}{2} = \frac{s * (2s + 1)}{2}$$

$$S_1 = \frac{s * (s + 1)}{2}$$

$$S_2 = \frac{s * (3s + 1)}{2}$$

S_1 se musí zvětšit o $\frac{s^2}{2}$ a S_2 se musí o stejnou hodnotu zmenšit. Diference členů v jednotlivých sloupcích tvoří množinu lichých čísel $\{1; 3; 5; 7; \ldots (2s - 3); (2s - 1)\}$.

Nás tedy zajímá, zdali je možné rozdělit takovou množinu pro s sudé a zároveň $s \geq 4$, na dvě podmnožiny, pro které platí, že součty všech jejich prvků jsou si rovny. Pokud takové podmnožiny existují, potom v obdélníku proházíme ty dvojice členů, jejichž diference tvoří jednu z nalezených podmnožin. Vzniklý útvar bude hledaný obdélník $O(2, s)$.

Pro tento důkaz si sudá čísla s rozdělíme do dvou množin. V jedné množině budou čísla s, která jsou dělitelná čtyřmi, ve druhé potom ta, která čtyřmi dělitelná nejsou. Důkaz samotný pak provedeme matematickou indukcí.

Důkaz:

$$\{1; 3; 5; 7; \dots (2s-3); (2s-1)\} \ \wedge \ s \text{ je sudé } \wedge \ s \in \{4; 8; 12; 16 \dots\}$$

I. $\{1; 3; 5; 7\}$

$$1 + 7 = 3 + 5$$

$$8 = 8$$

II. $\forall \, s \in \{4; 8; 12; 16 \dots\}$:

Pokud lze množinu $\{1; 3; 5; 7; \dots (2s-1)\}$ rozložit na dvě podmnožiny, pro které platí, že součty všech jejich prvků jsou si rovny, potom lze na dvě podmnožiny, pro které platí, že součty všech jejich prvků jsou si rovny, rozložit i množinu $\{1; 3; 5; 7; \dots (2s-1); (2s+1); (2s+3); (2s+5); (2s+7)\}$.

Nechť předpoklad platí, potom nás zajímá pouze množina

$$\{(2s+1); (2s+3); (2s+5); (2s+7)\}$$

Tuto množinu lze na dvě podmnožiny odpovídající podmínkám rozdělit snadno:

$$(2s+1) + (2s+7) = (2s+3) + (2s+5)$$

$$4s + 8 = 4s + 8$$

$$0 = 0$$

Nyní se ještě zaměříme na ta čísla s, která nejsou dělitelná čtyřmi:

$$\{1; 3; 5; 7; \dots (2s-3); (2s-1)\} \ \wedge \ s \text{ je sudé } \wedge \ s \in \{6; 10; 14; 18 \dots\}$$

I. $\{1; 3; 5; 7; 9; 11\}$

$$1 + 3 + 5 + 9 = 7 + 11$$

$$18 = 18$$

II. $\forall \, s \in \{6; 10; 14; 18 \dots\}$:

Pokud lze množinu $\{1; 3; 5; 7; \dots (2s-1)\}$ rozložit na dvě podmnožiny, pro které platí, že součty všech jejich prvků jsou si rovny, potom lze na dvě podmnožiny, pro které platí, že součty všech jejich prvků jsou si rovny, rozložit i množinu $\{1; 3; 5; 7; \dots (2s-1); (2s+1); (2s+3); (2s+5); (2s+7)\}$.

Nechť předpoklad platí, potom nás zajímá pouze množina

$$\{(2s+1); (2s+3); (2s+5); (2s+7)\}$$

Tuto množinu lze na dvě podmnožiny odpovídající podmínkám rozdělit snadno:

$$(2s+1) + (2s+7) = (2s+3) + (2s+5)$$

$$4s + 8 = 4s + 8$$

$$0 = 0$$

Q.E.D.

Dokázali jsme, že je možné zkonstruovat jakýkoliv obdélník $O(2, s)$.

Podívejme se nyní na obdélníky obecného typu $O(4, s)$.

Začněme jedním konkrétním obdélníkem $O(4,6)$. Vyplňme obdélník technikou zobrazenou na obrázku níže:

1	2	3	4	5	6
12	11	10	9	8	7
18	17	16	15	14	13
19	20	21	22	23	24

$$S_r = \frac{24 * \frac{1+24}{2}}{4} = 75$$

$$S_1 = 21 \qquad S_2 = 57 \qquad S_3 = 93 \qquad S_4 = 129$$

Pokud při vyplňování obdélníku užijeme výše zobrazenou techniku, dosáhneme nejen konstantních součtů ve sloupcích, ale také konstantních diferencí mezi členy prvního a čtvrtého řádku a mezi členy druhého a třetího řádku.

1	2	3	4	5	6
12	11	10	9	8	7
18	17	16	15	14	13
19	20	21	22	23	24

6 18

$$S_4 - S_r = 129 - 75 = 54 = 3 * 18 \qquad S_3 - S_r = 93 - 75 = 18 = 3 * 6$$

$$S_r - S_2 = 75 - 57 = 18 = 3 * 6 \qquad S_r - S_1 = 75 - 21 = 54 = 3 * 18$$

Musíme tedy proházet tři libovolné dvojice členů prvního a čtvrtého řádku a tři libovolné dvojice členů druhého a třetího řádku. Všechny zvolené dvojice musí být v rámci jednoho sloupce. Výsledný obdélník pak může vypadat například takto:

1	2	3	22	23	24
18	11	16	15	8	7
12	17	10	9	14	13
19	20	21	4	5	6

Se znalostmi z předešlé konstrukce se pokusme o zobecnění obdélníků $O(4, s)$.

Začněme znovu stejnou technikou:

s

1	2	3
2s	2s-1	2s-2
3s	3s-1	3s-2
3s+1	3s+2	3s+3

s-2	s-1	s
s+3	s+2	s+1
2s+3	2s+2	2s+1
4s-2	4s-1	4s

$$S_r = \frac{4s * \frac{1+4s}{2}}{4} = \frac{s * (4s+1)}{2}$$

$$S_1 = \frac{s*(s+1)}{2} \qquad S_2 = \frac{s*(3s+1)}{2} \qquad S_3 = \frac{s*(5s+1)}{2} \qquad S_4 = \frac{s*(7s+1)}{2}$$

s

1	2	3
2s	2s-1	2s-2
3s	3s-1	3s-2
3s+1	3s+2	3s+3

s-2	s-1	s
s+3	s+2	s+1
2s+3	2s+2	2s+1
4s-2	4s-1	4s

s 3s

$$S_4 - S_r = \frac{s}{2} * 3s \qquad S_3 - S_r = \frac{s}{2} * s$$

$$S_r - S_2 = \frac{s}{2} * s \qquad S_r - S_1 = \frac{s}{2} * 3s$$

Je tedy nutné proházet $\frac{s}{2}$ dvojic členů prvního a čtvrtého řádku a $\frac{s}{2}$ dvojic členů druhého a třetího řádku. Zvolené dvojice se musí opět nacházet ve stejném sloupci. Tímto způsobem pak můžeme sestrojit jakýkoliv obdélník $O(4, s)$.

Nyní se ještě pokusme případ zformulovat pro všechny obdélníky $O(r, s)$ takové, že $r = 4a \wedge a \in N$.

s

	1	2	3	⇒	s-2	s-1	s
	2s	2s-1	2s-2		s+3	s+2	s+1
	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮
	$\frac{rs}{2}-2s+1$	$\frac{rs}{2}-2s+2$	$\frac{rs}{2}-2s+3$		$\frac{rs}{2}-s-2$	$\frac{rs}{2}-s-1$	$\frac{rs}{2}-s$
r	$\frac{rs}{2}$	$\frac{rs}{2}-1$	$\frac{rs}{2}-2$	⇒	$\frac{rs}{2}-s+3$	$\frac{rs}{2}-s+2$	$\frac{rs}{2}-s+1$
	$\frac{rs}{2}+s$	$\frac{rs}{2}+s-1$	$\frac{rs}{2}+s-2$		$\frac{rs}{2}+3$	$\frac{rs}{2}+2$	$\frac{rs}{2}+1$
	$\frac{rs}{2}+s+1$	$\frac{rs}{2}+s+2$	$\frac{rs}{2}+s+3$		$\frac{rs}{2}+2s-2$	$\frac{rs}{2}+2s-1$	$\frac{rs}{2}+2s$
	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮
	rs-s	rs-s-1	rs-s-2		rs-2s+3	rs-2s+2	rs-2s+1
	rs-s+1	rs-s+2	rs-s+3	⇒	rs-2	rs-1	rs

$$S_r = \frac{s * (1 + rs)}{2}$$

Všimněme si vztahu mezi součtem jednoho a následujícího řádku takto vyplněného obdélníku:

$$S_1 = \frac{s * (s + 1)}{2}$$

$$S_2 = \frac{s * (3s + 1)}{2} = S_1 + s^2$$

$$S_3 = \frac{s * (5s + 1)}{2} = S_2 + s^2$$

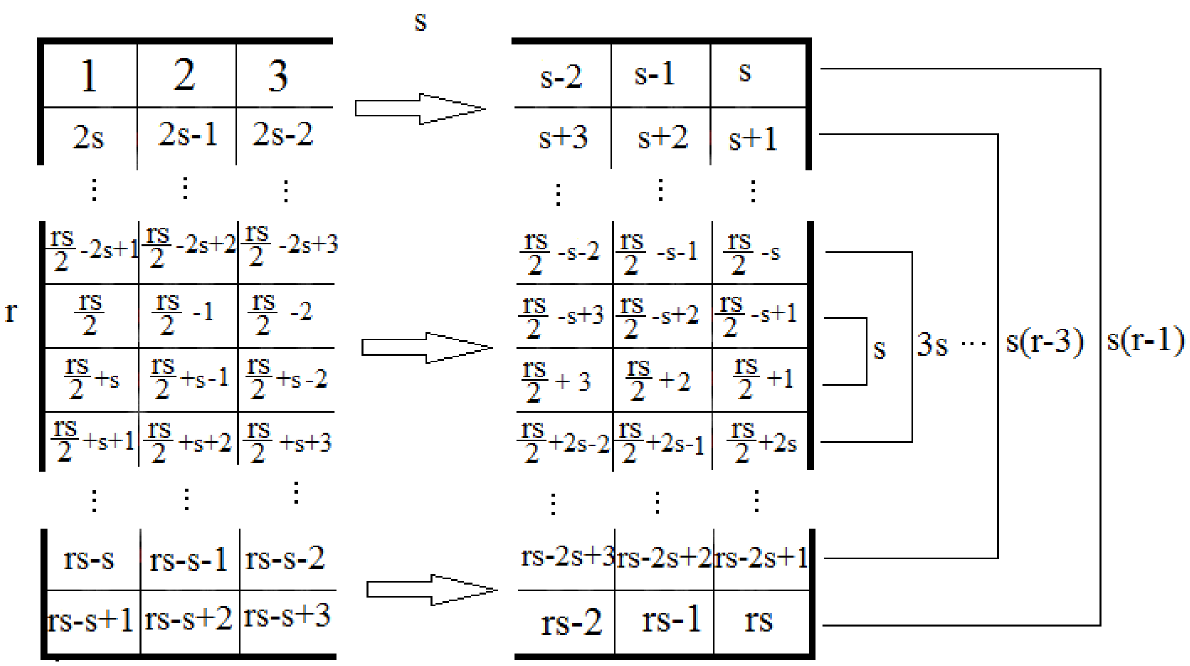
Součty na řádcích tedy tvoří aritmetickou posloupnost:

$$S_1 = \frac{s * (s + 1)}{2}$$

$$t = s^2$$

$$S_n = S_1 + (n - 1) * t \ \wedge \ n \in \{1; 2; 3; \dots r\}$$

Kromě konstantních součtů ve sloupcích má také obdélník vyplněný znázorněným způsobem konstantní diference mezi členy prvního a posledního řádku, mezi členy druhého a předposledního řádku atd.



Diference tedy také tvoří aritmetickou posloupnost. Pokud budeme za první člen považovat největší možnou diferenci, tedy diferenci mezi členy prvního a posledního řádku a za poslední člen nejmenší možnou diferenci, tedy mezi členy řádku s označením $\frac{r}{2}$ a řádku s označením $(\frac{r}{2} + 1)$, bude platit následující:

$$dif_1 = s * (r - 1)$$

$$u = -2s$$

$$dif_m = a_1 + (m - 1) * u \ \wedge \ m \in \left\{1; 2; 3 \ldots \frac{r}{2}\right\}$$

Příklad:

Spočítejme součet na třetím řádku a také diferenci jeho členů se členy řádku s označením $(r - 2)$.

$$S_3 = S_1 + 2t = \frac{s * (5s + 1)}{2}$$

$$dif_3 = dif_1 + 2u = s * (r - 5)$$

Nyní si spočítejme součet na řádku $(r - 2)$ a také diferenci, kterou tvoří jeho členy se členy třetího řádku. Při výpočtu součtu na řádku si všimněme, že stejně jako můžeme postupně k nejmenšímu ze součtů (tedy k součtu na prvním řádku) přičítat hodnotu t, tak můžeme i od největšího ze součtů (tedy od součtu na posledním řádku) tuto hodnotu odečítat.

$$S_{r-2} = \frac{s * (2rs - s + 1)}{2} - 2t = \frac{s * (2rs - 5s + 1)}{2}$$

$$dif_3 = dif_1 + 2u = s * (r - 5)$$

Diference jsou samozřejmě stejné jako v předešlém příkladu u třetího řádku, neboť jsme nyní zvolili řádek, u kterého se počítají diference právě se třetím řádkem.

Všimněme si nyní ještě jedné závislosti. Při výpočtu součtu na řádku i při výpočtu hodnot diferencí jsme přičítali stejný násobek čísla t i čísla u. Označme tento násobek x.

Abychom z našeho obdélníku vytvořili obdélník magický, musí platit pro všechny řádky z první poloviny obdélníku, že:

$$(S_1 + x * s^2) + k * (dif_1 - x * 2s) = \frac{s * (1 + rs)}{2}$$

Tedy musí platit, že při přičtení určitého násobku diferencí (v rovnici označen *k*) k určitému řádku z první poloviny obdélníku (přičítané diference jsou samozřejmě analogické k řádku, na kterém se nacházíme – to zajišťuje násobek *x*) se dostaneme na ideální součet na řádku.

Zároveň musí platit pro všechny řádky z druhé poloviny našeho obdélníku, že:

$$\left(\frac{s * (2rs - s + 1)}{2} - x * s^2\right) - k * (dif_1 - x * 2s) = \frac{s * (1 + rs)}{2}$$

Tedy musí platit, že při odečtení určitého násobku diferencí (v rovnici označen *k*) k určitému řádku z první poloviny obdélníku (přičítané diference jsou samozřejmě analogické k řádku, na kterém se nacházíme – to zajišťuje násobek *x*) se dostaneme na ideální součet na řádku.

Též je očividné, že násobek *k* musí mít v obou rovnicích stejnou hodnotu, protože jakmile prohodíme nějakou dvojici členů o určité diferenci, tak se tato diference k součtu na řádku s původně menším číslem přičte a ve stejnou chvíli se od součtu na řádku s původně větším číslem tato diference odečte.

$$(S_1 + x * s^2) + k * (dif_1 - x * 2s) = \frac{s * (1 + rs)}{2}$$

$$k * [s * (r - 1) - x * 2s] = \frac{s * (1 + rs)}{2} - \frac{s * (s + 1)}{2} - x * s^2$$

$$k * (rs - s - 2xs) = \frac{s + rs^2 - s^2 - s - 2xs^2}{2}$$

$$k = \frac{s^2 * (r - 1 - 2x)}{2s * (r - 1 - 2x)}$$

$$k = \frac{s}{2}$$

$$\left(\frac{s * (2rs - s + 1)}{2} - x * s^2\right) - k * (dif_1 - x * 2s) = \frac{s * (1 + rs)}{2}$$

$$k * (dif_1 - x * 2s) = \frac{s * (2rs - s + 1)}{2} - x * s^2 - \frac{s * (1 + rs)}{2}$$

$$k * (rs - s - 2xs) = \frac{2rs^2 - s^2 + s - 2xs^2 - s - rs^2}{2}$$

$$k = \frac{s^2 * (r - 1 - 2x)}{2s(r - 1 - 2x)}$$

$$k = \frac{s}{2}$$

Výsledného magického obdélníku tedy dostaneme proházíním libovolných $\frac{s}{2}$ dvojic členů prvního a posledního řádku, druhého a předposledního řádku atd. Zvolené dvojice musí vždy ležet v jednom sloupci.

Závěrem tedy je, že lze sestrojit každý magický obdélník $O(r, s)$ takový, že $r = 4a \wedge a \in N$.

Jediné sudé obdélníky, kterým jsme se dosud nevěnovali, jsou obdélníky typu $O(r,s)$ takové, že $r = (4a+2) \wedge a \in N$.

Nejjednoduššími takovými obdélníky jsou obdélníky $O(6,s)$. Jejich konstrukci začněme technikou znázorněnou na obrázku níže.

s

1	2	3	s-2	s-1	s
2s	2s-1	2s-2	s+3	s+2	s+1
2s+1	2s+2	2s+3	3s-2	3s-1	3s
4s	4s-1	4s-2	3s+3	3s+2	3s+1
5s	5s-1	5s-2	4s+3	4s+2	4s+1
5s+1	5s+2	5s+3	6s-2	6s-1	6s

$$S_r = \frac{6s * \frac{1+6s}{2}}{6} = \frac{s*(6s+1)}{2}$$

$S_1 = \frac{s*(s+1)}{2}$ $S_2 = \frac{s*(3s+1)}{2}$ $S_3 = \frac{s*(5s+1)}{2}$

$S_4 = \frac{s*(7s+1)}{2}$ $S_5 = \frac{s*(9s+1)}{2}$ $S_6 = \frac{s*(11s+1)}{2}$

s

1	2	3	s-2	s-1	s
2s	2s-1	2s-2	s+3	s+2	s+1
2s+1	2s+2	2s+3	3s-2	3s-1	3s
4s	4s-1	4s-2	3s+3	3s+2	3s+1
5s	5s-1	5s-2	4s+3	4s+2	4s+1
5s+1	5s+2	5s+3	6s-2	6s-1	6s

M 3s 5s

$$M = \{1; 3; 5; 7; \dots (2s-1)\}$$

Z obrázku je patrné, že diference mezi členy prvního a šestého řádku jsou konstatní. To samé platí o diferencích mezi členy druhého a pátého řádku. S tím jsme se setkali již u obdélníků $O(4,s)$, a tedy víme, jak z takového rozmístění dosáhnout na všech řádcích ideálního součtu.

Diference mezi třetím a čtvrtým řádkem tvoří množinu lichých čísel $\{1;3;5;7;\ldots(2s-1)\}$. S tím jsme se již setkali u obdélníků $O(2,s)$, a tedy víme, jak z takového rozmístění dosáhnout na obou řádcích ideálního součtu.

Závěrem tedy je, že libovolný obdélník $O(6,s)$ existuje. Kromě toho také můžeme tuto úvahu rozšířit na všechny obdélníky typu $O(r,s)$ takové, že $r=(4a+2)\wedge a\in N$, a tudíž i všechny tyto útvary existují.

O obdobné existenční důkazy jsme se pokusili i v případě lichých magických obdélníků. S nimi jsme ale bohužel prozatím neuspěli. V současnosti máme pouze teorii, že důkaz existence jakéhokoliv lichého magického obdélníku bude možné provést na základě sledování parity jednotlivých čísel vpisovaných do magického obdélníku.

3.2.3. Konkrétní příklady

Během našeho bádání jsme se kromě vyčerpávajících důkazů také snažili vyzkoumat různé techniky, které by nám pomohly magický obdélník vyplnit rychle a efektivně. Několik z těchto technik vám představíme v následujících podkapitolách.

Sudé magické obdélníky

Začneme u nejjednodušších obdélníků $O(2,s)$. Jak jsme již zmínili, neexistuje útvar $O(2,2)$ a neexistují ani ty útvary, jejichž rozměry mají rozdílnou paritu. Naše konstrukční technika funguje pouze u obdélníků $O(2,s)$ takových, že $s \in \{4; 8; 12; \dots\}$. Způsob vyplňování obdélníku nebudeme popisovat slovně, je totiž zřejmý z následujících obrázků.

1	7	6	4
8	2	3	5

1	15	14	4	5	11	10	8
16	2	3	13	12	6	7	9

Dalšími obélníky, kterým jsme se věnovali, jsou útvary $O(4, s)$. Techniky naznačené na obrázcích níže platí u všech takových obdélníků.

1	20	3	22	5	24
12	11	16	9	14	13
18	17	10	15	8	7
19	2	21	4	23	6

1	26	3	28	5	30	7	32
16	15	22	13	20	11	18	17
24	23	14	21	12	19	10	9
25	2	27	4	29	6	31	8

1	32	3	34	5	36	7	38	9	40
20	19	28	17	26	15	24	13	22	21
30	29	18	27	16	25	14	23	12	11
31	2	33	4	35	6	37	8	39	10

U obdélníků $O(6,s)$ opět narážíme na problém jako v prvním případě, naše technika vyplňování je aplikovatelná pouze v útvarech $O(6,s)$ takových, že $s \in \{8; 12; 16; \ldots\}$.

1	2	46	45	44	43	7	8
16	15	35	36	37	38	10	9
17	18	30	29	28	27	23	24
32	31	19	20	21	22	26	25
33	34	14	13	12	11	39	40
48	47	3	4	5	6	42	41

1	2	3	69	68	67	66	65	64	10	11	12
24	23	22	52	53	54	55	56	57	15	14	13
25	26	27	45	44	43	42	41	40	34	35	36
48	47	46	28	29	30	31	32	33	39	38	37
49	50	51	21	20	19	18	17	16	58	59	60
72	71	70	4	5	6	7	8	9	63	62	61

Jako ukázku uvádíme ještě správně vyplněné obdélníky $O(6,14)$ a $O(6,18)$, které výše naznačenou technikou sestrojit nelze:

1	2	3	74	75	76	7	78	79	80	81	12	13	14
28	27	26	67	66	65	22	63	62	61	60	17	16	15
29	30	31	53	52	51	35	49	48	47	46	40	41	43
56	55	54	32	33	34	50	36	37	38	39	45	44	42
70	69	68	25	24	23	64	21	20	19	18	59	58	57
71	72	73	4	5	6	77	8	9	10	11	82	83	84

1	92	93	4	95	96	7	98	99	10	101	12	103	104	15	16	17	18
36	89	88	33	86	85	30	83	82	27	80	25	78	77	22	21	20	19
37	71	70	40	68	67	43	44	64	46	62	48	60	50	51	52	53	55
72	38	39	69	41	42	66	65	45	63	47	61	49	59	58	57	56	54
90	35	34	87	32	31	84	29	28	81	26	79	24	23	76	75	74	73
91	2	3	94	5	6	97	8	9	100	11	102	13	14	105	106	107	108

Liché magické obdélníky

Na rozdíl od sudých magických obdélníků jsme u lichých magických obdélníků nebyli schopni ani provést důkazy jejich existence, ani nalézt nějakou určitou techniku jejich konstrukce. Naše jediná technika, která alespoň trochu zužuje jinak zcela zkusmý výběr vepisovaných čísel, je sledování jejich parity, což vám blíže vysvětlíme v následující konstrukci.

Pojďme se tedy nyní pokusit sestrojit lichý magický obdélník $O(3,5)$. Nejdříve si u daného magického obdélníku určíme již dříve užitá čísla $S, S_s\ a\ S_r$.

$$S = \frac{3 * 5 * (1 + 3 * 5)}{2} = 120$$

$$S_s = \frac{S}{s} = \frac{120}{5} = 24$$

$$S_r = \frac{S}{r} = \frac{120}{3} = 40$$

Jak číslo S_s, tak i číslo S_r jsou čísla sudá. Číslo sudé dostaneme pouze jako součet dvou sudých čísel nebo dvou lichých čísel. Při vyplňování políček obdélníku si tedy budeme muset dát pozor, aby součet v každém řádku i každém sloupci byl sudé číslo. Stanovme si proto předem, kde bude liché číslo a kde bude sudé číslo:

L	L	S	L	L
S	S	S	S	S
L	L	S	L	L

Sice se bude nakonec stále jednat o vyplňování zkusmo, ale mnoho možností jsme tímto postupem eliminovali. Po následném vyplnění, tak aby platily nutné podmínky, dojdeme například k takovémuto výsledku:

7	3	14	5	11
4	6	8	10	12
13	15	2	9	1

Následně vás ještě pro ukázku seznámíme s obdélníky $O(3,7)$ a $O(3,9)$.

17	9	5	19	11	14	2
15	3	8	10	16	7	18
1	21	20	4	6	12	13

16	12	14	18	20	22	8	9	7
24	26	13	3	17	1	11	6	25
2	4	15	21	5	19	23	27	10

4. Závěr

Jak je z naší práce zcela určitě zřejmé, číselné konfigurace jsou opravdu zajímavé. Po ponoření se do této problematiky jsme začali vnímat matematiku pod jiným úhlem. Také jsme zjistili, že zkoumání a hledání matematických vztahů je mnohem záživnější než jejich následné popisování a dokazování. Na druhou stranu jsou samozřejmě matematické důkazy nezbytné, neboť slouží k našemu vlastnímu ujištění.

Téma naší středoškolské odborné činnosti vypsal Prof. RNDr. Jiří Cihlář, CSc. z Univerzity Jana Evangelisty Purkyně v Ústí nad Labem. Název Zajímavé číselné konfigurace nás zaujal natolik, že jsme si ho zvolili a vypracovali. Během našeho zkoumání jsme také našeho konzultanta několikrát navštívili a nechali se jeho myšlenkami inspirovat. Velice nám s prací pomohl, čehož si opravdu vážíme.

Rádi bychom vás naší prací inspirovali a zaujali natolik, že budete v číselných konfiguracích pátrat i na vlastní pěst. Také doufáme, že se vám naše práce líbila a že vám dala alespoň trochu nového.

5. Použitá literatura a zdroje

CALDA, Emil; DUPAČ Václav. *Matematika pro gymnázia Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika.* Praha: Prometheus, 2011. ISBN 978-80-7196-365-3.

REKTORYS, Karel. *Přehled užité matematiky*. Praha: Prometheus, 2009. ISBN 978-80-7196-180-2.

http://en.wikipedia.org/wiki/Pascal_triangle#History

http://mathforum.org/workshops/usi/pascal/images/base.gif

www.learner.org

https://www.math.muni.cz/~fuchs/Efuchs/historie_pdf/mactv.pdf

http://mks.mff.cuni.cz/library/MagickeCtverceTR/MagickeCtverceTR.pdf

http://cs.wikipedia.org/wiki/Slovn%C3%AD_%C4%8Dtverec

http://cs.wikipedia.org/wiki/Magick%C3%BD_%C4%8Dtverec

6. Seznam stažených obrázků

Neočíslované obrázky jsou obrázky autorské.

Obr. 1: Portrét B. Pascala
http://cs.wikipedia.org/wiki/Blaise_Pascal

Obr. 2: Cesty v PT
http://en.wikipedia.org/wiki/Pascal_triangle#History

Obr. 3: PT z kombinačních čísel
http://en.wikipedia.org/wiki/Pascal_triangle#History

Obr. 4: Základní pravidlo Pascalova trojúhelníku
http://pt.wikibooks.org/wiki/Matem%C3%A1tica_divertida/Tri%C3%A2ngulo_de_Pascal

Obr. 5: Osa symetrie PT
https://audioboom.com/boos/658879-the-symmetry-of-pascal-s-triangle

Obr. 6: Mocniny dvou na řádcích PT
http://www.elegantcoding.com/2012/10/the-ubiquitous-patterns-of-pascals.html

Obr. 7: Součty v diagonálách PT
https://www.ncetm.org.uk/resources/21255

Obr. 8: Magický čtverec *Sator*
http://cs.wikipedia.org/wiki/Slovn%C3%AD_%C4%8Dtverec

Obr. 9: Detail obrazu *Melancholie I* od A. Dürera
http://cs.wikipedia.org/wiki/Melancholie_I

Obr. 10: Magický čtverec $O(3,3)$
http://mks.mff.cuni.cz/library/MagickeCtverceTR/MagickeCtverceTR.pdf

Obr. 11: Magický čtverec $O(4,4)$
http://mks.mff.cuni.cz/library/MagickeCtverceTR/MagickeCtverceTR.pdf

Obr. 12: Magický čtverec $O(6,6)$
http://nina-pina.webgarden.cz/rubriky/magie/magicke-ctverce

Obr. 13: Magický čtverec $O(14,14)$
http://www.math.wichita.edu/~richardson/mathematics/magic%20squares/even-ordermagicsquares.html

Obr. 14: Magický čtverec $O(5,5)$
https://www.math.muni.cz/~fuchs/Efuchs/historie_pdf/mactv.pdf

Obr. 15: Magický čtverec $O(7,7)$
http://dagonmd.blogspot.cz/2010_04_01_archive.html

Obr. 16: Vyhledávač Google
https://www.google.cz/