STŘEDOŠKOLSKÁ ODBORNÁ ČINNOST
Obor SOČ: 01. Matematika a statistika

Dirichletův princip

The pigeon-hole principle

Autor: Hoang Anh Nguyen

Škola: Gymnázium Cheb, Cheb

Kraj: Karlovarský kraj

Konzultant: Mgr. Josef Hazi

Cheb 2015

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou práci SOČ vypracovala samostatně a použila jsem pouze podklady (literaturu, projekty, SW atd.) uvedené v seznamu vloženém v práci SOČ.

Prohlašuji, že tištěná verze a elektronická verze soutěžní práce SOČ jsou shodné.

Nemám závažný důvod proti zpřístupňování této práce v souladu se zákonem č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon) v platném znění.

V Chebu dne..............................   podpis:.......................................

Chtěla bych poděkovat svému učiteli matematiky Mgr. Josefu Hazimu za obětavou pomoc a podnětné připomínky, které mi během práce poskytoval. Dále bych ráda poděkovala Mgr. Nguyen Ngoc Nam za dohledání zdrojů k mé práci a následnou pomoc s jejich předkladem a mé poděkování patří též Mgr. Pavle Jalovcové, za pomoc při celkové úpravě práce.

Také systému GeoGebra, ve které byly vytvořeny veškeré obrázky v této práci.

Abstrakt

Tato práce je zaměřena na Dirichletův princip a jejím cílem je ukázat jeho užití k řešení matematických úloh a otázek z oblasti teorie čísel, kombinatorické geometrie a zejména k důkazům nerovností, jejichž řešení pomocí právě Dirichletova principu se na českých matematických portálech vyskytuje jen velice sporadicky.

Práce čerpá z velice rozmanitých a nedostupných zdrojů, které z větší části zahrnují i vietnamskou literaturu.

Klíčová slova: Dirichletův princip; nerovnost; algebra; aritmetika; teorie čísel; kombinatorická geometrie

Abstract

This work's focus and goal is to demonstrate solving of Mathematical problems from various fields of Mathematics, such as the number theory, the combinatorial geometry and inequality in particular, which is mentioned only sparingly on Czech Mathematical portals, by applying the pigeon-hole principle.

This work contains intelligence from very various and inaccessible sources that mainly include vietnamese literature.

Key words: pigeon-hole principle; inequality; algebra; arithmetic; number theory; combinatorial geometry

Obsah

Úvod

Dirichletův princip, v jiných zemích zvaný také jako zásuvkový princip nebo jako princip holubníku, je zdánlivě triviální matematické tvrzení, jehož podstatu je schopen vesměs pochopit každý. Máme-li n předmětů, které vložíme do $n-1$ zásuvek, tak vždy najdeme zásuvku, ve které budou alespoň dva předměty. Jeho důkaz není o nic složitější.

Právě svým jednoduchým, pro mnohé čistě logickým zněním se Dirichletův princip naprosto vymyká všem ostatním matematickým tvrzením. Nejpozoruhodnější na samotném pricipu je však jeho překvapivě široké využití, při řešení na první pohled velice náročných problémů, v oblasti teorie čísel, matematické analýzy, kombinatorické geometrie a dalších jako jsou teorie grafu či pravděpodobnost, jimž se v této práci nebudu zabývat.

Poprvé jsem se s Dirichletovým principem setkala v roce 2012 při řešení domácího kola matematické olympiády kategorie C, kde byla jeho znalost klíčová k vyřešení jedné z úloh. Tehdy jsem měla s jeho důkladným pochopením a následnou aplikací veliké potíže. Tato zkušenost byla podnětem k mému hlubšímu zaujetí principem a následnému shromažďování značného množství úloh s touto tematikou.

Hlavním cílem této práce je zpracovat komplexní sbírku řešených úloh pomocí tohoto principu a vytvořit tak materiál pro přípravu k nejrůznějším matematickým soutěžím či pro případné zájemce o samotný princip a jeho aplikaci jako takovou, neboť právě díky svému širokému poli využití, se Dirichletův princip právem staví mezi jedno z nejužitečnějších tvrzení v matematice. Dovoluje nám nahlížet i na velice náročné úlohy zcela odlišným způsobem a následně jejich řešení značně zjednodušit.

K dokazování složitých tvrzení jej poprvé použil německý matematik Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859) po kterém princip získal své jméno.

1 Dirichletův princip

Základní Drichletův princip: [6], [7],[12]

Mějme $n+1$ předmětů a n přihrádek. Pokud těchto $n+1$ předmětů umístíme do daných přihrádek, pak aspoň v jedné budou nejméně dva předměty.

Důkaz:

Předpokládejme, že v každé přihrádce bude nejvýše jeden předmět. Pak ve všech přihrádkách dohromady bude nejvýše n předmětů, což je spor, protože rozmísťovaných předmětů bylo $n+1$. Tím je tvrzení dokázáno.

Toto tvrzení má několik zobecnění, která se dají dobře uplatnit:

Obecný Dirichletův princip:[10]

Nechť $n, k \in N$. Je-li alespoň $nk+1$ předmětů rozděleno do n skupin, pak v některé z nich je alespoň $k+1$ předmětů.

Důkaz:

Připustíme, že závěr neplatí, tj. pro počet m_i předmětů v i-té platí $0 \le m_i \le k$, a to pro každé $i = 1,..., n$. Sečtením n pravých nerovností dostaneme

$$m_1 + m_2 + ... + m_n \le \underbrace{k + k + ...k}_{n} = nk$$

neboli počet $m_1 + m_2 + ... + m_n$ všech rozdělených předmětů je nejvýše nk, což je spor, protože rozmísťovaných předmětů bylo $nk+1$. Tím je tvrzení dokázáno.

2 Užití Dirichletova principu k důkazu nerovností

Dirichletův princip je v mnoha případech velice účinným nástrojem při důkazech nerovností, zejména k důkazům nerovností s danou podmínkou. Následující tvrzení jsou jeho modifikací.

Tvrzení 2.1:[5]

Nechť $a_1, a_2, ..., a_n$ jsou libovolná reálná čísla. Pro dané reálné číslo k a $n \geq 3$, lze vždy najít dvě čísla $a_i, a_j, i \neq j$ z n daných čísel taková, že $a_i - k$, $a_j - k$ mají stejné znaménko.

Toto tvrzení plyne přímo z Dirichletova principu. Pomocí tohoto tvrzení získáme:

- Ze tří libovolných reálných čísel, lze vždy najít dvě taková čísla, jejichž součin je nezáporné číslo.
- K důkazu nerovností užitím výše uvedeného tvrzení najdeme nejdříve reálné číslo k takové, že po dosažení k do dokazované nerovnosti dosatname rovnost. Potom zřejmě platí, že $(a-k), (b-k)$ jsou dvě čísla, jejichž součin je nezáporný. Z toho vyplývá dokazovaná nerovnost.

Tvrzení 2.2:[1] (nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem)

Nechť $x_1, x_2, ..., x_n$ jsou nezáporná reálná čísla. Pak platí

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1\, x_2 \ldots x_n}\ ,$$

rovnost nastává, právě když $x_1 = x_2 = ... = x_n$.

Tvrzení 2.3:[9] (Cauchyova nerovnost)

Pro každé $x_i, y_i \in R \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$ platí

$$\left|x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n\right| \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + .. x_n^2}\,\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2}\ ,$$

rovnost nastává, právě když existuje takové číslo $k \geq 0$, že $x_i = k y_i$ nebo $y_i = k x_i$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Vzhledem k tomu, že vždy platí

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n \leq \left|x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n\right|,$$

plyne odtud a z předchozího tvaru Cauchyovy nerovnosti tento její důsledek:

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}\,\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2}\ .$$

V literatuře se někdy uvádějí pro Cauchyovu nerovnost alternativní názvy jako Schwarzova nebo Buňakovského nerovnost.

Tvrzení 2.4:[1] (Hölderova nerovnost)

Nechť $p, q, x_i, y_i > 0,\ \ i = 1, 2, \ldots, n,\ \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Potom

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \le \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p \right)^{\frac{1}{p}} . \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q \right)^{\frac{1}{q}} .$$

Rovnost nastává, právě když existuje takové číslo $k \ge 0$, že $y_i^q = k.x_i^p,\ \ i = 1, 2, \ldots, n$.

Uvažujme následující příklady:

Příklad 1:[4]

Dokažte, že pro každá kladná reálná čísla a, b, c platí

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 1 \ge 2(ab + ac + bc) .$$

Řešení: [4]

Snadno zjistíme, že dokazovaná nerovnost bude rovnost, když $a = b = c = 1$. Podle výše uvedeného tvrzení existují aspoň dvě ze tří čísel $a-1, b-1, c-1$, jejichž součin je nezáporný. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $(a-1)(b-1) \ge 0$. Z toho vyplývá

$$2c(a-1)(b-1) \ge 0 \Leftrightarrow 2abc \ge 2bc + 2ac - 2c .$$

Nyní stačí dokázat, že

$$a^2 + b^2 + c^2 + 1 \ge 2c + 2ab \Leftrightarrow (a-b)^2 + (c-1)^2 \ge 0 ,$$

což platí pro každá realná čísla a, b, c. Rovnost nastává právě tehdy, když $a = b = c = 1$. Tím je dané tvrzení dokázáno.

Příklad 2:[4]

Dokažte, že pro každá reálná čísla x, y, z platí

$$x^2+y^2+z^2+x^2y^2z^2+2\ge 2(xy+xz+yz).$$

Řešení: [4]

Podle výše uvedeného tvrzení existují aspoň dvě ze tří čísel x^2-1, y^2-1, z^2-1, jejichž součin je nezáporný. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $(x^2-1)(y^2-1)\ge 0$. Z toho vyplývá

$$z^2(x^2-1)(y^2-1)\ge 0 \Rightarrow x^2y^2z^2+z^2\ge y^2z^2+x^2z^2.$$

Nyní stačí dokázat, že

$$x^2+y^2+2+y^2z^2+x^2z^2\ge 2(xy+xz+yz) \Leftrightarrow (x-y)^2+(yz-1)^2+(xz-1)^2\ge 0,$$

což platí pro každá realná čísla x, y, z. Rovnost nastává právě tehdy, když $x=y=z=1$. Tím je dané tvrzení dokázáno.

Příklad 3:[4]

Nechť a,b,c jsou kladná reálná čísla. Dokažte, že

$$a^2+b^2+c^2+2abc+3\ge (a+1)(b+1)(c+1).$$

Řešení: [4]

Po vynásobení obou stran dané nerovnosti číslem 2 a po úpravě, získáme

$$(a^2+b^2+c^2+3)+(a^2+b^2+c^2+2abc+1)\ge 2(ab+bc+ac)+2(a+b+c).$$

Snadno zjistíme, že dokazovaná nerovnost bude rovnost, když $a=b=c=1$. Podle Dirichletova principu existují aspoň dvě z čísel $a-1$, $b-1$, $c-1$, jejichž součin je nezáporný. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $(a-1)(b-1)\ge 0$. Užitím výsledku získaného z Příkladu 1, získáme

$$a^2+b^2+c^2+2abc+1\ge 2(ab+bc+ac).$$

Nyní stačí dokázat

$$a^2+b^2+c^2+3\ge 2(a+b+c) \Leftrightarrow (a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2\ge 0,$$

což platí pro každá reálná čísla a,b,c. Rovnost nastává právě tehdy, když $a=b=c=1$.

Tím je dané tvrzení dokázáno.

Příklad 4:[4]

Nechť a, b, c jsou kladná reálná čísla. Dokažte, že

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) \geq 3(a+b+c)^2 + (abc-1)^2 .$$

Řešení: [4]

Upravíme dokazovanou nerovnost do tvaru

$$(2a^2b^2+2+2a^2c^2+2+2b^2c^2+2)+(a^2+b^2+c^2+2abc+1) \geq 6(ab+ac+bc) .$$

Snadno zjistíme, že dokazovaná nerovnost bude rovnost, když $a=b=c=1$. Podle Dirichletova principu existují aspoň dvě z těchto čísel $a-1$, $b-1$, $c-1$, jejichž součin je nezáporný. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $(a-1)(b-1) \geq 0$. Užitím výsledku získaného z příkladu 1, získáme

$$a^2+b^2+c^2+2abc+1 \geq 2(ab+bc+ac) .$$

Rovnost nastává právě tehdy, když $a=b=c=1$

Nyní stačí dokázat

$$(2a^2b^2+2+2a^2c^2+2+2b^2c^2+2) \geq 4(ab+ac+bc) .$$

Pomocí nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem dostaneme

$2a^2b^2+2 \geq 2\sqrt{4a^2b^2} = 4ab$. Rovnost nastává právě tehdy, když $a=b=1$, (1)

$2a^2c^2+2 \geq 2\sqrt{4a^2c^2} = 4ac$. Rovnost nastává právě tehdy, když $a=c=1$, (2)

$2b^2c^2+2 \geq 2\sqrt{4b^2c^2} = 4bc$. Rovnost nastává právě tehdy, když $b=c=1$. (3)

Sečtením (1), (2) a (3) získáme

$$(2a^2b^2+2+2a^2c^2+2+2b^2c^2+2) \geq 4(ab+ac+bc) .$$

Rovnost nastává právě tehdy, když $a=b=c=1$. Tím je tvrzení dokázáno.

Příklad 5:[4]

Nechť a, b, c jsou libovolná reálná čísla. Dokažte, že

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) \geq 3(a+b+c)^2 .$$

Řešení: [4]

Upravíme dokazovanou nerovnost do tvaru

$$2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)+6+(a^2+b^2+c^2+a^2b^2c^2+2) \geq 4(ab+ac+bc)+2(ab+ac+bc)$$

Snadno zjistíme, že dokazovaná nerovnost bude rovnost, když $a=b=c=1$. Podle výše uvedeného tvrzení existují aspoň dvě ze tří čísel a^2-1, b^2-1, c^2-1, jejichž součin je nezáporný. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $(a^2-1)(b^2-1) \geq 0$. Užitím výsledku získaného z Příkladu 2, získáme

$$a^2+b^2+c^2+a^2b^2c^2+2 \geq 2(ab+ac+bc) .$$

Rovnost nastává právě tehdy, když $a=b=c=1$.

Stačí tedy dokázat

$$2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)+6 \geq 4(ab+ac+bc) \Leftrightarrow (ab-1)^2+(bc-1)^2+(ac-1)^2 \geq 0 .$$

Poslední nerovnost platí pro každé reálné číslo a rovnost nastává právě tehdy, když $a=b=c=\pm 1$. Čímž je dané tvrzení dokázáno.

Příklad 6:[4] (APMO 2004)

Nechť a, b, c jsou kladná reálná čísla. Dokažte, že

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) \geq 9(ab+bc+ac) .$$

Řešení: [4]

Upravíme dokazovanou nerovnost do tvaru

$$\begin{aligned}&\left[2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)+6\right]+(a^2+b^2+c^2+a^2b^2c^2+2)+3(a^2+b^2+c^2) \geq \\ &\geq 4(ab+ac+bc)+2(ab+ac+bc)+3(ab+ac+bc).\end{aligned}$$

Snadno zjistíme, že dokazovaná nerovnost bude rovnost, když $a=b=c=1$ nebo $a=b=c=-1$. Podle výše uvedeného tvrzení existují aspoň dvě ze tří čísel a^2-1, b^2-1, c^2-1, jejichž součin je nezáporný. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $(a^2-1)(b^2-1)\geq 0$. Užitím výsledku získaného z příkladu 2, získáme

$$a^2+b^2+c^2+a^2b^2c^2+2\geq 2(ab+ac+bc)\ .$$

Rovnost nastává právě tehdy, když $a=b=c=1$ nebo $a=b=c=-1$.

Analogicky z výsledku získaného z příkladu 4, získáme

$$2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)+6\geq 4(ab+ac+bc)\ .$$

Rovnost nastává právě tehdy, když $a=b=c=1$ nebo $a=b=c=-1$.

Stačí tedy dokázat

$$a^2+b^2+c^2\geq ab+ac+bc\ .$$

Užitím Cauchyovy nerovnosti pro $x_1=a, y_1=b, x_2=b, y_2=c, x_3=c, y_3=a$ dostaneme

$$|ab+bc+ac|=ab+bc+ac\leq\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{b^2+c^2+a^2}=a^2+b^2+c^2,$$

rovnost nastává právě tehdy, když $\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}=\dfrac{c}{a}$, tj. $a=b=c=1$ nebo $a=b=c=-1$.

Tím je dané tvrzení dokázáno.

<u>Příklad 7</u>:[4] (USA 2001)

Nechť a,b,c jsou kladná reálná čísla, pro která platí $a^2+b^2+c^2+abc=4$. Dokažte

$$ab+bc+ac-abc\leq 2\ .$$

<u>Řešení</u>: [4]

Je zřejmé, že je-li $a=b=c=1$, pak dokazovaná nerovnost bude rovnost. Podle výše uvedeného tvrzení existují aspoň dvě z čísel $a-1$, $b-1$, $c-1$, jejichž součin je nezáporný. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $(a-1)(b-1)\geq 0$. Z toho vyplývá, že

$$c(a-1)(b-1)\geq 0\Rightarrow abc\geq bc+ac-c\Rightarrow ab+c\geq ab+bc+ac-abc. \qquad (1)$$

Ze zadání vyplývá, že

$$\begin{aligned}&4=a^2+b^2+c^2+abc\geq 2ab+c^2+abc\Rightarrow 4-c^2\geq ab(c+2)\Rightarrow\\&\Rightarrow 2-c\geq ab\Rightarrow ab+c\leq 2\end{aligned} \qquad (2)$$

Z (1) a (2) získáme

$$ab+bc+ac-abc \le 2.$$

Rovnost nastává právě tehdy, když platí $a=b=c=1$.Čímž je dané tvrzení dokázáno.

Příklad 8:[2]

Nechť a, b, c jsou kladná reálná čísla, pro která platí $a+b+c=3$. Dokažte

$$(a^2-a+1)(b^2-b+1)(c^2-c+1) \ge 1.$$

Řešení: [2]

Je zřejmé, že je-li $x=y=1$, pak dokazovaná nerovnost bude rovnost. Podle výše uvedeného tvrzení existují aspoň dvě z čísel $a-1$, $b-1$, $c-1$, jejichž součin je nezáporný. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $(b-1)(c-1) \ge 0$. Potom

$$\begin{aligned}&(b^2-b+1)(c^2-c+1) = bc(b-1)(c-1)+b^2+c^2-b-c+1 \ge \\ &\ge b^2+c^2-b-c+1 \ge \frac{1}{2}(b+c)^2-(b+c)+1 > 0.\end{aligned}$$

Z toho vyplývá, že

$$\begin{aligned}&(a^2-a+1)(b^2-b+1)(c^2-c+1) \ge (a^2-a+1)\left(\frac{1}{2}(b+c)^2-(b+c)+1\right) = \\ &= \frac{1}{2}(a^2-a+1)(a^2-4a+5).\end{aligned}$$

Stačí tedy dokázat

$$(a^2-a+1)(a^2-4a+5) \ge 2.$$

Položme $f(a)=(a^2-a+1)(a^2-4a+5)$, kde $D(f)=(0;3)$, pak

$$f'(a)=4a^3-15a^2+20a-9=(a-1)(4a^2-11a+9).$$

Vyšetřováním průběhu funkce $f(a)$ na intervalu $(0;3)$ zjistíme, že na intervalu $(0;1)$ je funkce $f(a)$ klesající, na intervalu $(1;3)$ je funkce $f(a)$ rostoucí. Funkce $f(a)$ má nejmenší hodnotu rovnou 2 v bodě $a=1$, čímž je dané tvrzení dokázáno. Rovnost nastává právě tehdy, když $a=b=c=1$.

Příklad 9:[2] (UK TST 2005)

Nechť a, b, c jsou kladná reálná čísla, pro která platí $abc = 1$. Dokažte, že platí

$$\frac{a+3}{(a+1)^2} + \frac{b+3}{(b+1)^2} + \frac{c+3}{(c+1)^2} \geq 3 .$$

Řešení: [2]

Nejdříve dokážeme dvě následující pomocné nerovnosti:

$$\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} \geq \frac{2}{a+b+c+1} + 1 \qquad (1)$$

$$\frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{(b+1)^2} + \frac{1}{(c+1)^2} + \frac{1}{a+b+c+1} \geq 1 \qquad (2)$$

Upravíme nerovnost (1) do tvaru

$$\frac{3+ab+bc+ac+2(a+b+c)}{2+ab+bc+ac+a+b+c} \geq \frac{3+a+b+c}{1+a+b+c} \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2 \geq 3 .$$

Z Cauchyovy nerovnosti a podmínek zadání vyplývá, že

$$a^2+b^2+c^2 \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} = 3 ,$$

čímž je rovnost (1) dokázána.

Nyní dokážeme nerovnost (2). Je zřejmé, že nerovnost (2) je rovnost, když platí $a = b = 1$. Podle výše uvedeného tvrzení existují aspoň dvě z těchto čísel $a-1$, $b-1$, $c-1$, jejichž součin je nezáporný. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $(a-1)(b-1) \geq 0$. Z toho vyplývá, že

$$\begin{aligned} &\forall a,b \in R^+ : abc = 1 \wedge (a-1)(b-1) \geq 0 \Rightarrow ab+1 \geq a+b \Rightarrow 2(ab+1) \geq \\ &\geq ab+a+b+1 \Rightarrow 2(ab+1) \geq (a+1)(b+1) \Rightarrow \frac{2}{(a+1)(b+1} \geq \frac{1}{ab+1} = \frac{c}{c+1}. \end{aligned} \qquad (3)$$

$$\forall a,b \in R^+ : \frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{(b+1)^2} \geq \frac{2}{(a+1)(b+1)} . \qquad (4)$$

Z (3) a (4) dostaneme

$$\frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{(b+1)^2} \geq \frac{1}{ab+1} = \frac{c}{c+1} ,$$

platí tedy

$$\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{1}{(b+1)^2}+\frac{1}{(c+1)^2}+\frac{1}{a+b+c+1}\geq\frac{c}{c+1}+\frac{1}{(c+1)^2}+\frac{1}{\frac{c+1}{c}+c+1}=1.$$

Tím je nerovnost (2) dokázána.

Nyní upravíme dokazovanou nerovnost do tvaru

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}+\frac{2}{(a+1)^2}+\frac{2}{(b+1)^2}+\frac{2}{(c+1)^2}\geq 3.$$

Z (1) a (2) vyplývá, že

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}+\frac{2}{(a+1)^2}+\frac{2}{(b+1)^2}+\frac{2}{(c+1)^2}\geq$$
$$\geq\frac{2}{(a+1)^2}+\frac{2}{(b+1)^2}+\frac{2}{(c+1)^2}+\frac{2}{a+b+c+1}+1\geq 2+1=3\quad,$$

rovnost nastává právě tehdy, když $a=b=c=1$. Tím je dané tvrzení dokázáno.

Příklad 10:[2]

Nechť a,b,c jsou tři libovolná nezáporná reálná čísla. Dokažte, že platí

$$abc+2+\frac{1}{\sqrt{2}}\left((a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2\right)\geq a+b+c.$$

Řešení: [2]

Je zřejmé, že pokud $a=b=c=1$, pak dokazovaná nerovnost bude rovnost. Podle výše uvedeného tvrzení existují aspoň dvě z těchto čísel $a-1$, $b-1$, $c-1$, jejichž součin je větší nebo roven nule. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $(a-1)(b-1)\geq 0$. Z toho vyplývá, že

$$(a-1)(b-1)\geq 0\Rightarrow ab\geq a+b-1.$$

Stačí tedy dokázat

$$c(a+b-1)+2+\frac{1}{\sqrt{2}}\left((a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2\right)\geq a+b+c\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{2}}\left((a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2\right)\geq(a+b-2)(1-c).$$

Užitím Cauchyovy nerovnosti, získáme

$$a^2+b^2\ge 2ab \Leftrightarrow 2a^2+2b^2-4a-4b+4\ge a^2+b^2-4a-4b+4+2ab \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2(a-1)^2+2(b-1)^2\ge (a+b-2)^2 \Leftrightarrow (a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2\ge$$
$$\ge \frac{(a+b-2)^2}{2}+(c-1)^2\ge 2\frac{|(a+b-2)(1-c)|}{\sqrt{2}}\ge \sqrt{2}(a+b-2)(1-c).$$

Rovnost nastává právě tehdy, když platí $a=b=c=1$. Čímž je dané tvrzení dokázáno.

<u>Příklad 11</u>:[2]

Nechť a,b,c jsou kladná čísla. Dokažte, že platí

$$abc+\sqrt[3]{(1+a^3)(1+b^3)(1+c^3)}\ge ab+bc+ac.$$

<u>Řešení</u>: [2]

Užitím Hölderovy nerovnosti získáme

$$(1+a^3)(1+b^3)(1+c^3)\ge (c+ab)^3 \Rightarrow \sqrt[3]{(1+a^3)(1+b^3)(1+c^3)}\ge ab+c.$$

Nyní stačí dokázat, že

$$abc+ab+c\ge ab+bc+ac \Leftrightarrow abc+c\ge bc+ac \Leftrightarrow ab+1\ge a+b \Leftrightarrow (a-1)(b-1)\ge 0.$$

Podle Drichletova principu mezi třemi čísly $a-1, b-1, c-1$ musejí existovat aspoň dvě čísla, která mají stejné znaménko. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $a-1, b-1$ jsou dvě čísla, která mají stejné znaménko, pak máme $(a-1)(b-1)\ge 0$. Rovnost nastává právě tehdy, když $a=b=c=1$.

Tím je dané tvrzení dokázáno.

<u>Příklad 12</u>:[2]

Nechť a,b,c jsou tři libovolná kladná reálná čísla, pro která platí $a.b.c=1$. Dokažte:

$$\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{1}{(b+1)^2}+\frac{1}{(c+1)^2}+\frac{1}{ab+ac+bc+1}\ge 1.$$

<u>Řešení</u>: [Vlastní]

Je zřejmé, že pokud $a=b=c=1$, pak dokazovaná nerovnost bude rovnost. Podle výše uvedeného tvrzení existují aspoň dvě z těchto čísel $a-1$, $b-1$, $c-1$, jejichž součin je větší nebo roven nule. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $(a-1)(b-1)\ge 0$.

Z toho vyplývá, že

$$\forall a>0, b>0: abc=1 \wedge (a-1)(b-1)\geq 0 \Rightarrow ab+1\geq a+b \Rightarrow 2(ab+1)\geq$$
$$\geq ab+a+b+1 \Rightarrow 2(ab+1)\geq (a+1)(b+1) \Rightarrow \frac{2}{(a+1)(b+1)} \geq \frac{1}{ab+1} = \frac{c}{c+1}. \qquad (1)$$

Užitím Cauchyovy nerovnosti, pak získáme

$$\forall a>0, b>0: \frac{1}{(a+1)^2}+\frac{1}{(b+1)^2} \geq \frac{2}{(a+1)(b+1)}. \qquad (2)$$

Z (1) a (2) dostaneme

$$\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{1}{(b+1)^2} \geq \frac{1}{ab+1} = \frac{c}{c+1}.$$

Z předpokladu $(a-1)(b-1)\geq 0$ vyplývá, že $abc+c=2+c\geq ac+bc$. Platí tedy

$$\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{1}{(b+1)^2}+\frac{1}{(c+1)^2}+\frac{1}{ab+ac+bc+1} \geq \frac{c}{c+1}+\frac{1}{(c+1)^2}+\frac{1}{\frac{1}{c}+abc+c+1}=$$
$$=\frac{c}{c+1}+\frac{1}{(c+1)^2}+\frac{c}{(c+1)^2}=\frac{c(c+1)+1+c}{(c+1)^2}=\frac{(c+1)^2}{(c+1)^2}=1.$$

Rovnost nastává právě tehdy, když platí $a=b=c=1$. Čímž je dané tvrzení dokázáno.

Příklad 13:[4]

Nechť x, y, z jsou tři libovolná kladná reálná čísla, pro která platí $x+y+z+1=4xyz$. Dokažte, že platí

$$xy+xz+yz\geq x+y+z.$$

Řešení: [Vlastní]

Ze zadání vyplývá, že $z=\frac{x+y+1}{4xy-1}$. Dosazením $\frac{x+y+1}{4xy-1}$ za z do dokazané nerovnosti a po úpravě dostáváme

$$xy-(x+y)+\frac{(x+y)^2-1}{4xy-1}\geq 0. \qquad (1)$$

Je zřejmé, že pokud $x = y = z = 1$, pak dokazovaná nerovnost bude rovnost. Podle výše uvedeného tvrzení existují aspoň dvě z těchto čísel $x-1$, $y-1$, $z-1$, jejichž součin je větší nebo roven nule. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $(x-1)(y-1) \ge 0$.

Z toho vyplývá, že

$$\begin{aligned}&(x-1)(y-1) \ge 0 \Leftrightarrow xy-(x+y) \ge -1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow xy-(x+y)+\frac{(x+y)^2-1}{4xy-1} \ge \frac{(x+y)^2-1}{4xy-1}-1=\frac{(x-y)^2}{4xy-1}\end{aligned} \qquad (2)$$

Z (1) a (2) vyplývá, že stačí dokázat $4xy-1>0$. Jelikož $x+y+z+1=4xyz$, $x>0$, $y>0$ a $z>0$, je zřejmé, že $4xy-1>0$. Rovnost nastává právě tehdy, když paltí $x=y=z=1$. Čímž je dané tvrzení dokázáno.

<u>Příklad 14</u>:[4]

Jsou dána tři kladná reálná čísla a,b,c. Dokažte, že platí

$$\left(a+\frac{1}{b}-1\right)\left(b+\frac{1}{c}-1\right)+\left(b+\frac{1}{c}-1\right)\left(c+\frac{1}{a}-1\right)+\left(c+\frac{1}{a}-1\right)\left(a+\frac{1}{b}-1\right)\ge 3.$$

<u>Řešení</u>: [Vlastní]

Zavedeme substituce $a+\frac{1}{b}=x$, $b+\frac{1}{c}=y$ a $c+\frac{1}{a}=z$. Dokazovaná nerovnost bude zapsána ve tvaru

$$(x-1)(y-1)+(y-1)(z-1)+(z-1)(x-1)\ge 3,$$

a po úpravě této nerovnost získáme

$$xy+yz+xz \ge 2(x+y+z). \qquad (1)$$

Snadno zjistíme, že nerovnost (1) bude rovnost, když $x=y=z=2$. Podle výše uvedeného tvrzení existují aspoň dvě z těchto čísel $x-2$, $y-2$, $z-2$, jejichž součin je nezáporný. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $(x-2)(y-2)\ge 0$. Z toho vyplývá, že

$$(x-2)(y-2)\ge 0 \Rightarrow xy+4 \ge 2(x+y) \Rightarrow xy+2z+4 \ge 2(x+y+z). \qquad (2)$$

Z (1) , (2) a užitím Cauchyovy nerovnosti vyplývá, že stačí dokázat

$$yz+xz \ge 2z+4 \Leftrightarrow z(x+y-2)\ge 4 \Leftrightarrow 2z\left(\sqrt{xy}-1\right)\ge 4 \Leftrightarrow z \ge \frac{2}{\sqrt{xy}-1}.$$

Snadno zjistíme, že

$$xyz=\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{c}\right)\left(c+\frac{1}{a}\right)=abc+\frac{1}{abc}+x+y+z\geq 2+2\sqrt{xy}+z\Rightarrow$$
$$\Rightarrow z(xy-1)\geq 2\left(1+\sqrt{xy}\right)\Rightarrow z\left(\sqrt{xy}-1\right)\geq 2\Rightarrow z\geq\frac{2}{\sqrt{xy}-1}.$$

Rovnost nastává právě tehdy, když platí $x=y=z=2$, tj. $a=b=c=1$. Čímž je dané tvrzení dokázáno.

Příklad 15:[2]

Nechť a,b,c jsou kladná reálná čísla. Dokažte, že platí

$$2(a^2+b^2+c^2)+abc+8\geq 5(a+b+c)\ .$$

Řešení: [Vlastní]

Upravíme dokazovanou nerovnost do tvaru

$$(a^2+b^2+c^2)+3+a^2+b^2+c^2+abc+5\geq 2(a+b+c)+3(a+b+c)\ .$$

Snadno zjistíme, že pro každá kladná reálná čísla a,b,c platí

$$(a^2+b^2+c^2)+3\geq 2(a+b+c)\Leftrightarrow (a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2\geq 0\ .$$

Z toho vyplývá, že nyní stačí dokázat

$$a^2+b^2+c^2+abc+5\geq 3(a+b+c).$$

Pro každá kladná reálná čísla a,b,c platí

$$a^2+b^2+c^2+abc+5\geq 3(a+b+c)\Leftrightarrow 2(a^2+b^2+c^2)+2abc+10\geq 6(a+b+c)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left[a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)\right]+a^2+b^2+c^2+2abc+10\geq$$
$$\geq 6(a+b+c)+2(ab+bc+ac)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (a+b+c)^2+a^2+b^2+c^2+2abc+10\geq 6(a+b+c)+2(ab+ac+bc)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left[(a+b+c)^2-6(a+b+c)+9\right]+a^2+b^2+c^2+2abc+1\geq 2(ab+bc+ac)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (a+b+c-3)^2+\left[a^2+b^2+c^2+2abc+1-2(ab+ac+bc)\right]\geq 0.$$

Z výsledku předochozího příkladu 1 je dokázáno, že platí

$$a^2+b^2+c^2+2abc+1\geq 2(ab+bc+ac)\ .$$

Z čehož vyplývá, že

$$a^2+b^2+c^2+abc+5\geq 3(a+b+c).$$

Čímž je dané tvrzení dokázáno.

Příklad 16: [2]

Nechť a, b, c jsou kladná reálná čísla. Dokažte, že platí

$$3(a^2 + b^2 + c^2) + abc + 11 \geq 7(a + b + c) .$$

Řešení: [Vlastní]

Upravíme dokazovanou nerovnost do tvaru

$$2(a^2 + b^2 + c^2) + 6 + a^2 + b^2 + c^2 + abc + 5 \geq 4(a + b + c) + 3(a + b + c) .$$

Víme, že pro každá kladná reálná čísla a, b, c platí (viz Příklad 15)

$$a^2 + b^2 + c^2 + abc + 5 \geq 3(a + b + c) , \qquad (1)$$

a zároveň pro každá kladná reálná čísla a, b, c platí

$$(a^2 + b^2 + c^2) + 3 \geq 2(a + b + c) \Leftrightarrow (a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 \geq 0 . \qquad (2)$$

Vynásobíme obě strany nerovnosti (2) číslem 2, tím získáme

$$\begin{aligned} & 2(a-1)^2 + 2(b-1)^2 + 2(c-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow 2(a^2 + b^2 + c^2) + 6 \geq 4(a + b + c). \qquad (3) \end{aligned}$$

Z (1) a (3) vyplývá, že

$$3(a^2 + b^2 + c^2) + abc + 11 \geq 7(a + b + c) .$$

Tím je dané tvrzení dokázáno.

Příklad 17: [2]

Nechť a, b, c, k jsou kladná reálná čísla a zároveň $k \geq 1$. Dokažte, že platí

$$k(a^2 + b^2 + c^2) + abc + 3k + 2 \geq (2k + 1)(a + b + c) .$$

Řešení: [Vlastní]

Upravíme dokazovanou nerovnost do tvaru

$$(k-1)(a^2 + b^2 + c^2) + 3(k-1) + a^2 + b^2 + c^2 + abc + 5 \geq 2(k-1)(a + b + c) + 3(a + b + c) .$$

Víme, že pro každá kladná reálná čísla a, b, c platí (viz Příklad 15)

$$a^2 + b^2 + c^2 + abc + 5 \geq 3(a + b + c) , \qquad (1)$$

a zároveň pro každá kladná reálná čísla a, b, c platí

$$(a^2 + b^2 + c^2) + 3 \geq 2(a + b + c) \Leftrightarrow (a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 \geq 0 . \qquad (2)$$

Vynásobíme obě strany nerovnosti (2) číslem $(k-1)$, kde $k \geq 1$, čímž získáme

$$(k-1)(a-1)^2+(k-1)(b-1)^2+(k-1)(c-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (k-1)(a^2+b^2+c^2)+3(k-1) \geq 2(k-1)(a+b+c). \qquad (3)$$

Z (1) a (3) vyplývá, že

$$k(a^2+b^2+c^2)+abc+3k+2 \geq (2k+1)(a+b+c).$$

Tím je dané tvrzení dokázáno.

Příklad 18: [Vlastní]

Nechť a, b, c, k jsou kladná reálná čísla a zároveň $k \geq 1$, pro která platí

$$k(a^2+b^2+c^2)+abc=3k+1.$$

Najděte největší hodnotu výrazu

$$V=a+b+c.$$

Řešení: [Vlastní]

V předešlém příkladu 17 je dokázáno, že platí

$$k(a^2+b^2+c^2)+abc+3k+2 \geq (2k+1)(a+b+c).$$

Z toho a z zadání vyplývá, že

$$k(a^2+b^2+c^2)+abc+3k+2=3(2k+1) \geq (2k+1)(a+b+c) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a+b+c \leq \frac{3(2k+1)}{2k+1}=3$$

Odtud získáme, že největší hodnota daného výrazu $V=a+b+c$ je 3.

3 Užití Dirichletova principu v aritmetice

Drichletovým principem je v podstatě následující tvrzení o množině

Tvrzení 3.1:[5]

Jestliže sjednocení n nějakých množin obsahuje více než n prvků, pak musí v alespoň jedné množině být dva nebo více prvků, tj.

Nechť $\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| > n$. Potom existuje $i \in \{1,2,\dots,n\}$ takové, že $|A_i| \geq 2$.

Důkaz:

Předpokládejme, že pro všechna $i \in \{1,2,\dots,n\}$ platí $|A_i| < 2$. Potom má ovšem každá množina nejvýše jeden prvek a nutně musí platit $\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| \leq n$, což je spor, protože podle předpokladu je $\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| > n$. Tím je tvrzení dokázáno.

Definice:[3], [10]

Říkáme, že celé číslo a je kongruentní s celým číslem r podle modulu m, kde m je libovolné přirozené číslo větší než 1, značíme $a \equiv r (\mathrm{mod}\, m)$, právě tehdy, když platí $m \mid a - r$

Relace kongruence podle daného modulu m vytvoří na množině celých čísel tzv. rozklad na zbytkové třídy. Tyto třídy označíme:

Z_0 množina všech celých čísel, která jsou dělitelná m,

Z_1 množina všech celých čísel, která při dělení m dají zbytek 1,

. . . . ,

Z_{m-1} množina všech celých čísel, která při dělení m dají zbytek $m-1$.

Množinu Z všech celých čísel pak můžeme zapsat jako sjednocení všech zbytkových tříd:

$$Z = Z_0 \cup Z_1 \cup \dots \cup Z_{m-1},$$

přičemž

$$x \in T_i \Leftrightarrow m \mid x - i,$$

a zároveň

$$x, y \in T_i \Leftrightarrow m \mid x - y.$$

Pomocí výše uvedeného tvrzení a definice kongruence na množině celých čísel lze vyřešit mnoho náročných úloh v aritmetice, zvlášť pak v dělitelnosti celých čísel.

Příklad 1:[6]

Dokažte, že z $(n+1)$ různých celých čísel lze najít dvě celá čísla, jejichž rozdíl je dělitelný číslem n.

Řešení: [6]

Po dělení $(n+1)$ různých celých čísel číslem n je zbytkem vždy jedno z čísel: $0,1,2,\dots,n-1$. Z Dirichletova principu vyplývá, že existují alespoň dvě čísla, která mají stejný zbytek při dělení číslem n. Nechť a_i, a_j jsou dvě taková, tj.

$$\begin{aligned} a_i &= n.k_1 + r \\ a_j &= n.k_2 + r \end{aligned} \quad \text{kde } 0 \le r < n \wedge k_1, k_2 \in N .$$

Odtud dostaneme $n \mid a_i - a_j$. Z toho vyplývá, že z $n+1$ libovolných různých celých čísel lze vždy najít dvě čísla, jejichž rozdíl je dělitelný číslem n.

Nechť $\neg(n \mid a_k)$, kde $k = 1,2,\dots,n+1$. Pak zbytek při dělení čísla a_k číslem n bude jedno z čísel: $1,2,\dots,n+1$. Podle Dirichletova principu existují dvě čísla, která mají stejný zbytek při dělení číslem n, tj. jejich rozdíl je dělitelný číslem n.

Příklad 2:[6]

Dokažte, že existuje $n \in N$ takové, že $25 \mid 17^n - 1$.

Řešení: [6]

Uvažujme čísla $17, 17^2, \dots, 17^{25}$. Snadno zjistíme, že po dělení těchto čísel číslem 25 dostaneme celkem 25 zbytků. Z Dirichletova principu vyplývá, že existují alespoň dvě čísla, která mají stejný zbytek při dělení číslem 25. Nechť a_i, a_j jsou dvě taková čísla, tj.

$$\begin{aligned} a_i &= 25.k_i + r \\ a_j &= 25.k_j + r \end{aligned} \quad \text{, kde } 0 \le r < 25 \wedge i > j \wedge k_i, k_j \in N .$$

Z toho plyne $a_i - a_j = 25(k_i - k_j)$, tj. $25 \mid a_i - a_j = 17^i - 17^j = 17^j(17^{i-j} - 1)$.

Jelikož $nsd(25, 17^j) = 1$, platí tedy $25 \mid 17^{i-j} - 1$. Tím je dané tvrzení dokázáno.

Příklad 3:[6]

Dokažte, že $\exists k \in Z: 1993.k = \underbrace{111\ldots1}_{n \text{ číslic } 1}$, kde $n \in N$.

Řešení: [6]

Uvažujme 1994 čísel, jejichž cifry tvoří samé číslice $1, 11, \ldots, \underbrace{11111\ldots1}_{1994 \text{ číslic } 1}$. Snadno zjistíme, že po dělení těchto čísel číslem 1993 dostaneme celkem 1993 zbytků. Z Dirichletova principu vyplývá, že existují alespoň dvě čísla, která mají stejný zbytek při dělení číslem 1993. Nechť a_i, a_j jsou dvě taková čísla, tj.

$$\begin{matrix} a_i = 1993\ k_i + r \\ a_j = 1993\ k_j + r \end{matrix}, \text{ kde } 0 \le r < 1993 \wedge i > j \wedge k_i, k_j \in N.$$

Z toho vyplývá, že

$$a_i - a_j = 1993\,(k_i - k_j), \text{ tj. } 1993 | a_i - a_j = \underbrace{1111111\ldots11}_{(i-j) \text{ číslic } 1}\underbrace{000\ldots0}_{j \text{ číslic } 0} = 1993(k_i - k_j).$$

Odtud dostaneme $\underbrace{1111111\ldots11}_{(i-j) \text{ číslic } 1}.10^j = 1993(k_i - k_j)$

Jelikož $nsd(1993, 10^j) = 1$, platí tedy $1993 | \underbrace{1111111\ldots11}_{(i-j) \text{ číslic } 1}$. Tím je dané tvrzení dokázáno.

Příklad 4:[Vlastní]

Dokažte, že platí $2015 | 20142014\ldots201400\ldots0$.

Řešení: [Vlastní]

Uvažujme čísla $a_1 = 2014$, $a_2 = 20142014$,..., $a_{2015} = \underbrace{2014\ldots2014}_{2015 \text{ čísel } 2014}$.

Snadno zjistíme, že po dělení těchto čísel číslem 2015 dostaneme celkem 2015 zbytků $(r_i \in \{1, \ldots, 2014\}, i = 1, 2, \ldots, 2015)$, protože $a_1, a_2, \ldots, a_{2015}$ jsou čísla sudá a 2015 je liché. Z Dirichletova principu vyplývá, že existují alespoň dvě čísla, která mají stejný zbytek při dělení číslem 2015. Nechť a_j, a_k jsou dvě taková čísla, tj.

$$a_j = \underbrace{2014\ldots2014}_{j \text{ čísel } 2014},$$

$$a_k = \underbrace{2014\ldots2014}_{k \text{ čísel } 2014},$$

kde $1 \le j < k \le 2015$.

Odtud vyplývá, že $2015 \mid a_k - a_j$, tj. $2015 \mid \underbrace{2014\ldots2014}_{(k-j)\ \check{c}\acute{\imath}sel\ 2014}.10^j$. Čímž je dané tvrzení dokázáno.

Příklad 5:[Vlastní]

Dokažte, že existuje přirozené číslo n, pro něž platí

$$3^{13579} \mid 13579^{\,n} - 1.$$

Řešení: [Vlastní]

Uvažujme následující čísla $a_1 = 13579$, $a_2 = 13579^{\,2}$,..., $a_{13580} = 13579^{\,13580}$, pak snadno zjistíme, že $nsd\left(3^{13579}, 13579\right) = 1$, neboť 13579 je součin dvou prvočísel, které jsou různé od 3. Z toho vyplývá, že $nsd\left(3^{13579}, 13579^{\,i}\right) = 1$, kde $i \in \{1,\ldots, n\}$. Po dělení těchto čísel číslem 3^{13579}, získáme celkem 3^{13579} zbytků. Z Dirichletova principu vyplývá, že existují alespoň dvě čísla, která mají po dělení číslem 3^{13579} stejný zbytek. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že a_j, a_k jsou dvě taková čísla. Pak dostaneme

$$\begin{aligned} a_j &= 3^{13579}\, k_j + r \\ a_k &= 3^{13579}\, k_k + r \end{aligned}, \text{ kde } 0 \le r < 3^{13579} \wedge k > j \wedge k_k, k_j \in N.$$

Z toho vyplývá, že

$$3^{13579} \mid (a_k - a_j).$$

Jelikož $a_k - a_j = 13579^k - 13579^j = 13579^j(13579^{k-j} - 1)$ a $nsd\left(3^{13579}, 13579^{\,j}\right) = 1$, kde $j \in \{1,\ldots, n\}$, platí tedy $3^{13579} \mid 13579^{\,k-j} - 1$. Tím dané tvrzení dokázáno.

Příklad 6:[Vlastní]

Dokažte, že existuje číslo tvaru $\underbrace{20142014\ldots2014}_{n\ \check{c}\acute{\imath}sel\ 2014}$, které je dělitelné číslem 2015.

Řešení: [Vlastní]

Uvažujme-li následující čísla $a_1 = 2014, a_2 = 20142014, \ldots, a_{2015} = \underbrace{20142014\ldots2014}_{2015\ \check{c}\acute{\imath}sel\ 2014}$.

Tato čísla nejsou dělitelná číslem 2015, protože jejich poslední číslicí je 4. Z toho vyplývá, že po dělení čísel $a_1, a_2, \ldots, a_{2015}$ číslem 2015, získáme celkem 2015 zbytků. Podle Dirichletova principu existují alespoň dvě čísla, která mají při dělení číslem 2015 stejný zbytek. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že a_i, a_j jsou dvě čísla taková, kde $i, j \in \{1,2,...,2015\}$ Potom dostaneme

$$\begin{matrix} a_i = 2015 \; k_i + r \\ a_j = 2015 \; k_j + r \end{matrix}, \text{ kde } 0 < r < 2015 \wedge j > i \wedge k_i, k_j \in N .$$

Z toho vyplývá, že

$$2015 \mid (a_j - a_i).$$

Jelikož

$$a_j - a_i = \underbrace{20142014\ldots2014}_{j \text{ čísel } 2014} - \underbrace{20142014\ldots2014}_{i \text{ čísel } 2014} = \underbrace{20142014\ldots2014}_{(j-i) \text{ čísel } 2014}.10^i ,$$

a 10^i není dělitelné číslem 2015, protože 10^i není dělitelní číslem 13 i 31.

Z toho vyplývá, že

$$2015 \mid \underbrace{20142014\ldots2014}_{(j-i) \text{ čísel } 2014}.$$

Čímž je dané tvrzení dokázáno.

Příklad 7: [13]

Dokažte, že z 50 libovolně zvolených navzájem různých prvočísel lze vždy vybrat 13 prvočísel tak, že rozdíl každých dvou je dělitelný pěti.

Řešení: [13]

Prvočísla po dělení pěti mohou dávat zbytky 0 (pouze prvočíslo 5); $1;2;3;4$. Rozdělme všech 49 (50) prvočísel (je-li mezi nimi číslo 5, vypustíme jej, zbude nám 49 prvočísel) do zbytkových tříd $1;2;3;4$. Alespoň v jedné bude 13 prvočísel a jejich rozdíl

$$(k.5 + r) - (l.5 - r) = 5(k - l)$$

je dělitelný pěti. Tím je dané tvrzení dokázáno.

Příklad 8: [13]

Dokažte, že ke každému přirozenému číslu n existují přirozená čísla $r \neq s$ taková, že číslo $3^r - 3^s$ je dělitelné číslem n.

Řešení: [13]

Dělíme-li čísla $3^1, 3^2, ..., 3^n, 3^{n+1}$ číslem n, dostaneme maximálně n různých zbytků, totiž $0,1,2,\ldots,n-1$. Podle Dirichletova principu tedy aspoň dvě mocniny mají týž zbytek. Z toho vyplývá, že jejich rozdíl je dělitelný číslem n.

Tím je dané tvrzení dokázáno.

Příklad 9:[7]

Dokažte, že pokud p je prvočíslo ve tvaru $4k+3$, kde $k \in N$, pak existují vždy dvě celá čísla x, y taková, že

$$p \mid x^2 + y^2 + 1.$$

Řešení: [7]

Položme $r_i = i^2 (\mathrm{mod}\ p)$ a $s_i = -1 - i^2 (\mathrm{mod}\ p)$, kde $i \in \left\{1,2,\ldots,\frac{p-1}{2}\right\}$.

Snadno dokážeme, že pokud $i \neq j$, kde $i, j \in \left\{1,2,\ldots,\frac{p-1}{2}\right\}$, pak platí

$$r_i \neq r_j,\ s_i \neq s_j \text{ a } r_i, s_i \in \{1,2,\ldots, p-1\}.$$

Nechť $A = \{r_1, r_2, \ldots, r_{(p-1)/2}\}$, $B = \{s_1, s_2, \ldots, s_{(p-1)/2}\}$. Potom

$$|A| = |B| = \frac{p-1}{2} \text{ a } |A \cup B| \leq p-1.$$

Uvažujme dva následující případy:

1). Je-li $|A \cup B| < p-1$, pak $A \cap B \neq \phi$. Z toho vyplývá, že existují i, j taková, že $r_i = s_j$, což platí právě tehdy, když

$$i^2 \equiv -1 - j^2 (\mathrm{mod}\ p) \Leftrightarrow i^2 + j^2 + 1 (\mathrm{mod}\ p).$$

2). Je-li $|A \cup B| = p-1$, pak $A \cap B = \phi$. Z toho vyplývá, že je-li $i \neq j$, $i, j \in \left\{1,2,\ldots,\frac{p-1}{2}\right\}$, pak platí $r_i \neq r_j \neq s_i \neq s_j$. Odtud získáme

$$r_1 + r_2 + r_{(p-1)/2} + s_1 + s_2 + \ldots + s_{(p-1)/2} = 1 + 2 + \ldots + p - 1 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ p),$$

což je spor, protože podle definice r_i a s_i dostaneme

$$r_1 + r_2 + r_{(p-1)/2} + s_1 + s_2 + \ldots + s_{(p-1)/2} = 1^2 + 2^2 + \ldots + \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 + \left(-1-1^2\right) +$$
$$+ \left(-1-2^2\right) + \ldots + \left(-1 - \left(\frac{p-1}{2}\right)^2\right) \equiv \left(-\frac{p-1}{2}\right) (\mathrm{mod}\, p).$$

Proto k druhému případu nedochází a nastává pouze první případ. Čímž je dané tvrzení dokázáno.

Příklad 10:[Vlastní]

Dokažte, že existuje číslo zapsané jen číslicí 8 takové, že je dělitelné číslem n, kde n je přirozené číslo, pro které platí $nsd\left(n,10^m\right)=1$, $m \in N$.

Řešení:[Vlastní]

Uvažujme $n+1$ následujících čísel: $a_1 = 8; a_2 = 88; \ldots; a_{n+1} = \underbrace{8888\ldots88}_{(n+1)\ \check{c}\acute{\imath}slic\ 8}$.

Snadno zjistíme, že po dělení těchto čísel číslem n dostaneme celkem n zbytků. Z Dirichletova principu vyplývá, že existují alespoň dvě čísla, která mají stejný zbytek po dělení číslem n. Nechť a_i, a_j jsou dvě taková, tj.

$$\begin{matrix} a_i = n.k_i + r \\ a_j = n.k_j + r \end{matrix}, \text{ kde } 0 \le r < n \wedge i > j \wedge k_i, k_j \in N.$$

Z toho plyne $a_i - a_j = n(k_i - k_j)$, tj. $n \mid a_i - a_j = \underbrace{8888888\ldots88}_{(i-j)\ \check{c}\acute{\imath}slic\ 8}\underbrace{000\ldots0}_{j\ \check{c}\acute{\imath}slic\ 0}$.

Odtud získáme

$$\underbrace{8888888\ldots88}_{(i-j)\ \check{c}\acute{\imath}slic\ 8}.10^j = n(k_i - k_j).$$

Jelikož $nsd(2011,10^j) = 1$, platí tedy $n \mid \underbrace{8888888\ldots88}_{(i-j)\ \check{c}\acute{\imath}slic\ 8}$. Tím je dané tvrzení dokázáno.

Příklad 11:[Vlastní]

Dokažte, že je-li $nsd(n,2015) = 1$, pak existuje vždy kladné celé číslo k takové, že $2015 \mid n^k - 1$.

Řešení: [Vlastní]

Uvažujme 2016 čísel: $n, n^2, \ldots, n^{2016}$. Snadno zjistíme, že po dělení těchto čísel číslem 2015 získáme celkem 2016 zbytků. Z Dirichletova principu vyplývá, že existují alespoň dvě čísla, která mají stejný zbytek po dělení číslem 2015.

Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že jsou to dvě čísla n^i, n^j, kde $1 \le i < j \le 2016$. Pak máme

$$n^j - n^i = n^i(n^{j-i} - 1) = n^i(n^k - 1),$$

kde $k = j - i$ je kladné celé číslo a zároveň $nsd(n,2010) = 1$. Z toho vyplývá, že $2015 \mid n^k - 1$. Tím je dané tvrzení dokázáno.

Příklad 12:[Vlastní]

Dokažte, že z 1007 libovolných přirozených čísel lze vždy vybrat dvě taková, že jejich součet je dělitelný číslem 2011.

Řešení: [Vlastní]

Rozdělme daná čísla do skupin podle jejich zbytku při dělení číslem 2011: $Z_0, Z_1, ..., Z_{1005}$, kde Z_0 je skupina čísel, která jsou dělitelná 2011, Z_1 je skupina čísel, která mají po dělení číslem 2011 zbytek 1 nebo 2010, Z_2 je skupina čísel, která mají po dělení číslem 2011 zbytek 2 nebo 2009, …, Z_{1005} je skupina čísel, která mají po dělení číslem 2011 zbytek 1005 nebo 1006.

Podle Dirichletova principu existuje jedna skupina, ve které jsou aspoň dvě čísla, jejichž vzájemný součet je dělitelný číslem 2011.

Tím je dané tvrzení dokázáno.

Příklad 13:[7]

Dokažte, že z $n+1$ libovolně zvolených navzájem různých kladných celých čísel, která jsou menší než $2n \wedge n > 1$, můžeme vybrat tři různá čísla, z nichž jedno je rovno součtu dvou zbývajících.

Řešení: [7]

Nechť $a_1, a_2, ..., a_{n+1}$ jsou $n+1$ libovolně zvolených navzájem různých kladných celých čísel, která jsou menší než $2n$, kde $n > 1$. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že

$$1 \le a_1 < a_2 < ... < a_{n+1} < 2n. \qquad (1)$$

Položme $b_1 = a_2 - a_1; b_2 = a_3 - a_1; ...; b_n = a_{n+1} - a_1$, pak máme

$$1 \le b_1 < b_2 < ... < b_n < 2n. \qquad (2)$$

Z (1) a (2) vyplývá, že počet prvků obou posloupností je dohromady $2n+1$. Avšak tyto prvky nabývají maximálně $2n-1$různých hodnot.

Odtud máme

$$\frac{2n+1}{2n-1} = 1 + \frac{2}{2n-1}.$$

Podle Dirichletova principu existují aspoň dvě stejná čísla neležící v jedné posloupnosti, ale ve dvou posloupnostech, tj. existují tři různá čísla, z nichž jedno je rovno součtu dvou zbývajících.

Tím je dané tvrzení dokázáno.

Příklad 14:[11]

Je dáno 52 libovolných celých čísel. Dokažte, že lze vždy vybrat dvě taková, že jejich součet či rozdíl je dělitelný číslem 100.

Řešení:[Vlastní]

Snadno zjistíme, že po dělení 52 daných čísel100 získáme celkem 52 zbytků, které jsou prvky množiny $M = \{0,1,...,99\}$. Rozdělme prvky množiny M do 51 následujících skupin:

$$\{0,0\},\{1,99\},\{2,98\},...,\{49,51\},\{50,50\}.$$

Z Dirichletova principu vyplývá, že existuje alespoň jedna skupina, ve které budou dva prvky, jejichž součet je roven 100. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že jimi jsou prvky r_i, r_j, kde $i, j \in \{1,2,...,52\}$, pak získáme $r_i + r_j = 100$.

Z toho vyplývá, že:

Pokud $r_i + r_j = 100$, pak z 52 libovolných celých čísel lze vždy vybrat dvě taková, jejichž součet je dělitelný číslem 100.

Pokud $r_i = r_j$, pak z 52 libovolných celých čísel lze vždy vybrat dvě taková, jejichž rozdíl je dělitelný číslem 100.

Čímž je dané tvrzení dokázáno.

Příklad 15:[11]

Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel $a_1 < a_2 < a_3 < ...$, pro kterou platí $a_1 = 1$ a $\forall n \in N : a_{n+1} \leq 2n$. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n existují dva členy a_k, a_l dané posloupnosti takové, že $a_k - a_l = n$.

Řešení: [11]

Nechť $n \in N$ je dané číslo. Ze zadání vyplývá, že $a_1 < a_2 < a_3 < ... < a_{n+1} \leq 2n$.

Rozdělme množinu $2n$ přirozených čísel $\{1,2,...,2n\}$ do n dvojic

$$[1;n+1],[2;n+2],...,[n;2n].$$

Z toho vyplývá, že množina $A = \{a_1, a_2,..., a_n, a_{n+1}\}$ má $n+1$ prvků a množina dvojic čísel $B = \{[1;n+1],...,[n;2n]\}$ má n prvků. Podle Dirichletova principu existuje aspoň jedna dvojice množiny B, v níž jsou dva prvky množiny A. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že jsou to dva prvky a_k, a_l, kde $a_k > a_l$, pak dostaneme

$$a_k - a_l = n.$$

Tím je dané tvrzení dokázáno.

<u>Příklad 16</u>:[Vlastní]

Je dána množina $A=\{1,2,...,2013\}$. Dokažte, že z 1008 libovolně zvolených prvků množiny A lze vždy vybrat aspoň dva prvky, jejichž součet je 2014.

<u>Řešení</u>: [Vlastní]

Rozdělme množinu A do 1007 dvojic čísel $(1{,}2013),(2{,}2012),\ldots,(1007{,}1007)$. Z toho vyplývá, že množina $B=\{[1;2013],[2;2012],...,[1007;1007]\}$ má 1007 prvků.

Podle Dirichletova principu existuje aspoň jedna z 1007 dvojic prvků množiny B, v níž jsou dva z 1008 libovolně zvolených prvků množiny A. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že je to dvojice čísel $[a_k;a_l]$, pak platí

$$a_k+a_l=2014\ .$$

Tím je dané tvrzení dokázáno.

<u>Příklad 17</u>:[Vlastní]

Je dána množina $A=\{1,2,...,2016\}$. Dokažte, že z 1009 libovolně zvolených prvků množiny A lze vždy vybrat aspoň dvě nesoudělná čísla.

<u>Řešení</u>:[Vlastní]

Rozdělme množinu A na 1008 dvojic nesoudělných čísel $[1;2],[3;4],...,[2015;2016]$. Podle Dirichletova principu existuje aspoň jedna z 1008 výše uvedených dvojic nesoudělných čísel, v níž jsou dva z 1009 libovolně zvolených prvků množiny A, tj. z 1009 libovolně zvolených prvků množiny A lze vždy vybrat aspoň dvě nesoudělná čísla.

Tím je dané tvrzení dokázáno.

<u>Příklad 18</u>:[10] (MKS 00/01)

Je dána množina $A=\{1,2,...,2n\}$. Dokažte, že z $n+1$ libovolně zvolených prvků množiny A lze vždy vybrat aspoň dvě čísla, z nichž jedno je násobkem druhého.

<u>Řešení</u>: [10]

Jelikož každé přirozené číslo a lze zapsat ve tvaru $a=2^k.l$, kde k je nezáporné celé číslo a l je liché číslo, pak můžeme $n+1$ čísel $a_i\in\{1,2,\ldots,2n\}$, kde $i=1,2,\ldots,n+1$, zapsat ve tvaru

$$a_i=2^{k_i}.l_i\ .$$

Tím pádem bude $n+1$ lichých čísel l_i ležet v množině $\{1,3,\dots,2n-1\}$, která má právě n prvků.

Podle Dirichletova principu existují alespoň dvě čísla, která jsou násobky čísla $l_j \in \{1,3,\dots,2n-1\}$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že jsou to dvě čísla a_k, a_l, kde $k,l=1,2,\dots,n+1$.

Je-li $k>l$, pak získáme $\frac{a_k}{a_l}=2^{(k_k-k_l)} \Rightarrow a_k=2^{(k_k-k_l)}.a_l$.

Je-li $k<l$, pak získáme $\frac{a_l}{a_k}=2^{(k_l-k_k)} \Rightarrow a_l=2^{(k_l-k_k)}.a_k$.

Čímž je dané tvrzení dokázáno.

Příklad 19:[Vlastní]

Je dána množina $A=\{1,2,...,2016\}$. Dokažte, že z 1009 libovolně zvolených prvků množiny A lze vždy vybrat dva prvky takové, že $a_j-a_i=2$, kde $i,j=1,2,\dots,2016$ a $j>i$.

Řešení: [Vlastní]

Víme, že rozdíl dvou sudých čísel jdoucích za sebou nebo rozdíl dvou lichých čísel jdoucích za sebou je vždy roven 2. Z množiny A můžeme vytvořit 504dvojic sudých a 504 dvojic lichých celých čísel jdoucích za sebou. Celkem máme 1008 různých dvojic čísel, jejichž rozdíl je roven 2.

Rozdělme množinu A na 1008 dvojic čísel

$$[1;3],[2;4],\dots,[2013;2015],[2014;2016].$$

Podle Dirichletova principu z 1009 libovolně zvolených prvků množiny A lze vždy vybrat dva prvky takové, že $a_j-a_i=2$, kde $i,j=1,2,\dots,2012$ a $j>i$.

Tím je dané tvrzení dokázáno.

Příklad 20:[10], [11]

Nechť M je množina 10 libovolných přirozených čísel, každé z nich je menší než 100. Dokažte, že existují dvě podmnožiny množiny M, jejichž součet prvků je stejný.

Řešení: [10], [11]

Z deseti prvků množiny M můžeme vytvořit celkem $2^{10}-1=1023$ různých neprázdných podmnožin. Nechť S je součet prvků takové podmnožiny, pak dostaneme

$$S \le 91+92+\dots+100<10.100=1000.$$

Podle Dirichletova principu existují aspoň $\left\lfloor \frac{1023}{1000} \right\rfloor + 1 = 2$ podmnožiny množiny M, jejichž součet prvků je stejný.

Tím je dané tvrzení dokázáno.

Příklad 21:[11]

Množina $X = \{1,2,\dots,100\}$ je rozdělena do 7 podmnožin. Dokažte, že aspoň v jedné ze sedmi daných podmnožin jsou 4 čísla a,b,c,d taková, že platí $a+b=c+d$ nebo tři čísla e,f,g taková, že platí $e+f=2g$.

Řešení:[11]

Z Dirichletova principu vyplývá, že existuje aspoň jedna z těchto podmnožin, v níž je alespoň $\left\lfloor \frac{100}{7} \right\rfloor + 1 = 15$ prvků. Nechť a_i, a_j jsou dva libovolné prvky této podmnožiny a $a_j > a_i$. Ze všech prvků výše uvedené podmnožiny můžeme vytvořit aspoň $C(2,15) = 105$ rozdílů $a_j - a_i$, každý z nichž je prvkem množiny $Y = \{1,2,\dots,99\}$. Podle Dirichletova principu existují aspoň $\left\lfloor \frac{100}{99} \right\rfloor + 1 = 2$ rozdíly, jejichž hodnota je stejná. To znamená, že existují čtyři čísla např. a,b,c,d taková, že platí $a-c=d-b$, kde $a \neq d, c \neq b$, tj. $a+b=c+d$.

Je-li $a=b \vee c=d$, pak $2a=c+d \vee 2d=a+b$.

Úloha je vyřešena.

Příklad 22:[Vlastní]

Dokažte, že neexistuje žádné kladné celé číslo n takové, že 10^n+1 je dělitelné číslem 2003.

Řešení:[Vlastní]

Snadno zjistíme, že při dělení čísel $10^1, 10^2, \dots, 10^{2004}$ číslem 2003dostaneme celkem 2004 zbytků, protože 2003 je prvočíslo a $nsd(10^i, 2003) = 1$, kde $i \in \{1,2,\dots,2004\}$. Z Dirichletova principu vyplývá, že jsou alespoň dvě čísla, která mají stejný zbytek při dělení číslem 2003. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že jsou to dvě čísla a_i, a_j, kde $i > j$ a $i, j \in \{1,2,\dots,2004\}$. Potom

$$2003 \mid a_i - a_j \Leftrightarrow 2003 \mid 10^i - 10^j \Leftrightarrow 2003 \mid 10^j\left(10^{i-j} - 1\right).$$

Jelikož $nsd(10^i, 2003) = 1$, platí tedy $2003 \mid 10^{i-j} - 1$.

Z toho vyplývá, že $10^{i-j} - 1 + 2 = 10^{i-j} + 1$ není dělitelné číslem 2003, protože dvě není dělitelné číslem 2003.

Čímž je dané tvrzení dokázáno.

Příklad 23:[Vlastní]

Dokažte, že existují kladná celá čísla m, n taková, že $10^m + 10^n + 1$ je dělitelné číslem 2003.

Řešení: [Vlastní]

Z výše uvedeného Příkladu 22 vyplývá, že $10^m + 1$ není dělitelné číslem 2003. Po dělení čísel $(10^1 + 1), (10^2 + 1), ..., (10^{2003} + 1)$ číslem 2003 získáme proto celkem 2003 zbytků, které jsou prvky $r_i \in \{1, 2, ..., 2002\}$, kde $i = 1, 2, ..., 2003$.

Jelikož 2003 je prvočíslo a $nsd(10, 2003) = 1$, pak 10^n, kde n je kladné celé číslo, není dělitelné číslem 2003. Po dělení čísel $10^1, 10^2, ..., 10^{2003}$ číslem 2003 získáme také celkem 2003 zbytků, které jsou prvky $r_j = \{1, 2, ..., 2002\}$, kde $j = 1, 2, ..., 2003$.

Z prvků r_i, r_j utvořme 1001 dvojic čísel $[r_i; r_j]$ takových, že $r_i + r_j = 2003$:

$$[1; 2002], [2; 2001], ... [1001; 1002].$$

Z Drichletova principu vyplývá, že pro každé $m, n \in N$, $m \geq 1002$ a $n \geq 1002$, existuje alespoň jedna dvojice čísel, jejichž součet je roven 2003. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že jsou to čísla r_k, r_l, kde $k \neq l$ a $k, l \in \{1, 2, ..., 2002\}$, pak získáme

$$10^k + 10^l + 1 = 2003.t + r_k + 2003.s + r_l = 2003(t + s) + 2003,$$

kde $t, s \in N$.

Z toho vyplývá, že

$$2003 \mid 10^k + 10^l + 1.$$

Čímž je dané tvrzení dokázáno.

Příklad 24: (MO 64-A-I-6)

Nechť a, b jsou daná, navzájem nesoudělná přirozená čísla. Posloupnost $(x_n)_1^\infty$ přirozených čísel je sestavena tak, že pro každé $n > 1$ platí $x_n = ax_{n-1} + b$. Dokažte, že v libovolné takové posloupnosti každý člen x_n s indexem $n > 1$ dělí nekonečně mnoho jejích dalších členů. Platí toto tvrzení i pro $n = 1$?

Řešení:[Vlastní]

Ze zadání získáme, že pro každé $n > 1$ platí:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= ax_n + b, \\ x_{n+2} &= a^2 x_n + b(a+1), \\ &. \quad . \quad . \quad . \quad . \\ x_{n+h} &= a^h x_n + b(a^{h-1} + a^{h-2} + \ldots + a + 1) \\ &. \quad . \quad . \quad . \quad . \end{aligned}$$

Máme dokázat, že existuje nekonečně mnoho čísel h, pro které platí $x_n \mid x_{n+h}$, tj.

$$x_n \mid b(a^{h-1} + \ldots + a + 1).$$

Snadno zjistíme, že:

Pokud $x_n \mid b$, pak platí $x_n \mid x_{n+h}$.

Pokud b není dělitelné číslem x_n. Dokážeme, že existuje alespoň jedno h, pro které platí

$$x_n \mid (a^{h-1} + \ldots + a + 1) \ .$$

Utvořme součty: $s_1 = 1,\ \ s_2 = 1 + a,\ \ s_3 = 1 + a + a^2,\ \ \ldots,\ \ s_{x_n+1} = 1 + a + \ldots + a^{x_n}$.

$(x_n + 1)$ těchto součtů má po dělení číslem x_n některý ze zbytků 0 až $(x_n - 1)$.

Má-li některé s_i zbytek 0, je to právě hledaný součet.

Má-li s_i zbytek různý od nuly, pak musí mít podle Dirichletova principu aspoň dva týž zbytek. Z toho vyplývá, že rozdíl těchto dvou součtů, např. $s_k - s_l$ je dělitelný číslem x_n. Odtud získáme:

$$\begin{aligned} x_n \mid s_k - s_l &= 1 + a + \ldots + a^{k-1} - (1 + a + \ldots + a^{l-1}) = \\ &= a^k + a^{k+1} + \ldots + a^{l-1} = a^k (1 + a + \ldots + a^{l-1-k}) \end{aligned} \qquad (1)$$

Je zřejmé, že platí:

$$nsd(a,b) = 1 \Rightarrow nsd(ax_{n-1} + b, a) = nsd(ax_{n-1} + b, a^k) = nsd(x_n, a^k) = 1 \qquad (2)$$

Ze (1) a (2) plyne, že $x_n \mid (1 + a + \ldots + a^{l-1-k})$.

Protože $\left(a^j\right)_{j=0}^{\infty}$ je nekonečná posloupnost, existuje nekonečně mnoho j, pro které platí

$$x_n \mid (1 + a + \ldots + a^j) \ .$$

Tím je dané tvrzení dokázáno.

Příklad 25:[Vlastní]

Je dáno 2015 kladných celých čísel $a_1, a_2, \ldots, a_{1007}$ a $b_1, b_2, \ldots, b_{1008}$, pro která platí

$$1 \leq a_1 < a_2 < \ldots < a_{1007} \leq 508032$$
$$1 \leq b_1 < b_2 < \ldots < b_{1008} \leq 508032.$$

Dokažte, že existují čtyři čísla a_i, a_j, b_k, b_l

$$\begin{cases} a_i < a_j \\ b_k < b_l \\ a_j - a_i = b_l - b_k \\ i, j \in \{1,2,\ldots,1007\} \\ k, l \in \{1,2,\ldots,1008\}. \end{cases}$$

Řešení: **[Vlastní]**

Z 2015 daných kladných celých čísel můžeme utvořit celkem $1007.1008 = 1015056$ součtů ve tvaru $a_j + b_k$, kde $j \in \{1,2,...,1007\}$, $k \in \{1,2,...,1008\}$. Tyto součty nabývají hodnot od 2 do 1016604. Z Dirichletova principu vyplývá, že existují alespoň $\left\lfloor \frac{1016604}{1015056} \right\rfloor + 1 = 2$ součty, jejichž hodnoty jsou stejné. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že

$$a_j + b_k = a_i + b_l \Rightarrow a_j - a_i = b_l - b_k.$$

Tím je dané tvrzení dokázáno.

4 Užití Dirichletova principu v algebře

Tvrzení 4.1:[Vlastní]

Je-li v uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ n reálných čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n \geq 2)$, existují vždy indexy $i \neq j$, pro které platí

$$\left|x_i - x_j\right| \leq \frac{(b-a)}{(n-1)}.$$

Důkaz:

Toto tvrzení plyne přímo z Dirichletova principu. Rozdělme tento interval na $n-1$ stejných intervalů o délce $\left(\frac{b-a}{n-1}\right)$. Podle Dririchletova principu se v jednom z nich nacházejí alespoň dvě čísla x_i, x_j, kde $i \neq j$ a $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, tj. $\left|x_i - x_j\right| \leq \left(\frac{b-a}{n-1}\right)$.

Uvažujme následující příklady:

Příklad 1:[11]

Nechť $x_1, x_2, \ldots, x_7$ jsou libovolná reálná čísla. Dokažte, že mezi nimi lze vždy vybrat dvě čísla např. x, y tak, že platí

$$0 \leq \frac{x-y}{1+xy} \leq \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Řešení:[11]

Zapišme daná čísla ve tvaru $x_i = tg\alpha_i$, kde $i = 1,2,\ldots,7$ a $\alpha_i \in \left(\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Rozdělme tento interval na šest stejných intervalů o velikosti $\frac{\pi}{6}$.

Podle Dirichletova principu se v jednom z nich nacházejí alespoň dvě čísla α_i, α_j. Pokud $i > j$, kde $i, j \in \{1,2,\ldots,7\}$, pak

$$0 \leq \alpha_i - \alpha_j \leq \frac{\pi}{6}.$$

Jelikož funkce tangens je v intervalu $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ rostoucí, platí

$$0 \le tg(\alpha_i - \alpha_j) = \frac{tg\alpha_i - tg\alpha_j}{1 + tg\alpha_i tg\alpha_j} = \frac{x_i - x_j}{1 + x_i x_j} \le tg\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Tím je dané tvrzení dokázáno.

Příklad 2:[Vlastní]

Dokažte, že mezi libovolnými devíti reálnými čísly existují dvě čísla a, b taková, že

$$0 \le \frac{a-b}{1+ab} \le \sqrt{2} - 1.$$

Řešení:[Vlastní]

Nechť $x_1, x_2, ..., x_9$ je devět daných čísel. Položme $x_i = tg\alpha_i, i \in \{1,2,...,9\}$ a $\alpha_i \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Rozdělme tento interval na osm stejných intervalů o velikosti $\frac{\pi}{8}$. Podle Dirichletova principu se v jednom z nich nacházejí alespoň dvě čísla α_i, α_j. Pokud $i > j$, kde $i, j \in \{1,2,..., n\}$, pak

$$0 \le \alpha_i - \alpha_j \le \frac{\pi}{8}.$$

Jelikož funkce tangens je v intervalu $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ rostoucí, platí

$$0 \le tg(\alpha_i - \alpha_j) = \frac{tg\alpha_i - tg\alpha_j}{1 + tg\alpha_i tg\alpha_j} = \frac{x_i - x_j}{1 + x_i x_j} \le tg\frac{\pi}{8}. \qquad (1)$$

Snadno zjistíme, že

$$tg\frac{\pi}{8} = \frac{\sin\frac{\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{8}} = \frac{\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}}}{\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{3-\sqrt{2}} = \sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2} = \sqrt{2} - 1 \qquad (2)$$

Položíme-li $x_i = a$, $x_j = b$, pak z (1) a (2) vyplývá, že

$$0 \le \frac{a-b}{1+ab} \le \sqrt{2} - 1.$$

Tím je dané tvrzení dokázáno.

Příklad 3:[Vlastní]

Dokažte, že mezi libovolnými n $(n \ge 3)$ reálnými čísly existují dvě čísla a, b taková, že

$$0 \le \frac{a-b}{1+ab} \le tg\left(\frac{\pi}{n-1}\right).$$

Řešení:[Vlastní]

Nechť $x_1, x_2, ..., x_n$ je n daných čísel. Položme $x_i = tg\alpha_i, i \in \{1,2,..., n\}$ a $\alpha_i \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Rozdělme tento interval na $n-1$ stejných intervalů o velikosti $\frac{\pi}{n-1}$. Podle Dirichletova principu se v jednom z nich nacházejí alespoň dvě čísla α_i, α_j. Pokud $i > j$, kde $i, j \in \{1,2,..., n\}$, pak

$$0 \le \alpha_i - \alpha_j \le \frac{\pi}{n-1}.$$

Jelikož funkce tangens je v intervalu $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ rostoucí, platí

$$0 \le tg(\alpha_i - \alpha_j) = \frac{tg\alpha_i - tg\alpha_j}{1+tg\alpha_i tg\alpha_j} = \frac{x_i - x_j}{1+x_i x_j} \le tg\left(\frac{\pi}{n-1}\right).$$

Tím je dané tvrzení dokázáno.

Příklad 4:[Vlastní]

Je dáno 13 libovolných kladných čísel. Dokažte, že existují vždy dvě ze 13 daných čísel, např. x, y, které jsou kořeny následující nerovnice:

$$0 < \frac{x - y + x\sqrt{3} + y\sqrt{3} + 2\sqrt{3}xy + \sqrt{3}}{1 + x + y + 2xy} \le 2.$$

Řešení:[Vlastní]

Stačí dokázat, že mezi 13 kladnými reálnými čísly, můžeme vždy najít dvě čísla x, y, pro která platí

$$0 < \frac{x - y + x\sqrt{3} + y\sqrt{3} + 2\sqrt{3}xy + \sqrt{3}}{1 + x + y + 2xy} \le 2.$$

Nechť $x_1, x_2, ..., x_{13}$ je 13 daných čísel. Položme $y_i = tg\alpha_i = 1 + \frac{1}{x_i}, i = 1,2,...,13$ a $\alpha_i \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Rozdělme tento interval na 12 stejných intervalů o velikosti $\frac{\pi}{12}$. Podle Dirichletova principu se v jednom z nich nacházejí alespoň dvě čísla α_i, α_j. Pokud $i > j$, kde $i, j \in \{1,2,...,13\}$, pak

$$0 \le \alpha_i - \alpha_j \le \frac{\pi}{12}.$$

Jelikož funkce tangens je v intervalu $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ rostoucí, platí

$$0 \le tg(\alpha_i - \alpha_j) = \frac{tg\alpha_i - tg\alpha_j}{1 + tg\alpha_i tg\alpha_j} = \frac{y_i - y_j}{1 + y_i y_j} \le tg\frac{\pi}{12}. \qquad (1)$$

Užitím vzorce $\left|tg\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$, získáme

$$\left|tg\frac{\pi}{12}\right| = tg\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{1+\cos\frac{\pi}{6}}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}} = \sqrt{\frac{\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{1-\frac{3}{4}}} = 2-\sqrt{3}. \qquad (2)$$

Z (1) a (2) vyplývá, že

$$0 \le \frac{y_i - y_j}{1 + y_i y_j} \le 2-\sqrt{3} \Leftrightarrow 0 \le \frac{1+\frac{1}{x_i}-1-\frac{1}{x_j}}{1+\left(1+\frac{1}{x_i}\right)\left(1+\frac{1}{x_j}\right)} \le 2-\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{x_j - x_i}{x_i x_j + (1+x_i)(1+x_j)} + \sqrt{3} \le 2 \Leftrightarrow 0 < \frac{x_j - x_i}{1 + x_i + x_j + 2x_i x_j} + \sqrt{3} \le 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 < \frac{x_j - x_i + \sqrt{3}.x_i + \sqrt{3}.x_j + 2\sqrt{3}.x_i x_j + \sqrt{3}}{1 + x_i + x_j + 2x_i x_j} \le 2$$

Čímž je dané tvrzení dokázáno.

Příklad 5:[Vlastní]

Dokažte, že mezi n libovolnými reálnými čísly, kde $n \ge 3$ existují vždy dvě čísla x, y taková, že

$$0 \le \frac{x-y}{1+x+y+2xy} \le tg\left(\frac{\pi}{n-1}\right).$$

Řešení:[Vlastní]

Nechť $x_1, x_2, ..., x_n$ je n daných čísel. Položme $y_i = tg\alpha_i = 1 + \frac{1}{x_i}, i = 1,2,..., n$ a $\alpha_i \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Rozdělme tento interval na $(n-1)$ stejných intervalů o velikosti $\frac{\pi}{n-1}$. Podle

Dirichletova principu se v jednom z nich nacházejí alespoň dvě čísla α_i, α_j. Pokud $i > j$, kde $i, j \in \{1,2,..., n\}$, pak

$$0 \le \alpha_i - \alpha_j \le \frac{\pi}{n-1}.$$

Jelikož funkce tangens je v intervalu $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ rostoucí, platí

$$0 \le tg(\alpha_i - \alpha_j) = \frac{tg\alpha_i - tg\alpha_j}{1 + tg\alpha_i tg\alpha_j} = \frac{y_i - y_j}{1 + y_i y_j} \le tg\left(\frac{\pi}{n-1}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 \le \frac{1 + \frac{1}{x_i} - 1 - \frac{1}{x_j}}{1 + \left(1 + \frac{1}{x_i}\right)\left(1 + \frac{1}{x_j}\right)} \le tg\left(\frac{\pi}{n-1}\right) \Leftrightarrow 0 \le \frac{x_j - x_i}{1 + x_i + x_j + 2x_i x_j} \le tg\left(\frac{\pi}{n-1}\right).$$

Tím je dané tvrzení dokázáno.

Příklad 6:[Vlastní]

Dokažte, že pro každé reálné číslo k, z n daných reálných čísel lze vždy vybrat alespoň dvě x, y, pro která platí

$$0 \le \frac{x - y}{1 + k(x + y) + (k^2 + 1)x.y} \le tg\left(\frac{\pi}{n-1}\right).$$

Řešení:[Vlastní]

Nechť $x_1, x_2,..., x_n$ je n daných čísel. Položme $y_i = tg\alpha_i = k + \frac{1}{x_i}, i = 1,2,..., n$ a $\alpha_i \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Rozdělme tento interval na $(n-1)$ stejných intervalů o velikosti $\frac{\pi}{n-1}$. Podle Dirichletova principu se v jednom z nich nacházejí alespoň dvě čísla α_i, α_j. Pokud $i > j$, kde $i, j \in \{1,2,..., n\}$, pak

$$0 \le \alpha_i - \alpha_j \le \frac{\pi}{n-1}.$$

Jelikož funkce tangens je v intervalu $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ rostoucí, platí

$$0 \le tg(\alpha_i - \alpha_j) = \frac{tg\alpha_i - tg\alpha_j}{1 + tg\alpha_i tg\alpha_j} = \frac{y_i - y_j}{1 + y_i y_j} \le tg\left(\frac{\pi}{n-1}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 \le \frac{k + \frac{1}{x_i} - k - \frac{1}{x_j}}{1 + \left(k + \frac{1}{x_i}\right)\left(k + \frac{1}{x_j}\right)} \le tg\left(\frac{\pi}{n-1}\right) \Leftrightarrow 0 \le \frac{x_j - x_i}{1 + k(x_i + x_j) + (k^2 + 1)x_i x_j} \le tg\left(\frac{\pi}{n-1}\right).$$

Tím je dané tvrzení dokázáno.

Příklad 7:[Vlastní]

Dokažte, že existují vždy dvě z 9 libovolných reálných čísel v intervalu $(-1,1)$, která jsou kořeny následující nerovnice

$$0 \le 2\left(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}\right) \le \sqrt{2-\sqrt{2}}\ .$$

Řešení:[Vlastní]

Nechť $x_1, x_2, ..., x_9$ je 9 daných čísel. Položme $x_i = \sin\alpha_i, i \in \{1,2,...,9\}$ a $\alpha_i \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Rozdělme tento interval na 8 stejných intervalů o velikosti $\frac{\pi}{8}$.

Podle Dirichletova principu se v jednom z nich nacházejí aspoň dvě α_k, α_j. Pokud $k > j \quad (k, j \in \{1,2,...,9\})$, pak

$$0 \le \alpha_k - \alpha_j \le \frac{\pi}{8}.$$

Jelikož funkce sinus je v intervalu $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ rostoucí, platí

$$0 \le \sin(\alpha_k - \alpha_j) \le \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 \le \sin\alpha_k \cos\alpha_j - \cos\alpha_k \sin\alpha_j \le \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 \le \sin\alpha_k \sqrt{1-\sin^2\alpha_j} - \sin\alpha_j \sqrt{1-\sin^2\alpha_k} \le \sin\left(\frac{\pi}{8}\right). \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 \le x_k \sqrt{1-x_j^2} - x_i \sqrt{1-x_k^2} \le \sin\left(\frac{\pi}{8}\right). \qquad (1)$$

Jelikož $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$, je tedy

$$\left|\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right| = \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}. \qquad (2)$$

Z (1) a (2) vyplývá, že

$$0 \le 2\left(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}\right) \le \sqrt{2-\sqrt{2}}\ .$$

Tím je dané tvrzení dokázáno.

Příklad 8:[Vlastní]

Dokažte, že mezi libovolnými n $(n \ge 3)$ reálnými čísly z intervalu $(-1,1)$ můžeme najít čísla a, b taková, že

$$0 < a\sqrt{1-b^2} - b\sqrt{1-a^2} < \sin\left(\frac{\pi}{n-1}\right).$$

Řešení: [Vlastní]

Nechť $x_1, x_2, ..., x_n$ je n daných čísel. Položme $x_i = \sin\alpha_i, i \in \{1,2,..., n\}$ a $\alpha_i \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Rozdělme tento interval na $n-1$ stejných intervalů o velikosti $\frac{\pi}{n-1}$.

Podle Dirichletova principu se v jednom z nich nacházejí aspoň dvě α_k, α_j. Pokud $k > j$ $\left(k, j \in \{1,2,..., n\}\right)$, pak

$$0 < \alpha_k - \alpha_j \le \frac{\pi}{n-1}.$$

Jelikož funkce sinus je v intervalu $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ rostoucí, platí

$$0 < \sin(\alpha_k - \alpha_j) < \sin\left(\frac{\pi}{n-1}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 < \sin\alpha_k \cos\alpha_j - \cos\alpha_k \sin\alpha_j < \sin\left(\frac{\pi}{n-1}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 < \sin\alpha_k \sqrt{1-\sin^2\alpha_j} - \sin\alpha_j \sqrt{1-\sin^2\alpha_k} < \sin\left(\frac{\pi}{n-1}\right).$$

Čímž je dané tvrzení dokázáno.

Příklad 9: [Vlastní]

Je dáno 7 kladných reálných čísel, která jsou větší nebo rovny 1. Dokažte, že existují vždy dvě z nich, které jsou kořeny následující nerovnice

$$\frac{2\sqrt{(x^2-1)(y^2-1)}+2}{xy} \geq \sqrt{2+\sqrt{3}}\,.$$

Řešení: [Vlastní]

Stačí dokázat, že mezi 7 kladnými reálnými čísly, která jsou větší nebo rovny 1, můžeme vždy najít dvě čísla x, y, pro která platí

$$\frac{2\sqrt{(x^2-1)(y^2-1)}+2}{xy} \geq \sqrt{2+\sqrt{3}}\,.$$

Víme, že každé kladné reálné číslo, které je větší nebo rovno 1, lze vždy zapsat ve tvaru

$$r = \frac{1}{\cos\alpha}, \text{ kde } \alpha \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Nechť $x_1, x_2, ..., x_7$ je 7 daných čísel. Položme $\cos\alpha_i = \dfrac{1}{x_i}$ $, i \in \{1,2,...,7\}$ a $\alpha_i \in \left\langle 0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Rozdělme tento interval na 6 stejných intervalů o velikosti $\dfrac{\pi}{12}$.

Podle Dirichletova principu se v jednom z nich nacházejí aspoň dvě α_k, α_j. Pokud $k > j$ $\left(k, j \in \{1,2,...,7\}\right)$, pak

$$0 \leq \alpha_k - \alpha_j \leq \frac{\pi}{12}.$$

Jelikož funkce cosinus je v intervalu $\left\langle 0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ klesající, platí

$$\cos(\alpha_k - \alpha_j) \geq \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\alpha_k \cos\alpha_j + \sin\alpha_k \sin\alpha_j \geq \sqrt{\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x_k . x_j} + \sqrt{\left(1-\frac{1}{x_k^2}\right).\left(1-\frac{1}{x_j^2}\right)} \geq \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sqrt{(x_k^2-1)(x_j^2-1)}+2}{x_k x_j} \geq \sqrt{2+\sqrt{3}}\,.$$

Čímž je dané tvrzení dokázáno.

Příklad 10:[Vlastní]

Je dáno n, kde $n \geq 3$ kladných reálných čísel, která jsou větší nebo rovny 1. Dokažte, že existují vždy dvě z nich, např. a, b takové, že

$$\frac{\sqrt{(a^2-1)(b^2-1)}+1}{ab} \geq \cos\left(\frac{\pi}{2(n-1)}\right).$$

Řešení: [Vlastní]

Každé kladné reálné číslo, které je větší nebo rovno 1, lze vždy zapsat ve tvaru

$$r = \frac{1}{\cos\alpha}, \text{ kde } \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Nechť $x_1, x_2, ..., x_n$ je n daných čísel. Položme $\cos\alpha_i = \frac{1}{x_i}$, $i \in \{1,2,..., n\}$ a $\alpha_i \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Rozdělme tento interval na $n-1$ stejných intervalů o velikosti $\frac{\pi}{2(n-1)}$.

Podle Dirichletova principu se v jednom z nich nacházejí aspoň dvě α_k, α_j. Pokud $k > j$ $(k, j \in \{1,2,..., n\})$, pak

$$0 \leq \alpha_k - \alpha_j \leq \frac{\pi}{2(n-1)}.$$

Jelikož funkce cosinus je v intervalu $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ klesající, platí

$$\cos(\alpha_k - \alpha_j) \geq \cos\left(\frac{\pi}{2(n-1)}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\alpha_k \cos\alpha_j + \sin\alpha_k \sin\alpha_j \geq \cos\left(\frac{\pi}{2(n-1)}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x_k . x_j} + \sqrt{\left(1-\frac{1}{x_k^2}\right).\left(1-\frac{1}{x_j^2}\right)} \geq \cos\left(\frac{\pi}{2(n-1)}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{(x_k^2-1)(x_j^2-1)}+1}{x_k x_j} \geq \cos\left(\frac{\pi}{2(n-1)}\right).$$

Čímž je dané tvrzení dokázáno.

Příklad 11:[6]

Je dána množina $X = \{1,2,3,...,81\}$. Dokažte, že ze tří libovolných prvků množiny X lze vždy vybrat dva prvky a, b tak, aby platilo $0 < \sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b} \leq 1$.

Řešení: [6]

Nechť $x_1, x_2, x_3 \in X$. Položme $c_i = \sqrt[4]{x_i}$, kde $i = 1,2,3$. Pak máme $1 \leq c_i \leq 3$. Rozdělme $\langle 1;3 \rangle$ na dva intervaly $\langle 1;2 \rangle$ a $\langle 2;3 \rangle$. Podle Dirichletova principu náleží alespoň dvě ze tří čísel c_1, c_2, c_3 jednomu ze dvou uvedených intervalů. Z toho vyplývá, že $0 < c_i - c_j \leq 1$, tj. $0 < \sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b} \leq 1$.

Příklad 12:[11]

Dokažte, že z 11 různých reálných čísel v intervalu $\langle 1;1000 \rangle$ lze vždy vybrat dvě čísla $x \neq y$, pro která platí $0 < x - y < 1 + 3\sqrt[3]{xy}$.

Řešení:[11]

Pokud $x_i \in \langle 1;1000 \rangle, i = 1,2,\ldots,11$, pak $c_i = \sqrt[3]{x_i} \in \langle 1;10 \rangle$. Rozdělme $\langle 1;10 \rangle$ na 9 intervalů $\langle 1;2 \rangle, \langle 2;3 \rangle, \ldots, \langle 9;10 \rangle$. Podle Dirichletova principu leží alespoň dvě z 11 čísel $c_1, c_2, ..., c_{11}$ v jednom z devíti uvedených intervalů, tj. $0 < c_i - c_j < 1$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $c_i = \sqrt[3]{x}, c_j = \sqrt[3]{y}$ a $x > y$, pak máme:

$$0 < \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} < 1. \qquad (1)$$

Z toho vyplývá, že

$$0 < (\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y})^3 < 1.$$

Odtud získáme

$$0 < x - y < 3\sqrt[3]{x^2 y} - 3\sqrt[3]{xy^2} + 1 = 1 + 3\sqrt[3]{xy}\left(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}\right). \qquad (2)$$

Z (1) a (2) vyplývá, že

$$0 < x - y < 1 + 3\sqrt[3]{xy}.$$

Tím je dané tvrzení dokázáno.

Příklad 13:[11]

Nechť jsou $x_1, x_2, ..., x_n$ reálná čísla, pro která platí $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = 1$. Dokažte, že pro každé celé číslo k, $k \geq 2$ existují celá čísla $a_1, a_2, ..., a_n$ taková, že aspoň jedno z nich je různé od nuly, $|a_i| \leq k-1, i \in \{1,2,\dots,n\}$ a splňují následující nerovnici

$$|a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_n x_n| \leq \frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n - 1}.$$

Řešení: [11]

Položme

$$y_0 = -\frac{k-1}{2},\ y_1 = 1 - \frac{k-1}{2}, \dots,\ y_{k-1} = (k-1) - \frac{k-1}{2} = \frac{k-1}{2}.$$

Pro každou uspořádanou n-tici $(b_1, b_2, ..., b_n)$, kde b_i je jedním z čísel $y_0, y_2, ..., y_{k-1}$, $i \in \{1,2,..., n\}$, položme $S = b_1 x_1 + b_2 x_2 + ... + b_n x_n$. Z Cauchyovy nerovnosti a podmínek zadání vyplývá, že

$$|S| = |b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_n x_n| \leq \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2}\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2}.$$

Jelikož $|b_i| \leq \frac{k-1}{2}$, $i \in \{1,2,..., n\}$, platí proto

$$|S| \leq \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2} \leq \frac{k-1}{2}\sqrt{n},$$

nebo

$$-\frac{k-1}{2}\sqrt{n} \leq S \leq \frac{k-1}{2}\sqrt{n}.$$

Z k čísel $y_0, y_2, ..., y_{k-1}$ lze utvořit k^n uspořádaných n-tic $(b_1, b_2, ..., b_n)$, což odpovídá k^n číslům $S = b_1 x_1 + b_2 x_2 + ... + b_n x_n$.

Rozdělme interval $\left\langle -\frac{k-1}{2}\sqrt{n}; \frac{k-1}{2}\sqrt{n} \right\rangle$ na $k^n - 1$ stejných intervalů o velikosti $\frac{k-1}{k^n - 1}\sqrt{n}$.

Z Dirichletova principu vyplývá, že existují aspoň dvě čísla, která obě náleží jednomu z intervalů. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že S_i, S_j jsou takovými čísly, čímž získáme

$$|S_i - S_j| = |(b_{i1} - b_{j1})x_1 + (b_{i2} - b_{j2})x_2 + \dots + (b_{in} - b_{jn})x_n| \leq \frac{k-1}{k^n - 1}\sqrt{n}.$$

Čímž je dané tvrzení dokázáno.

Příklad 14:[10]

Dokažte, že existují celá čísla a, b a c taková, že aspoň jedno z nich je různé od nuly, absolutní hodnota každého je menší nebo rovna 10^6 a vyhovují následující nerovnici

$$\left|a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}\right| < 10^{-11}.$$

Řešení:[Vlastní]

Nechť M je množina 10^{18} reálných čísel ve tvaru $r + s\sqrt{2} + t\sqrt{3}$, kde $r, s, t \in \{0,1,2,...,10^6 - 1\}$. Položme $d = \left(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}\right)10^6$.

Potom

$$x \in M \Rightarrow 0 \leq x < d.$$

Rozdělme tento interval $\langle 0; d)$ na $10^{18} - 1$ stejných intervalů o velikosti $e = \dfrac{d}{10^{18} - 1}$. Podle Dirichletova principu leží spolu alespoň dvě z 10^8 čísel množiny M v nějakém intervalu. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že x_i, x_j jsou dvě čísla, která leží spolu v témž intervalu. Potom máme

$$\left|x_i - x_j\right| = \left|(r_i - r_j) + (s_i - s_j)\sqrt{2} + (t_i - t_j)\sqrt{3}\right| \leq \frac{d}{10^{18} - 1} < \frac{10^7}{10^{18}} = 10^{-11}.$$

Čímž je dané tvrzení dokázáno.

5 Užití Dirichletova principu v kombinatorické geometrii

<u>Tvrzení 5.1</u>: **[8]** (Dirichletův princip pro obsah rovinného útvaru)

Jsou-li $U, U_1, U_2, ..., U_n$ rovinné útvary takové, že

$$U_i \subseteq U \text{ , kde } i \in \{1, ..., n\} \text{ a } |U| < |U_1| + |U_2| + \ldots + |U_n| ,$$

kde $|U|$ je obsah rovinného útvaru U, $|U_i|$ obsah rovinného útvaru U_i. Potom existují aspoň dva rovinné útvary U_i, U_j $(1 \leq i \leq j \leq n)$ takové, že U_i a U_j mají aspoň jeden společný vnitřní bod.

Říkáme, že S je vnitřním bodem množiny $U_i \cap U_j$ v též rovině, pokud existuje kruh K se středem S a poloměrem $\varepsilon \geq 0$ takový, že $K(S;\varepsilon) \subseteq U_i \cap U_j$.

Analogicky vyvodíme Dirichletův princip pro délku úseček a Dirichletův princip pro obsah těles.

- Pokud na úsečku délky 1 položíme několik úseček délky menší než 1, jejichž celková délka je větší než 1, pak existují nejméně dvě úsečky, které mají jeden společný bod.
- Pokud na kružnici o poloměru 1 položíme několik oblouků délky menší než 1, jejichž celková délka je větší než 2π, pak existují nejméně dva oblouky, které mají jeden společný bod.
- Pokud na rovinný útvar o obsahu 1 položíme několik rovinných útvarů o obsahu menším než 1, jejichž celkový obsah je větší než 1, pak existují nejméně dva z těchto útvarů, které mají jeden společný bod.

Uvažujeme následující příklady:

<u>Příklad 1</u>: **[Vlastní]**

Je dáno 2015 libovolných bodů ležících v kruhu o obsahu S, z nichž žádné tři neleží na téže přímce. Dokažte, že lze z daných bodů vždy vybrat aspoň tři, které jsou vrcholy nějakého trojúhelníku s obsahem menším než $\frac{S}{1007}$.

Řešení:[Vlastní]

Rozdělme daný kruh na 1007 stejných kruhových výsečí. Podle Dirichletova principu existuje aspoň jedna kruhová výseč obsahující 3 body, jimiž lze vytvořit jeden trojúhelník, jehož obsah je menší než $\frac{S}{1007}$.

Příklad 2:[Vlastní]

Je dáno $2n+1$ libovolných bodů ležících v kruhu o obsahu S, z nichž žádné tři neleží na téže přímce, kde $n \in N$ a $n \geq 3$. Dokažte, že lze z daných bodů vždy vybrat aspoň tři, které jsou vrcholy nějakého trojúhelníku o obsahu menším než $\frac{S}{n}$.

Řešení:[Vlastní]

Rozdělme daný kruh na n stejných kruhových výsečí. Podle Dirichletova principu existuje aspoň jedna kruhová výseč obsahující $\left\lfloor \frac{2n+1}{n} \right\rfloor + 1 = 3$ body, jimiž lze vytvořit jeden trojúhelník, jehož obsah je menší než $\frac{S}{n}$.

Příklad 3:[Vlastní]

V rovině je dáno 2015 bodů. Z každých tří libovolných vybraných bodů lze vždy vybrat dva body, jejichž vzdálenost je menší než 1. Dokažte, že aspoň 1008 z daných bodů leží uvnitř kruhu o poloměru 1

Řešení:[Vlastní]

Nechť A, B jsou dva z 2015 daných bodů s největší vzájemnou vzdáleností.

Je-li $|AB| \leq 1$, pak kruh $K(A; r=1)$ obsahuje všech 2015 daných bodů a úloha je vyřešena.

Je-li $|AB| > 1$, uvažujme libovolný bod C z 2013 zbývajících bodů. Sestrojme kruh $L(B; r=1)$. Jelikož $|AC| < 1$ nebo $|BC| < 1$, proto $C \in K(A; r=1)$ nebo $C \in L(B; r=1)$. To znamená, že 2013 zbývajících bodů leží ve dvou kruzích $K(A; r=1)$ a $L(B; r=1)$. Podle Dirichletova principu existuje kruh, který obsahuje aspoň 1007 bodů. Bod A nebo bod B s 1007 výše uvedenými body vytvoří aspoň 1008 bodů, které budou ležet v kruhu o poloměru 1.

Čímž je dané tvrzení dokázáno.

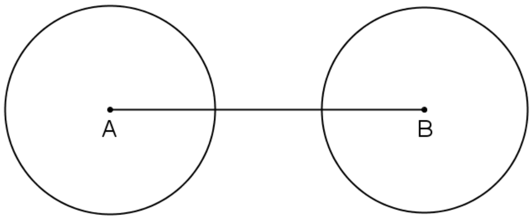
Příklad 4:[Vlastní]

V rovině je dáno $2n+1$ bodů, kde $n \in N$ a $n \geq 3$. Z každých tří libovolně vybraných bodů lze vždy vybrat dva, jejichž vzájemná vzdálenost je menší než 1. Dokažte, že existuje kruh s poloměrem 1 obsahující nejméně $n+1$ daných bodů.

Řešení:[Vlastní]

Nechť A je jedním z daných bodů. Pro kruh se středem v bodě A a poloměrem 1 mohou nastat právě dvě následující možnosti:

1. Všechny dané body ležící uvnitř kruhu $K_1(A;1)$, pak platí dané tvrzení.
2. Existuje bod B z daných bodů, kde $B \neq A$ takový, že $B \notin K(A;1)$, pak máme $|AB| > 1$.



Obrázek 1: Obrázek k příkladu 4

Uvažujme kruh $K_2(B;1)$ se středem B a poloměrem 1. Zvolme z daných bodů libovolný bod C takový, že platí $C \neq A, C \neq B$. Jelikož $|AB| > 1$, je tedy $\min\{|CA|,|CB|\} < 1$.

Z toho vyplývá, že $C \in K_1$ nebo $C \in K_2$, což znamená, že kruhy K_1 a K_2 obsahují všech $2n+1$ bodů. Podle Drichletova principu existuje jeden ze dvou uvedených kruhů obsahující nejméně $n+1$ daných bodů.

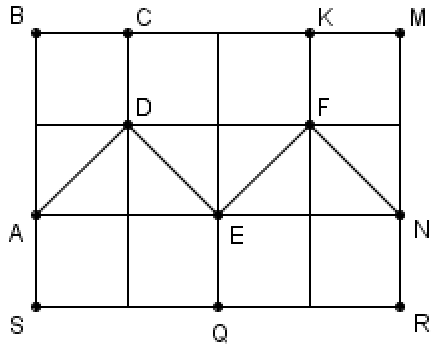
Tím je tvrzení dokázáno.

Příklad 5: [3], [12]

Ukažte, že mezi 6 libovolnými body obdélníka 3×4 můžeme vždy najít dva body, jejichž vzdálenost je menší než $\sqrt{5}$.

Řešení: [3]

Rozdělme daný obdélník na 5 rovinných útvarů $ABCD, DCKFE, KFNM, NFEQR, QEDAS$.



Obrázek 2: Obrázek k příkladu 5

Podle Drichletova principu existuje jeden z výše uvedených rovinných útvarů, který obsahuje 2 z šesti daných bodů. Z obrázku vyplývá, že nejdelší vzdálenost mezi dvěma body:

$$|AC| = |CF| = |DK| = |CE| = |KE| = |KN| = |RF| = |RE| =$$
$$= |QN| = |FQ| = |ES| = |QD| = |QA| = |SD| = \sqrt{2^2 + 1} = \sqrt{5}.$$

Čímž je dané tvrzení dokázáno.

<u>Příklad 6</u>:[8]

V rovině je dáno 6 takových bodů, že jakékoliv tři body z nich tvoří vrcholy trojúhelníku se stranami různých délek. Dokažte, že existuje strana, která je nejkratší stranou jednoho trojúhelníka a současně nejdelší stranou jiného.

<u>Řešení</u>: [8]

Obarvěme nejkratší stranu trojúhelníku na červeno a na modro strany zbývající. Je třeba dokázat, že existuje trojúhelník, jehož strany jsou všechny červené.

Bod A spojíme s ostatními 5 body, tím získáme 5 stran. Podle Dirichletova principu jsou aspoň 3 strany stejné barvy. Předpokládejme, že jsou to AB_1, AB_2, AB_3.

Jestliže jsou strany AB_1, AB_2, AB_3 červené, pak $\Delta B_1B_2B_3$ má všechny tři strany červené. Z toho vyplývá, že ΔAB_1B_2 má všechny tři strany červené.

Jestliže jsou AB_1, AB_2, AB_3 modré, pak $\Delta B_1B_2B_3$ má všechny tři strany červené. Z toho vyplývá, že pro trojúhelník, který má všechny strany červené, největší strana tohoto trojúhelník je hledaná strana.

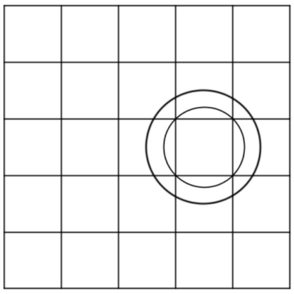
Čímž je dané tvrzení dokázáno.

Příklad 7:[11]

Uvnitř jednotkového čtverce je dáno 101 bodů. Dokažte, že existuje alespoň jeden kruh o poloměru $\frac{1}{7}$, který obsahuje aspoň 5 z uvedených bodů.

Řešení: [11]

Rozdělme daný čtverec na 25 stejných čtverečků. Podle Dirichletova principu existuje čtvereček, který obsahuje aspoň 5 bodů. Tento čtvereček je vepsaný kružnici o poloměru $r = \frac{0{,}2.\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{10}$.



Obrázek 3: Obrázek k příkladu 7

Jelikož $\frac{\sqrt{2}}{10} < \frac{1}{7}$, existuje alespoň jeden kruh o poloměru $\frac{1}{7}$, která obsahuje aspoň 5 z uvedených bodů.

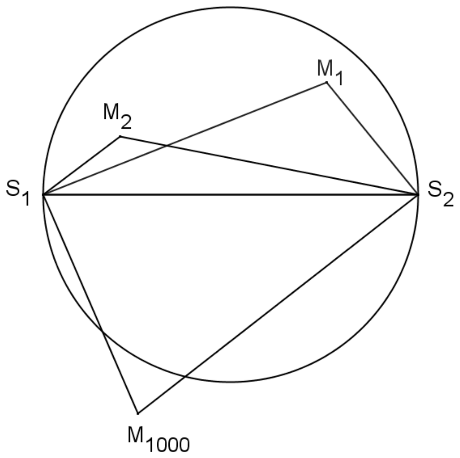
Příklad 8:[11]

V rovině je dáno 1000 bodů $M_1, M_2, ..., M_{1000}$. Libovolně sestrojme kružnici o poloměru 1. Dokažte, že existuje bod S na výše uvedené kružnici tak, že platí

$|SM_1| + |SM_2| + ... + |SM_{1000}| \geq 1000$.

Řešení: [11]

Je-li $|S_1S_2| = 2r = 2$, pak



Obrázek 4: Obrázek k příkladu 8

$$|M_1S_1| + |M_1S_2| \geq 2$$
$$|M_2S_1| + |M_2S_2| \geq 2$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$|M_{1000}S_1| + |M_{1000}S_2| \geq 2$$

Z čehož vyplývá, že

$$(|M_1S_1| + |M_2S_1| + ... + |M_{1000}S_1) + (|M_1S_2| + |M_2S_2| + ... + |M_{1000}S_2|) \geq 2000$$

Podle Dirichletova principu je alespoň jeden ze dvou součtů levé strany výše uvedené nerovnosti větší nebo roven 1000.

Je-li $(|M_1S_1| + |M_2S_1| + ... + |M_{1000}S_1) \geq 1000$, Pak $S_1 \equiv S$.

Čímž je dané tvrzení dokázáno.

Příklad 9:[8]

Uvnitř krychle o straně 15 je dáno 11000 bodů. Dokažte, že existuje koule o poloměru 1, která obsahuje 6 z 11000 daných bodů.

Řešení:[8]

Danou krychli rozdělme na $13^3 = 2197$ stejných krychliček. Jelikož $11000 > 5.2197$, existuje podle Dirichletova principu aspoň jedna krychlička, která obsahuje alespoň 6 z 11000 daných bodů. Najdeme poloměr koule vepsané této krychličce:

$$r = \frac{1}{2}\frac{15}{13}\sqrt{3} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{675}{169}} < \frac{1}{2}\sqrt{\frac{676}{169}} = 1.$$

Z toho vyplývá, že existuje koule o poloměru 1, která obsahuje aspoň 6 z 11000 daných bodů.

Tím je dané tvrzení dokázáno.

Příklad 10:[13]

V rovině je dáno 17 bodů, z nichž žádné tři neleží na téže přímce. Body jsou spojeny úsečkami žluté, červené nebo modré barvy. Dokažte, že vznikne aspoň jeden „jednobarevný trojúhelník“ (tj. jehož stranami jsou úsečky téže barvy).

Řešení:[13]

Očíslujme body $1,2,\dots,17$. Existuje aspoň šest bodů, s nimiž je bod 1 spojen stejnou barvou. Nechť je to (bez újmy na obecnosti) třeba žlutá a nechť to jsou body $2,3,\dots,7$. Jsou-li některé z bodů $2,3,\dots,7$ spojeny úsečkou žluté barvy, je důkaz ukončen (existuje „žlutý“ trojúhelník).

Nechť nejsou. Pak jsou spojeny úsečkami např. modré a červené barvy. Vezměme si bod 2. Je spojen s body $3,4,\dots,7$ aspoň třemi úsečkami téže barvy. Nechť je to (bez újmy na obecnosti) červená barva a nechť to jsou body $3,4,5$. Jsou-li některé z těchto bodů $3,4,5$ spojeny červenou úsečkou, je důkaz ukončen (existuje červený trojúhelník).

Nechť tomu tak není. Pak jsou body $3,4,5$ spojeny modrou úsečkou a tedy existuje jednobarevný modrý trojúhelník.

Tím je dané tvrzení dokázáno.

Příklad 11:[13]

V pravidelném dvacetiúhelníku je 9 vrcholů vyznačeno zlatou barvou. Dokažte, že aspoň tři z nich tvoří rovnoramenný trojúhelník.

Řešení:[13]

V pravidelném dvacetiúhelníku si vyznačíme čtyři pravidelné pětiúhelníky. Podle Dirichletova principu existuje alespoň jeden pětiúhelník s aspoň třemi „zlatými vrcholy“ $(9 = 4.2+1)$ a ty tvoří rovnoramenný trojúhelník.

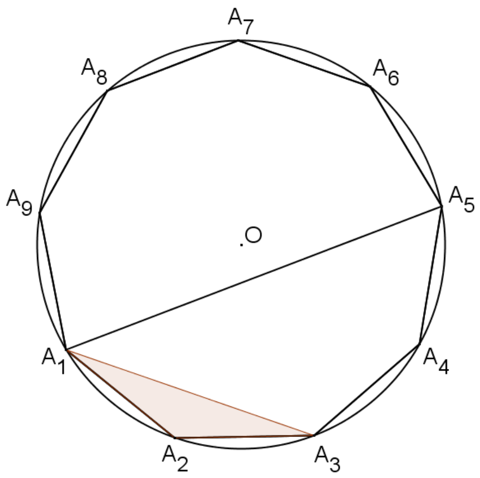
Čímž je dané tvrzení dokázáno.

Příklad 12:[11]

Je dán pravidelný devítiúhelník. Jeho každý vrchol je obarven na bílo nebo černo. Dokažte, že existují dva trojúhelníky, které mají stejný obsah a jejich vrcholy mají stejnou barvu.

Řešení: [11]

Je 9 vrcholů $A_1, A_2, ..., A_9$ obarvených bílou nebo černou. Podle Dirichletova principu existuje aspoň pět z devíti vrcholů se stejnou barvou. Z pěti těchto vrcholů můžeme vytvořit $C(3,5) = 10$ bílých trojúhelníků.



Obrázek 5: Obrázek k příkladu 12

Nechť A je množina vrcholů daného pravidelného devítiúhelníku, tj. $A = \{A_1, A_2, ..., A_9\}$ a O je jeho středem. Rotujeme kolem středu O o $0^0, 40^0, 80^0, 120^0, 160^0, 200^0, 240^0, 280^0, 320^0$.

S každou rotací se množina A mění na A (tedy ji samotnou). Po devíti uvedených rotacích se deset bílých trojúhelníků změní na 90, jejichž vrcholy náleží A. Počet různých trojúhelníků, které mají vrcholy v A je $C(3,9) = 84$.

Jelikož $84 < 90$, podle Dirichletova principu existují 2 bílé trojúhelníky, které mají totožné rotace. Rotace zachovává tvar a velikost útvaru, z toho vyplývá, že tyto dva trojúhelníky mají stejný obsah a jejich vrcholy mají stejnou barvu. Tím je dané tvrzení dokázáno.

Příklad 13: [13]

V krychli s hranou 19 je dáno 1332 bodů. Dokažte, že mezi nimi jsou aspoň 2 body se vzdáleností menší než 3.

Řešení: [13]

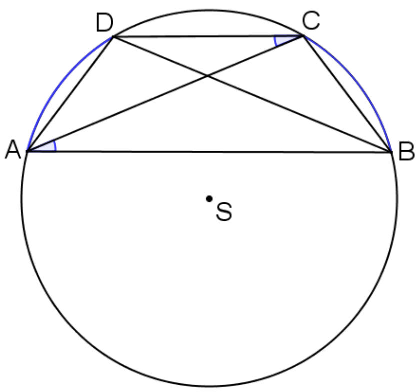
Rozdělme krychli na $11^3 = 1331$ krychliček, o hraně délky $\frac{19}{11} < 2$ a velikost tělesové úhlopříčky $\frac{19}{11}\sqrt{3} < 3$. Podle Dirichletova principu budou v jedné krychličce aspoň dva body, jejichž maximální vzdálenost je $\frac{19}{11}\sqrt{3} < 3$. Čímž je dané tvrzení dokázáno.

Příklad 14:[8]

Dokažte, že z libovolných 64 vrcholů daného pravidelného 1981-úhelníku vepsaného kružnici lze vždy vybrat čtyři, které jsou vrcholy lichoběžníku.

Řešení: [8]

Nejprve dokažme následující tvrzení: Čtyřúhelník vepsaný kružnici, jehož dvě protější strany jsou shodné, je lichoběžník.



Obrázek 6: Obrázek k příkladu 14

Nechť je čtyřúhelník ABCD vepsaný kružnici a nechť $|AD| = |BC|$. Pak platí, že také oblouky AD a BC jsou stejně dlouhé. Z toho vyplývá, že platí $|\angle ACD| = |\angle CAB|$, tj. úhly obvodové příslušné k zmíněným stejně dlouhým obloukům. Úhly $\angle ACD$ a $\angle CAB$ jsou střídavé. Tudíž platí, že $AB // CD$. Z čehož vyplývá, že čtyřúhelník ABCD je lichoběžník.

Nechť $A_1, A_2, ..., A_{1981}$ jsou vrcholy daného pravidelného 1981-úhelníku. Označme $|A_1A_2| = a_1, |A_1A_3| = a_2, ..., |A_1A_{991}| = a_{990}$. A zřejmě platí, že

$$|A_1A_2| = |A_1A_{1981}| = a_1, |A_1A_3| = |A_1A_{1980}| = a_2, ..., |A_1A_{991}| = |A_1A_{992}| = a_{990}.$$

Z čehož vyplývá, že délky všech tětiv vycházejících z vrcholu A_1 mají celkem 990 různých hodnot. To platí i pro délky všech tětiv vycházejících z kteréhokoliv vrcholu daného mnohoúhelníku. Platí tedy, že délka libovolné tětivy $|A_i A_j|$ je jedna z 990 výše uvedených různých hodnot.

Z 64 vrcholů lze vytvořit celkem $C(2,64) = 2016$ tětiv. Podle Dirichletova principu existují aspoň 3 tětivy stejné délky. Pokud každá dvojice z těchto tětiv má společný vrchol, pak tvoří rovnostranný trojúhelník. Tento trojúhelník kružnici rozdělí do 3 stejných oblouků. V každém z oblouků musí být stejný počet vrcholů, což je sporem, protože $1981 - 3 = 1978$ není dělitelné třemi. Z toho vyplývá, že aspoň dvě z tětiv nemají společný vrchol. Těmito dvěma tětivami je tvořen rovnoramenný lichoběžník, jehož vrcholy jsou vrcholy daného pravidelného 1981-úhelníku vepsaného kružnici. Čímž je dané tvrzení dokázáno.

Příklad 15:[Vlastní]

Uvnitř jednotkového čtverce je dáno 2015 bodů, z nichž žádné tři neleží na téže přímce. Dokažte, že existují tři body, které jsou vrcholy trojúhelníku, jehož maximální obsah je $\frac{1}{2014}$.

Řešení:[Vlastní]

Rozdělme daný čtverec na 1007 stejných obdélníků, jejichž rozměry jsou $1 \times \frac{1}{1007}$. Jelikož $\frac{2015}{1007} = 2 + \frac{1}{1007}$, existuje podle Dirichletova principu aspoň jeden obdélník obsahující 3 body, které jsou vrcholy trojúhelníku, jehož maximální obsah je roven polovině obsahu tohoto obdélníku, tj. $\frac{1}{2014}$.

Čímž je dané tvrzení dokázáno.

Příklad 16:[Vlastní]

Uvnitř jednotkového čtverce je dáno $2n+1$ bodů, z nichž žádné tři neleží na téže přímce, kde $n \in N$ a $n \geq 5$. Dokažte, že existují tři body, které jsou vrcholy trojúhelníku, jehož maximální obsah je $\frac{1}{2n}$.

Řešení:[Vlastní]

Rozdělme daný čtverec na n stejných obdélníků, jejichž rozměry jsou $1 \times \frac{1}{n}$. Jelikož $\frac{2n+1}{n} = 2 + \frac{1}{n}$, existuje podle Dirichletova principu aspoň jeden obdélník obsahující 3 body, které jsou vrcholy trojúhelníku, jehož maximální obsah je roven polovině obsahu tohoto obdélníku, tj. $\frac{1}{2n}$.

Čímž je dané tvrzení dokázáno

Příklad 17:[12], [10]

Uvnitř jednotkového čtverce je dáno 51 různých bodů. Dokažte, že existují alespoň tři body ležící v kruhu o poloměru $\frac{1}{7}$.

Řešení:[12], [10]

Rozdělme daný čtverec na 25 stejných čtverečků. Jelikož $\frac{51}{25} = 2{,}04$, existuje podle Dirichletova principu jeden čtvereček obsahující aspoň 3 body. Tento čtvereček je vepsaný kružnici o poloměru $r = \frac{0{,}2.\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{10}$.

Jelikož $\frac{\sqrt{2}}{10} < \frac{1}{7}$, existují alespoň tři body ležící v kruhu o poloměru $\frac{1}{7}$.

Čímž je dané tvrzení dokázáno.

Příklad 18:[8], [12]

Uvnitř jednotkového čtverce $ABCD$ je položeno několik kružnic, jejichž součet obvodů je 10. Dokažte, že existuje přímka, která je kolmá ke straně AB a protíná nebo se dotýká aspoň 4 takových kružnic.

Řešení: [8], [12]

Snadno zjistíme, že pravoúhlý průmět kružnice o obvodu 1, na např. stranu AB, je úsečka délky $\frac{1}{\pi}$. Z toho vyplývá, že součet délek pravoúhlých průmětů takových kružnic je $\frac{10}{\pi} > 3$.

Podle Dirichletova principu existuje jeden bod, který náleží alespoň čtyřem úsečkám.

Přímka, která prochází tímto bodem a je zároveň kolmá ke straně AB, protíná nebo se dotýká aspoň čtyř kružnic.

Příklad 19:[8]

Čísla $1, 2, \ldots, 200$ jsou rozdělena do 50 množin. Dokažte, že v jedné z 50 daných množin jsou 3 čísla, která mohou být velikostmi stran trojúhelníku.

Řešení:[8]

Předpokládejme, že a, b, c jsou tři z 200 daných čísel a nechť $0 < a < b < c$. Potom je každé z nich velikostí strany trojúhelníku právě tehdy, když platí $a + b > c$.

Uvažujeme-li pouze čísla od 100 do 200, snadno zjistíme, že každá tři čísla v množině $\{100, 101, \ldots, 200\}$ vyhovují trojúhelníkové nerovnosti, neboť $a + b \geq 100 + 101 = 201 > c$.

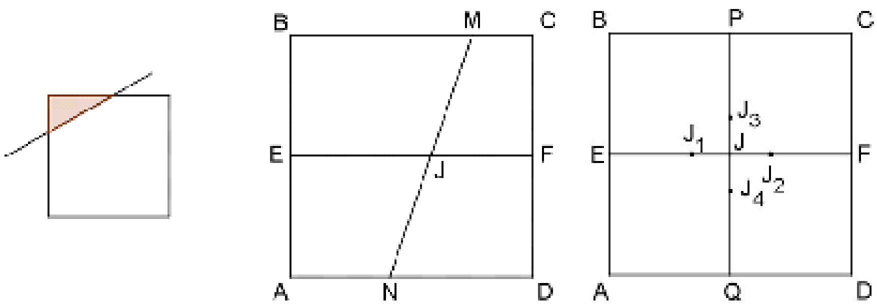
Podle Dirichletova principu v jedné z 50 daných množin jsou aspoň 3 prvky z množiny $\{100, 101, \ldots, 200\}$ vyhovující trojúhelníkové nerovnosti. Čímž je dané tvrzení dokázáno.

Příklad 20:[11]

V rovině je dáno 9 přímek. Každá z nich rozděluje čtverec na dva čtyřúhelníky s poměrem obsahů rovným $\frac{2}{3}$. Dokažte, že aspoň 3 z 9 daných přímek prochází jedním bodem.

Řešení:[11]

Přímka rozděluje čtverec na dva čtyřúhelníky právě tehdy, když protíná dvě protější strany daného čtverce, nikoliv přilehlé strany.



Obrázek 7: Obrázek k příkladu 20

Předpokládejme, že nějaká přímka MN protíná strany BC a AD v bodech M a N. Odtud získáme, že

$$\frac{S_{ABMN}}{S_{MCDN}} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2}|AB|(|BM|+|AN|)}{\frac{1}{2}|CD|(|MC|+|ND|)} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{|EJ|}{|JF|} = \frac{2}{3},$$

kde E, F jsou po řadě středy úseček AB, CD bod $J \in \overleftrightarrow{MN} \cap \overleftrightarrow{EF}$.

Nechť E, F, P, Q jsou po řadě středy úseček AB, BC, CD, DA a nechť J_1, J_2, J_3, J_4 jsou body, pro které platí, že J_1, J_2 leží na úsečce EF a J_3, J_4 leží na úsečce PQ a platí

$$\frac{|EJ_1|}{|J_1F|} = \frac{|FJ_2|}{|J_2E|} = \frac{|PJ_3|}{|J_3Q|} = \frac{|QJ_4|}{|J_4P|} = \frac{2}{3}$$

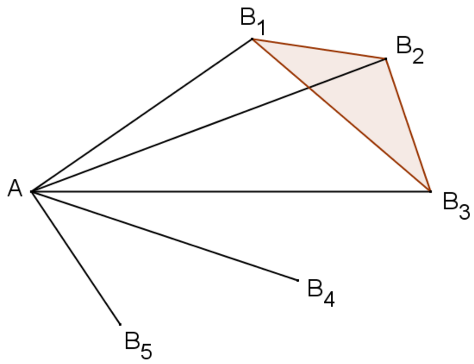
Z toho vyplývá, že každá přímka, která má vlastnost vyhovující požadavkům zadání, musí procházet uvedenými body J_1, J_2, J_3, J_4. Máme však devět přímek, a proto podle Dirichletova principu existuje aspoň jeden z bodů J_1, J_2, J_3, J_4, jimž prochází aspoň tři z devíti přímek.

Čímž je dané tvrzení dokázáno.

Příklad 21:[11], [8]

V rovině je dáno šest bodů, z nichž žádné tři neleží na téže přímce. Body jsou spojeny úsečkami červené nebo modré barvy. Dokažte, že existují tři z šesti daných bodů, které jsou vrcholy trojúhelníku, jehož strany jsou stejné barvy.

Řešení:[11], [8]



Obrázek 8: Obrázek k příkladu 21

Nechť A je jeden z šesti daných bodů (viz obr.). Podle zadání je každá z pěti úseček $AB_1, AB_2, AB_3, AB_4, AB_5$ zabarvena červeně nebo modře. Užitím Dirichletova principu snadno zjistíme, že existují alespoň tři z pěti uvedených úseček, které mají stejnou barvu. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že AB_1, AB_2, AB_3 jsou takové úsečky, a mají modrou barvu.

Mohou nastat pouze následující dvě možnosti:

1. Alespoň jedna z úseček B_1B_2, B_2B_3, B_3B_1 má modrou barvu. Pak existuje alespoň jeden trojúhelník, jehož všechny strany mají modrou barvu.
2. Všechny úsečky B_1B_2, B_2B_3, B_3B_1 červenou barvu. Pak $B_1B_2B_3$ je trojúhelník, jehož strany mají červenou barvu.

Tím je dané tvrzení dokázáno.

Příklad 22:[11]

Dokažte, že v každém konvexním mnohostěnu existují vždy alespoň dvě stěny, jejichž počet hran je stejný.

Řešení:[11]

Uvažujme stěnu mnohostěnu, která má největší počet hran. Předpokládejme, že tato stěna má k hran. S touto stěnou sousedí dalších k stěn. Mnohostěn má tedy alespoň $k+1$ stěn. Každá z těchto stěn má nejméně 3 a nejvýše k hran. Celkem tedy existuje $k-2$ možností pro počet hran stěny.

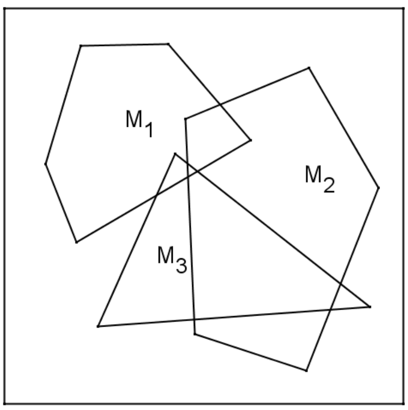
Jelikož je počet stěn konvexního mnohostěnu větší, než je počet těchto možností, z Dirichletova principu vyplývá, že v každém konvexním mnohostěnu existují aspoň dvě stěny, jejichž počet hran je stejný.

Tím je dané tvrzení dokázáno.

Příklad 23:[11]

Na čtverec o obsahu 6 položme tři mnohoúhelníky. Obsah každého z těchto mnohoúhelníků je roven 3. Dokažte, že lze vždy najít dva mnohoúhelníky, jejichž obsahy společných ploch jsou větší nebo rovny 1.

Řešení:[11]



Obrázek 9: Obrázek k příkladu 23

Nechť jsou M_1, M_2, M_3 jsou dané tři mnohoúhelníky a $|M_i|, i = \{1,2,3\}$ obsah rovinného útvaru M_i. Potom

$$\begin{aligned}&|M_1 \cup M_2 \cup M_3| = |M_1| + |M_2| + |M_3| - \\ &-(|M_1 \cap M_2| + |M_2 \cap M_3| + |M_1 \cap M_3|) + |M_1 \cap M_2 \cap M_3|\end{aligned} \qquad (1)$$

Jelikož $|M_1| = |M_2| = |M_3| = 3$ a $M_1 \cup M_2 \cup M_3$ leží ve čtverci o obsahu 6, z (1) tudíž vyplývá, že:

$$6 \geq 9 - (|M_1 \cap M_2| + |M_1 \cap M_3| + |M_2 \cap M_3|) + |M_1 \cap M_2 \cap M_3|,$$

nebo:

$$(|M_1 \cap M_2| + |M_1 \cap M_3| + |M_2 \cap M_3|) \geq 3 + |M_1 \cap M_2 \cap M_3|. \qquad (2)$$

Jelikož $|M_1 \cap M_2 \cap M_3| \geq 0$, z (2) tedy získáme

$$(|M_1 \cap M_2| + |M_1 \cap M_3| + |M_2 \cap M_3|) \geq 3. \qquad (3)$$

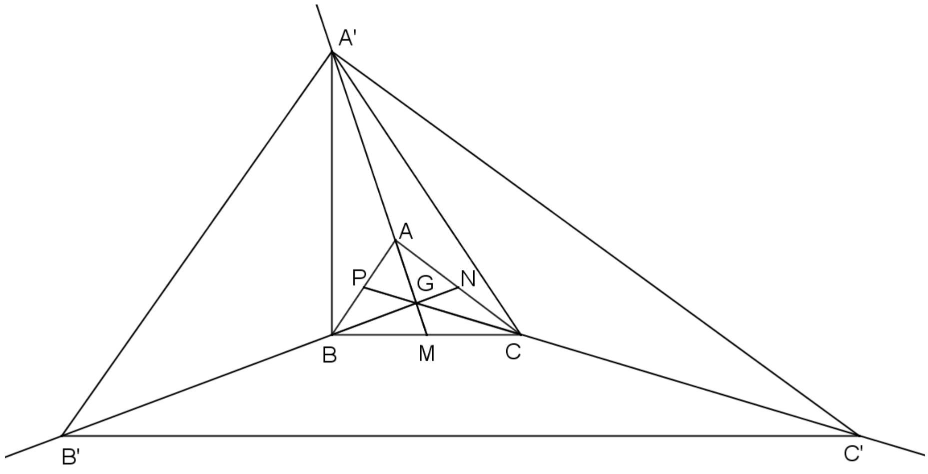
Z (3) a Drichletova principu vyplývá, že existuje alespoň jedno z čísel $|M_1 \cap M_2|, |M_1 \cap M_3|$ a $|M_2 \cap M_3|$, které je větší nebo rovno 1. Bez újmy obecnosti předpokládejme, že $|M_1 \cap M_2| \geq 1$, čímž je tvrzení dokázáno.

Příklad 24:[11]

Každý bod v rovině je zabarven červeně nebo modře. Dokažte, že existuje jeden trojúhelník, jehož tři vrcholy a těžiště mají stejnou barvu.

Řešení:[11]

Zvolme pět libovolných bodů v rovině tak, že žádný z nich neleží na téže přímce. Protože každý bod v rovině je zabarven červeně nebo modře, podle Dirichletova principu musí existovat aspoň tři z těchto bodů se stejnou barvou. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že jimi jsou body A, B, C, které mají červenou barvu. Pak ABC bude trojúhelník, jehož vrcholy budou červené. Nechť G je těžiště trojúhelníku ABC.



Obrázek 10: Obrázek k příkladu 24

Nyní mohou nastat následující možnosti:

1). Bod G je červený. Pak jsou body A, B, C, G červené, čímž je úloha vyřešena.

2). Bod G je modrý. Prodlužme GA, GB, GC tak, aby platilo $|AA'| = 3|GA|$, $|BB'| = 3|GB|$, $|CC'| = 3|GC|$.

Nechť jsou M, N, P popořadě středy úseček BC, CA, AB. Potom platí $|AA'| = 2|AM|$, $|BB'| = 2|BN|$ a $|CC'| = 2|CP|$. Z toho vyplývá, že A, B, C jsou popořadě těžiště trojúhelníků $A'BC$, $B'CA$, $C'AB$ a G je těžiště trojúhelníku ABC i $A'B'C'$. V tomto případě mohou nastat dva následující případy.

a). Body A', B', C' mají stejnou modrou barvu. Pak $A'B'C'$ bude trojúhelník, jehož vrcholy a těžiště G jsou stejné modré barvy.

b). Aspoň jeden z bodů A', B', C' je červený. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že A' je červený. Pak $A'BC$ bude trojúhelník, jehož vrcholy a těžiště A jsou stejné barvy červené.

V každém případě existuje vždy jeden trojúhelník, jehož vrcholy a těžiště jsou stejné barvy.

Tím je dané tvrzení dokázáno.

Příklad 25:[11]

Ve čtverci o obsahu 1 je umístěna neuzavřená lomená čára l. Délka této čáry je větší než 1000. Dokažte, že existuje přímka p, která je rovnoběžná se stranou daného čtverce a zároveň protíná lomenou čáru l nejméně v pěti stech bodech.

Řešení: [11]

Nechť l_i je délka i-té úsečky dané lomené čáry l, a_i, b_i jsou délky kolmého průmětu i-té úsečky lomené čáry l na strany daného čtverce. Potom získáme $l_i \le a_i + b_i$.

Z toho vyplývá, že

$$1000 = l_1 + l_2 + ... + l_n \le (a_1 + a_2 + ... + a_n) + (b_1 + b_2 + ... + b_n).$$

Tj. $a_1 + a_2 + ... + a_n \ge 500$ nebo $b_1 + b_2 + ... + b_n \ge 500$.

Je-li součet délek kolmých průmětů úseček čáry l na jednu stranu daného čtverce o délce 1 větší nebo roven pěti stu, pak podle Drichletova principu musí mít jeden bod, který je společný pěti stům průmětům úseček, což znamená, že přímka, která je rovnoběžná se stranou daného čtverce a zároveň prochází tím bodem, protíná čáry l nejméně v pěti stech bodech.

Tím je tvrzení dokázáno.

Závěr

Cílem mé práce bylo vypracování komplexní sbírky úloh řešených pomocí Dirichletova principu a ukázat jeho užití při řešení mnoha různorodých matematických úloh.

Výsledkem je 18 řešených úloh v oblasti důkazů nerovností, 25 řešených úloh z oblasti aritmetiky, 14 řešených úloh z oblasti algebry a 25 řešených úloh z oblasti kombinatorické geometrie, což činí dohromady 82 kompletně řešených úloh aplikací Dirichletova principu. Z tohoto počtu úloh, tvoří 38 z nich vlastní úlohy, nejčastěji vytvořené zobecněňováním některých z přejatých úloh.

Při řešení úloh z oblasti algebry, jsem hojně užívala i vlastního tvrzení, jenž vychází přímo z Dirichetova principu.

Dalo by se říci, že jsem dosáhla svých cílů a vytvořila tematickou sbírku řešených úloh pomocí Dirichletova principu pro nadšené zájemce o matematiku, ale také pomůcku k přípravě na olympiádu z matematiky.

Jak jsem již zmínila v abstraktu práce, jednotlivé úlohy jsem čerpala z velice rozmanitých a nedostupných zdrojů, které z větší části zahrnují i vietnamskou literaturu. Neboť se systém číslování knih v této zemi značně liší a v mnoha případech zcela chybí, nemohla jsem při jejich citování uvést kód ISBN.

Možnosti užití Dirichletova principu v mnohém překračují obsah mé práce, neboť je i široce užíván při řešení problémů na poli pravděpodobnosti, matematické analýzy či teorie grafu, jimiž se zatím, se znalostmi žáka septimy, nemohu zabývat. V tomto směru bych ráda svoji práci v blízké budoucnosti případně rozšířila.

6 Seznam obrázků

7 Seznam značek a symbolů

Označení, popř. značka	Význam
$a \in A$	prvek a patří do množiny A
$a_1, a_2, ..., a_n \in A$	prvky $a_1, a_2, ..., a_n$ patří do množiny A
$a \notin A$	prvek a nepatří do množiny A
$A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$	množina A, obsahující právě prvky $a_1, a_2, ..., a_n$
$\lvert A_i \rvert$	počet prvků množiny A_i
$\bigcup_{i=1}^{n} A_i, \; \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$	sjednocení množin A_i
$\bigcap_{i=1}^{n} A_i, \; \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$	průnik množin A_i
ϕ	prázdná množina
N	množina všech přirozených čísel
N^0	množina všech nezáporných celých čísel
R	množina všech reálných čísel
R^+	množina všech nezáporných reálných čísel
$\langle a, b \rangle$	uzavřený interval s krajními body a, b
(a, b)	otevřený interval s krajními body a, b
$\langle a, b)$	polootevřený interval s krajními body a, b
$\lfloor r \rfloor$	horní celá část čísla r. To je jediné celé číslo, splňující nerovnosti: $\lfloor r \rfloor \le r < \lfloor r \rfloor + 1$
$\langle r \rangle$	necelá část čísla r, kterou definujeme pomocí celé části jako rozdíl: $\langle r \rangle = r - \lfloor r \rfloor$
$a \mid b$	číslo b je dělitelný číslem a
$a \equiv b (\mathrm{mod}\, m)$	Říkáme, že a a b jsou kongruentní modulo m, což zapisujeme takto $a \equiv b (\mathrm{mod}\, m)$, jestliže dvě čísla a a b mají při dělení přirozeným číslem m týž zbytek r, kde $0 \le r < m$.
$nsd(a, b)$	největší společný dělitel dvou čísel a a b
$nsn(a, b)$	nejmenší společný násobek dvou čísel a a b
$\angle AVB$	úhel s vrcholem v bodě V
$\lvert \angle AVB \rvert$	velikost úhlu AVB
$\lvert AB \rvert$	velikost úsečky AB

8 Seznam literatury a zdrojů

[1] BARTO, Libor. *Nerovnosti*. Valdek, 2000. Dostupné z: mks.mff.cuni.cz/library/NerovnostiLB/NerovnostiLB.pdf

[2] BÙI, Lan Hương. *Ứng dụng nguyên lí Dirichlet vào chứng minh bất đẳng thức*. Thái Nguyên, 2014. Luận văn thạc sĩ khoa học toán học, chuyên nghành phương pháp toán sơ cấp. Đại học Thái Nguyên

[3] HERMAN, Jiří, Radan KUČERA a Jaromír ŠIMŠA. *Metody řešení matematických úloh II*. Brno: Vydavatelství Masarykovy univerzity, Brno, 2004. ISBN 80-210-3528-5.

[4] HUỲNH, Tấn Châu a Đình Thi NGUYỄN. Sử dụng nguyên lí Dirichlet trong chứng minh bất đẳng thức. *Tạp chí Toán học & Tuổi trẻ*. 2011, số 413.

[5] KUBESA, Michael. *Základy diskretní matematiky*. Ostrava, 2011. Dostupné z: http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/zaklady_diskretni_matematiky.pdf

[6] NGUYỄN, Hữu Điển. *Phương pháp DIRICHLET và ứng dụng*. Hà nội: NXB khoa học và kĩ thuật Hà nội, 1999.

[7] NGUYỄN, Văn Mậu, Nam Dũng TRẦN, Đình Hòa VŨ, Huy Ruận ĐẶNG a Hùng Thắng ĐẶNG. *Chuyên đề chọn lọc tổ hợp và toán rời rạc*. Hà nội: NXB Giáo dục, 2008.

[8] PHAN, Huy Khải. *Các bài toán hình học tổ hợp*. Hà nội: NXB Giáo dục, 2007.

[9] POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 9. vyd. Praha: Prometheus, 2008, 659 s. ISBN 9788071963561.

[10] ŠIMŠA, Jaromír. *Řešené příklady k předmětu M8502 vybrané partie školské matematiky 1* [online]. Brno, 2011 [cit. 2015-03-08]. Dostupné z: http://www.math.muni.cz/~xsasm/M8502.pdf. Akademická práce. Masarykova univerzita v Brně.

[11] TRỊNH, Việt Phương. *Nguyên lí Dirichlet và ứng dụng giải toán sơ cấp*. Thái Nguyên, 2009. Luận văn thạc sĩ khoa học toán học, chuyên nghành phương pháp toán sơ cấp. Đại học Thái Nguyên.

[12] VAŇHARA, Jan. *Dirichletův princip neboli princip holubníku, invarianty a obarvení*. Praha, 2011. Dostupné z: http://www.talnet.cz/documents/18/408e53bd-d27c-4e63-8b62-65ecc4a6e2b9

[13] VOLFOVÁ, Marta. *Úlohy využívající Drichletův princip*. 2010. Dostupné z: http://black-hole.cz/cental/wp-content/uploads/2010/04/%C3%9Alohy-vyu%C5%BE%C3%ADvaj%C3%ADc%C3%AD-Dirich-princip.pdf