STŘEDOŠKOLSKÁ ODBORNÁ ČINNOST

I 20 bez SETu

Magdaléna Tydrichová

Štětí 2013

STŘEDOŠKOLSKÁ ODBORNÁ ČINNOST

Obor č.1: Matematika a statistika

I 20 bez SETu

Autor: Magdaléna Tydrichová

Škola: Gymnázium Jana Palacha, Pod Vrchem 3421, 27601 Mělník

Konzultant: RNDr. Jakub Staněk

Štětí 2013

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou práci vypracovala samostatně, použila jsem pouze podklady (literaturu, SW atd.) uvedené v přiloženém seznamu a postup při zpracování a dalším nakládání s prací je v souladu se zákonem č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon) v platném znění.

V . . . . dne . . . .

Podpis: . . . .

Poděkování

V první řadě bych chtěla poděkovat panu RNDr. Jakubu Staňkovi za to, že byl mým konzultantem, který mne při tápání na matematickém rozcestí nasměroval na správnou cestu, díky čemuž jsem byla schopna práci dotáhnout do konce. Neméně bych chtěla poděkovat paní profesorce Daně Hilské za to, že mou práci průběžně četla, pomáhala mi zjemňovat mnohdy kostrbatá vyjádření a hlavně mi byla při tvorbě velkou morální podporou. Dále bych chtěla poděkovat Míše Pokové, která mě s hrou seznámila, a celé rodině Marušincových, díky kterým jsem vlastně práci začala psát, psala a dopsala. Velký dík patří i Honzovi Horešovskému, který mi pomohl vymyslet, jak práci nakonec zpřehlednit. V neposlední řadě bych ráda poděkovala paní profesorce Iloně Němcové, která je hlavním garantem SOČ na naší škole a bez níž bych tedy práci určitě nenapsala takto „organizovaně“. Děkuji také tvůrcům úžasného sázecího systému TEX, protože psaní práce v něm bylo radostí. A závěrem bych ráda poděkovala všem, kteří se mnou hru někdy hráli! Protože to je, vzhledem k tomu, že se jedná o hru, nejdůležitější!

ANOTACE

Cílem práce bylo charakterizovat karetní hru SETy z hlediska matematického, popsat a zobecnit její základní kombinatoriku a na základě toho se pokusit najít největší možnou skupinu karet, mezi nimiž není SET, a dokázat, že je opravdu největší možná. Základní myšlenka byla vystavěna na principech analytické geometrie, většina pozdější práce se však týká především kombinatorických a pravděpodobnostních problémů, okrajově třeba i teorie her a teorie množin.
Vedlejším cílem práce bylo aplikovat získané poznatky na reálnou hru, konkrétně stanovit optimální herní strategii a pokusit se vymyslet i jiné herní varianty.

Klíčová slova: kombinatorika, kolinearita bodů, teorie her, množiny, teorie pravděpodobnosti

ANNOTATION

The main point of the work was to characterize the card game SET from the mathematical point of view, describe and generalize its basic combinatorics and try to find the maximal possible set of cards without including a SET and prove that the founded set is really the largest one. The main idea was built on the principles of analytical geometry, however, the majority of later work concerns the combinatorics and probability problems, such as the game theory or set theory.

Besides, I´ve tried to apply all gained information on the real game, to be concrete I´ve tried to find out the optimal strategy as well as some other possible game variants.

Key words: combinatorics, collinearity of points, game theory, set theory, probability

Obsah

Úvod

Když jsem se s karetní hrou SETy setkala poprvé, nedá se říct, že by mne nějak zvlášť nadchla. Ano, hra se mi od počátků líbila pro svou geniální jednoduchost - pravidla pochopí každý během pěti minut, dá se hrát stále dokola, aniž by omrzela, každé rozdání je něčím jiné a zkrátka s hrou se dá strávit plno hodin zábavy. Ovšem kolem bylo plno jiných her a jak čas plynul, na SETy jsem téměř zapomněla.

Situace se změnila, když jsem si zhruba po roce zahrála hru se šestiletou Bárou Marušincovou (respektive když jsem přidávala na stůl nové a nové karty a Bára mezi nimi prakticky okamžitě nacházela nové a nové SETy). Během hry jsme se dostaly do situace, kdy jsme mezi kartami neviděly žádný SET, proto jsme postupně po třech přidávaly další karty, až bylo na stole 18 karet a Bára řekla: „Tady už musí být.“ Divila jsem se, jak na to přišla, a tak jsem vlastně poprvé slyšela větu, že *největší skupina karet, mezi nimiž nemusí být SET, je šestnáctičlenná.* A najednou bylo okamžitě jasné, že se touto hrou musím začít zabývat.

Mým hlavním cílem bylo od počátků dokázat, případně vyvrátit tvrzení, že šestnáctičlenná skupina je maximální možná skupina karet bez SETu. Což se mi povedlo jednoduše, když jsem úplnou náhodou nalezla skupinu 18 karet, mezi kterými nebyl SET. V tu chvíli mi ale již nestačilo vědět, že existuje vícečlenná skupina karet bez SETu, chtěla jsem totiž zjistit, kolik karet může mít skupina bez SETu maximálně.

Nejprve jsem si uvědomila, že každou z karet si lze představit jako bod o čtyřech souřadnicích, jejichž hodnoty jsou 1, 2 nebo 3, a že tyto body tvoří v prostoru čtyřrozměrnou krychli. Můj problém byl tedy ekvivalentní otázce, kolik bodů lze umístit do této krychle tak, aby byly po třech nekolineární. Nabízelo se více způsobů, jak problém řešit, já jsem se rozhodla ho řešit kombinatoricky. Abych však nemusela prověřovat všechny konkrétní situace, které mohou nastat (což by nebylo v lidských silách), vymezila jsem pouze typy situací, pro něž jsem postupně dokázala, zda mezi nimi může nebo nemůže být SET. Problém jsem řešila postupně od jednorozměrného až ke čtyřrozměrnému prostoru, což se ukázalo jako vhodné - každý $(n+1)$-dimenzionální prostor jsem pak mohla chápat jako sjednocení několika jeho nadrovin, v nichž bylo možné aplikovat již dokázané poznatky z n-dimenzionálního prostoru.

Při zápisu důkazu jsem se snažila čtenáři co nejvíc přiblížit a zpřehlednit mé myšlenky, aby se práce nestala nečitelnou. Proto jsem používala tabulky, barevné rozlišování nebo třeba pro lepší představivost a usnadnění orientace ve struktuře důkazu příklady konkrétních situací, které nalezneme v přílohách. Přestože zpřehlednění práce nebylo vzhledem k jejímu rozsahu a vzhledem k mnohačetnému větvení situací vůbec jednoduché, věřím, že se mi to povedlo alespoň do té míry, aby se pozorný a trpělivý čtenář v problému neztratil a byl schopen mu porozumět.

Práce je členěna do několika kapitol. V úplně první kapitole nalezeme jakýsi stručný přehled matematických pojmů, které v práci používám. Znalost těchto pojmů je nezbytná k porozumění.

Druhá kapitola přibližuje čtenáři historii a pravidla hry, která je nutné si pro pochopení práce osvojit.

Ve třetí kapitole jsem pak samostatně řešila základní matematické problémy, pomocí nichž lze hru charakterizovat. Definovala jsem základní pojmy nezbytné pro pozdější důkaz, seznámila se se základní kombinatorikou hry a připravila si tak půdu pro pozdější („hlavní“) důkaz.

Čtvrtá kapitola je věnována samotnému důkazu, kvůli němuž práce původně vlastně vznikla. Jedná se o nejrozsáhlejší kapitolu, během níž je postupně zjištěn nejen největší počet karet bez SETu obecně, ale i největší počet karet bez SETu pro konkrétní typy situací, které mohou nastat. Obecně se jedná o důkaz sporem, který je ale pro každý typ situace specifický, neboť pro každý typ situace bylo vhodné použít trochu jiný postup.

V páté kapitole je čtenáři vysvětlena strategie hry. Jedná se o část práce s asi největším praktickým využitím. Kromě vysvětlení optimálního způsobu hry[1] je zde i výčet možností, k čemu všemu lze tento postup při hře využít, a to i s návodem, jak.

[1]Který bych ovšem vzhledem k charakteru hry nenazývala vyhrávající strategií.

V poslední šesté kapitole jsem se pokusila zobecnit základní kombinatoriku hry, popsat a porovnat mnou vymyšlené herní varianty a na závěr provést diskuzi o hratelnosti ostatních možných variant.

I když hlavní myšlenka důkazu byla vlastně založena na analytické geometrii, práce se týká hlavně kombinatoriky a pravděpodobnosti. Najdeme zde i drobné přesahy do jiných matematických disciplín, např. do teorie množin či teorie her. Zároveň se ale jedná o středoškolskou odbornou činnost, tedy o práci psanou na základě středoškolských znalostí. K jejímu pochopení rozhodně není třeba žádných vysokoškolských matematických znalostí.

Kapitola 1

Základní matematické pojmy použité v práci

V této kapitole bych ráda čtenáři přiblížila matematické pojmy, které v práci používám a jejichž znalost je předpokladem pro snazší porozumění mé práci. Nejedná se však o souvislý výklad, spíš o jakýsi „slovníček", který má usnadnit orientaci v textu. Proto také není nutné tuto kapitolu číst v celku, doporučuji spíš se k ní v případě potřeby vracet v průběhu četby zbytku práce. Zároveň je od čtenáře očekávána (alespoň základní) znalost středoškolské matematiky. Kromě formálních matematických pojmů si dovoluji definovat i pár vlastních pojmů, které v práci budu využívat velice často pro popis nejrůznějších problémů.

1.1 Kombinatorika, pravděpodobnost

Protože většina práce je založena na kombinatorice a teorii pravděpodobnosti, je potřeba znát alespoň základní pojmy z této oblasti matematiky:

Kombinatorika je úplně jednoduše řečeno obor matematiky, který se zabývá uspořádáním daným prvků ve skupinách (které vznikají dle určitých pravidel).

Obecně vzato říkáme všem prvkům dohromady, z nichž lze vybrat skupinu, *soubor*. V případě, že jsou všechny prvky navzájem různé, se jedná o ***základní množinu***[1]. V případě mé práce se opravdu jedná o množinu, protože pracuji se souborem prvků (karet), které jsou všechny vzájemně rozlišitelné

[1] To proto, že prvky v množině se nemohou opakovat, na rozdíl od souboru, ve kterém se prvky opakovat můžou.

(tj. žádné dvě nejsou stejné).

Jak jsem již řekla, vybereme-li z *n-prvkového souboru* k prvků, kde k je přirozené, dostaneme ***skupinu k-té třídy***. V rámci *skupiny* může, ale nemusí záležet na uspořádání prvků:

Pokud záleží na uspořádání prvků v rámci *skupiny*, říkáme, že se jedná o tzv. ***variaci k-té třídy***.

Variace může být buď ***s opakováním*** nebo ***bez opakování***.

Jedná-li se o ***variaci k-té třídy s opakováním***, znamená to, že jsme z n prvků *souboru* vybrali $k \leq n$ prvků, které se mohou opakovat (tzn. nemusí být všechny vzájemně různé). Takový výběr lze provést n^k způsoby:

$$V(n,k) = n^k$$

Jedná-li se o ***variaci k-té třídy bez opakování***, znamená to, že jsme opět z n prvků *souboru* vybrali $k \leq n$ prvků, které se ovšem nemohou opakovat (tzn. mezi vybranými prvky neexistuje žádná dvojice takových prvků, které by byly shodné). Takový výběr lze provést $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot (n-k+2) \cdot (n-k+1)$ způsoby:

$$v(n,k) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot (n-k+2) \cdot (n-k+1)$$

Pokud na uspořádání prvků v rámci *skupiny* nezáleží, jedná se o tzv. ***kombinaci k-té třídy***. I zde rozlišujeme ***kombinaci s opakováním*** a ***kombinaci bez opakování***.

Pokud se jedná o ***kombinaci s opakováním***, znamená to, že se ve *skupině* vyskytují prvky, které nejsou všechny vzájemně různé. Takový výběr lze provést následujícím počtem způsobů:

$$K(k,n) = \binom{n+k-1}{k}$$

Jedná-li se o ***kombinaci bez opakování***, znamená to, že každý z prvků se ve *skupině* nachází nejvýše jednou. Výběr takové skupiny lze provést následujícím počtem způsobů:

$$k(k,n) = \binom{n}{k}$$

Nyní si ještě uvedeme pár základních kombinatorických pravidel a vět:

Kombinatorické pravidlo součtu: Jsou-li A_1, A_2, ..., A_n konečné množiny, které mají po řadě p_1, p_2, ..., p_n prvků, a jsou-li každé dvě disjunktní, pak počet prvků množiny $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ je roven $p_1 + p_2 + \ldots + p_n$.

Kombinatorické pravidlo součinu: Počet všech uspořádaných k-tic, jejichž první člen lze vybrat n_1 způsoby, druhý člen po výběru prvního členu n_2 způsoby atd. až k-tý člen po výběru všech předcházejících členů n_k způsoby, je roven $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$.

Dirichletův princip, možná známější jako *přihrádkový princip*, říká:
Nechť k, n jsou přirozená čísla, $k > n$. Při jakémkoliv rozdělení k předmětů do n přihrádek existuje přihrádka, v níž budou alespoň dva předměty.

Mohla bych zde samozřejmě uvést další pojmy z oblasti kombinatoriky, vzhledem k obsahu práce to ale není nutné. Z teorie pravděpodobnosti čtenáři pro účely pochopení práce stačí znát prakticky jen definici ***pravděpodobnosti***:

Náhodný pokus je pokus, jehož výsledek není jednoznačně určen počátečními podmínkami. ***Náhodný jev*** je možným výsledkem *náhodného pokusu* - po provedení pokusu lze vždy určit, zda daný *náhodný jev* nastal (v takovém případě mluvíme o příznivém jevu), nebo nenastal. Nyní jim můžeme přistoupit k samotné (klasické) definici pravděpodobnosti:

Nechť náhodný pokus splňuje předpoklady:

1. Všech možných výsledků je konečný počet.
2. Všechny výsledky jsou stejně možné.
3. Všechny výsledky se vzájemně vylučují.

Pravděpodobností jevu A pak nazveme číslo $P(A) = \frac{m}{n}$, kde n je počet všech možných výsledků náhodného pokusu a m je počet příznivých jevů A.

Pravděpodobnost jevu je tedy reálné číslo od 0 do 1. Pokud $P(A) = 0$, mluvíme o tzv. *jevu nemožném*, pokud $P(A) = 1$, jedná se o *jev jistý*. Obecně *pravděpodobnost jevu* vyjadřuje míru očekávatelnosti výskytu jevu.

1.2 Ostatní matematické pojmy

Kromě pravděpodobnosti a kombinatoriky se práce dotýká teorie množin, teorie her a popř. i analytické geometrie nebo statistiky. Z těchto oblastí bude třeba znát následující pojmy:

Z teorie množin je v práci použit pojem ***kardinální číslo***, a to v souvislosti s konečnými množinami.

Kardinalita neboli *mohutnost* konečné množiny je přirozené číslo rovné počtu prvků množiny. *Kardinalita* množiny M se zapisuje jako | M |.

Průnik množin A a B $A \cap B$ je množina všech prvků, které jsou obsaženy v množině A a současně i v množině B. Pokud je průnikem množin prázdná množina (tj. nemají společný prvek), říkáme, že množiny jsou ***disjunktní***.

Všechny tyto pojmy jsou v práci používány poměrně často. Samozřejmě jsou zde občas použity i jiné (zde neuvedené) pojmy, které jsou ale (pokud je třeba) vysvětleny až v průběhu práce samotné.

1.3 Vlastní pojmy používané v práci

Pro snazší popis karet a lepší práci s nimi jsem zavedla své vlastní pojmy, které je potřeba znát pro dobrou orientaci v práci.

Každou kartu A si představuji jako bod A umístěný v čtyřrozměrném prostoru, konkrétně v prostoru $U \times U \times U \times U = U^4$, kde $U = \{1, 2, 3\}$. Karty - tedy všechny body A_{1-81} tvoří vlastně čtyřrozměrnou krychli.

Každý bod má čtyři obecné souřadnice, které v práci nazývám ***vlastnostmi***. Konkrétní hodnoty každé souřadnice (tj. 1,2 nebo 3) pak nazývám jednoduše ***hodnotami***.

Ve velké části práce se setkáme s pojmem ***poměr***. *Poměrem* rozumím jednoduše „neuspořádaný poměr“ hodnot určité vlastnosti v dané skupině karet. Mám-li například skupinu čtyř karet, kde se pro jednu vlastnost vyskytuje např. u jedné karty hodnota 1, u jedné karty hodnota 2 a u dvou karet hodnota 3, pak poměr hodnot této vlastnosti v dané čtveřici (= ***poměr***) je

1:1:2.[2]

Pokud se v práci vyskytují nějaké další matematické pojmy, jsou obvykle vysvětleny přímo ta, kde je tomu třeba.

[2]Pro lepší přehlednost je možné vždy pro každý zmiňovaný poměr nalézt v přílohách příklad konkrétní skupiny karet, která tento poměr splňuje.

Kapitola 2

Seznámení s hrou

2.1 Historie hry

Jedná se o poměrně mladou karetní hru. Její autorkou je Marsha J. Falco, genetička, která hru vymyslela v roce 1974 v rámci svého výzkumu při Univerzitě v Cambridge. Zabývala se totiž otázkou dědičnosti genu epilepsie u německého ovčáka. Pro každého zkoumaného psa si zavedla zvláštní složku, do níž si zapisovala genetické informace zvířete. Všimla si, že získané informace lze rozdělit na několik základních typů, které se objevují u všech zvířat, pokaždé ale v jiné kombinaci. Aby proto nemusela vše vypisovat, nakreslila si symboly představující vždy jeden typ informací. Symbolům pak vymyslela vlastnosti, pomocí kterých popisovala a rozlišovala různé kombinace. Když tento systém kombinací vysvětlovala veterináři, se kterým spolupracovala, napadlo ji, že je to vlastně zábavné, a hra SET byla na světě.[1]

Několik let ji Marsha Falco hrála pouze se svou rodinou a přáteli, postupně ji vylepšovala, až nakonec v roce 1990 založila firmu SET Enterprises a hru vydala. [2]

V Americe se hra okamžitě stala velice populární. To dokazuje i fakt, že za 23 let své oficiální existence obdržela 35 nejrůznějších ocenění[3], mimo

[1] cit[1]
[2] cit[1]
[3] cit[1]

jiné i velice prestižní cenu Mensa Select, kterou členové Mensy USA udělují každý rok pěti nejlepším hrám.[4]

V České republice je hra sice poměrně neznámá, ovšem mezi svými příznivci opravdu populární a vysoce návyková. Jak se říká, v jednoduchosti je kouzlo, a SETY vážně nadchnou prakticky každého, kdo se jim připlete do cesty. Protože karty je těžké sehnat, většina hráčů si je vyrábí sama, a tak je možné se setkat s jejich různými variantami. Hra je většinou známá pod názvem Triády nebo Množiny, existují také různé herní varianty, o kterých se ještě zmíním později.

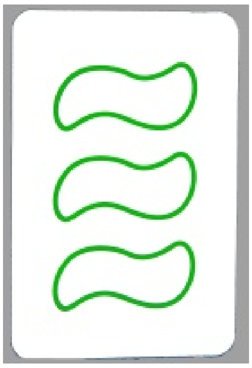
2.2 Pravidla hry

Hra obsahuje 81 karet. Každá karta má 4 vlastnosti, každá z těchto vlastností může nabývat tří různých hodnot. Konkrétně:

- vlastnost TVAR – symbolem na kartě může být buď OVÁLEK, VLNKA nebo KOSOČTVEREC
- vlastnost POČET – na kartě nalezneme JEDEN, DVA nebo TŘI symboly daného tvaru
- vlastnost BARVA – symboly na kartě mohou být ČERVENÉ, ZELENÉ nebo MODRÉ
- vlastnost VÝPLŇ – symboly mohou být PLNÉ (zcela vybarvené), ŠRAFOVANÉ nebo PRÁZDNÉ (barva a tvar jsou určeny pouze pomocí obrysové linie.

Pro lepší představu a pochopení se podívejme na následující obrázek:

[4] cit[1]



Obrázek 2.1: Vlastnosti karty

Pro vlastnost TVAR nabývá tato karta hodnoty VLNKA.
Pro vlastnost POČET nabývá tato karta hodnoty TŘI.
Pro vlastnost BARVA nabývá tato karta hodnoty ZELENÁ.
Pro vlastnost VÝPLŇ nabývá tato karta hodnoty PRÁZDNÁ.

Odsud je vidět, proč je karet 81. U každé z vlastností máme na výběr ze tří hodnot. Vlastnosti jsou 4, proto všech možných *kombinací*

$$3^4 = 81$$

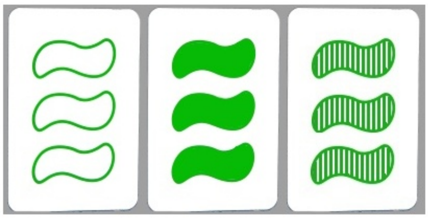
Každá karta je tedy unikátní (tj. něčím se liší od každé z ostatních). Setem rozumíme takovou množinu tří karet A, B, C, kdy pro každou jejich vlastnost v, respektive pro hodnoty těchto vlastností pro dané karty *v(A,B,C)*, platí právě jedna z následujících podmínek:

$$v(A) = v(B) \quad \Rightarrow \quad v(B) = v(C). \tag{2.1}$$

$$v(A) \neq v(B) \quad \Leftrightarrow \quad [v(C) \neq v(A) \wedge v(C) \neq v(B)] \tag{2.2}$$

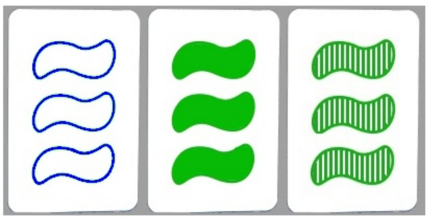
Jinými slovy pro každou vlastnost platí, že její hodnota je pro všechny 3 karty shodná (např. na všech třech kartách jsou VLNKY), nebo pro všechny 3 karty různá (např. na jedné z karet je JEDNA, na druhé DVĚ a na třetí TŘI vlnky).

Pro lepší porozumění opět přikládám obrázky:



Obrázek 2.2: Příklad SETu

Pro vlastnosti TVAR, POČET a BARVA platí, že pro všechny 3 karty nabývají stejných hodnot (VLNKA, TŘI, ZELENÁ). Pro vlastnosti VÝPLŇ platí, že pro každou ze tří karet nabývá jiné hodnoty. Každá z vlastností tedy splňuje právě jednu z podmínek (2.1), (2.2), proto se jedná o SET.



Obrázek 2.3: Příklad trojice, která není SETem

V tomto případě je pro vlastnost TVAR a POČET splněna podmínka (2.1). Pro vlastnost VÝPLŇ je splněna podmínka (2.2). Pro vlastnost barva ovšem není splněna ani jedna z podmínek (neplatí, že by všechny karty měly stejnou barvu, nebo každá z karet byla jinak barevná). Proto se v tomto případě nejedná o SET.

Podle oficiálních pravidel je hra určena dvěma až osmi hráčům ve věku od deseti let.[5] Ve skutečnosti je ale počet hráčů omezen jen tím, kolik lidí vidí na stůl, a hra není nijak věkově omezená. Karty se postupně vykládají na stůl (podle oficiálních pravidel je na stole na počátku každého tahu vždy 12 karet, podle „našich“ pravidel 9 – tím se moje práce bude lišit i od toho, co jsem našla – v kapitole Herní varianty to budu porovnávat) a cílem každého z hráčů je najít mezi nimi SET. Všichni hráči hledají najednou, kdo požadovanou kombinaci karet vidí jako první, řekne „SET“. V tu chvíli tah končí a hráč, který SET objevil, si ho vezme. V případě, že se spletl a jím vybrané karty netvoří SET, karty zůstávají ve hře a daný hráč nesmí hrát až do chvíle, kdy někdo jiný objeví správnou kombinaci.

Časová náročnost hry je asi 20 až 30 minut a hra končí, pokud ze zbývajících karet již nelze utvořit žádný SET. Vyhrává samozřejmě ten, kdo získal nejvíc SETů.

[5] $http://fr.wikipedia.org/wiki/Set!$

Kapitola 3

Hra Sety a základní matematické problémy

Hra SETy skrývá mnohem víc matematických otázek, než by se na první pohled zdálo. V této kapitole bude mým cílem pokusit se některé z nich objasnit a odpovědět si tak na otázky, které jsem si položila v úvodu. Nejsložitějšímu a nejzajímavějšímu z problémů, kvůli kterému práce vlastně vznikla, pak věnuji samostatnou (následující) kapitolu.

V minulé kapitole jsme si definovali pojem SET. Pro přehlednost si tuto definici připomeňme:

Definice 1 *SETem rozumíme takovou množinu tří karet A, B, C, kdy pro každou jejich vlastnost v, respektive pro hodnoty těchto vlastností pro dané karty v(A,B,C), platí právě jedna z následujících podmínek:*

$$v(A) = v(B) \quad \Rightarrow \quad v(B) = v(C). \tag{3.1}$$

$$v(A) \neq v(B) \quad \Leftrightarrow \quad [v(C) \neq v(A) \wedge v(C) \neq v(B)] \tag{3.2}$$

Pro větší přehlednost řešení matematických problémů bude lepší, pokud hodnoty každé vlastnosti popíšeme čísly od jedné do tří.[1] Každou kartu bude možno jednoznačně určit jako bod o 4 souřadnicích:

$$A = [a_1, a_2, a_3, a_4]; a_{1-4} \in \{1, 2, 3\}$$

Pak můžeme vyslovit následují větu:

Věta 1 *Pro každou trojici karet platí, že karty tvoří SET, platí-li, že součet hodnot každé z vlastností je dělitelný třemi.*

[1] např. pro vlastnost tvar - ovál = 1, kosočtverec = 2, vlnka = 3; atd.

Důkaz 1 *Budeme dokazovat negaci věty: Součet hodnot každé z vlastností je dělitelný třemi a zároveň karty netvoří SET.*

$\forall a_i, b_i, c_i \ i \in \{1,2,3,4\} \ a_i, b_i, c_i \in \{1,2,3\}; [3|(a_i + b_i + c_i) \wedge (a_i = b_i \wedge a_i \neq c_i)] \Leftrightarrow [(a_i + b_i + c_i = 3 \vee a_i + b_i + c_i = 6 \vee a_i + b_i + c_i = 9) \wedge (a_i = b_i \wedge a_i \neq c_i) \Leftrightarrow [(a_i = b_i = c_i = 1 \vee a_i = b_i = c_i = 2 \vee \{a_i, b_i, c_i\} = \{1,2,3\} \vee a_i = b_i = c_i = 3) \wedge (a_i = b_i \wedge a_i \neq c_i)] \Leftrightarrow [(a_i = b_i = c_i \vee a_i \neq b_i \neq c_i) \wedge (a_i = b_i \wedge a_i \neq c_i)]$

Což je ovšem spor, proto negace věty neplatí a platí tudíž věta původní.[2]

3.1 Počet všech SETů

Na základě definice můžeme vyslovit následující tvrzení:

Ke každé dvojici karet A,B existuje právě jedna karta C tak, aby daná trojice tvořila SET.

$$\forall A,\ B \in U \ \exists!\ C \in U; \forall i \in \{1,2,3,4\}; a_i = b_i = c_i \vee a_i \neq b_i \neq c_i$$

Odůvodnění je prosté. Pro každou i-tou vlastnost karet A a B můžeme určit, zda se její hodnoty rovnají nebo liší:

$$\forall i \in \{1,2,3,4\}; a_i = b_i \vee a_i \neq b_i$$

Z definice určíme kartu C - pro každou z jejích vlastností musí být splněna právě jedna z podmínek (3.1), (3.2):

$$a_i = b_i \Rightarrow b_i = c_i$$

$$a_i \neq b_i \Rightarrow b_i \neq c_i \neq a_i \Rightarrow \{a_i, b_i, c_i\} = \{1,2,3\}$$

Jednoduše řečeno, znám-li hodnoty vlastností dvou karet, dokážu z nich podle těchto podmínek určit hodnoty vlastností třetí karty. Jak je vidět, vždy existuje pouze jediná možnost.

SET je tedy jednoznačně určen dvěma kartami. Abychom zjistili, kolik je všech možných SETů P_S, stačí určit, kolik je všech různých dvojic karet. SETy jsou trojice karet, tedy vlastně množiny, proto nezáleží na pořadí prvků - stačí určit, kolik je všech možných kombinací dvou karet. Je ale důležité si uvědomit, že pokud máme SET tvořený kartami A, B, C, existují i v rámci něj 3 kombinace dvou karet ($A + B; A + C; B + C$). To by způsobilo, že bychom

[2] V dalším textu budu na tuto větu odkazovat jako na "větu o dělitelnosti."

každý SET započítali třikrát. Proto je nutné celkový počet všech kombinací dvou karet vydělit ještě třemi:

$$\binom{81}{2} = \frac{81!}{2!(81-2)!} = 3240$$

$$P_S = 3240 \div 3 = 1080$$

Zjistili jsme tedy, že existuje 1080 různých SETů.

Problém lze řešit i jiných způsobem, a to pomocí kombinatorického pravidla součtu: Počet všech SETů je možné zjistit i součtem jednotlivých typů SETů. SETy můžeme rozdělit podle toho, pro kolik vlastností mají shodné hodnoty:

- hodnoty karet se neshodují v žádné vlastnosti
- hodnoty karet se shodují v jedné vlastnosti
- hodnoty karet se shodují ve dvou vlastnostech
- hodnoty karet se shodují ve třech vlastnostech

Definice 2 *Mějme n navzájem disjunktních množin $A_1, A_2, ...A_n$. Pro jejich kardinální čísla $|A_1|, ...|A_n|$ platí, že*

$$|A_1| + |A_2| + ... + |A_n| = |A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n|$$

Výše uvedené skupiny jsou vlastně množiny SETů, jejichž hodnoty se shodují v daném počtu vlastností. Označme je (podle počtu hodnot, v nichž se shodují) jako A_0, A_1, A_2 a A_3.

Počet SETů A_0, které se liší ve všech vlastnostech

Nejprve vybereme jednu kartu, jejíž vlastnosti jsou dány. Máme 81 možností, jak to udělat. Potom stačí vybrat druhou kartu. Protože ale musí být ve všech vlastnostech odlišná od karty první, může každá z jejích vlastností nabývat pouze dvou hodnot, nikoliv tří (ta třetí byla již použita u první karty). Proto máme 2^4 možností.

Celkem existuje $81 \cdot 16$ uspořádaných dvojic, které určují stejný počet uspořádaných trojic tvořících SETy. Nám ale při hře nejde o uspořádání. Každá trojice lze uspořádat $3 \cdot 2$ způsoby, proto je nutné výsledek vydělit 6.

Celkem tedy existuje $\frac{81 \cdot 16}{6} = 216$ SETů, které se liší ve všech čtyřech vlastnostech

Počet všech SETů A_1, které se liší ve třech vlastnostech

To znamená, že jedna vlastnost, resp. hodnota jedné vlastnosti, je dána - je shodná pro všechny karty. Protože vlastnosti jsou 4 a každá z nich nabývá třech různých hodnot, mám $4 \cdot 3 = 12$ možností jaká tato daná hodnota může být.

Stačí vybrat kartu, která pro danou vlastnost nabývá požadované hodnoty. Protože pro zbylé tři vlastnosti může nabývat jakékoliv hodnoty, mám $3^3 = 27$ možností, jak kartu vybrat. Druhou kartu, která bude určovat SET, lze vybrat už jen $2^3 = 8$ způsoby, protože tato karta se již v hodnotách jednotlivých vlastností musí lišit od karty první. Výsledek je pak nutné, stejně jako v předcházejícím případě, vydělit 6, protože hledáme neuspořádané trojice.

Celkem existuje $\frac{12 \cdot 27 \cdot 8}{6} = 432$ SETů, které se liší ve třech vlastnostech.

Počet všech SETů A_2, které se liší ve dvou vlastnostech

Tentokrát jsou dány dvě hodnoty, každá z nich u jiné vlastnosti. Dvě vlastnosti můžeme vybrat $\binom{4}{2} = 6$ způsoby, každá z nich může nabývat 3 hodnot, proto existuje $6 \cdot 3^2$ způsobů, jak dvě hodnoty zadat.

První kartu lze pak vybrat 3^2 způsoby - pro zbylé dvě vlastnosti může nabývat všech třech hodnot. Druhá karta už lze vybrat jen 2^2 způsoby.

Celkem existuje $\frac{6 \cdot 3^4 \cdot 2^2}{6} = 324$ SETů, které se liší ve dvou vlastnostech.

Počet všech SETů A_3, které se liší v jedné vlastnosti

Konečně jsme se dostali až k SETům, které se liší v jedné vlastnosti, což znamená, že ve třech vlastnostech se shodují. Tři vlastnosti můžeme vybrat $\binom{4}{3} = 4$ způsoby, každá z nich může nabývat 3 různých hodnot, proto existuje $4 \cdot 3^3 = 108$ způsobů, jak tři hodnoty třech různých vlastností zadat.

První kartu pak lze vybrat 3 a druhou 2 způsoby, proto existuje celkem

$\frac{4 \cdot 3^3 \cdot 3 \cdot 2}{6} = 108$ SETů, které se liší v jedné vlastnosti.

Vrátíme-li se tedy ke kombinatorickému pravidlu součtu, vidíme, že

$$|A_0| + |A_1| + |A_2| + |A_3| = 216 + 432 + 324 + 108 = 1080$$

Dospěli jsme opět ke stejnému výsledku - počet všech možných SETů je 1080.[3]

3.2 Počet SETů mezi vyloženými kartami

Jak jsem již zmínila v úvodu, práce vznikla s cílem odpovědět si na otázku, jaká je největší skupina karet, mezi nimiž není SET. Tento problém řeším v následující kapitole, ovšem na počty SETů mezi vyloženými kartami lze vymyslet plno jiných (snazších)[4] otázek, které se teď pokusím zodpovědět:

3.2.1 Pravděpodobnost, že vyložím 3 karty jako SET

Tento problém lze řešit úplně jednoduše. Víme, že SET je jednoznačně určen dvěma kartami. Mezi zbylými 79 kartami existuje právě jedna, se kterou může dvojice vytvořit SET. Proto pravděpodobnost, že náhodně vyložím 3 karty, které budou tvořit SET, je

$$P = \frac{1}{79} \approx 0,01266$$

Úlohu lze opět řešit i jinak. Víme, že počet všech SETů je 1080. Počet všech různých trojic (tj. ne nutně SETů) je

$$\binom{81}{3} = \frac{81!}{3!(81-3)!} = 85320$$

[3]Je evidentní, že tento způsob řešení je zdlouhavější, nicméně budeme ho dále potřebovat v kapitole o strategii hry.

[4]Nepopírám, že i těžších.

Pravděpodobnost, že mnou náhodně vybraná trojice je SET, je proto

$$P = \frac{1080}{85320} = \frac{1}{79}$$

3.2.2 Průměrný počet SETů mezi n kartami

Již víme, že mezi třemi kartami se s pravděpodobností $\frac{1}{79}$ vyskytuje SET. Jak tomu ale bude s přibývajícím počtem karet?

Máme-li n karet, kde $n \geq 3$, pak průměrný počet SETů mezi nimi je

$$p_s = \frac{\binom{n}{3}}{79}$$

Stačí si uvědomit, že mezi n kartami, kde $n \geq 3$, existuje $\binom{n}{3}$ kombinací tří karet. U každé z nich je pravděpodobnost $\frac{1}{79}$, že se jedná o SET. Proto pro $n \geq 3$ opravdu platí daný předpis.

Pro zajímavost si nyní můžeme spočítat, že hrajeme-li s 12 kartami podle oficiálních pravidel, vyskytuje se mezi nimi průměrně $\frac{\binom{12}{3}}{79} \approx 2,78$ SETů, což je ve většině případů víc, než si myslíme. Zde je ale důležité si uvědomit, že SETy nejsou nutně vzájemně disjunktní.

Kapitola 4

Maximální počet karet, mezi nimiž není SET

Rozhodla jsem se problém postupně řešit pro skupiny karet, které mají 3, 2, 1 a konečně žádnou společnou vlastnost.

U každé takové skupiny jsem se pokusila najít maximální počet karet, mezi nimiž není SET, a minimální počet karet, mezi nimiž už naopak musí být SET.

4.1 Karty se shodují právě ve 3 vlastnostech

To znamená, že karty se liší právě v jedné vlastnosti[1], která může nabývat třech různých hodnot. Je zřejmé, že skupinu obsahující SET musí tvořit alespoň 3 karty.

Věta 2 $\forall$ *trojici karet, které mají právě pro 3 vlastnosti shodnou hodnotu, platí, že tvoří SET.*

Důkaz 2 *Budeme dokazovat negaci věty:*

$\exists$ *trojice karet, které mají právě pro 3 vlastnosti shodnou hodnotu a zároveň netvoří SET.*

$\Rightarrow$ *zbylá vlastnost nemůže pro všechny karty nabývat stejné ani různé hodnoty*

[1] Příloha č.1

⇒ zbylá vlastnost musí nabývat shodné hodnoty pro právě dvě karty, což je ovšem spor, protože v tom případě by byly karty shodné ve všech čtyřech vlastnostech, tudíž by byly identické (navíc to odporuje podmínce, že karty mají být shodné právě ve třech vlastnostech)

Negace neplatí, platí proto věta původní.

Z této skutečnosti vyplývá další věta, která se dále bude hodit:

Věta 3 *Pokud se mezi n kartami vyskytují alespoň 3 karty, které se shodují v právě 3 vlastnostech, pak tato n-tice obsahuje SET.*

4.2 Karty se shodují právě ve 2 vlastnostech

To znamená, že karty se liší právě ve dvou vlastnostech, z nichž každá může nabývat 3 různých hodnot.[2]

Věta 4 *∀ pětici karet, jejichž hodnoty se shodují právě ve 2 vlastnostech, platí, že mezi nimi musí být SET.*

Důkaz 3 *Opět budeme dokazovat negaci této věty:*

∃ pětice karet, jejichž hodnoty se shodují právě ve 2 vlastnostech a zároveň mezi nimi není SET.

Každá z vlastností může nabývat 3 hodnoty, které podle věty o dělitelnosti (kterou tudíž budeme moci i používat, bude-li třeba) jako 1, 2 *a* C. *Ve dvou vlastnostech se karty shodují, proto se jimi nemusíme zabývat (pro názornost jsou ale v tabulce také uvedeny). Stačí zajistit, aby pro alespoň jednu ze zbylých dvou vlastností platilo, že jejich hodnoty nejsou pro žádné tři karty různé ani shodné.*

V prvním kroku rozhodneme o hodnotách třetí vlastnosti. Z dřívějška víme,

[2] Příloha č.2

že pokud mezi kartami existují alespoň 3 karty, které se shodují ve třech vlastnostech, pak tato skupina obsahuje SET. Proto vlastnosti 3[3] *musíme přiřadit hodnoty tak, aby se mezi nimi každá vyskytovala nejvýše dvakrát. Vzhledem k tomu, že máme 5 karet, existuje jediné možné rozdělení - 2 hodnoty budou zastoupeny dvakrát a 1 pouze jednou*[4]*:*

hodnoty	a_i	b_i	c_i	d_i	e_i
i=1	1	1	1	1	1
i=2	1	1	1	1	1
i=3	1	1	2	2	3

V druhém kroku rozhodneme o hodnotách čtvrté vlastnosti. Protože žádné dvě karty nemohou být shodné, vidíme, že hodnoty čtvrté vlastnosti pro první dvě karty se musí lišit:

hodnoty	a_i	b_i	c_i	d_i	e_i
i=1	1	1	1	1	1
i=2	1	1	1	1	1
i=3	1	1	2	2	3
i=4	1	2			

Hodnoty čtvrté vlastnosti pro třetí a čtvrtou kartu budou také různé (ze stejného důvodu). Proto mezi nimi bude určitě alespoň jedna z hodnot 1,2 , jako u prvních dvou karet:

hodnoty	a_i	b_i	c_i	d_i	e_i
i=1	1	1	1	1	1
i=2	1	1	1	1	1
i=3	1	1	2	2	3
i=4	1	2	1		

Podívejme se nyní na karty, které by spolu potenciálně mohly tvořit SET. Jsou to karty, jejichž hodnoty pro 3. vlastnost jsou všechny různé, tedy teoreticky existují až 4 SETy, které ovšem nemusí (a ani nemohou) být navzájem disjunktní. My nechceme, aby mezi kartami byl SET, proto musí platit, že:

$$3 \nmid (a_4 + c_4 + e_4) \wedge 3 \nmid (a_4 + d_4 + e_4) \wedge 3 \nmid (b_4 + c_4 + e_4) \wedge 3 \nmid (b_4 + d_4 + e_4)$$

$$\Rightarrow 3 \nmid 1 + 1 + e_4 \wedge 3 \nmid 1 + d_4 + e_4 \wedge 3 \nmid 2 + 1 + e_4 \wedge 3 \nmid 2 + d_4 + e_4$$

[3] Později i vlastnosti 4

[4] Příloha č.3

Zaměřme se na první a třetí část konjunkce:

$$(3 \nmid 2 + e_4 \wedge 3 \nmid 3 + e_4) \Rightarrow (e_4 \neq 3 \wedge e_4 \neq 1) \Rightarrow e_4 = 2$$

Nyní se vraťme k celé konjunkci:

$$(3 \nmid 4 \wedge 3 \nmid 3 + d_4 \wedge 3 \nmid 5 \wedge 3 \nmid 4 + d_4) \Rightarrow (d_4 \neq 3 \wedge d_4 \neq 2) \Rightarrow d_4 = 1$$

To by ovšem znamenalo, že karty D a C jsou totožné (pro každou ze svých vlastností nabývají téže hodnoty). Což nelze, protože žádné dvě karty nemohou být totožné. Proto negace neplatí a platí věta původní, pokud se karty shodují ve svých hodnotách právě ve dvou vlastnostech, neexistuje pětice karet, která by neobsahovala SET.

Zároveň jsme dokázali existenci čtveřice karet splňujících podmínky, mezi nimiž není SET. I kdyby se tak bývalo nestalo, najít vyhovující čtveřici by bylo velice snadné - stačilo by zajistit, aby pro 3. nebo 4. vlastnost karty po dvou nabývaly právě dvou různých hodnot. Tím by bylo zajištěno, že pro tuto vlastnost nemohou žádné tři karty nabývat všechny stejné nebo všechny různé hodnoty[5]. A aby karty tvořily SET, musí být jedna z těchto podmínek splněna pro každou z vlastností, proto by mezi nimi SET nebyl:

hodnoty	a_i	b_i	c_i	d_i
i=1	1	1	1	1
i=2	1	1	1	1
i=3	1	1	2	2

Pro další práci a pro přehlednost ještě jednou shrneme získané poznatky do další z vět:

Věta 5 *Pokud se mezi n kartami vyskytuje alespoň 5 karet, které se shodují v právě 2 vlastnostech, pak tato n-tice obsahuje SET.*

4.3 Karty se shodují právě v jedné vlastnosti

Z toho, co již víme, je jisté, že existuje skupina 8 karet shodujících se v jedné vlastnosti, mezi nimiž není SET[6] - provedeme stejnou úvahu, jako jsme provedli v předchozím případě: [7]

[5] Příloha č.4
[6] Příloha č.5
[7] viz tabulka výše na této stránce

hodnoty	a_{1_i}	a_{2_i}	a_{3_i}	a_{4_i}	a_{5_i}	a_{6_i}	a_{7_i}	a_{8_i}
i=1	1	1	1	1	1	1	1	1
i=2	1	1	1	1	2	2	2	2
i=3	1	1	2	2	1	1	1	1

Bude nás zajímat, jestli existuje ještě početnější skupina karet, mezi nimiž by nebyl SET. Není až tak obtížné najít vyhovující devítici[8]. Zkusíme se podívat na skupinu deseti karet:

Věta 6 *Pro každou skupinu deseti karet, které se shodují v jedné z vlastností platí, že mezi nimi musí být SET.*

Důkaz 4 *Důkaz bude tentokráte již trochu delší. Opět budeme dokazovat negaci věty:*

Existuje skupina deseti karet, které se shodují v jedné z vlastností, mezi kterými není SET.

Zkusíme tedy takovou skupinu najít. Víme, že v jedné vlastnosti se shodují, pro všechny ostatní platí, že každá z hodnot se vyskytuje nejvýše čtyřikrát a tak, aby mezi kartami byly vždy nejvýše 4 karty shodující se ve dvou a 2 karty shodující se ve třech vlastnostech.

Zaměřme se nyní na druhou vlastnost. Ze všech známých podmínek plyne, že aby byla šance, že mezi kartami není SET, musí se hodnoty vlastnosti vyskytovat v jednom z poměrů 4:4:2 [9]*, 4:3:3*[10] *. Oba tyto poměry podrobněji prověříme:*

[8]Příloha č.6
[9]Příloha č.8
[10]Příloha č.9

4.3.1 Poměr 4:4:2

Výchozí pozice je takováto:

hodnoty	a_{1_i}	a_{2_i}	a_{3_i}	a_{4_i}	a_{5_i}	a_{6_i}	a_{7_i}	a_{8_i}	a_{9_i}	a_{10_i}
i=1	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*
i=2	*1*	*1*	*1*	*1*	*2*	*2*	*2*	*2*	*3*	*3*

Víme, že rozdělíme-li karty na 3 skupiny a_1 *-* a_4*,* a_5 *-* a_8 *a* a_9 *-* a_{10}*, lze tyto skupiny uspořádat tak, aby v rámci nich nebyl SET.*

Podívejme se na třetí vlastnost ($i = 3$*). Víme, že pro první a druhou skupinu musí platit, že každá z hodnot se zde bude vyskytovat nejvýše dvakrát. Protože hodnoty jsou 3 a karty ve skupině 4, použijeme-li všechny 3 hodnoty, podle Dirichletova principu se bude právě jedna dvojice ve své hodnotě shodovat. Použijeme-li pouze 2 hodnoty, pak zde budou dvě různé dvojice shodující se ve svých hodnotách pro tuto vlastnost.*

Proto pro každou z těchto skupin platí, že jejich hodnoty třetí vlastnosti jsou uspořádány v jednom z poměrů:

- *2:2*
- *2:1:1*

Nejdříve se podíváme na případ, kdy má (alespoň) jedna ze skupin u třetí vlastnosti uspořádání hodnot typu 2:2

hodnoty	a_{1_i}	a_{2_i}	a_{3_i}	a_{4_i}	a_{5_i}	a_{6_i}	a_{7_i}	a_{8_i}	a_{9_i}	a_{10_i}
i=1	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*
i=2	*1*	*1*	*1*	*1*	*2*	*2*	*2*	*2*	*3*	*3*
i=3	*1*	*1*	*2*	*2*						

Ve druhé skupině se také u třetí vlastnosti alespoň jedna z hodnot musí vyskytovat dvakrát - může to být buď hodnota, která se nevyskytuje mezi prvními čtyřmi kartami, nebo jedna z hodnot, které se již vyskytují mezi prvními čtyřmi kartami.

V prvním případě vypadá situace následovně:

hodnoty	a_{1_i}	a_{2_i}	a_{3_i}	a_{4_i}	a_{5_i}	a_{6_i}	a_{7_i}	a_{8_i}	a_{9_i}	a_{10_i}
i=1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
i=2	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3
i=3	1	1	2	2	3	3				
i=4	1	2			1					

Vezmeme-li si karty A_1, A_2, A_5 a A_6, vidíme, že se jedná o čtveřici karet, které se po dvou liší v hodnotách druhé vlastnosti. Doplníme-li k nim některou z karet A_9, A_{10}, pak je zřejmé, že měl-li by mezi nimi být SET, pak jedině takový, kde by se karty lišily v hodnotách druhé vlastnosti. Protože se čtyři vybrané karty ve druhé a třetí vlastnosti „liší stejně,“[11] můžeme situaci považovat za situaci ekvivalentní případu, kdy se karty shodují i v druhé vlastnosti.[12]. Tento problém jsme již vyřešili, víme, že pátou kartu doplnit nelze. Zde se jedná o obdobný případ - kartám, které se od všech karet A_1, A_2, A_5 a A_6 ve druhé vlastnosti (tj. kartám A_9, A_{10}) nemůže náležet pro třetí vlastnost hodnota, která by se také lišila od hodnot a_{1_3}, a_{2_3}, a_{5_3} a a_{6_3}, tzn. $a_{(9,10)_3} \neq 2$.

Stejnou úvahu můžeme provést pro čtveřici karet A_3, A_4, A_5 a A_6. Dojdeme k závěru, že $a_{(9,10)_3} \neq 1$.

Proto $a_{(9,10)_3} = 3$.

hodnoty	a_{1_i}	a_{2_i}	a_{3_i}	a_{4_i}	a_{5_i}	a_{6_i}	a_{7_i}	a_{8_i}	a_{9_i}	a_{10_i}
i=1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
i=2	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3
i=3	1	1	2	2	3	3			3	3
i=4	1	2			1					

Zbývá doplnit a_{7_3}, a_{8_3}. Stejnými úvahami dojdeme k závěrům, že kvůli čtveřicím A_1, A_2, A_9, A_{10} a A_3, A_4, A_9, A_{10} platí, že $a_{(7,8)} \neq 2 \vee 1 \Rightarrow a_{(7,8)} = 3$. Což ovšem není možné, protože pak by mezi kartami bylo 6 karet, které se shodují ve dvou vlastnostech, proto by mezi nimi nutně byl SET.

Druhý případ, kdy má alespoň jedna ze skupin čtyř karet(A_{1-4}) hodnoty 3. vlastnosti v poměru 2:2:0, bude, pokud se ve druhé skupině (A_{5-8}) u třetí vlastnosti dvakrát vyskytuje jedna z hodnot, které se dvakrát vyskytují i v první skupině. Vidíme ovšem hned, že se jedná o ten samý případ, jako je ten, který

[11] tzn. pro každou dvojici karet platí, že liší-li se v druhé vlastnosti, liší se i ve třetí

[12] Stačí si uvědomit, které karty spolu mohou tvořit SET - dojdeme ke stejné konjunkci, ke které jsme došli na str. 29

jsme právě prověřili. Pro pořádek ale přeci jen přikládám tabulku, nebudu však již znovu tento problém řešit:

hodnoty	a_{1_i}	a_{2_i}	a_{3_i}	a_{4_i}	a_{5_i}	a_{6_i}	a_{7_i}	a_{8_i}	a_{9_i}	a_{10_i}
i=1	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*
i=2	*1*	*1*	*1*	*1*	*2*	*2*	*2*	*2*	*3*	*3*
i=3	*1*	*1*	*2*	*2*	*1*	*1*				

Zbývá tedy prověřit variantu, kdy obě skupiny čtyř karet mají pro třetí vlastnost hodnoty zastoupené v poměru 2:1:1. Bez újmy na obecnosti můžeme říct, že „základní stav“ bude vypadat takto:

hodnoty	a_{1_i}	a_{2_i}	a_{3_i}	a_{4_i}	a_{5_i}	a_{6_i}	a_{7_i}	a_{8_i}	a_{9_i}	a_{10_i}
i=1	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*
i=2	*1*	*1*	*1*	*1*	*2*	*2*	*2*	*2*	*3*	*3*
i=3	*1*	*1*	*2*	*3*	*1*	*2*	*3*			

Všimněme si, že $(a_{9_3} = 2 \vee 3) \vee (a_{10_3} = 2 \vee 3)$. *Můžeme totiž doplnit nejvýše jednu jedničku. Opět bez újmy na obecnosti předpokládejme, že* $a_{9_3} = 2$.

hodnoty	a_{1_i}	a_{2_i}	a_{3_i}	a_{4_i}	a_{5_i}	a_{6_i}	a_{7_i}	a_{8_i}	a_{9_i}	a_{10_i}
i=1	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*
i=2	*1*	*1*	*1*	*1*	*2*	*2*	*2*	*2*	*3*	*3*
i=3	*1*	*1*	*2*	*3*	*1*	*2*	*3*		*2*	
i=4	*1*	*2*								

Víme, že $a_{10_3} = 1 \vee 2 \vee 3$*:*

1. $a_{10_3} = 1$

Pro třetí vlastnost tedy zbývá doplnit hodnotu jen u karty A_8. *Víme, že* $a_{8_4} \neq 1$*, v takovém případě by se totiž tato hodnota pro třetí vlastnost mezi kartami objevila pětkrát, proto by mezi nimi nutně by SET.*

Dále víme, že $a_{8_4} \neq 3$. *V takovém případě by byl totiž SET mezi kartami* A_1, A_2, A_7, A_8 *a* A_9. [13]

Proto zbývá jediná možnost, kdy $a_{8_4} = 2$.

[13] viz str. 32 - stejný, již vyřešený problém

hodnoty	a_{1_i}	a_{2_i}	a_{3_i}	a_{4_i}	a_{5_i}	a_{6_i}	a_{7_i}	a_{8_i}	a_{9_i}	a_{10_i}
i=1	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*
i=2	*1*	*1*	*1*	*1*	*2*	*2*	*2*	*2*	*3*	*3*
i=3	*1*	*1*	*2*	*3*	*1*	*2*	*3*	*2*	*2*	*1*
i=4	*1*	*2*				*1*				

Protože víme, že $a_{6_4} \neq a_{8_4}$, bude alespoň jedna z těchto hodnot rovna $a_{1_4} \vee a_{2_4}$.

Zaměříme se nejdřív na skupinu prvních čtyř karet. Aby mezi nimi nebyl SET, musí platit, že:

$[3 \nmid (a_{1_4} + a_{3_4} + a_{4_4}) \wedge 3 \nmid (a_{2_4} + a_{3_4} + a_{4_4})] \Rightarrow [3 \nmid (1 + a_{3_4} + a_{4_4}) \wedge 3 \nmid (2 + a_{3_4} + a_{4_4})] \Rightarrow (a_{3_4} + a_{4_4} \neq 3k + 2 \wedge a_{3_4} + a_{4_4} \neq 3k + 1; k \in \{1, 2\}) \Rightarrow a_{3_4} + a_{4_4} = 3k \wedge k \in \{1, 2\}$

Nyní existují 2 možnosti:

1.1 $a_{3_4} = a_{4_4} = 3$

hodnoty	a_{1_i}	a_{2_i}	a_{3_i}	a_{4_i}	a_{5_i}	a_{6_i}	a_{7_i}	a_{8_i}	a_{9_i}	a_{10_i}
i=1	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*
i=2	*1*	*1*	*1*	*1*	*2*	*2*	*2*	*2*	*3*	*3*
i=3	*1*	*1*	*2*	*3*	*1*	*2*	*3*	*2*	*2*	*1*
i=4	*1*	*2*	*3*	*3*		*1*				

$3 \nmid (a_{3_4} + a_{6_4} + a_{9_4}) \Rightarrow a_{9_4} = 1 \vee 3$

$3 \nmid (a_{3_4} + a_{8_4} + a_{9_4} \wedge a_{8_4} \neq a_{6_4}) \Rightarrow [(a_{9_4} = 1 \Rightarrow a_{8_4} = 3) \vee (a_{9_4} = 3 \Rightarrow a_{8_4} = 2) \Rightarrow a_{8_4} = 2 \vee 3$

$(a_{9_4} = 3 \Rightarrow a_{8_4} = 2) \wedge [3 \nmid (a_{1_4} + a_{7_4} + a_{9_4}) \wedge 3 \nmid (a_{2_4} + a_{7_4} + a_{9_4})] \Rightarrow a_{7_4} = 3$

$[3 \nmid (a_{5_4} + a6_4 + a_{7_4}) \wedge 3 \nmid (a_{5_4} + a_{7_4} + a_{8_4})] \Rightarrow a_{5_4} = 3$, *což ovšem nelze, protože pak by mezi kartami byla pro 4. hodnotu pětkrát tatáž hodnota. Proto situace, kdy $a_{9_4} = 3$, nemůže nastat.*

$(a_{9_4} = 1 \Rightarrow a_{8_4} = 3) \wedge [3 \nmid (a_{1_4} + a_{7_4} + a_{9_4}) \wedge 3 \nmid (a_{2_4} + a_{7_4} + a_{9_4})] \Rightarrow a_{7_4} = 2$

$[3 \nmid (a_{5_4} + a_{6_4} + a_{7_4}) \wedge 3 \nmid (a_{5_4} + a_{7_4} + a_{8_4})] \Rightarrow a_{5_4} = 3$

$[3 \nmid (a_{1_4} + a_{5_4} + a_{10_4}) \wedge 3 \nmid (a_{2_4} + a_{5_4} + a_{10_4})] \Rightarrow a_{10_4} = 3$, *což také nelze (ze stejného důvodu. Proto žádná z variant, kdy* $a_{3_4} = a_{4_4} = 3$, *nevede k řešení.*

1.2 $\{a_{3_4}, a_{4_4}\} \in \{1, 2\}$

hodnoty	a_{1_i}	a_{2_i}	a_{3_i}	a_{4_i}	a_{5_i}	a_{6_i}	a_{7_i}	a_{8_i}	a_{9_i}	a_{10_i}
i=1	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*
i=2	*1*	*1*	*1*	*1*	*2*	*2*	*2*	*2*	*3*	*3*
i=3	*1*	*1*	*2*	*3*	*1*	*2*	*3*	*2*	*2*	*1*
i=4	*1*	*2*	*2*	*1*		*1*				

$3 \nmid (a_{3_4} + a_{6_4} + a_{9_4}) \Rightarrow a_{9_4} = 1 \vee 2$

$3 \nmid (a_{3_4} + a_{8_4} + a_{9_4} \wedge a_{8_4} \neq a_{6_4}) \Rightarrow [(a_{9_4} = 1 \Rightarrow a_{8_4} = 2) \vee (a_{9_4} = 2 \Rightarrow a_{8_4} = 3) \Rightarrow a_{8_4} = 2 \vee 3$

$(a_{9_4} = 1 \Rightarrow a_{8_4} = 2) \wedge [3 \nmid (a_{1_4} + a_{7_4} + a_{9_4}) \wedge 3 \nmid (a_{2_4} + a_{7_4} + a_{9_4})] \Rightarrow a_{7_4} = 2$

$[3 \nmid (a_{5_4} + a6_4 + a_{7_4}) \wedge 3 \nmid (a_{5_4} + a_{7_4} + a_{8_4})] \Rightarrow a_{5_4} = 1$, *což nejde, protože pak by u čtvrté vlastnosti byla hodnota 1 zastoupena pětkrát, tedy by mezi kartami nutně byl SET.*

$(a_{9_4} = 2 \Rightarrow a_{8_4} = 3) \wedge [3 \nmid (a_{1_4} + a_{7_4} + a_{9_4}) \wedge 3 \nmid (a_{2_4} + a_{7_4} + a_{9_4})] \Rightarrow a_{7_4} = 1$

$[3 \nmid (a_{5_4} + a6_4 + a_{7_4}) \wedge 3 \nmid (a_{5_4} + a_{7_4} + a_{8_4})] \Rightarrow a_{5_4} = 3$, *snadno si ale ověříme, že mezi těmito kartami bude SET* (A_4, A_5, A_9)*. Pro* $a_{10_3} = 1$ *jsme prověřili všechny možné situace, víme, že žádná skupina 10 karet, mezi nimiž by nebyl SET, neexistuje.*

2. $a_{10_3} = 2$ [14]

Tentokráte nemůžu za a_{8_3} *doplnit hodnotu 2 (byla by mezi hodnotami třetí vlastnosti pětkrát) a stále ani hodnotu 3 (ze stejného důvodu jako v předchozím případě).*[15] *Proto zbývá jediná možnost, kdy* $a_{8_3} = 1$

[14] Protože se jedná o obdobu předchozí situace, nebudu již hodnoty daných vlastností v tabulkách pro přehlednost obarvovat, myslím totiž, že situace je již jasná a proto i přehledná.
[15] str. 32

hodnoty	a_{1_i}	a_{2_i}	a_{3_i}	a_{4_i}	a_{5_i}	a_{6_i}	a_{7_i}	a_{8_i}	a_{9_i}	a_{10_i}
i=1	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*
i=2	*1*	*1*	*1*	*1*	*2*	*2*	*2*	*2*	*3*	*3*
i=3	*1*	*1*	*2*	*3*	*1*	*2*	*3*	*1*	*2*	*2*
i=4	*1*	*2*			*1*					

Nyní můžeme postupovat úplně stejně jako v předchozím případě.

2.1 $a_{3_4} = a_{4_4} = 3$

hodnoty	a_{1_i}	a_{2_i}	a_{3_i}	a_{4_i}	a_{5_i}	a_{6_i}	a_{7_i}	a_{8_i}	a_{9_i}	a_{10_i}
i=1	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*
i=2	*1*	*1*	*1*	*1*	*2*	*2*	*2*	*2*	*3*	*3*
i=3	*1*	*1*	*2*	*3*	*1*	*2*	*3*	*1*	*2*	*2*
i=4	*1*	*2*	*3*	*3*	*1*					

$3 \nmid (a_{4_4} + a_{5_4} + a_{9_4}) \Rightarrow a_{9_4} = 1 \vee 3$

$3 \nmid (a_{3_4} + a_{8_4} + a_{9_4} \wedge a_{8_4} \neq a_{5_4}) \Rightarrow [(a_{9_4} = 1 \Rightarrow a_{8_4} = 3) \vee (a_{9_4} = 3 \Rightarrow a_{8_4} = 2) \Rightarrow a_{8_4} = 2 \vee 3$

$(a_{9_4} = 1 \Rightarrow a_{8_4} = 3) \wedge [3 \nmid (a_{1_4} + a_{7_4} + a_{9_4}) \wedge 3 \nmid (a_{2_4} + a_{7_4} + a_{9_4})] \Rightarrow a_{7_4} = 2$

$[3 \nmid (a_{5_4} + a_{6_4} + a_{7_4}) \wedge 3 \nmid (a_{6_4} + a_{7_4} + a_{8_4})] \Rightarrow a_{6_4} = 2$

$[3 \nmid (a_{1_4} + a_{7_4} + a_{10_4}) \wedge 3 \nmid (a_{2_4} + a_{7_4} + a_{10_4})] \Rightarrow a_{10_4} = 1$, *což je spor, protože pak by* $A_9 = A_{10}$. *Proto žádná desetice tohoto typu uspořádání neexistuje.*

$(a_{9_4} = 3 \Rightarrow a_{8_4} = 2) \wedge [3 \nmid (a_{1_4} + a_{7_4} + a_{9_4}) \wedge 3 \nmid (a_{2_4} + a_{7_4} + a_{9_4})] \Rightarrow a_{7_4} = 3$

$[3 \nmid (a_{5_4} + a_{6_4} + a_{7_4}) \wedge 3 \nmid (a_{6_4} + a_{7_4} + a_{8_4})] \Rightarrow a_{6_4} = 3$, *což nelze, protože pak by mezi hodnotami čtvrté vlastnosti byla hodnota 3 pětkrát, tedy by mezi nimi nutně byl SET.*

2.2 $\{a_{3_4}, a_{4_4}\} = \{1, 2\}$

hodnoty	a_{1_i}	a_{2_i}	a_{3_i}	a_{4_i}	a_{5_i}	a_{6_i}	a_{7_i}	a_{8_i}	a_{9_i}	a_{10_i}
i=1	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*
i=2	*1*	*1*	*1*	*1*	*2*	*2*	*2*	*2*	*3*	*3*
i=3	*1*	*1*	*2*	*3*	*1*	*2*	*3*	*1*	*2*	*2*
i=4	*1*	*2*	*1*	*2*	*1*					

$3 \nmid (a_{4_4} + a_{5_4} + a_{9_4}) \Rightarrow a_{9_4} = 1 \vee 2$

$3 \nmid (a_{3_4} + a_{8_4} + a_{9_4} \wedge a_{8_4} \neq a_{5_4}) \Rightarrow [(a_{9_4} = 1 \Rightarrow a_{8_4} = 2) \vee (a_{9_4} = 2 \Rightarrow a_{8_4} = 3) \Rightarrow a_{8_4} = 2 \vee 3$

$(a_{9_4} = 1 \Rightarrow a_{8_4} = 2) \wedge [3 \nmid (a_{1_4} + a_{7_4} + a_{9_4}) \wedge 3 \nmid (a_{2_4} + a_{7_4} + a_{9_4})] \Rightarrow a_{7_4} = 2$

$[3 \nmid (a_{5_4} + a_{6_4} + a_{7_4}) \wedge 3 \nmid (a_{6_4} + a_{7_4} + a_{8_4})] \Rightarrow a_{6_4} = 1$, *což nelze - mezi kartami by byla pro čtvrtou vlastnost hodnota 1 pětkrát, tedy by mezi nimi určitě byl SET.*

$(a_{9_4} = 2 \Rightarrow a_{8_4} = 3) \wedge [3 \nmid (a_{1_4} + a_{7_4} + a_{9_4}) \wedge 3 \nmid (a_{2_4} + a_{7_4} + a_{9_4})] \Rightarrow a_{7_4} = 3$

$[3 \nmid (a_{5_4} + a_{6_4} + a_{7_4}) \wedge 3 \nmid (a_{6_4} + a_{7_4} + a_{8_4})] \Rightarrow a_{6_4} = 1$

$[3 \nmid (a_{1_4} + a_{7_4} + a_{10_4}) \wedge 3 \nmid (a_{2_4} + a_{7_4} + a_{10_4})] \Rightarrow a_{10_4} = 3$, *což nelze, protože pak karty* A_4, A_5 *a* A_{10} *tvoří SET.*

Pro $a_{10_3} = 2$ *jsme prověřili všechny možné situace, které mohou nastat, nenašli jsme žádnou skupinu deseti karet, mezi nimiž by nebyl SET.*

3. $a_{10_3} = 3$

Tentokráte nemůžu za a_{8_3} *doplnit hodnotu 3 ani 2.*[16] *Proto zbývá jediná možnost, kdy* $a_{8_3} = 1$

hodnoty	a_{1_i}	a_{2_i}	a_{3_i}	a_{4_i}	a_{5_i}	a_{6_i}	a_{7_i}	a_{8_i}	a_{9_i}	a_{10_i}
i=1	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*
i=2	*1*	*1*	*1*	*1*	*2*	*2*	*2*	*2*	*3*	*3*
i=3	*1*	*1*	*2*	*3*	*1*	*2*	*3*	*1*	*2*	*3*
i=4	*1*	*2*			*1*					

Vidíme, že se jedná o úplně stejnou situaci jako v předchozím případě, až na hodnotu a_{10_3}. *Mezi možnostmi, které mohly nastat, byly i takové, kde jsme vůbec*

[16] str. 32

neuvažovali s touto hodnotou a přesto jsme došli k závěru, že hledaná desetice neexistuje. Není proto nutné tyto situace znovu prověřovat, stačí se podívat na ty, v nichž jsme s hodnotou a_{10_3} uvažovali.

noindent

$(a_{9_4} = 1 \Rightarrow a_{8_4} = 3) \wedge [3 \nmid (a_{1_4} + a_{7_4} + a_{9_4}) \wedge 3 \nmid (a_{2_4} + a_{7_4} + a_{9_4})] \Rightarrow a_{7_4} = 2$

$[3 \nmid (a_{5_4} + a_{6_4} + a_{7_4}) \wedge 3 \nmid (a_{6_4} + a_{7_4} + a_{8_4})] \Rightarrow a_{6_4} = 2$

Mezi těmito kartami už ale SET je[17]*, tvoří ho karty A_3, A_6, a A_9.*

$(a_{9_4} = 2 \Rightarrow a_{8_4} = 3) \wedge [3 \nmid (a_{1_4} + a_{7_4} + a_{9_4}) \wedge 3 \nmid (a_{2_4} + a_{7_4} + a_{9_4})] \Rightarrow a_{7_4} = 3$

$[3 \nmid (a_{5_4} + a_{6_4} + a_{7_4}) \wedge 3 \nmid (a_{6_4} + a_{7_4} + a_{8_4})] \Rightarrow a_{6_4} = 1$

$[3 \nmid (a_{1_4} + a_{6_4} + a_{10_4}) \wedge 3 \nmid (a_{2_4} + a_{6_4} + a_{10_4})] \Rightarrow a_{10_4} = 2$*, pak ale mezi kartami je SET A_{10}, A_8, A_3.*

Proto mezi deseticí karet, jejichž hodnoty některé z vlastností by byly uspořádány v poměru 4:4:2, neexistuje taková, mezi níž by nebyl SET.

4.3.2 Poměr 4:3:3

Již víme, že ani jedna z vlastností se nesmí vyskytovat v poměru 4:4:2, proto se všechny 3 vlastnosti, v nichž se karty liší, musí vyskytovat právě v poměru 4:3:3.

hodnoty	a_{1_i}	a_{2_i}	a_{3_i}	a_{4_i}	a_{5_i}	a_{6_i}	a_{7_i}	a_{8_i}	a_{9_i}	a_{10_i}
i=1	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*
i=2	*1*	*1*	*1*	*1*	*2*	*2*	*2*	*3*	*3*	*3*
i=3	*1*	*1*	*2*							
i=4	*1*	*2*								

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že výchozí situace vypadá takto. Dále víme, že $a_{4_3} = 2 \vee 3$.

[17]Čehož jsme si minule nevšimli, což ovšem nevadí, protože jsme nalezli jiný velice snadno, teď se to ale hodí.

Pokud $a_{4_3} = 2$, pak v žádné z obou dalších skupin (A_{5-7}, A_{8-10}) nesmí být žádná z hodnot zastoupena dvakrát - pak bychom se totiž dostali do situace, kdy se 4 karty shodují ve dvou vlastnostech[18] *a v třetí vlastnosti nabývají pouze dvou hodnot - proto by k nim nebylo možné doplnit pátou kartu, která by se od předchozích lišila ve druhé a třetí vlastnosti a zároveň by s nimi netvořila SET.*[19] *Pak by jsme ale kartám třetí skupiny mohli přiřadit pouze jedinou hodnotu, což není možné - dostali bychom 3 karty shodující se ve třech vlastnostech, proto by mezi nimi musel být SET. Proto jediné možné uspořádání je následující:*

hodnoty	a_{1_i}	a_{2_i}	a_{3_i}	a_{4_i}	a_{5_i}	a_{6_i}	a_{7_i}	a_{8_i}	a_{9_i}	a_{10_i}
i=1	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*
i=2	*1*	*1*	*1*	*1*	*2*	*2*	*2*	*3*	*3*	*3*
i=3	*1*	*1*	*2*	*2*	*1*	*2*	*3*	*1*	*2*	*3*
i=4	*1*	*2*								

Vidíme ale, že pro třetí vlastnost jsme dostali uspořádání typu 4:4:2, pro které jsme dokázali, že vyskytuje-li se alespoň u jedné z vlastností karet, pak mezi nimi musí být SET.

Druhou možností je, že $a_{4_3} = 3$. Vzhledem k podmínkám uspořádání můžeme nyní každou z hodnot doplnit nejvýše dvakrát. Doplníme-li tedy do druhé skupiny dvakrát stejnou hodnotu, budeme muset dvakrát stejnou hodnotu (ovšem lišící se od té ve druhé skupině) doplnit i do třetí skupiny. Což znamená, že budeme mít opět 4 karty (2 ve druhé a 2 ve třetí skupině), které se budou lišit shodně ve druhé a třetí vlastnosti. Proto bude existovat právě jedna hodnota, kterou nebudu smět přiřadit třetí vlastnosti karet v první skupině. Čímž se dostáváme do sporu, protože v první skupině jsou zastoupeny všechny 3 hodnoty.

Do druhé a třetí skupiny nemůžeme žádnou z hodnot doplnit dvakrát:

[18] resp. v jedné a v druhé se „shodně liší"

[19] Připomínám, že toto jsme dokázali na str. 29, resp. 32

hodnoty	a_{1_i}	a_{2_i}	a_{3_i}	a_{4_i}	a_{5_i}	a_{6_i}	a_{7_i}	a_{8_i}	a_{9_i}	a_{10_i}
i=1	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*
i=2	*1*	*1*	*1*	*1*	*2*	*2*	*2*	*3*	*3*	*3*
i=3	*1*	*1*	*2*	*3*	*1*	*2*	*3*	*1*	*2*	*3*
i=4	*1*	*2*								

Stejné podmínky však budou muset platit pro čtvrtou vlastnost - což znamená, že $a_{5_4} \neq a_{6_4} \neq a_{7_4} \wedge a_{5_3} \neq a_{6_3} \neq a_{7_3} \wedge a_{5_1} = a_{6_1} = a_{7_1} \wedge a_{5_2} = a_{6_2} = a_{7_2} \Rightarrow$ *tyto 3 karty tvoří SET.*[20]

Proto ani pro uspořádání typu 4:3:3 neexistuje žádná desetice karet shodujících se společně v jedné vlastnosti, mezi nimiž by nebyl SET. Obecně tedy neexistuje žádná desetice karet shodujících se společně v jedné vlastnosti, mezi nimiž by nebyl SET.

4.4 Přípustné poměry mezi devíticí karet

Mezi devíticí karet mohou být počty hodnot u každé z vlastností v poměru 3 : 3 : 3, 4 : 4 : 1 a 4 : 3 : 2. Už během předchozího důkazu jsme nalezli vyhovující devítici (tzn. takovou, aby mezi kartami nebyl SET). Hodnoty pro všechny vlastnosti se vždy vyskytovaly v některém z poměrů 3 : 3 : 3 nebo 4 : 4 : 1, nikdy však ne v poměru 4 : 3 : 2. Pojďme se tedy zabývat otázkou, zda je to vůbec možné.

4.4.1 Poměr 4:3:2

Což tedy znamená, že hodnoty alespoň jedné z vlastností budou uspořádány v poměru 4:3:2. Řekněme, že to bude druhá vlastnost (protože v první se všechny karty shodují). Výchozí situace bude vypadat následovně:

hodnoty	a_{1_i}	a_{2_i}	a_{3_i}	a_{4_i}	a_{5_i}	a_{6_i}	a_{7_i}	a_{8_i}	a_{9_i}
i=1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
i=2	1	1	1	1	2	2	2	3	3
i=3	1	1	2						
i=4	1	2							

Čtveřice může existovat v jednom ze třech typů, které postupně prověříme:

[20] Stejná situace nastane ve třetí skupině.

1. Pro třetí i čtvrtou vlastnost platí, že se zde vyskytují právě dvě různé hodnoty.
2. V rámci jedné z vlastností se vyskytují všechny tři, v rámci druhé právě dvě hodnoty.
3. Pro třetí i čtvrtou vlastnost platí, že se zde vyskytují všechny 3 hodnoty.

1. Situace vypadá takto:

hodnoty	a_{1_i}	a_{2_i}	a_{3_i}	a_{4_i}	a_{5_i}	a_{6_i}	a_{7_i}	a_{8_i}	a_{9_i}
i=1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
i=2	1	1	1	1	2	2	2	3	3
i=3	1	1	2	2					
i=4	1	2	1	2					

Snadnou úvahou vidíme, že v rámci trojice ani u třetí ani u čtvrté vlastnosti nesmí být žádná hodnota zastoupena dvakrát. V takovém případě by s dvěma dvojicemi karet ze čtveřice tvořila *čtveřici karet, které se liší shodně ve druhé i třetí (popř. čtvrté) vlastnosti*. Proto by existovaly 2 hodnoty, které bychom nemohli doplnit ke třetí (čtvrté) vlastnosti karet dvojice - kdybychom to udělali, existovaly by více než 4 karty, které by se „lišily shodně", proto by mezi nimi byl SET.

Což znamená, že ke kartám dvojice, konkrétně k jejich třetí a čtvrté vlastnosti, by zbývala k doplnění jen jedna hodnota. Tím pádem by ale úplně stejným způsobem vznikly 2 skupiny 4 karet, které se liší shodně - tentokrát by ale byly takové skupiny tvořeny dvěma kartami dvojice a dvěma čtveřice. Proto bychom po provedení úplně úvahy došli k závěru, že i v rámci trojice se může u třetí a čtvrté vlastnosti vyskytovat vždy jediná hodnota. Což by ovšem znamenalo, že tato trojice je SETem.

Proto by se všechny hodnoty třetí a čtvrté vlastnosti v rámci trojice musely lišit. V takovém případě bude ale trojice také SETem. Proto pro tento typ čtveřice nemohou být hodnoty žádné z vlastností devítice uspořádány v poměru 4:3:2.

2. Tentokrát je situace následující (i s ohledem na to, co jsme zjistili o trojici a dvojici) :

hodnoty	a_{1_i}	a_{2_i}	a_{3_i}	a_{4_i}	a_{5_i}	a_{6_i}	a_{7_i}	a_{8_i}	a_{9_i}
i=1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
i=2	1	1	1	1	2	2	2	3	3
i=3	1	1	2	2	1	2	3	1	a_{9_3}
i=4	1	2	1	3	a_{5_4}	a_{6_4}	a_{7_4}	a_{8_4}	a_{9_4}

$[3 \nmid (a_{1_4} + a_{5_4} + a_{8_4}) \wedge 3 \nmid (a_{2_4} + a_{5_4} + a_{8_4})] \Rightarrow [3 \nmid (1 + a_{5_4} + a_{8_4}) \wedge 3 \nmid (2 + a_{5_4} + a_{8_4})] \Rightarrow a_{5_4} + a_{8_4} = 3k$

$[3 \nmid (a_{3_4} + a_{7_4} + a_{8_4}) \wedge (a_{4_4} + a_{7_4} + a_{8_4})] \Rightarrow [3 \nmid (1 + a_{7_4} + a_{8_4}) \wedge (3 + a_{7_4} + a_{8_4})] \Rightarrow a_{7_4} + a_{8_4} = 3k + 1$

$(a_{5_4} + a_{8_4} = 3k \wedge a_{7_4} + a_{8_4} = 3k + 1) \Rightarrow a_{7_4} = a_{5_4} + 1$

$a_{9_3} = 2 \vee 3 : a_{9_3} = 2 \Rightarrow (a_{6_4} + a_{9_4} = 3k + 1 \wedge a_{7_4} + a_{9_4} = 3k) \Rightarrow a_{7_4} = a_{6_4} - 1$

$(a_{7_4} = a_{5_4} + 1 \wedge a_{7_4} = a_{6_4} - 1) \Rightarrow a_{5_4} \neq a_{6_4} \neq a_{7_4} \Rightarrow$ karty A_{5-7} tvoří SET.

$a_{9_3} = 2 \Rightarrow (a_{5_4} + a_{9_4} = 3k + 1 \wedge a_{6_4} + a_{9_4} = 3k) \Rightarrow a_{6_4} = a_{5_4} - 1$

$(a_{7_4} = a_{5_4} + 1 \wedge a_{6_4} = a_{5_4} - 1) \Rightarrow a_{5_4} \neq a_{6_4} \neq a_{7_4} \Rightarrow$ karty A_{5-7} tvoří SET.

Proto pokud vypadá čtveřice takto, nemohou být hodnoty žádné z vlastností devítice uspořádány v poměru 4:3:2.

3. V tomto případě už neplatí, že všechny hodnoty u třetí vlastnosti trojice musí být nutně různé. Zároveň ale nemohou být všechny stejné. Budou-li všechny různé, situace vypadá následovně:

hodnoty	a_{1_i}	a_{2_i}	a_{3_i}	a_{4_i}	a_{5_i}	a_{6_i}	a_{7_i}	a_{8_i}	a_{9_i}
i=1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
i=2	1	1	1	1	2	2	2	3	3
i=3	1	1	2	3	1	2	3	2	a_{9_3}
i=4	1	2	3	3	a_{5_4}	a_{6_4}	a_{7_4}	a_{8_4}	a_{9_4}

$[3 \nmid (1 + a_{7_4} + a_{8_4}) \wedge 3 \nmid (2 + a_{7_4} + a_{8_4})] \Rightarrow a_{7_4} + a_{8_4} = 3k$

$3 \nmid (3 + a_{6_4} + a_{8_4}) \Rightarrow a_{6_4} + a_{8_4} \neq 3k$

$(a_{6_4} + a_{8_4} \neq 3k \wedge a_{7_4} + a_{8_4} = 3k) \Rightarrow a_{7_4} \neq a_{6_4}$

$a_{9_3} = 1 \Rightarrow (a_{5_4} + a_{9_4} = 3k \wedge a_{7_4} + a_{9_4} \neq 3k \wedge a_{6_4} + a_{9_4} \neq 3k)$

$(a_{7_4} \neq a_{6_4} \wedge a_{5_4} \neq a_{6_4} \wedge a_{7_4} \neq a_{5_4}) \Rightarrow$ trojice karet je SETem.

$a_{9_3} = 3 \Rightarrow (a_{6_4} + a_{9_4} = 3k \wedge a_{7_4} + a_{9_4} \neq 3k \wedge a_{5_4} + a_{9_4} \neq 3k)$

$(a_{7_4} \neq a_{6_4} \wedge a_{5_4} \neq a_{6_4}) \Rightarrow a_{5_4} = a_{7_4}$

Zároveň ale platí:

$\{[3 \nmid (1 + a_{7_4} + a_{8_4}) \wedge 3 \nmid (2 + a_{7_4} + a_{8_4})] \Rightarrow a_{7_4} + a_{8_4}\} \wedge [3 \nmid (3 + a_{5_4} + a_{8_4} \Rightarrow a_{5_4} + a_{8_4} \neq 3k]$, proto $a_{5_4} \neq a_{7_4}$. Tím jsme se dostali do sporu, proto daná devítice neexistuje.

Zbývá prověřit onu výše zmiňovanou situaci, kdy v rámci trojice jsou u třetí vlastnosti zastoupeny pouze 2 různé hodnoty:

hodnoty	a_{1_i}	a_{2_i}	a_{3_i}	a_{4_i}	a_{5_i}	a_{6_i}	a_{7_i}	a_{8_i}	a_{9_i}
i=1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
i=2	1	1	1	1	2	2	2	3	3
i=3	1	1	2	3	1	1	2	2	3
i=4	1	2	3	3	1	a_{6_4}	a_{7_4}	a_{8_4}	a_{9_4}

$a_{6_4} = 2 \Rightarrow a_{8_4} = a_{9_4} = 3 \Rightarrow a_{7_4} = 3$, což nelze, protože pak by hodnota 3 byla u čtvrté vlastnosti pětkrát, tedy by mezi kartami musel být SET.

$a_{6_4} = 3 \Rightarrow a_{8_4} = a_{9_4} = 1 \Rightarrow (a_{7_4} \neq 2 \wedge a_{7_4} + 1 = 3k \Leftrightarrow a_{7_4} = 3$, což je spor, proto ani v tomto případě devítice bez SETu neexistuje.

4.4.2 Poměr 3:3:3

Viděli jsme, že poměr 3:3:3 může u některé z vlastností existovat tak, aby mezi kartami nebyl SET. Otázkou ale je, jestli může existovat u všech třech vlastností (kromě první, ve které se karty shodují) současně. První dvě vlastnosti budou bez újmy na obecnosti vypadat následovně:

hodnoty	a_{1_i}	a_{2_i}	a_{3_i}	a_{4_i}	a_{5_i}	a_{6_i}	a_{7_i}	a_{8_i}	a_{9_i}
i=1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
i=2	1	1	1	2	2	2	3	3	3

Tím nám v rámci skupiny vzniknou 3 trojice, které rozdělíme podle hodnot druhé vlastnosti. Řekněme, že u třetí vlastnosti první trojice se vyskytuje některá z hodnot právě dvakrát (nemůže se vyskytovat třikrát, pak by karty byly SETem):

hodnoty	a_{1_i}	a_{2_i}	a_{3_i}	a_{4_i}	a_{5_i}	a_{6_i}	a_{7_i}	a_{8_i}	a_{9_i}
i=1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
i=2	1	1	1	2	2	2	3	3	3
i=3	1	1	2						

V ostatních trojicích se všechny tři hodnoty mohou lišit, nebo právě dvě shodovat. Pokud by se ale v obou zbylých trojicích všechny tři hodnoty lišily, nejednalo by se o poměr 3:3:3 - hodnota 1 by se mezi kartami vyskytovala čtyřikrát, hodnota 3 pouze dvakrát. Proto se u druhé a třetí trojice musí také vždy dvě hodnoty shodovat, a to tak, že se vždy shoduje hodnota, která se neshoduje u žádné jiné trojice (aby nebyl porušen poměr 3:3:3):

hodnoty	a_{1_i}	a_{2_i}	a_{3_i}	a_{4_i}	a_{5_i}	a_{6_i}	a_{7_i}	a_{8_i}	a_{9_i}
i=1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
i=2	1	1	1	2	2	2	3	3	3
i=3	1	1	2	2	2	3	3	3	1

Vidíme ovšem, že v takovémto případě existuje ve skupině 6 karet, které se liší shodně ve třech vlastnostech, což znamená, že mezi nimi je SET.

To znamená, že u žádné z trojic a u žádné z vlastností se žádná hodnota nesmí opakovat, tzn. všechny tři hodnoty se musí lišit. Což ovšem není možné - v takovém případě pak pro každou z vlastností karet v rámci trojice bude platit, že se její hodnoty buď všechny shodují, nebo všechny liší. Trojice proto bude SETem. Proto poměr 3:3:3 opravdu nemůže být u všech třech vlastností tak, aby mezi kartami nebyl SET.

4.5 Karty se neshodují v žádné z vlastností

Protože jsme zjistili, že existuje 9 karet shodujících se v jedné vlastnosti, mezi nimiž není SET, víme, že existuje skupina nejméně 18 karet, mezi nimiž není SET. Čímž jsme vyvrátili tvrzení, že největší počet karet bez SETu je 16 - tvrzení, kvůli němuž jsem vlastně práci začala psát. Teoreticky jsem si tedy splnila svůj cíl, zkusme ale přeci jen problém dotáhnout do konce a zjistit, jaká je opravdu největší skupina karet bez SETu.

Věta 7 *Největší možná skupina karet, mezi nimiž není SET, je tvořena 20 kartami*[21].

Důkaz 5 *Opět provedeme důkaz sporem:*

Existuje skupina 21 karet, mezi nimiž není SET[22].

Vzhledem k tomu, že shodují-li se karty v jedné vlastnosti, je jich bez SETu nejvíce 9, znamená to, že počty hodnot první vlastnosti budou zastoupeny v jednom z následujících poměrů[23]

- 9 : 9 : 3
- 9 : 8 : 4
- 9 : 7 : 5
- 9 : 6 : 6
- 8 : 8 : 5
- 8 : 7 : 6
- 7 : 7 : 7

Pojďme se tedy podívat na každý s poměrů a zjistit, jestli hledaná skupina 21 karet může existovat.

[21] Příloha č.14
[22] Příloha č.13
[23] Přílohy č.15-20

4.5.1 Poměr 9:9:3

Víme, že pro každou ze zbývajících 3 vlastností platí, že počty hodnot se vyskytují v poměru $4:4:1$ *nebo* $3:3:3$ *a zároveň nemůže nastat situace, kdy se všechny 3 vlastnosti budou vyskytovat v poměru* $3:3:3$. [24] *Proto v každé skupině bude alespoň jedna vlastnost, jejíž hodnoty se budou vyskytovat v poměru typu* $4:4:1$. *V rámci devítice bude tedy čtyřikrát zastoupena hodnota* h_1*, čtyřikrát* h_2 *a jednou* h_3*, kde* $\{h_1,\ h_2,\ h_3\ \} \in \{1,2,3\}$. *Podle těchto hodnot si můžeme devítici rozdělit na 3 skupiny - dvě čtveřice a jednu jednoprvkovou skupinu. Každá čtveřice se nachází v jednom z následujících třech typů uspořádání*[25] *, kde vždy* $\{h_{1_i}, h_{2_i}, h_{3_i}\} \in \{1,2,3\}$. *Pro lepší přehlednost neuvádím v tabulkách ani hodnotu druhé vlastnosti, která je vždy pro všechny 4 karty ve čtveřici stejná.*

hodnoty	a_{1_i}	a_{2_i}	a_{3_i}	a_{4_i}
i=3	h_{1_3}	h_{1_3}	h_{2_3}	h_{2_3}
i=4	h_{1_4}	h_{2_4}	h_{1_4}	h_{3_4}

hodnoty	a_{1_i}	a_{2_i}	a_{3_i}	a_{4_i}
i=3	h_{1_3}	h_{1_3}	$h_{2_2}3$	h_{2_3}
i=4	h_{1_4}	h_{2_4}	h_{1_4}	h_{2_4}

hodnoty	a_{1_i}	a_{2_i}	a_{3_i}	a_{4_i}
i=3	h_{1_3}	h_{1_3}	h_{2_3}	h_{3_3}
i=4	h_{1_4}	h_{2_4}	h_{3_4}	h_{3_4}

Vidíme, že v jedné devítici se vyskytuje některá z kombinací (s opakováním) těchto typů čtveřic. Máme-li přidat devátou kartu budou její hodnoty následující (neuvažujeme-li hodnotu první vlastnosti, kterou mají všechny karty v devítici shodnou, a hodnotu druhé vlastnosti, kterou mají shodnou vždy všechny karty v rámci čtveřice):[26]

[24] str.33

[25] Přílohy č.11-13

[26] Ještě bych měla pro obecnost poznamenat, že h_i v jedné čtveřici se nemusí rovnat h_i v druhé čtveřici; potom se i třetí hodnota (= i-tá hodnota karty A_9) liší od obou předchozích. Pro větší přehlednost a stručnost zápisu jsem ale toto nijak jinak neodlišovala než touto poznámkou).

- $A_9 = [\ h_{3_3},\ h_{2_4}]$ *pro kombinaci prvního a druhého typu*
- $A_9 = [h_{2_3},\ h_{2_4}]$ *pro kombinaci prvního a třetího typu*
- $A_9 = [h_{2_3},\ h_{3_4}]$ *pro kombinaci druhého a třetího typu*
- $A_9 = [h_{3_3},\ h_{3_4}]$ *pro kombinaci druhého a druhého typu*

Ještě by měla existovat kombinace prvního a prvního typu a třetího a třetího typu, ale neexistuje tak, aby mezi kartami nebyl SET (jedna z vlastností vždy vede na uspořádání typu 4:3:2).

Nyní se již můžeme podívat na celou skupinu 21 karet. Víme, že v každé devítici se alespoň jednou u některé z vlastností vyskytuje poměr 4:4:1. Nejprve předpokládejme, že tento poměr se vyskytuje u shodné vlastnosti pro obě devítice (dejme tomu u druhé vlastnosti):

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}	a_{17}
i=1	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*2*	*2*	*2*	*2*	*2*	*2*	*2*	*2*
i=2	*1*	*1*	*1*	*1*	*2*	*2*	*2*	*2*	*1*	*1*	*1*	*1*	a_2	a_2	a_2	a_2

V tabulce nejsou uvedeny karty A_9 a A_{18}, které jsou také součástí obou devític, ale pro řešení jejich hodnoty znát nepotřebujeme. Proto tabulka pouze naznačuje čtveřice, jejichž třetí a čtvrté vlastnosti jsou uspořádány podle jednoho z výše uvedených typů. Hodnota $a_2 = 2 \vee 3$.

*Řekněme, že hodnoty první čtveřice jsou uspořádány podle **„typu a“**, hodnoty druhé čtveřice podle **„typu b“**, třetí podle **„typu c“** a čtvrté podle **„typu d“**. Víme, že kombinací dvou typů lze přesně určit hodnoty karty (právě jedné), kterou lze doplnit. To znamená, že vzhledem k uspořádání lze doplnit pouze karty, jejichž první hodnota bude 3. Pokud má být i druhá hodnota 3, pak jsou hodnoty dvou zbývajících vlastností určeny kombinacemi **a,d** a **b,c**. Protože hodnoty karet A_{1-4}, A_{14-17} a A_{5-8}, A_{10-13} se „liší shodně“ v prvních dvou vlastnostech, můžeme doplnit nejvýše jednu kartu, která se od všech ostatních liší stejným způsobem (tj. obě hodnoty prvních dvou vlastností jsou 3) - vznikne tak devítice, mezi kterou není SET.*[27] *Proto pokud doplním kartu A_{19}*

[27] Jedná se o obdobu toho, co jsem dokázala na str. 21, akorát o dimenzi výš

tak, že $a_{19_1,2} = 3$, existuje jediný způsob, jak této kartě přiřadit zbylé dvě hodnoty. Vzhledem k tomu, že je tento jediný způsob určen dvěma kombinacemi ***a,d*** *a* ***b,c****, musí být kombinace shodné:*

$$\{a,d\} = \{b,c\}$$

Pokud $a = b$, pak i $c = d$. V tom případě platí i to, že $\{a,c\} = \{b,d\} = \{a,d\} = \{b,c\}$

Proto pokud jsou hodnoty druhých vlastností karet A_{20-21} rovny $1 \vee 2$, jsou hodnoty zbylých vlastností určené toutéž kombinací jako hodnoty karty A_{19}. To znamená, že $a_{19_3} = a_{20_3} = a_{21_3} \wedge a_{19_4} = a_{20_4} = a_{21_4} \wedge a_{19_1} = a_{20_1} = a_{21_1}$, což jednoduše znamená, že máme 3 karty shodující se ve třech vlastnostech, tedy mezi nimi musí být SET. Proto nemůžeme doplnit 3 další karty, v tomto případě (kdy se v rámci devític vyskytuje poměr 4:4:1 alespoň jednou u stejné vlastnosti) poměr 9:9:3 neexistuje tak, aby mezi kartami nebyl SET.

Zbývá se podívat na případ, kdy se poměr 4:4:1 vyskytuje u různých vlastností. To znamená, že alespoň v jedné devítici je tento poměr zastoupen právě jednou, tedy alespoň jedna čtveřice v devítici musí být uspořádána podle třetího typu. Druhá čtveřice pak může být uspořádána podle libovolného typu. Podívejme se ještě na druhou devítici. Víme, že u druhé vlastnosti (tj. u té, kde se v první devítici vyskytuje poměr 4:4:1) bude poměr 3:3:3. U dalších dvou vlastností máme jediné dvě možnosti, jak hodnoty uspořádat - obě jsou znázorněny v následujících tabulkách:

hodnoty	a_{1_i}	a_{2_i}	a_{3_i}	a_{4_i}	a_{5_i}	a_{6_i}	a_{7_i}	a_{8_i}	a_{9_i}
i=2	*1*	*1*	*1*	*2*	*2*	*2*	*3*	*3*	*3*
i=3	h_{1_3}	h_{2_3}	h_{1_3}	h_{1_3}	h_{1_3}	h_{2_3}	h_{2_3}	h_{3_3}	h_{2_3}
i=4	h_{1_4}	h_{2_4}	h_{3_4}	h_{1_4}	h_{2_4}	h_{3_4}	h_{1_4}	h_{2_4}	h_{3_4}

Podle tohoto typu uspořádání bude poměr 4:4:1 u třetí vlastnosti. Může být ale i u čtvrté, tabulka bude (až na pořadí řádků) vypadat úplně stejně:

hodnoty	a_{1_i}	a_{2_i}	a_{3_i}	a_{4_i}	a_{5_i}	a_{6_i}	a_{7_i}	a_{8_i}	a_{9_i}
i=2	*1*	*1*	*1*	*2*	*2*	*2*	*3*	*3*	*3*
i=3	h_{1_3}	h_{2_3}	h_{3_3}	h_{1_3}	h_{2_3}	h_{3_3}	h_{1_3}	h_{2_3}	h_{3_3}
i=4	h_{1_4}	h_{2_4}	h_{1_4}	h_{1_4}	h_{1_4}	h_{2_4}	h_{2_4}	h_{3_4}	h_{2_4}

Než začneme, definujme si ještě typy trojic. První a druhý typ nalezneme v tabulkách[28]*. Existují ještě další typy, jak trojice uspořádat (pokud se u některé z vlastností vyskytuje u všech třech karet stejná hodnota), ty ale nebudeme potřebovat.*
Víme, že u druhé vlastnosti proti sobě stojí v rámci obou devític poměry 4:4:1 a 3:3:3. To znamená, že budeme-li chtít doplnit další karty, které se liší v první vlastnosti, bude to od všech hodnot (pro druhou vlastnost) nejvýše jedna karta.[29]*. Hodnoty posledních dvou vlastností karty, kterou je možné doplnit, jsou opět určené kombinacemi typů, tentokrát čtveřice a trojice. Prověříme-li všechny kombinace, zjistíme, že každou kombinací získáme vždy právě jednu kartu. Existuje jediná výjimka, a to pro kombinaci čtveřice třetího typu a trojice druhého typu:*

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}	a_{17}	a_{18}
i=1	*1*	*1*	*1*	*1*	*2*	*2*	*2*	*2*	*2*	*2*	*2*	*2*	*2*
i=2	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*2*	*2*	*2*	*3*	*3*	*3*
i=3	h_{1_3}	h_{1_3}	h_{2_3}	h_{3_3}	h_{1_3}	h_{2_3}	h_{3_3}	h_{1_3}	h_{2_3}	h_{3_3}	h_{1_3}	h_{2_3}	h_{3_3}
i=4	h_{1_4}	h_{2_4}	h_{3_4}	h_{3_4}	h_{1_4}	h_{2_4}	h_{1_4}	h_{1_4}	h_{1_4}	h_{2_4}	h_{2_4}	h_{3_4}	h_{2_4}

Představme si, že chceme doplnit kartu $A_{19}; a_{19_1} = 3$.

$[a_{19_2} = 1 \wedge a_{19_3} = h_{1_3}] \Rightarrow \{[3 \nmid (a_{1_4} + a_{10_4} + a_{19_4})] \wedge [3 \nmid (a_{2_4} + a_{10_4} + a_{19_4})]\} \Rightarrow$ $a_{19_4} = h_{2_4}$*, pak ale vidíme, že karty* A_2, A_{11}, A_{19} *tvoří SET. Protože poměry v rámci trojic jsou vždy shodné (liší se pouze hodnotami), dopadne to stejně, i když hodnoty* $a_{19_{2,3}}$ *budou jiné. Proto máme-li kombinaci čtveřice třetího typu a trojice druhého typu, nemůžeme doplnit žádnou další kartu, která by se lišila v první vlastnosti.*

Teď už víme všechno, abychom se mohli podívat na celou situaci dohromady. Zajímají nás pouze čtveřice a trojice v první a druhé devítici, proto ostatní karty (např. karta A_9*) nejsou v tabulce uvedeny:*

[28]V tabulkách je vždy barevně vyznačena pouze jedna trojice, všechny trojice v tabulce jsou ale téhož typu. Jak již bylo řečeno, oba typy jsou vlastně, až na pořadí vlastností, shodné.

[29]Pak kombinací skupin, které se liší v první vlastnosti - vznikne poměr 4:3:1, kdybychom doplnili víc karet, vznikl by poměr, který by znamenal, že mezi kartami musí být SET

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}	a_{17}	a_{18}
i=1	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*2*	*2*	*2*	*2*	*2*	*2*	*2*	*2*	*2*
i=2	*1*	*1*	*1*	*1*	*2*	*2*	*2*	*2*	*1*	*1*	*1*	*2*	*2*	*2*	*3*	*3*	*3*

V rámci první devítice musí být alespoň jedna čtveřice třetího typu. Proto musí být druhá devítice uspořádána podle prvního typu trojic - jinak by nebylo možné doplnit žádnou 19. kartu. Situace tedy bude následující:

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}	a_{17}	a_{18}
i=1	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*2*	*2*	*2*	*2*	*2*	*2*	*2*	*2*	*2*
i=2	*1*	*1*	*1*	*1*	*2*	*2*	*2*	*2*	*1*	*1*	*1*	*2*	*2*	*2*	*3*	*3*	*3*
i =3	h_{1_3}	h_{1_3}	h_{2_3}	h_{3_3}					h_{1_3}	h_{2_3}	h_{1_3}	h_{1_3}	h_{1_3}	h_{2_3}	h_{2_3}	h_{3_3}	h_{2_3}
i =4	h_{1_4}	h_{1_4}	h_{2_4}	h_{3_4}					h_{1_4}	h_{2_4}	h_{3_4}	h_{1_4}	h_{2_4}	h_{3_4}	h_{1_4}	h_{2_4}	h_{3_4}

Což znamená, že by bylo možné doplnit karty

$$A_{19} = [3, 1, h_{3_3}, h_{1_4}], A_{20} = [3, 2, h_{2_3}, h_{1_4}] \text{ a } A_{21} = [3, 3, h_{3_3}, h_{1_4}]$$

Teď musíme rozhodnout, jakého typu bude druhá čtveřice v rámci první devítice. Nemůžeme již doplnit karty tvořící čtveřici třetího typu - pak bychom totiž došli ke stejnému výsledku, s tím rozdílem, že by se karty A_{19-21} lišily v hodnotách první vlastnosti - konkrétně bychom došli k výsledku

$$A_{19} = [3, 3, h_{3_3}, h_{1_4}], A_{20} = [3, 2, h_{2_3}, h_{1_4}] \text{ a } A_{21} = [3, 1, h_{3_3}, h_{1_4}]$$

Vidíme tedy, že se karty nerovnají, proto je nemůžeme doplnit. Proto v tomto případě poměr 9:9:3 neexistuje.

Druhá čtveřice může být být tedy uspořádána podle prvního nebo druhého typu. V obou případech můžeme doplnit karty

$$A_{19} = [3, 1, h_{1_3}, h_{1_4}], A_{20} = [3, 2, h_{2_3}, h_{3_4}] \text{ a } A_{21} = [3, 3, h_{2_3}, h_{1_4}]$$

Víme, že ve snaze zjednodušit zápis jsme stanovili, že $h_{i_{(3,4}}$ v první čtveřici se nemusí rovnat $h_{i_{(3,4)}}$ ve druhé vlastnosti, i když je použito shodné značení. Proto není na první pohled vidět, jestli se obě varianty karet A_{19-21} shodují nebo liší. Vidíme ale, že první tři karty A_{19-21} se všechny shodují ve čtvrté vlastnosti, zatímco ve druhé variantě se shodují jen dvě. Proto můžeme dosadit nejvýše dvě karty (A_{19} a A_{20}), tedy poměr 9:9:3 také neexistuje.
Prověřili jsme všechny možnosti, které pro poměr 9:9:3 mohou nastat, a zjistili jsme, že tento poměr neexistuje tak, aby mezi kartami nebyl SET.

4.5.2 Poměr 9:8:4

V rámci devítice musí existovat alespoň jedna vlastnost, jejíž hodnoty jsou uspořádány v poměru typu 4:4:1, řekněme opět, že se jedná o druhou vlastnost. V rámci skupiny osmi karet budou jejich vlastnosti uspořádány v jednom z poměrů 4:4, 4:3:2 nebo 3:3:2. Jeden z těchto poměrů bude pochopitelně i u druhé vlastnosti.

Pokud bude u druhé vlastnosti poměr 4:4:0, budou proti sobě stát poměry 4:4:1 a 4:4. To znamená, že budeme-li chtít doplnit nějaké karty, které se od těchto 17 liší v hodnotě první vlastnosti, můžeme pro druhou vlastnost doplnit od každé hodnoty nejvýše jednu kartu, tedy celkem 3 karty. [30] *To znamená, že nikdy nedostaneme poměr 9:8:4.*

Pokud bude u skupiny osmi karet u druhé vlastnosti poměr 4:3:1, jedná se o úplně stejnou situaci - opět můžeme doplnit nejvýše 3 karty ze stejného důvodu.

Pokud bude osm karet uspořádáno podle poměru 3:3:2, dostaneme se do stejné situace, opět můžeme přidat nejvýše 3 karty. [31]

Proto poměr 9:8:4 také neexistuje tak, aby mezi kartami nebyl SET.

4.5.3 Poměr 9:7:5

V předchozím případě jsme také zjistili, že pokud se v jedné ze skupin vyskytuje poměr 4:4:i, a v druhé 4:i:i nebo 3:i:i, kde $i \in \{1, 2, 3\}$*, vždy bude možné doplnit nejvýše 3 karty lišící se od všech předchozích v první vlastnosti.*

V rámci devítice bude opět existovat alespoň jedna (řekněme opět druhá) vlastnost, jejíž hodnoty budou uspořádány v poměru 4:4:1. V rámci skupiny 7 karet mohou být hodnoty každé z vlastností uspořádány v jednom z poměrů 4:3, 4:2:1, 3:3:1 nebo 3:2:2. Což znamená, že do třetí skupiny je možné doplnit nejvýše 3 karty, proto ani poměr 9:7:5 neexistuje tak, aby mezi kartami nebyl SET.

[30] Aby vznikl vždy poměr 4:4:1, ne 4:4:2 a více, protože mezi takovými kartami musí být SET.

[31] Abychom pro množiny karet z různých skupin, které by mohly případně tvořit SET, dostali vždy poměr 4:3:1

4.5.4 Poměr 9:6:6

V rámci devítice bude opět alespoň u jedné vlastnosti poměr 4:4:1. V rámci šestice budou pro každou vlastnost karty uspořádány v některém z poměrů 4:2, 3:3, 4:1:1, 3:2:1 nebo 2:2:2. Proto jediný poměr, který má cenu zkoumat, je 2:2:2, který se musí vyskytovat u obou šestic u vlastnosti, kde se v devítici vyskytuje poměr 4:4:1.

Řekněme, že v rámci devítice se poměr 4:4:1 nachází určitě u druhé vlastnosti. U obou šestic se tedy u druhé vlastnosti musí vyskytovat poměr 2:2:2. V rámci šestice mohou být karty v poměru 2:2:2 uspořádány dvěma způsoby:[32]

hodnoty	a_{1_i}	a_{2_i}	a_{3_i}	a_{4_i}	a_{5_i}	a_{6_i}
i=1	h_{1_1}	h_{1_1}	h_{2_1}	h_{2_1}	h_{3_1}	h_{3_1}
i=2	h_{1_2}	h_{1_2}	h_{2_2}	h_{3_2}	h_{2_2}	h_{3_2}

hodnoty	a_{1_i}	a_{2_i}	a_{3_i}	a_{4_i}	a_{5_i}	a_{6_i}
i=1	h_{1_1}	h_{1_1}	h_{2_1}	h_{2_1}	h_{3_1}	h_{3_1}
i=2	h_{1_2}	h_{2_2}	h_{1_2}	h_{3_2}	h_{2_2}	h_{3_2}

U třetí a čtvrté vlastnosti, pokud se u devítice bude vyskytovat poměr 3:3:3, může se v šesticích vyskytovat nějaký z poměrů 2:2:2, 2:3:1 nebo 3:3. Dále se může (ale také nemusí) nacházet i u vlastnosti třetí a čtvrté. Také již z dřívějška víme, že v rámci devítice se musí vyskytovat alespoň jedna čtveřice typu 3.

I u třetí vlastnosti se vyskytuje poměr hodnot 4:4:1

1. Poměr 2:2:2 je uspořádán prvním možným způsobem
Podívejme se na takovou šestici spolu se čtveřicí třetího typu, kterou najdeme v devítici:

hodnoty	a_{1_i}	a_{2_i}	a_{3_i}	a_{4_i}	a_{10_i}	a_{11_i}	a_{12_i}	a_{13_i}	a_{14_i}	a_{15_i}
i=1	h_{1_1}	h_{1_1}	h_{1_1}	h_{1_1}	h_{2_1}	h_{2_1}	h_{2_1}	h_{2_1}	h_{2_1}	h_{2_1}
i=2	h_{1_2}	h_{1_2}	h_{1_2}	h_{1_2}	h_{1_2}	h_{1_2}	h_{2_2}	h_{2_2}	h_{3_2}	h_{3_2}
i=3	h_{1_3}	h_{1_3}	h_{2_3}	h_{3_3}	h_{1_3}	h_{1_3}	h_{2_3}	h_{3_3}	h_{2_3}	h_{3_3}

[32]Neexistuje třetí způsob - existovalo by 6 karet, které by se "lišily shodně"ve všech třech vlastnostech, tedy by mezi nimi musel být SET.

Nyní lze určit, které karty lze doplnit do třetí skupiny (tj. do skupiny, kde hodnota první vlastnosti = 1). Protože třetí skupina je také šestice, jejíž hodnoty první vlastnosti musí být zastoupeny v poměru 2:2:2, musíme od každé z hodnot první vlastnosti doplnit právě 2 karty. Všechny hodnoty těchto karet budou přitom záviset především na tom, jaká bude druhá čtveřice v rámci devítice.

Již dříve jsme ovšem dokázali, že v rámci jedné devítice nemohou být dvě čtveřice třetího typu současně. Proto bude druhá čtveřice prvního nebo druhého typu, situace bude vypadat následovně:

hodnoty	a_{1_i}	a_{2_i}	a_{3_i}	a_{4_i}	a_{5_i}	a_{6_i}	a_{7_i}	a_{8_i}	a_{10_i}	a_{11_i}	a_{12_i}	a_{13_i}	a_{14_i}	a_{15_i}
i=1	h_{1_1}	h_{1_1}	h_{1_1}	h_{1_1}	h_{1_1}	h_{1_1}	h_{1_1}	h_{1_1}	h_{2_1}	h_{2_1}	h_{2_1}	h_{2_1}	h_{2_1}	h_{2_1}
i=2	h_{1_2}	h_{1_2}	h_{1_2}	h_{1_2}	h_{2_2}	h_{2_2}	h_{2_2}	h_{2_2}	h_{1_2}	h_{1_2}	h_{2_2}	h_{2_2}	h_{3_2}	h_{3_2}
i=3	h_{1_3}	h_{1_3}	h_{2_3}	h_{3_3}	h_{1_3}	h_{1_3}	h_{3_3}	h_{3_3}	h_{1_3}	h_{1_3}	h_{2_3}	h_{3_3}	h_{2_3}	h_{3_3}

Z tabulky je vidět, že do třetí skupiny nemůžeme doplnit žádnou kartu, jejíž první tři souřadnice jsou [h_{3_1}, h_{3_2}, h_{1_3}] nebo [h_{3_1}, h_{3_2}, h_{2_3}] - to proto, že karty $A_{5,6,10,11}$ a karty $A_{7,8,10,11}$ tvoří čtveřice, které se liší stejně, tedy přidáním páté karty o uvedených souřadnicích by mezi nimi vznikl SET. Zároveň ale víme, že musíme doplnit právě dvě kary, jejichž první dvě souřadnice jsou [h_{3_1}, h_{3_2}]. Proto třetí souřadnice obou z nich musí mít hodnotu h_{3_3}. V takovém případě bude ale mezi kartami $A_{1,2,12}$ a těmito dvěma nově přidanými SET.[33]. Proto nemůžeme doplnit žádnou kartu, jejíž první dvě souřadnice jsou [h_{3_1}, h_{3_2}], což je v rozporu s nutnou podmínkou pro možnost existence druhé šestice tak, aby mezi kartami nebyl SET.

Proto jsme došli k závěru, že je-li poměr 2:2:2 v rámci šestice uspořádán prvním možným způsobem, neexistuje hledaná skupina 21 karet v poměru 9:6:6 tak, aby mezi kartami nebyl SET.

2. Poměr 2:2:2 je v rámci obou šestic u druhé vlastnosti uspořádán druhým možným způsobem
V rámci devítice musí být opět jedna čtveřice třetího a jedna prvního nebo druhého typu. Podívejme se nejprve na čtveřici třetího typu a jednu šestici:

[33] Ze stejného důvodu

hodnoty	a_{1_i}	a_{2_i}	a_{3_i}	a_{4_i}	a_{10_i}	a_{11_i}	a_{12_i}	a_{13_i}	a_{14_i}	a_{15_i}
i=1	h_{1_1}	h_{1_1}	h_{1_1}	h_{1_1}	h_{2_1}	h_{2_1}	h_{2_1}	h_{2_1}	h_{2_1}	h_{2_1}
i=2	h_{1_2}	h_{1_2}	h_{1_2}	h_{1_2}	h_{1_2}	h_{1_2}	h_{2_2}	h_{2_2}	h_{3_2}	h_{3_2}
i=3	h_{1_3}	h_{1_3}	h_{2_3}	h_{3_3}	h_{1_3}	h_{1_3}	h_{2_3}	h_{3_3}	h_{2_3}	h_{3_3}
i=4	h_{1_4}	h_{2_4}	h_{3_4}	h_{3_4}	h_{10}	h_{11}	h_{12}	h_{13}	h_{14}	h_{15}

Aby bylo řešení obecné, označme si hodnoty čtvrtých vlastností u šestice jako h_{10-15}*. Nyní již můžeme určit některé hodnoty vlastností karet, které je možné doplnit do třetí skupiny (tj. druhé šestice). Hodnoty prvních třech vlastností můžeme vždy určit konkrétně, a to devíti možnými způsoby, hodnoty čtvrtých vlastností označme jako* h_{16-24}*.*[34]

$A_{16} = [h_{1_1}, h_{1_2}, h_{1_3}, h_{16}]; [3 \nmid (1+h_{10}+h_{16}) \wedge 3 \nmid (2+h_{10}+h_{16})] \Rightarrow h_{10}+h_{16} = 3k$

$A_{17} = [h_{1_1}, h_{1_2}, h_{2_3}, h_{17}]; [3 \nmid (3+h_{11}+h_{17}) \wedge 3 \nmid (3+h_{10}+h_{17})] \Rightarrow h_{10} \neq h_{11}$

$A_{18} = [h_{1_1}, h_{1_2}, h_{3_3}, h_{18}]; [3 \nmid (1+h_{11}+h_{18}) \wedge 3 \nmid (2+h_{11}+h_{18})] \Rightarrow h_{11}+h_{18} = 3k \wedge h_{18} \neq h_{17}$

$A_{19} = [h_{1_1}, h_{2_2}, h_{1_3}, h_{19}]; [3 \nmid (3+h_{14}+h_{19}) \wedge 3 \nmid (3+h_{14}+h_{19})]$

$A_{20} = [h_{1_1}, h_{2_2}, h_{2_3}, h_{20}]; [3 \nmid (1+h_{15}+h_{20}) \wedge 3 \nmid (2+h_{15}+h_{18})] \Rightarrow h_{15}+h_{20} = 3k \wedge h_{20} \neq h_{19}$

$A_{21} = [h_{1_1}, h_{2_2}, h_{3_3}, h_{21}]; h_{14}+h_{21} = 3k \wedge h_{21} \neq h_{19}$

$A_{22} = [h_{1_1}, h_{3_2}, h_{1_3}, h_{22}]; h_{12}+h_{22} = 3k$

$A_{23} = [h_{1_1}, h_{3_2}, h_{2_3}, h_{23}]; h_{13}+h_{23} = 3k$

$A_{24} = [h_{1_1}, h_{3_2}, h_{3_3}, h_{23}]; h_{22}, h_{23} \neq h_{24}$

Nyní můžeme doplnit druhou čtveřici. Vzhledem k povoleným poměrům v rámci devítice se bude jednat o jednu z následujících čtveřic (protože se čtveřice liší pouze v hodnotách čtvrté vlastnosti, jsou hodnoty druhé možnosti uvedeny v závorce):

[34] U prvních 5 karet je podrobně ukázáno, jak jsme k daným podmínkám přišli, u dalších už uvádím rovnou výslednou podmínku - jedná se totiž stále o tentýž princip.

hodnoty	a_{5_i}	a_{6_i}	a_{7_i}	a_{8_i}
i=1	h_{1_1}	h_{1_1}	h_{1_1}	h_{1_1}
i=2	h_{2_2}	h_{2_2}	h_{2_2}	h_{2_2}
i=3	h_{1_3}	h_{1_3}	h_{3_3}	h_{3_3}
i=4	h_{1_4}	h_{2_4}	h_{2_4} (h_{3_4})	h_{1_4}

Protože $a_{10_3} = a_{11_3} \wedge (a_{5_3} = a_{6_3} \wedge a_{7_3} = a_{8_3})$, existují zde dvě čtveřice karet, které se liší stejně. Proto do třetí skupiny nemůžeme doplnit karty $A_{22} = [h_{3_1}; h_{3_2}; h_{1_3}; h_{22}]$ ani $A_{23} = [h_{3_1}; h_{3_2}; h_{2_3}; h_{23}]$, tedy zbývá jediná karta z trojice karet A_{22-24}. Ze zbývajících dvou trojic karet A_{16-18}, A_{19-21} však můžeme doplnit vždy nejvýše dvě karty, protože dané trojice tvoří SETy. Odsud je vidět, že proto do třetí skupiny doplníme nejvýše 5 karet.

V rámci devítice se poměr 4:4:1 vyskytuje právě u jedné vlastnosti

Řekněme, že tento poměr se vyskytuje u druhé vlastnosti. To znamená, že u třetí a čtvrté vlastnosti se musí vyskytovat poměr 3:3:3. I tak lze ale podle hodnot druhé vlastnosti rozdělit skupinu na dvě disjunktní čtveřice a jednu samostatnou kartu. Vzhledem k tomu, že právě jedna ze čtveřic musí být čtveřicí třetího typu, existuje jediné možné uspořádání:

hodnoty	a_{1_i}	a_{2_i}	a_{3_i}	a_{4_i}	a_{5_i}	a_{6_i}	a_{7_i}	a_{8_i}	a_{9_i}
i=1	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*
i=2	*1*	*1*	*1*	*1*	*2*	*2*	*2*	*2*	*3*
i=3	*1*	*1*	*2*	*3*	*3*	*3*	*2*	*2*	
i=4	*1*	*2*	*3*	*3*	*1*	*2*	*1*	*2*	

Přidáme-li k této devítici první šestici, bude uspořádání následující - jsou 2 způsoby uspořádání hodnot třetí vlastnosti. Podívejme se nejdříve na první způsob:

hodnoty	a_{10_i}	a_{11_i}	a_{12_i}	a_{13_i}	a_{14_i}	a_{15_i}
i=1	*2*	*2*	*2*	*2*	*2*	*2*
i=2	*1*	*1*	*2*	*2*	*3*	*3*
i=3	*1*	*2*	*1*	*2*	*1*	*2*
i=4	h_{10}	h_{11}	h_{12}	h_{13}	h_{14}	h_{15}

Podívejme se teď na kombinaci karet první čtveřice (z devítice) a této šestice karet. Budeme se snažit doplnit další karty (do druhé šestice), a to stejným způsobem, který jsme použili v předchozím případě:

hodnoty	a_{1_i}	a_{2_i}	a_{3_i}	a_{4_i}	a_{10_i}	a_{11_i}	a_{12_i}	a_{13_i}	a_{14_i}	a_{15_i}
i=1	*1*	*1*	*1*	*1*	*2*	*2*	*2*	*2*	*2*	*2*
i=2	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*2*	*2*	*3*	*3*
i=3	*1*	*1*	*2*	*3*	*1*	*2*	*1*	*2*	*1*	*2*
i=4	*1*	*2*	*3*	*3*	h_{10}	h_{11}	h_{12}	h_{13}	h_{14}	h_{15}

Lze doplnit tyto karty:

$A_{16} = [3; 1; 1; h_{16}]; h_{10} + h_{16} = 3k$

$A_{17} = [3; 1; 2; h_{17}]; h_{17} \neq h_{16}$

$A_{18} = [3; 1; 3; h_{18}]; h_{11} + h_{18} = 3k$

$A_{19} = [3; 2; 1; h_{19}]; h_{14} + h_{19} = 3k$

$A_{20} = [3; 2; 2; h_{20}]; h_{20} \neq h_{19}$

$A_{21} = [3; 2; 3; h_{21}]; h_{15} + h_{21} = 3k$

$A_{22} = [3; 3; 1; h_{22}]; h_{12} + h_{22} = 3k$

$A_{23} = [3; 3; 2; h_{23}]; h_{23} \neq h_{22}$

$A_{24} = [3; 3; 3; h_{24}]; h_{13} + h_{24} = 3k$

Kombinací druhé čtveřice a šestice získáme následující podmínky:

hodnoty	a_{1_i}	a_{2_i}	a_{3_i}	a_{4_i}	a_{10_i}	a_{11_i}	a_{12_i}	a_{13_i}	a_{14_i}	a_{15_i}
i=1	*1*	*1*	*1*	*1*	*2*	*2*	*2*	*2*	*2*	*2*
i=2	*2*	*2*	*2*	*2*	*1*	*1*	*2*	*2*	*3*	*3*
i=3	*3*	*3*	*2*	*2*	*1*	*2*	*1*	*2*	*1*	*2*
i=4	*1*	*2*	*1*	*2*	h_{10}	h_{11}	h_{12}	h_{13}	h_{14}	h_{15}

$A_{16} = [3; 1; 1; h_{16}]; h_{15} + h_{16} = 3k$

$A_{17} = [3; 1; 2; h_{17}]; h_{15} + h_{17} = 3k$

$A_{18} = [3; 1; 3; h_{18}]; h_{14} + h_{18} = 3k$

$A_{19} = [3; 2; 1; h_{19}]; h_{13} + h_{19} = 3k$

$A_{20} = [3; 2; 2; h_{20}]; h_{12} + h_{20} = 3k$

$A_{21} = [3; 2; 3; h_{21}]; h_{15} + h_{21} = 3k$

$A_{22} = [3; 3; 1; h_{22}]; h_{11} + h_{22} = 3k$

$A_{23} = [3; 3; 2; h_{23}]; h_{10} + h_{23} = 3k$

$A_{24} = [3; 3; 3; h_{24}]; h_{10} + h_{24} = 3k$

Protože dvojice podmínek vztahující se k téže kartě jsou vždy konjunkcí, zjistíme, že by opět muselo platit, že hodnoty h_{16-24} se rovnají. Proto můžeme doplnit nejvýše 4 karty.

V rámci šestice mohou být hodnoty třetí vlastnosti uspořádány ještě druhým způsobem:

hodnoty	a_{10_i}	a_{11_i}	a_{12_i}	a_{13_i}	a_{14_i}	a_{15_i}
i=1	*2*	*2*	*2*	*2*	*2*	*2*
i=2	*1*	*1*	*2*	*2*	*3*	*3*
i=3	*1*	*3*	*2*	*3*	*2*	*3*
i=4	h_{10}	h_{11}	h_{12}	h_{13}	h_{14}	h_{15}

Použijeme-li však stejný postup jako v předchozích případech, zjistíme totéž - pro takovéto uspořádání lze k 15 daným kartám ((devítici a šestici) přidat nejvýše 4 karty lišící se od předchozích v hodnotě první vlastnosti.

Proto pro skupinu 21 karet platí, že je-li nějaká z vlastností uspořádána v poměru 9:6:6, musí mezi kartami být SET.

4.5.5 Poměr 8:8:5

Víme, že pro skupinu 8 karet platí, že se hodnoty jejích vlastností vyskytují v *poměrech 4:4, 4:3:1, 4:2:2 nebo 3:3:2. To znamená, že jediná situace, kterou má smysl prověřovat, je taková, kdy se v každé osmici u každé vlastnosti vyskytuje poměr 3:3:2. Vezměme tedy jednu osmici a podívejme se, jestli je to vůbec možné:*

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
i=1	1	1	1	1	1	1	1	1
i=2	1	1	1	2	2	2	3	3

Rozložení hodnot prvních dvou vlastností je dáno. Podle hodnot u druhé vlastnosti si můžeme skupinu karet rozdělit na dvě trojice a jednu dvojici. Pro třetí vlastnost platí, že u každé trojice se musí každá hodnota vyskytovat nejvýše dvakrát. Z toho plynou možná uspořádání:

- *Pro obě trojice platí, že vždy u dvou karet (v rámci téže trojice) se vyskytuje stejná hodnota.*
- *Právě pro jednu trojici platí, že u dvou karet se vyskytuje tatáž hodnota.*
- *Pro každou trojici platí, že všechny hodnoty třetí vlastnosti karet jsou navzájem různé.*

1. V obou trojicích je hodnota třetí vlastnosti , která se vyskytuje u dvou karet

S ohledem na to, že i u třetí vlastnosti se musí v celé osmici vyskytovat poměr hodnot 3:3:2, vypadá celá situace takto:

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
i=1	1	1	1	1	1	1	1	1
i=2	1	1	1	2	2	2	3	3
i=3	h_{1_3}	h_{1_3}	h_{2_3}	h_{3_3}	h_{3_3}	h_{4_3}	h_{5_3}	h_{6_3}

Vidíme, že ve skupině vždy existují 4 karty, které se „liší shodně“ ve třech vlastnostech, proto k nim nemůžeme doplnit pátou takovou kartu. Vzhledem k podmínce celkového poměru 3:3:2 však ale jinou možnost nemáme, proto se dostaneme do sporu. Toto uspořádání osmice tedy není možné.

2. Pouze u jedné trojice se tatáž hodnota třetí vlastnosti vyskytuje právě u dvou karet

Což znamená, že výchozí uspořádání vypadá bez újmy na obecnosti takto:

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
i=1	1	1	1	1	1	1	1	1
i=2	1	1	1	2	2	2	3	3
i=3	1	1	2	1	2	3	2	3
i=4	1	2	3	1	1	h_{6_4}	h_{7_4}	h_{8_4}

Vysvětleme ještě pro jistotu hodnoty u čtvrté vlastnosti - hodnoty čtvrté vlastnosti u karet $A_{(4-6)}$ nemohou být všechny stejné ani vzájemně různé, pak by totiž karty tvořily SET. Proto mezi nimi musí být právě dvakrát shodná hodnota. Proto mezi kartami první trojice musí být každá z hodnot právě jednou - z předchozího případu víme, že v jiném případě by v rámci skupiny těchto osmi karet by SET.

$[3 \nmid (a_{1_4} + a_{5_4} + a_{8_4}) \wedge 3 \nmid (a_{2_4} + a_{5_4} + a_{8_4})] \Rightarrow h_{8_4} = 1$. *Což je ovšem spor s podmínkou, že poměr hodnot karet celkově je 3:3:2. Proto taková skupina osmi karet, kde by se hodnoty každých vlastností vyskytovaly v poměru 3:3:2, za daných podmínek neexistuje.*

3. V rámci trojic jsou všechny hodnoty třetí vlastnosti různé *A zároveň jsou hodnoty v osmici zastoupeny v poměru 3:3:2. Situace tedy vypadá takto:*

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
i=1	1	1	1	1	1	1	1	1
i=2	1	1	1	2	2	2	3	3
i=3	1	2	3	1	2	3	2	3

Ze všeho, co již víme, můžeme říci, že mezi hodnotami a_{1_4}, a_{2_4}, a_{3_4} budou právě dvě shodné. Stejně tak tomu bude i u druhé trojice, tedy u a_{4_4}, a_{5_4} a a_{6_4}. Z předchozích případů již víme, že v takovém případě dané celkové uspořádání 21 karet neexistuje tak, aby mezi kartami nebyl SET.

Prověřili jsme všechny možné situace, které mohou nastat, a zjistili jsme, že poměr 8:8:5 neexistuje tak, aby mezi kartami nebyl SET.

4.5.6 Poměr 8:7:6

V rámci osmice se karty vyskytují v některém z poměrů 4:4, 4:3:1, 4:2:2, 3:3:2. V rámci skupiny sedmi karet pak v některém z poměrů 4:3, 4:2:1, 3:3:1 *nebo 3:2:2. Jediná uspořádání, která je třeba prověřit jsou tedy ta, kde se každá z vlastností osmice vyskytuje v poměru 3:3:2 a každá z vlastností sedmice v jednom z poměrů 3:3:1 nebo 3:2:2. Z předchozího případu ale již víme, že neexistuje osmice, jejíž všechny vlastnosti by se vyskytovaly v poměru 3:3:2. Proto ani pro tento poměr nenalezneme „příznivé řešení", kdy by mezi 21 kartami nebyl SET.*

4.5.7 Poměr 7:7:7

V rámci skupiny sedmi karet mohou být karty uspořádány v jednom z poměrů 4:3, 4:2:1, 3:3:1 nebo 3:3:2. Jediné uskupení 21 karet, mezi nimiž by nemusel být SET, je proto takové, v jehož všech třech sedmicích se u každé vlastnosti vyskytuje jeden z poměrů 3:3:1 nebo 3:2:2. To znamená, že vezmeme-li jakoukoliv vlastnost (řekněme opět třeba druhou), může nastat jedna z následujících situací:

1. *U druhé vlastnosti se ve všech třech sedmicích nachází hodnoty v poměru 3:3:1*
2. *U druhé vlastnosti se ve dvou sedmicích vyskytují hodnoty v poměru 3:3:1 a v jedné sedmici v poměru 3:3:2*
3. *U druhé vlastnosti se ve dvou sedmicích vyskytují hodnoty v poměru 3:2:2 a v jedné sedmici v poměru 3:3:1*
4. *U druhé vlastnosti se ve všech třech sedmicích nachází hodnoty v poměru 3:2:2*

1. Třikrát poměr 3:3:1
Zároveň musí platit, že podíváme-li se na všech 21 karet dohromady (tj. bez členění na jednotlivé sedmičlenné skupiny), musí se u každé vlastnosti hodnoty vyskytovat v poměru 7:7:7.[35] *Proto bude výchozí situace bez újmy na obecnosti následující:*

[35] Pro všechny ostatní možné poměry jsme již dokázali, že neexistují tak, aby mezi kartami nebyl SET.

i=1	1 1 1	1 1 1	1	2 2 2	2 2 2	2	3 3 3	3 3 3	3
i=2	1 1 1	2 2 2	3	1 1 1	3 3 3	2	2 2 2	3 3 3	1

i=1	1 1 1	2 2 2	3 3 3
i=2	1 1 1	3 3 3	2 2 2

Vidíme, že v rámci jednotlivých sedmičlenných skupin lze karty rozdělit na dvě trojice a jednu zbývající kartu, a to právě podle hodnot druhé vlastnosti. Pro každou z takových trojic platí, že pro každou další vlastnosti jsou všechny tři hodnoty shodné, právě dvě hodnoty shodné, nebo všechny tři hodnoty různé.

Podívejme se nyní na první trojici první skupiny, druhou trojici druhé skupiny a na první trojici třetí skupiny. Vidíme, že dohromady tvoří skupinu devíti karet, které se liší shodně ve dvou vlastnostech:

Pro jednotlivé trojice opět platí, že pro každou další vlastnost jsou všechny tři hodnoty shodné, právě dvě hodnoty shodné, nebo všechny tři hodnoty různé. Kdyby ovšem byly všechny tři shodné, dostali bychom skupinu třech karet shodujících se ve třech vlastnostech, tedy by mezi nimi byl SET. Bude-li u dvou trojic platit, že právě dvě hodnoty jsou shodné, pak to musí platit i pro třetí trojici - z karet v rámci prvních dvou trojic totiž bude možné sestavit čtveřici, která se liší shodně v prvních třech vlastnostech. Proto bude existovat právě jedna hodnota, kterou nebude možné doplnit ke třetí vlastnosti karet třetí trojice. Tudíž není mužné, aby se všechny hodnoty lišily.

Zároveň platí, že budou-li u třetí vlastnosti v rámci nějaké trojice všechny hodnoty různé, musí být u čtvrté hodnoty této trojice právě dvě hodnoty shodné, aby trojice nebyla SETem. Zároveň z výše odvozeného plyne, že budou-li u jedné z trojic pro všechny vlastnosti všechny hodnoty různé, musí být všechny hodnoty různé i u některé z dalších trojic. Tedy i u čtvrté vlastnosti některé z dalších trojic budou právě dvě hodnoty stejné. Což znamená, splníme-li všechny podmínky, že u jedné z vlastností 3,4 bude pro každou z trojic platit, že právě dvě hodnoty jsou shodné. Situace bude bez újmy na obecnosti vypadat takto:

i=1	1 1 1	2 2 2	3 3 3
i=2	1 1 1	3 3 3	2 2 2
i=3	1 1 2	2 2 3	1 1 2
i=4	1 2	1	

Nyní se můžeme vrátit k celé skupině 21 karet:

i=1	1 1 1	1 1 1	1	2 2 2	2 2 2	2	3 3 3	3 3 3	3
i=2	1 1 1	2 2 2	3	1 1 1	3 3 3	2	2 2 2	3 3 3	1
i=3	1 1 2				2 2 3		1 1 2		
i=4	1 2				1				

Uvědomíme-li si, že to samé platí i pro druhou trojici první skupiny první trojici druhé skupiny a druhou trojici třetí skupiny, a že zároveň celkový poměr hodnot mezi všemi kartami musí být 7:7:7, zjistíme, že pro tento poměr skupina 21 karet bez SETu neexistuje. Zjistili jsme totiž, že máme-li devět karet, které se liší shodně v prvních dvou vlastnostech tak jako v právě prověřeném případě, pak třetí vlastnosti přiřadíme čtyřikrát hodnotu h_1, čtyřikrát hodnotu h_2 a jednou hodnotu h_3, tzn. hodnoty jsou uspořádané v poměru 4:4:1. Proto hodnoty v druhé vybrané devítici nesmí již být uspořádány v poměru 4:4:1, neboť by se mezi všemi 21 kartami pro třetí vlastnost vyskytovala alespoň jedna hodnota osmkrát, tzn. byl by porušen celkový poměr 7:7:7. Proto můžeme doplnit hodnoty třetí vlastnosti všech karet:

i=1	1 1 1	1 1 1	1	2 2 2	2 2 2	2	3 3 3	3 3 3	3
i=2	1 1 1	2 2 2	3	1 1 1	3 3 3	2	2 2 2	3 3 3	1
i=3	1 1 2	1 2 3	3	1 2 3	2 2 3	3	1 1 2	1 2 3	3

Vidíme, že u jedné vybrané devítice se u třetí vlastnosti vyskytuje poměr 4:4:1 a u druhé 3:3:3. Proto celkový poměr všech doplněných karet je 7:7:4, tedy $a_{7_3} = a_{14_3} = a_{21_3} = 3$. Zároveň víme, že stejná situace nastane i u čtvrté vlastnosti, proto i $a_{7_4} = a_{14_4} = a_{21_4}$, z čehož plyne, že karty $A_{7,14,21}$ tvoří SET. Proto skupina 21 karet uspořádaná dle těchto podmínek neexistuje tak, aby mezi kartami nebyl SET.

2. Dvakrát poměr 3:3:1, jednou 3:2:2

Uspořádáme-li hodnoty druhé vlastnosti v rámci jednotlivých sedmic tímto způsobem, pak nebude platit, že celkový poměr hodnot bude 7:7:7. V každé ze skupin totiž máme zastoupeny všechny 3 hodnoty - a to jednou, dvakrát *nebo třikrát. Pokud se nějaká z hodnot vyskytuje ve skupině dvakrát, musí se vyskytovat dvakrát také v právě jedné z dalších skupin. Což ovšem nelze, protože jediná skupina, kde se některé z hodnot vyskytují dvakrát, je třetí skupina.*

3. Dvakrát poměr 3:2:2, jednou 3:3:1

Zároveň víme, že i u každé z dalších vlastností se poměr 3:3:1 může vyskytovat nejvýše jednou. Bez újmy na obecnosti vypadá výchozí situace takto:

i=1	1 1 1	1 1 1	1	2 2 2	2 2	2 2	3 3 3	3 3	3 3
i=2	1 1 1	2 2 2	3	3 3 3	2 2	1 1	3 3 3	2 2	1 1

V druhé a třetí skupině jsou vždy dvě dvojice. Zaměřme se pouze na dvojice v druhé skupině. Pro každou z nich platí, že hodnota každé další vlastnosti může být u obou dvojic shodná, nebo pro obě různá. V první skupině (prvních 7 karet) najdeme zase dvě trojice. I pro ně aspoň pro jednu vlastnost platí, že hodnoty pro jednu trojici se všechny liší a v rámci druhé trojice je jedna z hodnot právě dvakrát, nebo že pro obě trojice je některá z hodnot zastoupena právě dvakrát.

Podívejme se nejdřív na situaci, kdy pro obě trojice platí, že některá z hodnot je u 3. vlastnosti zastoupena dvakrát, a zároveň pro alespoň jednu dvojici platí, že u obou karet je stejná hodnota:

i=1	1 1 1	1 1 1	1	2 2 2	2 2	2 2	3 3 3	3 3	3 3
i=2	1 1 1	2 2 2	3	3 3 3	2 2	1 1	3 3 3	2 2	1 1
i = 3	1 1	2 2			3	1 1			

Úvahami o kartách, které se liší stejně, můžeme postupně doplnit dalších několik hodnot:[36]

i=1	1 1 1	1 1 1	1	2 2 2	2 2	2 2	3 3 3	3 3	3 3
i=2	1 1 1	2 2 2	3	3 3 3	2 2	1 1	3 3 3	2 2	1 1
i = 3	1 1	2 2 3		1 2 3	2 3	1 1	1 2 1	1 2	2 3

[36] Všechny konkrétní kroky postupu jsem si dovolila vynechat, protože se jedná o ten samý princip jako v předchozích případech, nepovažuji tedy za nutné popisovat jej znovu - vedlo by to ke snížení čitelnosti práce.

Již teď je však zřejmé, že je porušen celkový poměr 7:7:7, proto mezi kartami musí být SET.

Podívejme se na situaci, kdy trojice zůstanou stejného typu, avšak pro všechny dvojice (ne jen ve druhé, ale v obou skupinách) bude platit, že v rámci nich se hodnot vždy liší:

i=1	1 1 1	1 1 1	1	2 2 2	2 2	2 2	3 3 3	3 3	3 3
i=2	1 1 1	2 2 2	3	3 3 3	2 2	1 1	3 3 3	2 2	1 1
$i = 3$	1 1	2 2		2	2 3	1	1	1 2	3

Zde nastanou dvě možnosti podle toho, zda $a_{16_3} = 1 \vee 2$. *Pokud* $a_{16_3} = 1$, *pak opět dostaneme jediné možné řešení, kdy* $a_{7_3} = 3$, *což je ovšem spor. Pokud* $a_{16_3} = 2$, *pak dostaneme tabulku:*

i=1	1 1 1	1 1 1	1	2 2 2	2 2	2 2	3 3 3	3 3	3 3
i=2	1 1 1	2 2 2	3	3 3 3	2 2	1 1	3 3 3	2 2	1 1
$i = 3$	1 1 3	2 2 3		2 1 3	2 3	1 3	1 2 3	1 2	3

Podíváme-li se na druhou a třetí skupinu (které jsou stejného typu), vidíme, že existuje jediný způsob, jak doplnit hodnoty 4. vlastnosti tak, aby mezi kartami nebyl SET, a zároveň byly splněny všechny ostatní podmínky:

i=1	3 3 3	3 3	3 3
i=2	3 3 3	2 2	1 1
$i = 3$	1 2 3	1 2	3 2
$i = 4$	1 1 3	2 3	1 3

Jedná se ovšem o poměr 3:3:1, který může být nejvýše u jedné skupiny, tedy ne u obou. Proto není možné skupinu uspořádat tak, aby mezi kartami nebyl SET.

Zbývá prověřit možnost, kdy v rámci první skupiny existuje jedna trojice tak, že se její všechny hodnoty navzájem liší. Stejným způsobem jako v předchozím případě dostaneme tabulku:

i=1	1 1 1	1 1 1	1	2 2 2	2 2	2 2	3 3 3	3 3	3 3
i=2	1 1 1	2 2 2	3	3 3 3	2 2	1 1	3 3 3	2 2	1 1
i =3	1 2 3	1 1 2			1 1		1 2 3	2	

Aby měla tato situace smysl, musí i u čtvrté vlastnosti v rámci první skupiny být jedna trojice, jejíž všechny hodnoty se liší, a jedna trojice, kde se právě dvakrát vyskytuje tatáž hodnota. Situace bude vypadat takto:

i=1	1 1 1	1 1 1	1	2 2 2	2 2	2 2	3 3 3	3 3	3 3
i=2	1 1 1	2 2 2	3	3 3 3	2 2	1 1	3 3 3	2 2	1 1
i=3	1 2 3	1 1 2							
i=4	1 1 2	1 2 3							

Za těchto podmínek $a_{7_3} = 2 \vee 3$
$a_{7_4} = 2 \Rightarrow [3 \nmid (a_{3_4} + a_{4_4} + a_{7_4}) \wedge 3 \nmid (a_{3_4} + a_{5_4} + a_{7_4})] \Rightarrow [3 \nmid (2 + 1 + a_{7_4}) \wedge 3 \nmid (2 + 2 + a_{7_4})] \Rightarrow a_{7_4} = 1$ *Pro* $a_{7_3} = 3$ *situace nemá řešení, které hledáme.*

i=1	1 1 1	1 1 1	1	2 2 2	2 2	2 2	3 3 3	3 3	3 3
i=2	1 1 1	2 2 2	3	3 3 3	2 2	1 1	3 3 3	2 2	1 1
i=3	1 2 3	1 1 2	2						
i=4	1 1 2	1 2 3	1						

Vidíme ale, že u čtvrté vlastnosti se v první skupině nevyskytuje ani poměr 3:3:1, ani 3:2:2, ale 4:2:1. Na počátku jsme zdůvodnili, proč nemá smysl tento poměr prověřovat - v rámci skupiny sice SET není, ale postupným přidáváním karet by vznikl. Proto ani pro tento typ uspořádání skupina 21 karet neexistuje.

4. U všech skupin se vyskytuje poměr 3:2:2

Tentokrát víme, že i u všech dalších vlastností se ve všech skupinách nachází poměr 3:2:2 - pro všechny situace, kdy se u alespoň jedné vlastnosti alespoň jednou vyskytoval poměr 3:3:1, jsme zjistili, že skupina 21 karet bez SETu neexistuje. Protože v každé ze skupin se vyskytuje poměr 3:2:2 a celkový poměr je 7:7:7, je zřejmé, že pro každou vlastnost platí, že v každé skupině se bude třikrát vyskytovat jiná hodnota. Proto výchozí situace vypadá následovně:

i=1	1 1 1	1 1	1 1	2 2 2	2 2	2 2	3 3 3	3 3	3 3
i=2	1 1 1	2 2	3 3	3 3 3	2 2	1 1	2 2 2	3 3	1 1

V každé skupině se nachází právě jedna trojice. Pro každou z následujících vlastností platí, že v rámci trojice se může tatáž hodnota vyskytovat nejvýše dvakrát. Podívejme se na první skupinu:

i=1	*1 1 1*	*1 1*	*1 1*
i=2	*1 1 1*	*2 2*	*3 3*
i=3	*1 1 2*		

Pokud by se hodnoty čtvrté a páté karty rovnaly, tzn. $a_{4_3} = a_{5_3}$*, pak* $a_{4_3} = a_{5_3} = 2 \vee 3$*, aby nebyl narušen poměr 3:2:2*[37]*.*

$a_{4_3} = a_{5_3} = 2 \Rightarrow (a_{6_3} \neq 3 \wedge a_{7_3} \neq 3) \Rightarrow \{a_{6_3}, a_{7_3}\} \in \{1, 2\}$*, což znamená, že karty nejsou uspořádány v poměru 3:2:2, ale 3:3:1. Proto není možné, aby se u žádné z dvojic vyskytovala tatáž hodnota. Proto hodnota, která se bude vyskytovat dvakrát u trojice, bude zároveň jedinou hodnotou, která se v rámci celé skupiny vyskytuje třikrát.*

Pokud se tedy jistá hodnota vyskytuje u některé z trojic dvakrát, znamená to, že u dalších trojic se musí vyskytovat dvakrát jiná hodnota. Pokud se u dvou trojic vyskytuje některá hodnota dvakrát, musí se dvakrát vyskytovat i některá hodnota u třetí trojice - z prvních dvou trojic lze totiž vybrat čtyři karty, které se liší shodně ve třech hodnotách. Existuje tedy hodnota, kterou nemůžeme doplnit k třetí vlastnosti třetí trojice. Proto se u této trojice nemohou všechny hodnoty vzájemně lišit:

i=1	*1 1 1*	*1 1*	*1 1*	*2 2 2*	*2 2*	*2 2*	*3 3 3*	*3 3*	*3 3*
i=2	*1 1 1*	*2 2*	*3 3*	*3 3 3*	*2 2*	*1 1*	*2 2 2*	*3 3*	*1 1*
i=3	*1 1*			*2 2*			$1 \vee 2$ *1* $\vee 2$		

Vidíme však, že ke třetí trojici nemůžeme doplnit právě tu hodnotu, kterou bychom potřebovali, abychom splnili podmínku, že v každé skupině se vyskytuje třikrát jiná hodnota. Proto karty nebudou uspořádány v celkovém poměru 7:7:7, tedy mezi nimi bude SET.

To znamená, že dvakrát se tatáž hodnota může vyskytovat nejvýše u jedné trojice. To znamená, že alespoň u dvou trojic budou všechny tři hodnoty různé, z čehož plyne, že pro čtvrtou vlastnost k nim budeme muset doplnit vždy

[37] Kdyby byla jejich hodnota 1, vyskytovala by se zde tato hodnota čtyřikrát.

dvakrát stejnou hodnotu, dostaneme se tedy do stejného problému jako před chvilkou.

Proto neexistuje skupina 21 karet uspořádaná tímto způsobem taková, ve které není SET.

Zároveň se jednalo o poslední možný typ uspořádání. V žádném z typů uspořádání nemůže být SET, jak jsme dokázali. Proto skupina s největším počtem karet, mezi nimiž není SET, je opravdu dvacetičlenná.

Kapitola 5

Strategie hry

Myslím, že u této hry nelze přesně určit vyhrávající strategii. Vždy se totiž najdou lidé, kteří mezi vyloženými kartami SET prostě rovnou "vidí". Z hlediska matematického ale existují různé způsoby, kterými lze SETy hledat, a s ohledem na různá fakta lze zobecnit, kdy je který z nich rychlejší a efektivnější.

5.1 Typy SETů a jejich pravěpodobnost výskytu

Již dříve jsme spočítali, že celkem existuje 1080 různých SETů.[1] Přitom $\frac{1}{10}$ všech SETů jsou SETy lišící se v jedné vlastnosti, $\frac{3}{10}$ SETy lišící se ve dvou vlastnostech, $\frac{2}{5}$ SETy lišící se ve třech vlastnostech a $\frac{1}{5}$ SETy lišící se ve všech čtyřech vlastnostech. Jinými slovy, pokud nalezneme SET, je to s pravděpodobností $P(1) = \frac{1}{10}$ SET, jehož karty se liší v jedné vlastnosti, s pravděpodobností $P(2) = \frac{3}{10}$ SET, jehož karty se liší ve dvou vlastnostech, s pravděpodobností $P(3) = \frac{2}{5}$ SET, jehož karty se liší ve třech vlastnostech a s pravděpodobností $P(4) = \frac{1}{5}$ SET, jehož karty se liší ve všech vlastnostech.

[1] kapitola 3.1

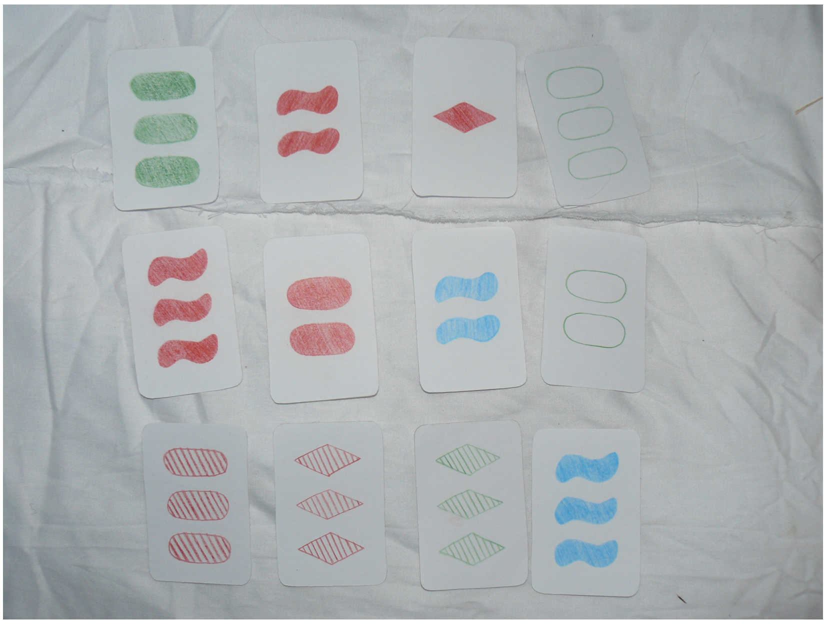
5.2 Hledání SETů

SETy se dají hledat různými způsoby. První z nich, který asi každého napadne, je zkoumat postupně všechny dvojice karet, určovat, která karta by s nimi tvořila SET a následně kontrolovat, zda se tato třetí karta nachází mezi vyloženými kartami. Nevýhoda tohoto postupu tkví ovšem v jeho pomalosti - při počtu n vyložených karet existuje $\frac{n \cdot (n-1)}{6}$ různých dvojic, které bychom museli prozkoumat.

Mnohem účinnější metodou je postupné převedení n-dimenzionálního problému na $n-1, n-2$ až (je-li třeba) na jednorozměrný problém, a následné hledání SETů pomocí definice SETu a všech dokázaných vět o maximálních počtech karet v jednotlivých nadrovinách.

Protože popis této metody obecně by byl pro naše účely zbytečně moc abstraktní, vysvětlíme si ji na konkrétním příkladu. Obecně samozřejmě platí také, protože spočívá v pouhé aplikaci dokázaných vět a definice SETu.

Podle oficiálních pravidel se hra hraje s 12 kartami. Mějme tedy 12 náhodně vybraných karet:



Obrázek 5.1: Příklad herní situace

Nyní uvažujme. Platí, že v každé vlastnosti se karty buď všechny liší, nebo všechny shodují. Řekněme, že se v nějaké shodují. Pokud se shodují v barvě, vidíme, že to nemůže být modrá - máme k dispozici pouze 2 modré karty, přičemž SET je tvořen třemi kartami. Může to však být zelená nebo červená. Prohlédneme-li si zelené karty, vidíme, že jsou čtyři. Přitom mezi nimi chybí počet 1, proto pokud se karty shodují v barvě - jsou všechny zelené, nemohou se lišit v počtu. Počet musí být proto pro všechny karty stejný. Protože mezi zelenými kartami je jednou počet 2 a třikrát počet 3, jediná možnost je, že karty budou mít počet 3. Okamžitě ale vidíme, že tyto 3 karty s počtem 3 netvoří SET - výplň je sice pro všechny karty různá, ale tvar je stejný právě pro dvě karty.

Už tedy víme, že shodují-li se karty SETu v barvě, nemůže to být ani modrá, ani zelená. Zbývá červená. Červených karet je 6. Jsou mezi nimi pouze 2 druhy výplně, to znamená, že má-li být mezi kartami SET, musí se karty shodovat ve výplni, tj. musí mít všechny plnou výplň. Zbudou nám 4 karty. Po jejich prohlédnutí zjistíme, že aby mezi nimi byl SET, musí se všechny lišit v počtu a zároveň tvaru. Snadno nalezneme trojici, pro kterou je konjunkce splněna - jeden červený plný kosočtverec, dva červené plné oválky a tři červené plné vlnky.

Našli jsme SET, což v běžné hře stačí. Možná se tento postup jeví jako zdlouhavý a komplikovaný, opak je ale pravdou. Samozřejmě musíme v počátku rozpoznat, odkud je nejvýhodnější začít SETy hledat, což se liší pro každou situaci. Zde jsme začali tak, že jsme si řekli, že barva bude stejná. Což bylo výhodné, protože jsme dostali tři skupinky, u kterých bylo poměrně rychlé rozhodnout, zda za těchto podmínek mezi nimi je nebo není SET - u dvou jsme rozhodli prakticky hned a u třetí (červené) také, protože u zbývajících dvou vlastností zde byla jedna (výplň), od níž se vyskytovaly pouze 2 hodnoty. Mohli jsme tedy pro tuto vlastnost okamžitě rozhodnout, že se v ní karty musí shodovat.

Méně výhodné by bylo říct si, že výplň je stejná - pro prázdnou a šrafovanou výplň bychom rozhodli hned, ale pro plnou výplň bychom dostali 7 karet všech možných tvarů, počtů i barev. Nebyl by zde tedy žádná vlastnost, pro kterou bychom mohli rovnou říci, zda se v ní karty SETu shodují nebo liší. Museli bychom dál prověřovat obě možné varianty.

I tak je ale toto řešení rychlejší než by bylo takové, kdy musíme prověřit všechny dvojice. Jak jsem ale řekla, nejedná se o žádnou přesnou výherní strategii. Ta totiž u hry stanovit nelze, vždy se najdou lidé, kteří SET rovnou vidí, aniž by cokoliv počítali.[2]. Mnou navrhovaný způsob je ovšem nejvýhodnějším a nejrychlejším systematickým způsobem, se kterým jsem se setkala. Zároveň se velice hodí, pokud chceme zjistit, kolik různých SETů je mezi kartami, popř. dokázat, že mezi kartami SET není. Zkrátka a dobře stačí vzít postupně všechny 4 vlastnosti jako vlastnost, v níž se karty mají shodovat a najít SETy. Nakonec potom musíme ještě prověřit případ, kdy se karty ve všech vlastnostech liší. Takto velice rychle nalezneme všechny SETy či zjistíme, že mezi kartami žádný další SET není. Člověk, který postupně prověřuje všechny možné dvojice, dojde ke stejnému výsledku, ovšem mnohem pomaleji. A člověk, který SETy prostě „vidí“, si nemůže být jistý, že si všiml všech, popř. že žádný nepřehlídl.

Zkusme si tedy ještě nakonec v našem modelovém příkladu najít všechny SETY.

Pokud se karty shodují v barvě, již víme, že existuje právě jediný SET - jeden červený plný kosočtverec, dva červené plné oválky a tři červené plné vlnky.

Pokud se karty shodují v počtu, nemůže to být počet 1, taková karta je tu totiž jediná. Pro počet 2 máme čtyři karty, mezi kterými se ale vyskytují pouze 2 typy výplně a nejvýše dvakrát táž barvy. SETem tedy může být pouze taková množina tří karet, které se shodují ve výplni a zároveň vzájemně liší v barvě. Konjunkcí těchto podmínek však dostáváme prázdnou množinu. Proto mezi kartami není SET a poslední možností je počet 3. Pro počet 3 se zde vyskytuje 7 karet. Snadno zjistíme, že se nemohou shodovat ve výplni ani v barvě. Proto jediný přípustný SET je takový, jehož karty se liší ve výplni a zároveň v barvě. Protože prázdná výplň se zde nachází pouze jednou, a to u třech prázdných zelených oválků, musí se tato karta určitě vyskytovat v námi hledaném SETu. Ostatní karty už tedy nesmí být zelené. Tím nalezneme SET tři prázdné zelené oválky, tři plné modré vlnky a tři červené šrafované kosočtverce.

Pokud se karty shodují v tvaru, velice jednoduše prověříme u všech třech skupin (samé oválky, samé vlnky nebo samé kosočtverce), že žádný takový SET neexistuje.

Pokud se karty shodují ve výplni, jediná skupina, kde by mohl být SET,

[2]Protože hledání SETů „mým“ způsobem je vlastně počítáním - hledáme trojici karet, pro jejichž všechny vlastnosti platí, že součet jejich hodnot je dělitelný třemi

je skupina karet s plnou výplní. Víme, že v barvě i počtu se musí lišit (takové SETy jsme totiž již nalezli dříve), proto mezi kartami SETu musí určitě být karta se třemi plnými zelenými oválky, jedná se totiž o jedinou zelenou kartu. Snadno potom již nalezneme SET tři plné zelené oválky, dvě plné modré vlnky a jeden plný červený kosočtverec.

Zbývá prověřit situaci, kdy se karty ve všech vlastnostech liší. Protože je zde jediná karta, která má hodnotu pro počet rovnu dvěma, musí být určitě v potenciálním SETu. Jedná se o kartu jeden plný červený kosočtverec. Víme, že v SETu bude určitě nějaká modrá karta, avšak vidíme, že všechny modré karty jsou plné. Jinými slovy shodují se s první kartou v hodnotě výplně. Tedy neexistuje SET, který by byl tvořen kartami lišícími se ve všech vlastnostech.

Prověřili jsme všechny možné situace a nalezli jsme všechny možné SETy vyskytující se mezi 12 náhodně vybranými kartami.

Kapitola 6

Herní varianty

V oficiální verzi má hra 4 vlastnosti, z nichž každá nabývá 3 možných hodnot. Obecně lze ale vytvořit takovou hru, která bude mít n vlastností, z nichž každá bude nabývat m různých hodnot, přičemž n a m jsou přirozená.

6.1 Obecná charakteristika

V takovém případě bude hra obsahovat m^n vzájemně různých karet. Každý SET je tvořen m kartami. Zároveň již ale neplatí, že SET je jednoznačně určen dvěma kartami[1]. Ano, pro každé dvě karty můžeme rozhodnout, zda se jejich hodnoty příslušných vlastností liší nebo shodují. Z čehož určíme, zda se i ostatní vlastnosti budou lišit nebo shodovat. Pokud se ale budou lišit, víme pouze to, kterých hodnot budou nabývat, ne však již to, která karta bude nabývat které hodnoty. Proto je SET jednoznačně určen až $m-1$ kartami. Odsud můžeme určit, jaký je počet všech SETů v obecné variantě hry.

Hra obsahuje m^n karet. SET je jednoznačně určen $m-1$ kartami. Celkem je možné vytvořit

$$\binom{m^2}{m-1}$$

různých kombinací o $m-1$ kartách. Musíme si ale uvědomit, že mám-li SET tvořený $A_1, A_2, ..., A_m$, pak tento a právě tento SET určuje jeho libovolná

[1]myšleno pro $m > 3$

$(m-1)$-prvková podmnožina. Aby žádný SET nebyl započítaný dvakrát, celkový počet kombinací musíme vydělit počtem takových podmnožin, tj.

$$\binom{m}{m-1}$$

Celkem tedy v obecné hře existuje

$$\frac{\binom{m^n}{m-1}}{\binom{m}{m-1}} = \frac{m^n!}{(m^n - m + 1)! \cdot m!}$$

různých SETů.

Pravděpodobnost, že vyložím m karet jako SET, lze opět spočítat dvěma způsoby. První způsob je úvahou, že ke každé $(m-1)$-tici karet existuje právě jedna karta, která s nimi tvoří SET. Pravděpodobnost, že k již vybraným $m-1$ kartám vyberu právě onu jedinou kartu, je

$$\frac{1}{m^n - (m-1)} = \frac{1}{m^n - m + 1}$$

V druhém případě si řekneme, že existuje celkem

$$\binom{m^n}{m}$$

různých m-tic, z nichž právě

$$\frac{m^n!}{(m^n - m + 1)! \cdot m!}$$

je SETem. Pravděpodobnost, že náhodně vybraná m-tice bude SETem, je proto

$$\frac{\frac{m^n!}{(m^n - m + 1)! \cdot m!}}{\binom{m^n}{m}} = \frac{1}{m^n - m + 1}$$

Poslední problém, na který se zaměříme obecně, bude průměrný počet SETů p_s mezi l kartami, kde l je přirozené.

Mezi l kartami existuje celkem

$$\binom{l}{m}$$

různých m-tic. U každé z nich je pravděpodobnost, že se jedná o SET, rovna

$$\frac{1}{m^n - m + 1}.$$

Proto průměrný počet SETů mezi l kartami je

$$p_s = \frac{\binom{l}{m}}{m^n - m + 1}.$$

6.2 Příklady konkrétních herních variant

Vyrobila jsem 3 herní varianty. První z nich byla varianta, kdy karty měly pouze 3 vlastnosti a každá z nich nabývala čtyřech různých hodnot. Druhá varianta byla taková, že karty měly 5 vlastností (přidala jsem ještě velikost) a každá z nich nabývala třech různých hodnot. Ve třetí variantě měly karty 5 různých vlastností, z nichž každá nabývala čtyř možných hodnot. Na závěr této práce bych si tedy dovolila malé srovnání těchto variant.

6.2.1 Karty mají 3 vlasnosti a 4 různé hodnoty

Konkrétně se jedná o tyto vlastnosti a hodnoty:

- BARVA - červená, zelená, modrá, žlutá
- TVAR - trojúhelník, čtverec, kruh, obdélník
- VÝPLŇ - plná, šrafovaná, tečkovaná, prázdná
- POČET - 1, 2, 3, 4

Dosazením do obecných vzorců zjistíme, že tato varianta obsahuje **64 karet**. Jeden SET je tvořen čtyřmi kartami, přičemž existuje **10 416** různých SETů. Pravděpodobnost, že vyložím 4 náhodné karty jako SET, je $\frac{1}{61}$, což je víc než u originální varianty hry. Mezi 12 kartami se pak nachází průměrně přibližně 8 SETů, což je také mnohem víc než u originálu hry. Obecně si myslím, že tato varianta hry je vůbec nejjednodušší - je to dáno tím, že karty mají o 1 vlastnost méně, tedy se vlastně pohybujeme pouze v třídimenzionálním prostoru. Karty se mohou lišit nejvýše ve dvou vlastnostech, není tak složité je najít.

6.2.2 Karty mají 5 vlastností a 3 různé hodnoty

Přidala jsem ještě vlastnosti VELIKOST. Tato varianta hry obsahuje **243 karet**. Jeden SET je tvořen třemi kartami, přičemž existuje **9801** různých SETů. Pravděpodobnost, že vyložím 3 náhodné karty jako SET, je $\frac{1}{241}$. Mezi 12 kartami se průměrně nachází 0,91 SETU, což je mnohem méně než při originální variantě hry. Proto se běžně hraje s více kartami najednou[2], situace není zrovna přehledná a karty se navíc mohou lišit až ve 4 vlastnostech. Tato varianta hry je dle mého názoru na hranici hratelnosti.

6.2.3 Karty mají 5 vlastností a 4 různé hodnoty

Tato varianta hry obsahuje neuvěřitelných **1024** karet.[3] Jeden SET je tvořen čtyřmi kartami a existuje celkem **178 433 024** různých SETů. Přitom pravděpodobnost, že vyložím 4 karty jako SET je $\frac{1}{1021}$ a mezi 12 kartami se vyskytuje průměrně 0,5 SETu. Tato varianta je prakticky nehratelná. Je to způsobeno hlavně pravděpodobností výskytu SETu - často je nutné vyložit mnohem více než 12 karet, aby mezi kartami byl SET. I když pak mezi kartami SET je, situace je vzhledem k velkému počtu karet na stole natolik nepřehledná, že je velice obtížné daný SET najít. Navíc se pohybujeme v pětirozměrném prostoru, což při hře vyžaduje mnohem větší představivost než ve čtyřrozměrném prostoru. Dalším problémem je bezesporu množství karet, vzhledem ke kterému není možné hru dohrát v rozumném časovém horizontu.

Věřím, že jsou lidé, kteří by byli schopni hrát tuto variantu hry bez problémů, zároveň ale myslím, že je to jedna z posledních hratelných variant.

[2] Běžně mezi 20-30

[3] Příloha č.21

Nevím, do jaké míry by byla hratelná varianta 3^6, všechny jiné „vyšší“ varianty už ale obsahují ještě mnohem více než 1024 karet, což je hlavní, avšak zásadní příčinou jejich nehratelnosti.

Závěr

Závěrem mohu říct, že hlavní cíl práce byl splněn - nalezla jsem největší možnou skupinu karet bez SETu, a to jak obecně, tak pro konkrétně zadané podmínky. Všechny dokázané skutečnosti je možné aplikovat na rozhodování a hledání SETů při reálné hře, konkrétně na optimální strategii, která je stále stejná bez ohledu na množství protihráčů, dále pak na rychlé a efektivní nalezení všech SETů v dané skupině karet. Dalším možným využitím by bylo napsání počítačového programu, který by pracoval na základě zjištěných poznatků, což znamená, že by nemusel zkoumat všechny konkrétní situace, pracoval by tudíž také rychleji a efektivněji.

Kromě toho byla popsána a zobecněna základní kombinatorika hry, která nejen napomáhá lepšímu pochopení hry, ale i umožňuje vznik a charakteristiku nových herních variant.
Práce také otevírá plno možností pro další zkoumání - budeme-li otázku největší skupiny karet bez SETu chápat jako otázku největšího počtu bodů ve čtyřrozměrné krychli, které jsou po třech nekolineární, jistě nás napadne otázka, kolik může být takových bodů obecně v n-rozměrné krychli. Dále by nás mohlo zajímat, kolik různých takových (konkrétních) skupin existuje apod.

Zůstává také plno nevyřešených otázek, např. kolik nejvíce SETů se může vyskytovat mezi n kartami, jak se situace změní, přidáme-li druhou sadu karet atd.

Myslím, že hra SETy je ve své geniální jednoduchosti plná potenciálních matematických problémů z různých matematických oblastí, jejichž postupným řešením nacházíme stále nové a nové otázky. Jedná se o hru, kterou může hrát prakticky kdokoliv, a která je neobyčejným spektrem složitostí problémů schopna zaujmout velice širokou škálu lidí. A právě proto je tolik krásná.

Literatura

[1] *Set Enterprises, Inc.*[online].c2012,[cit.2013-09-21]. Dostupné z: http://www.setgame.com

[2] Jiří Anděl, *Matematika náhody*, Praha: MATFYZPRESS 2007, 292s., ISBN 8073780046

[3] Jiří Svršek, *Historie řešení kombinatorických problémů*,[online].c2013,[cit.2013-11-08]. Dostupné z: http://www.natura.baf.cz/natura/1996/11/9611-4.html

[4] Jindřich Bečvář, *Lineární algebra*, Praha: MATFYZPRESS 2010, 433.s, ISBN 978-80-7378-135-4

Seznam příloh

Příloha č.16: Konkrétní příklad poměru 9:8:4 (str.45)

Příloha č.17: Konkrétní příklad poměru 9:7:5 (str.45)

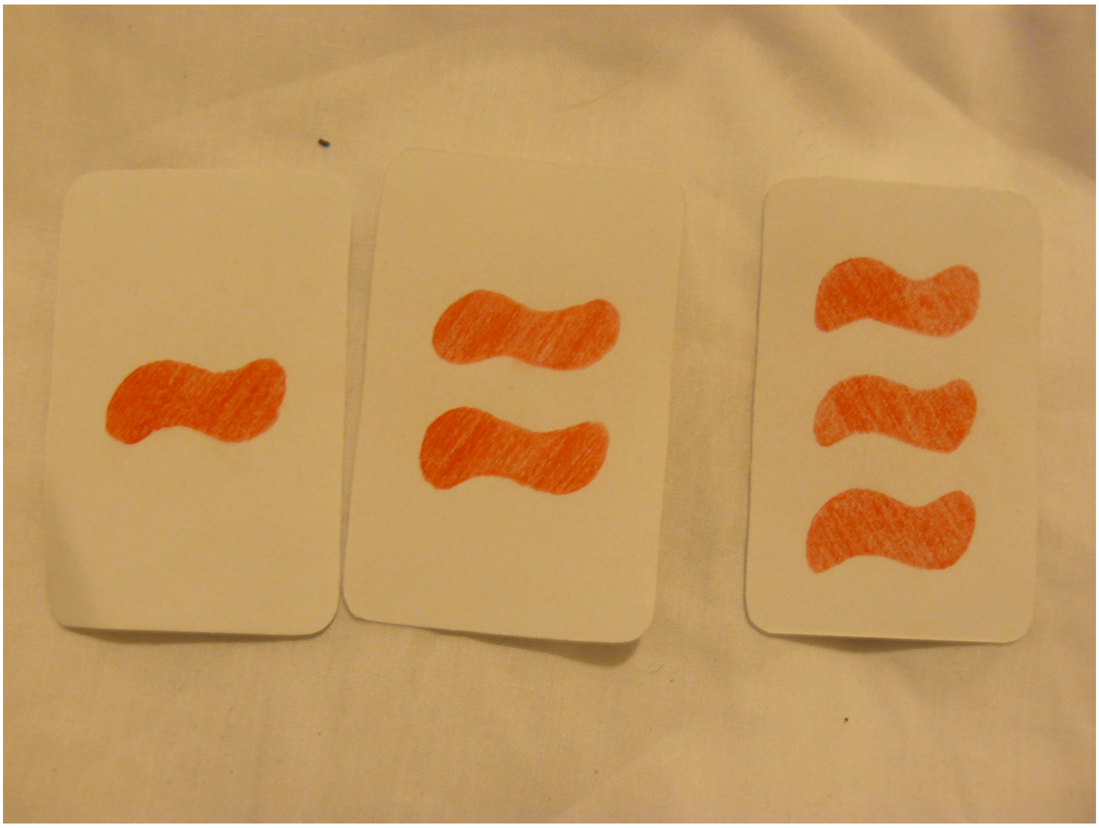
Příloha č.18: Konkrétní příklad poměru 9:6:6 (str.45)

Příloha č.19: Konkrétní příklad poměru 8:7:6 (str.45)

Příloha č.20: Konkrétní příklad poměru 7:7:7 (str.45)

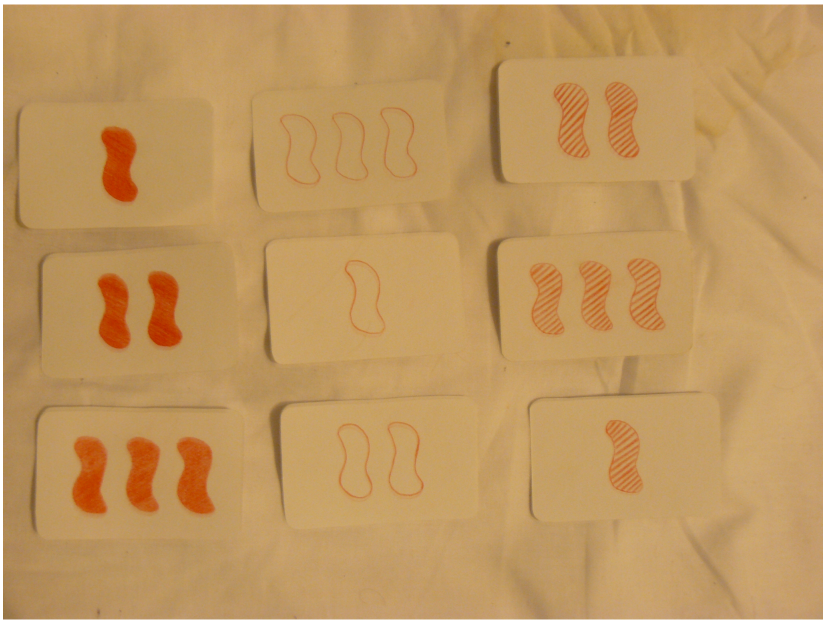
Příloha č.21: Ukázka vlastní varianty hry o 1024 kartách (celá varianta má 64 stránek, proto není reálné dát ji do příloh)

Příloha č.1



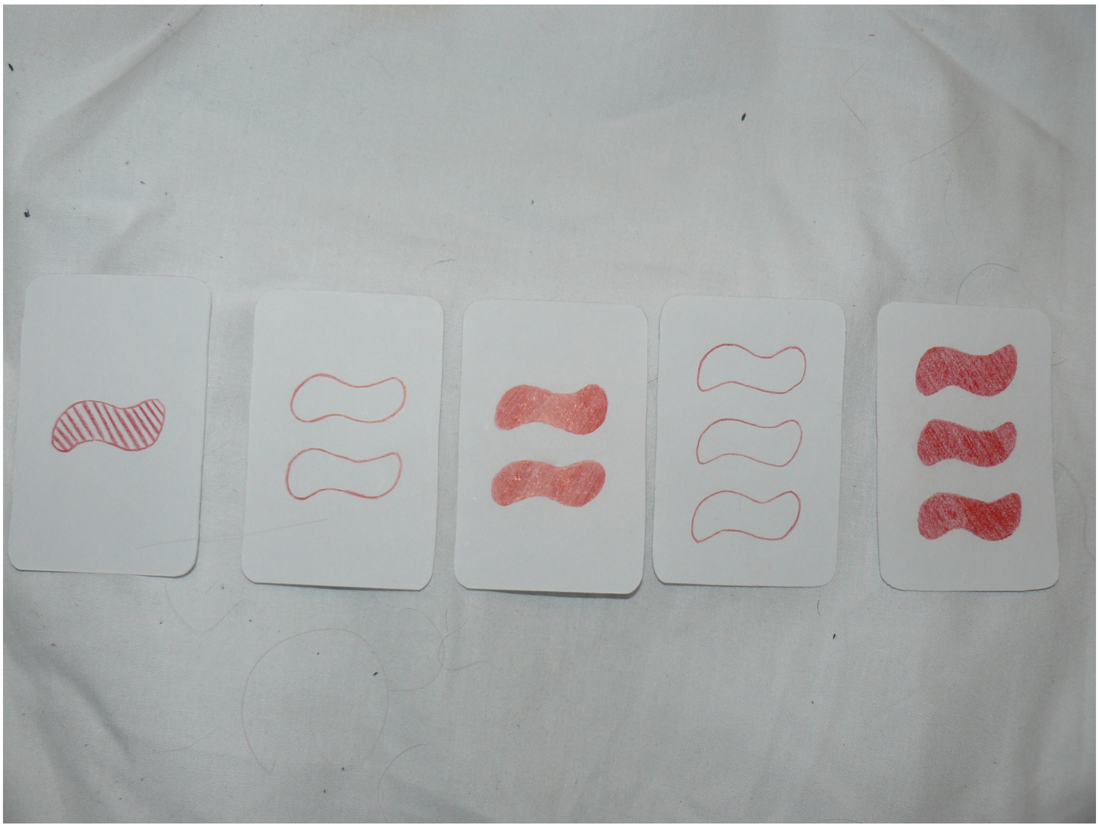
Karty se shodují ve třech vlastnostech, a to v tvaru, barvě a výplni. Karty se liší v počtu. Zároveň vidíme, že tyto 3 karty tvoří SET.

Příloha č.2



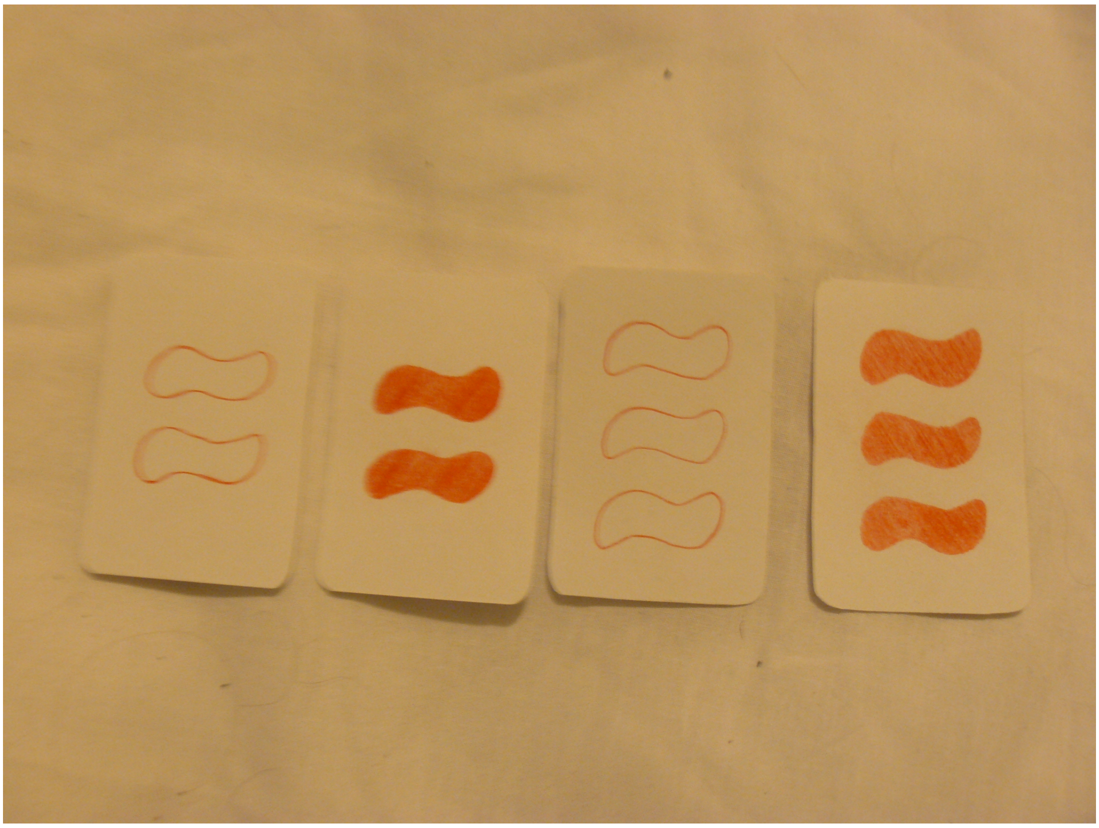
Karty se shodují ve dvou vlastnostech, a to v tvaru a barvě. V počtu a výplni se všechny vzájemně liší.

Příloha č.3



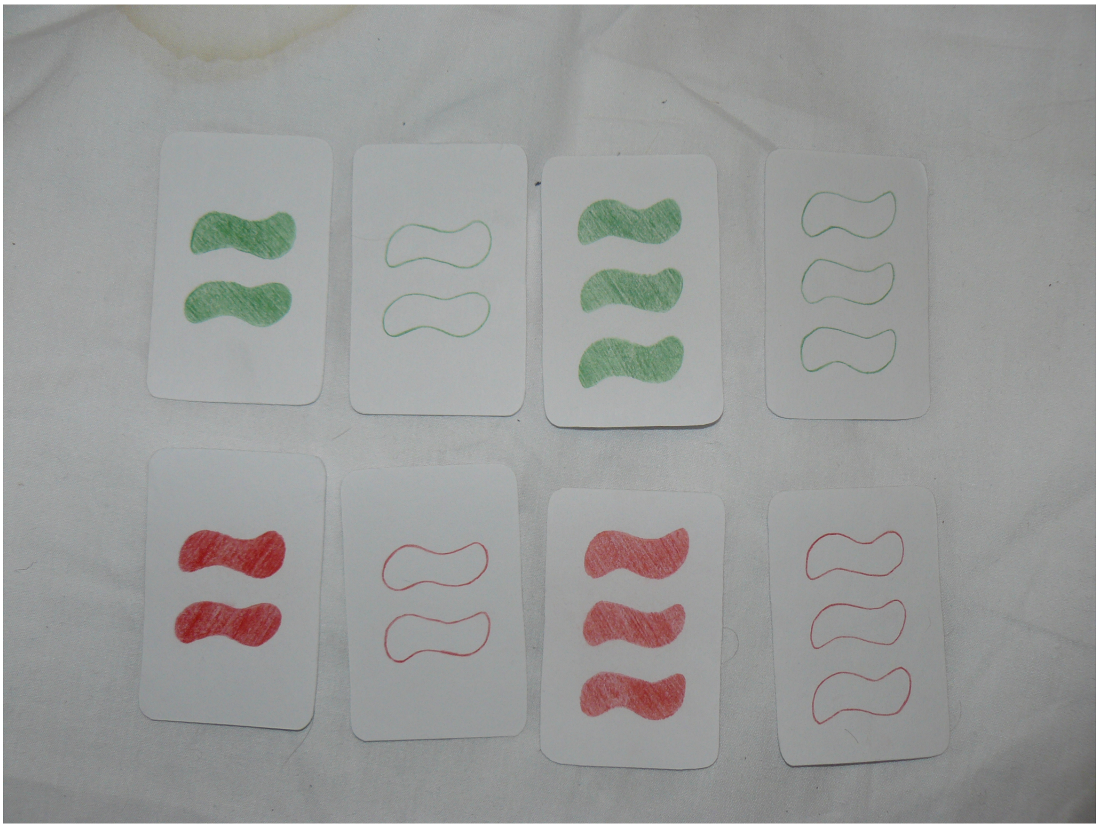
Karty se shodují ve dvou vlastnostech - v barvě a tvaru. Ve zbylých dvou vlastnostech se liší. Označíme-li jako třetí vlastnost počet, vidíme, že 2 hodnoty (počet 2 a počet 3) jsou zde zastoupeny dvakrát, jedna hodnota (počet 1) pouze jednou.

Příloha č.4



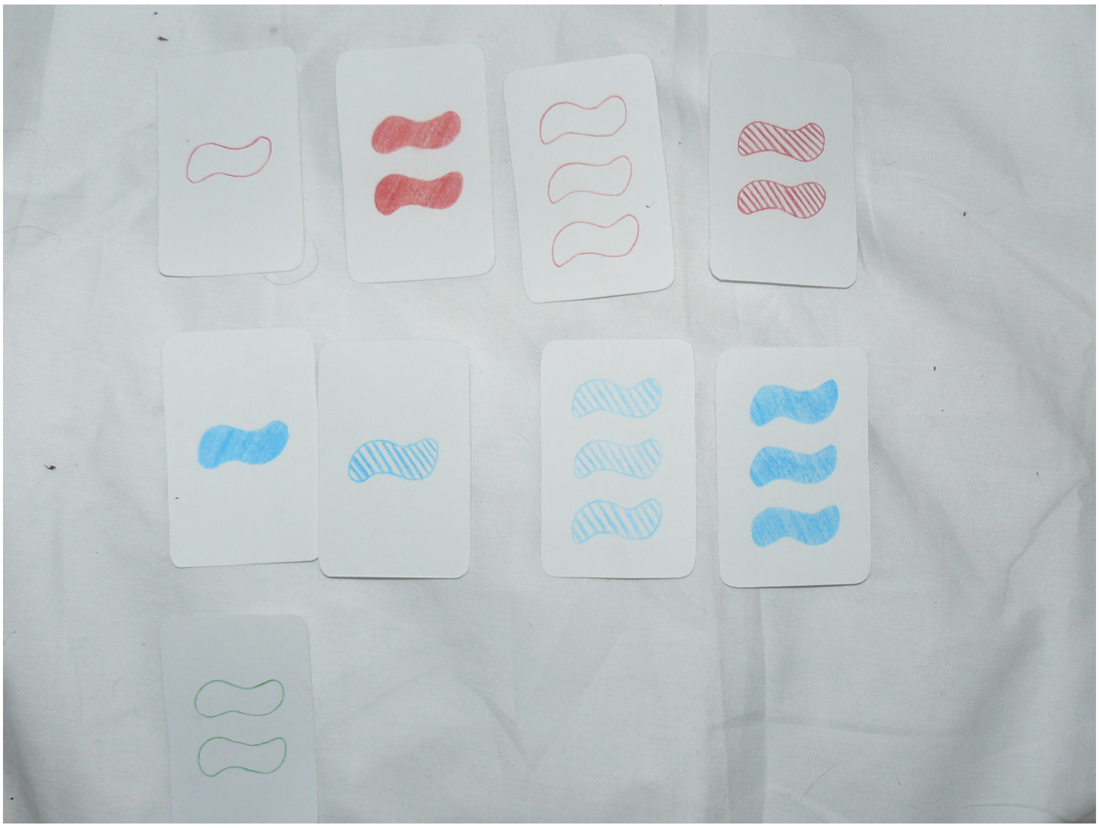
Karty se shodují ve dvou vlastnostech - v barvě a tvaru. Ve zbylých dvou vlastnostech se liší. Označíme-li jako třetí vlastnost počet, vidíme, že 2 hodnoty (počet 2 a počet 3) jsou zde zastoupeny právě dvakrát, jedna hodnota (počet 1) zde není zastoupena vůbec. Proto mezi kartami nemůže být SET.

Příloha č.5



Karty se shodují v jedné vlastnosti, a to v tvaru. Ve všech ostatní vlastnostech se vzájemně liší. Protože pro vlastnost barva zde jsou pouze dvě hodnoty - červená a zelená, nemůže mezi kartami být SET, jehož karty by se lišily v barvě. Proto pokud by mezi nimi měl být SET, pak pouze takový, jehož karty se v barvě shodují, tedy v rámci jednotlivých čtveřic. Čtveřice jsou ale typově shodné jako čtveřice z přílohy č. 4, proto v rámci nich SET není.

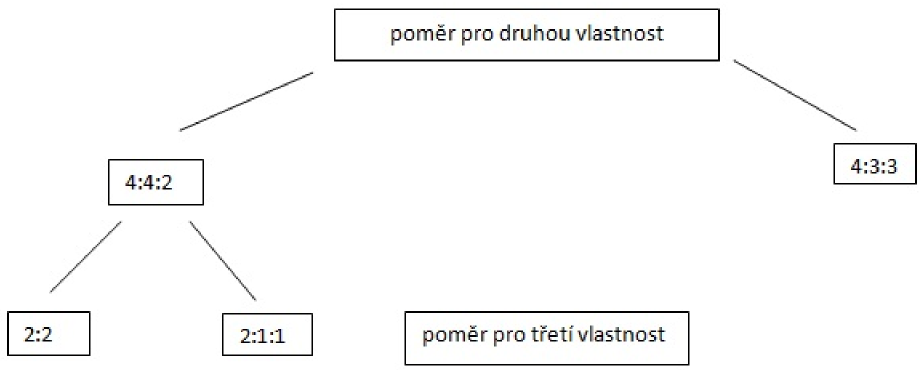
Příloha č.6



Mezi kartami není SET. Vidíme, že karty se shodují pouze v tvaru. Hodnoty ostatních vlastností jsou zde zastoupeny v následujících poměrech:

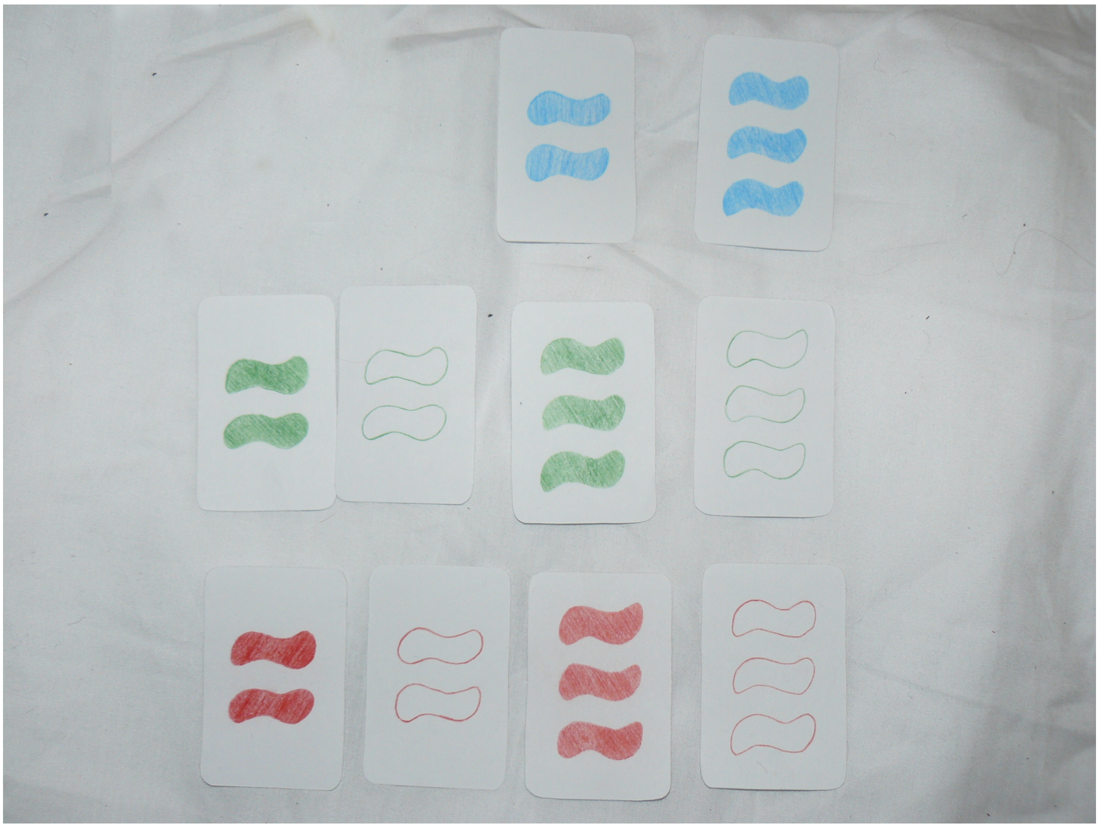
- 4:4:1 pro vlastnost BARVA
- 3:3:3 pro vlastnost POČET
- 3:3:3 pro vlastnost VÝPLŇ

Příloha č.7



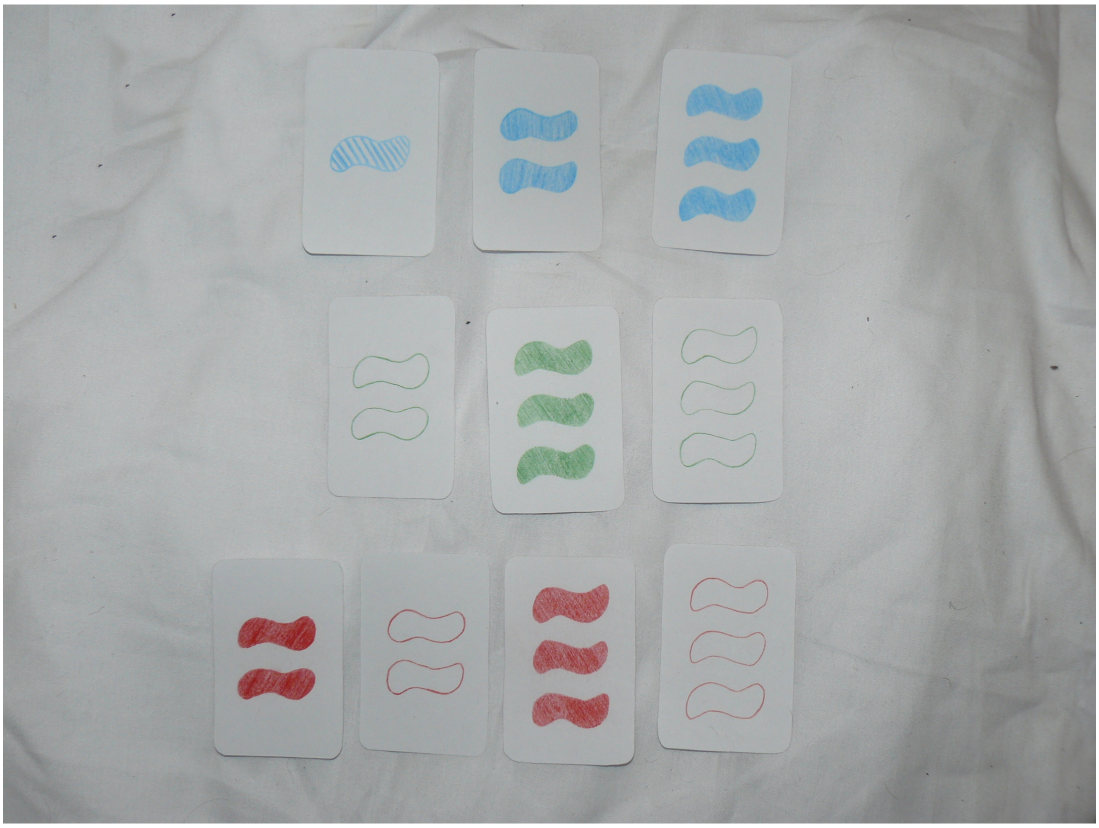
V tomto grafu je znázorněno, jak se situace větví (tj. jaké jsou možné typy situací, které mohou nastat), pokud se 10 karet shoduje v jedné vlastnosti.

Příloha č.8



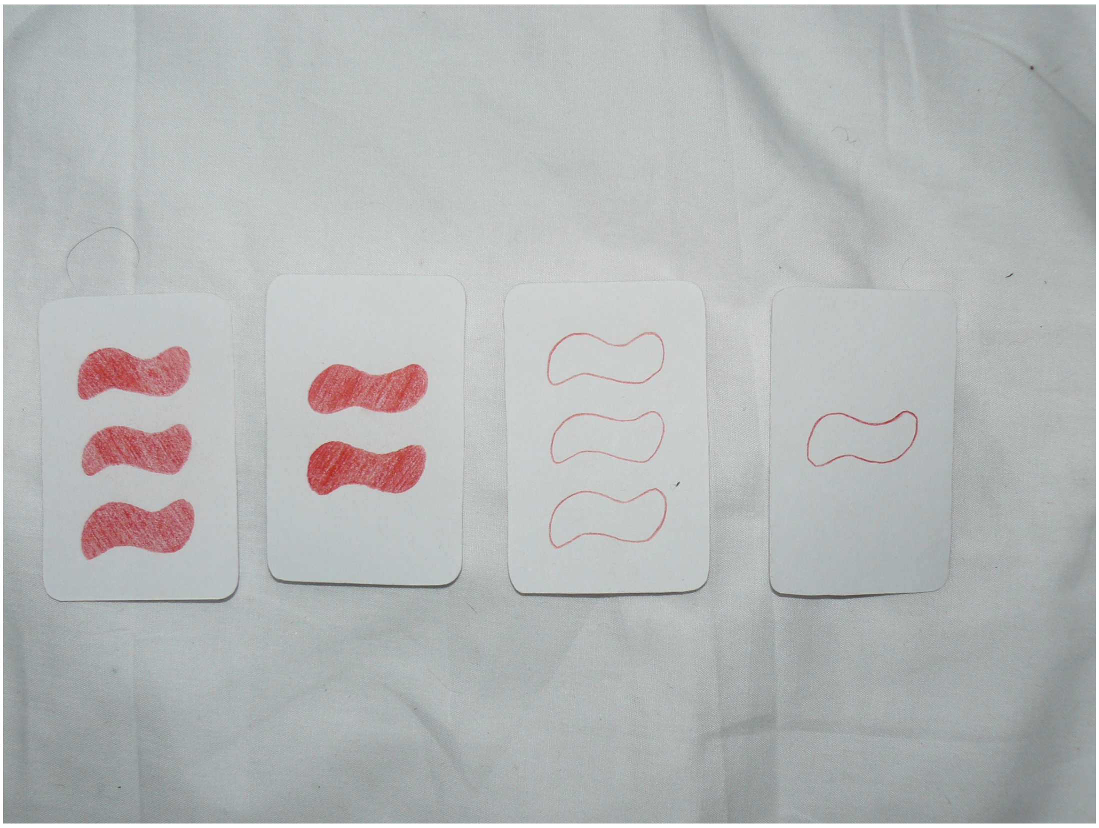
Skupina karet se shoduje v tvaru. Hodnoty druhé vlastnosti (barvy) jsou uspořádány v poměru 4:4:2.

Příloha č.9



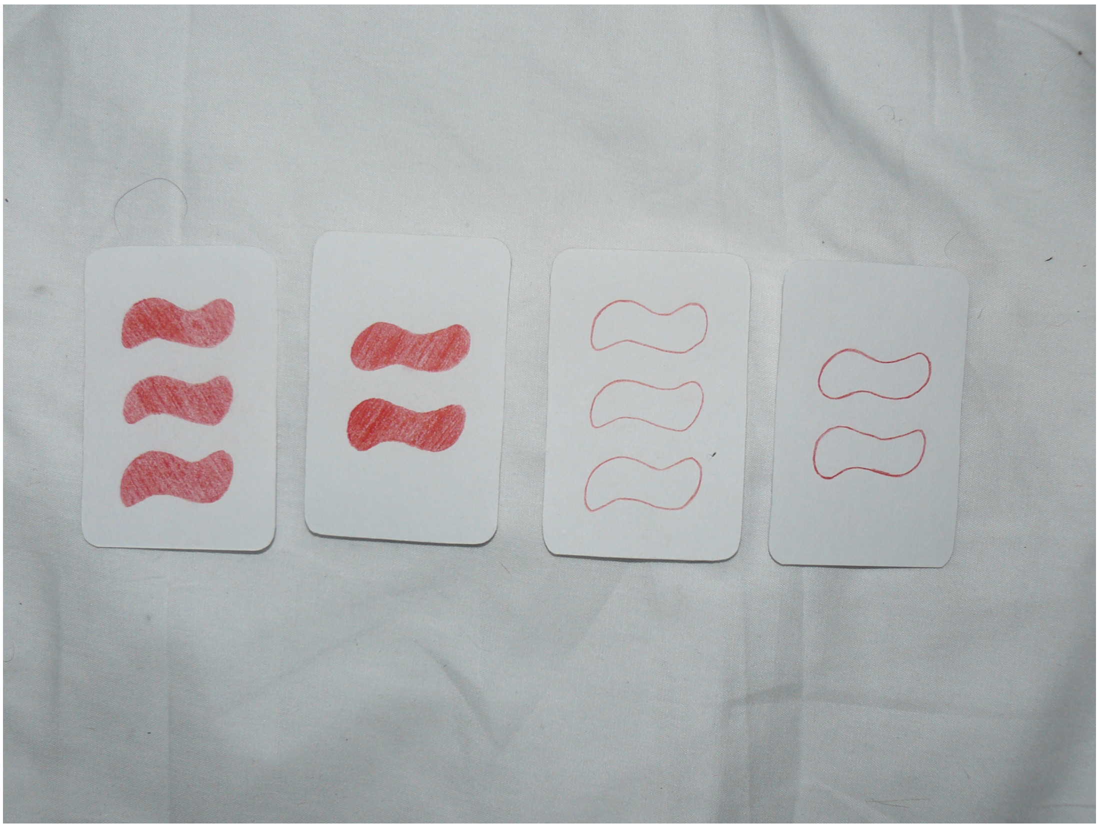
Skupina karet se shoduje v tvaru. Hodnoty druhé vlastnosti (barvy) jsou uspořádány v poměru 4:3:3.

Příloha č.10



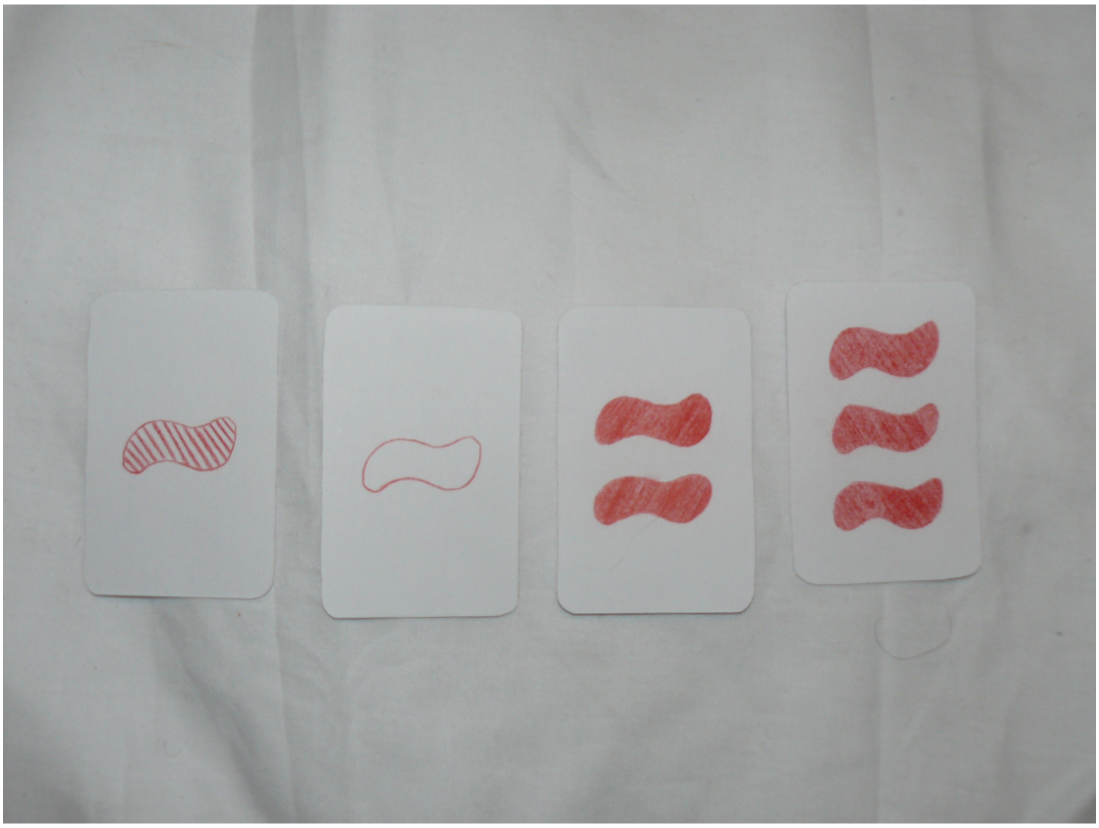
Konkrétní příklad čtveřice prvního typu - karty se ve dvou vlastnostech shodují, pro třetí se zde vyskytují právě dvě hodnoty (výplň) a pro čtvrtou všechny tři hodnoty (počet).

Příloha č.11



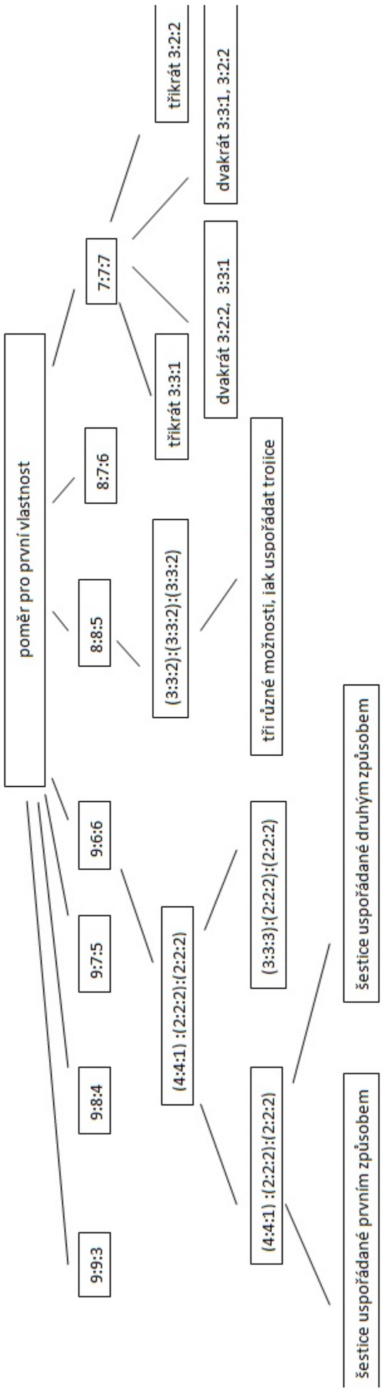
Konkrétní příklad čtveřice druhého typu - karty se ve dvou vlastnostech shodují, pro třetí i čtvrtou vlastnost se zde vyskytují právě dvě hodnoty (výplň a počet).

Příloha č.12

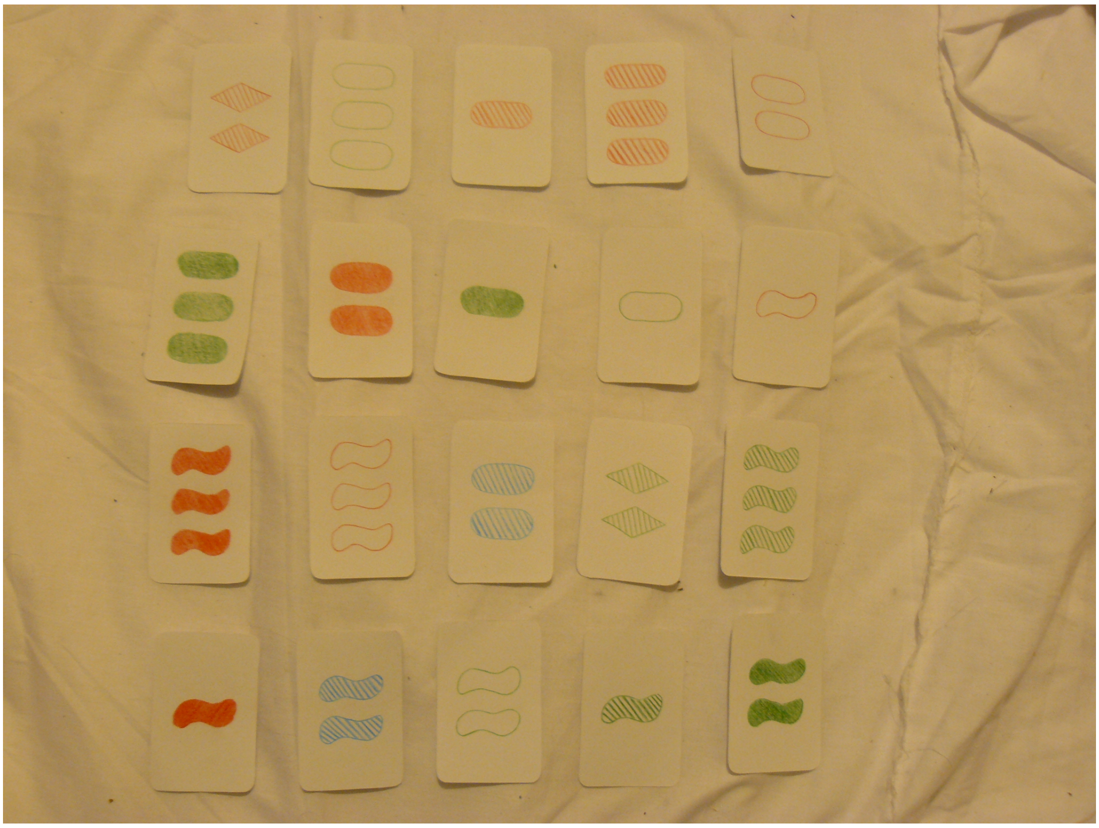


Konkrétní příklad čtveřice třetího typu - karty se ve dvou vlastnostech shodují, pro třetí i čtvrtou vlastnost se zde vyskytují všechny tři možné hodnoty (výplň a počet).

Příloha č.13

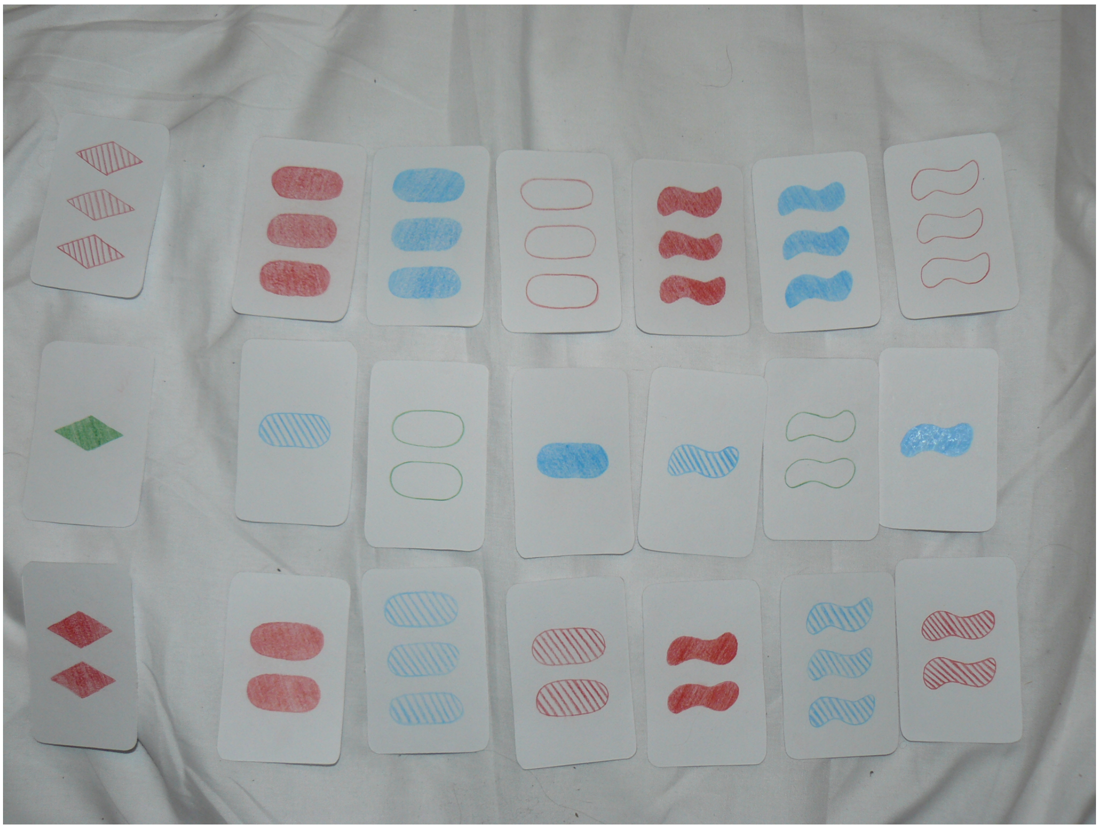

poměr pro první vlastnost
9:9:3
9:8:4
9:7:5
9:6:6
8:8:5
8:7:6
7:7:7
(4:4:1) :(2:2:2):(2:2:2)
(4:4:1) :(2:2:2):(2:2:2)
(3:3:3):(2:2:2):(2:2:2)
šestice uspořádané prvním způsobem
šestice uspořádané druhým způsobem
(3:3:2):(3:3:2):(3:3:2)
tři různé možnosti, jak uspořádat trojice
třikrát 3:3:1
dvakrát 3:2:2, 3:3:1
dvakrát 3:3:1, 3:2:2
třikrát 3:2:2

Příloha č.14



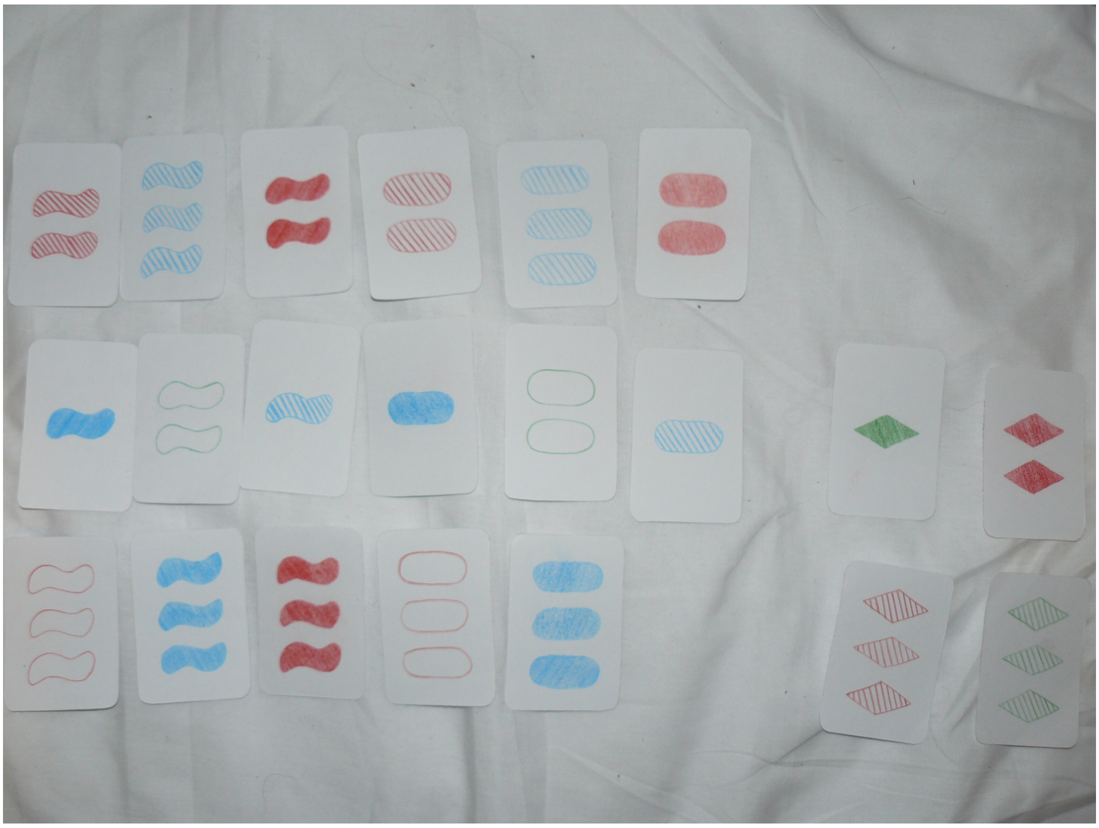
Skupina 20 karet, které neobsahují SET.

Příloha č.15



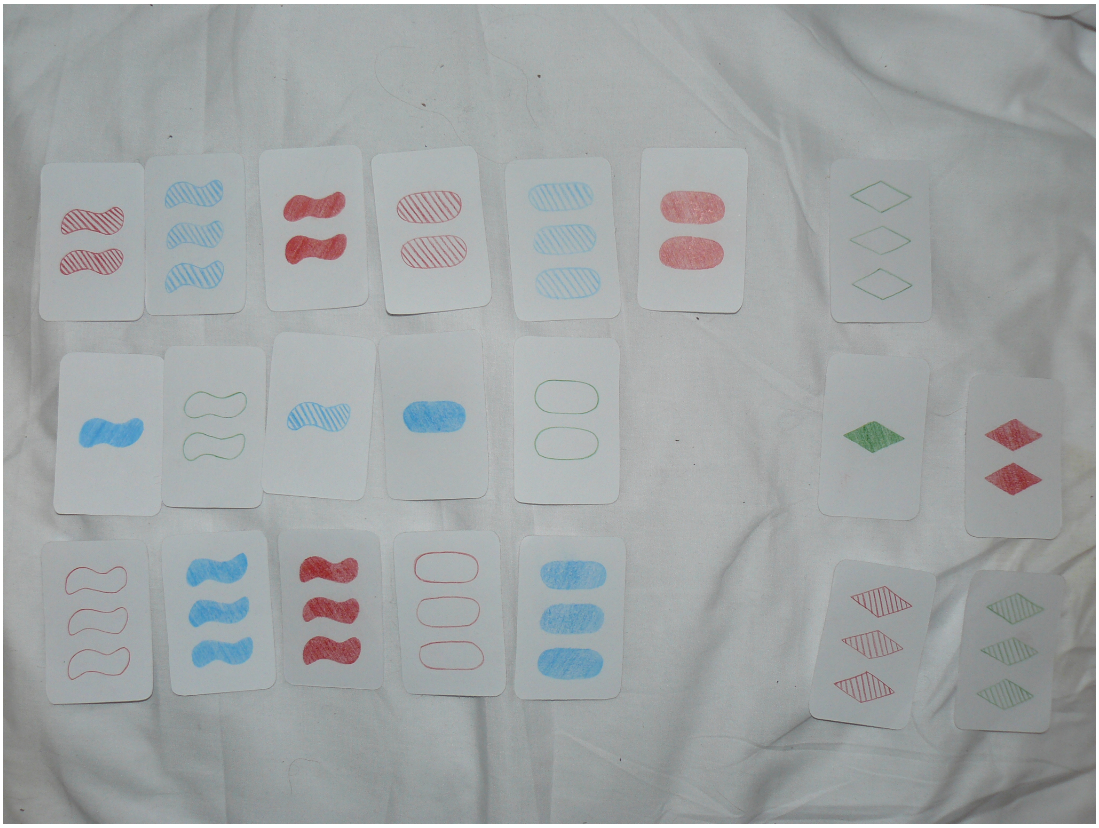
Situace, kdy se v poměru 9:9:3 vyskytují hodnoty vlastnosti TVAR - máme zde 9 vlnek, 9 oválků a 3 kosočtverce.

Příloha č.16



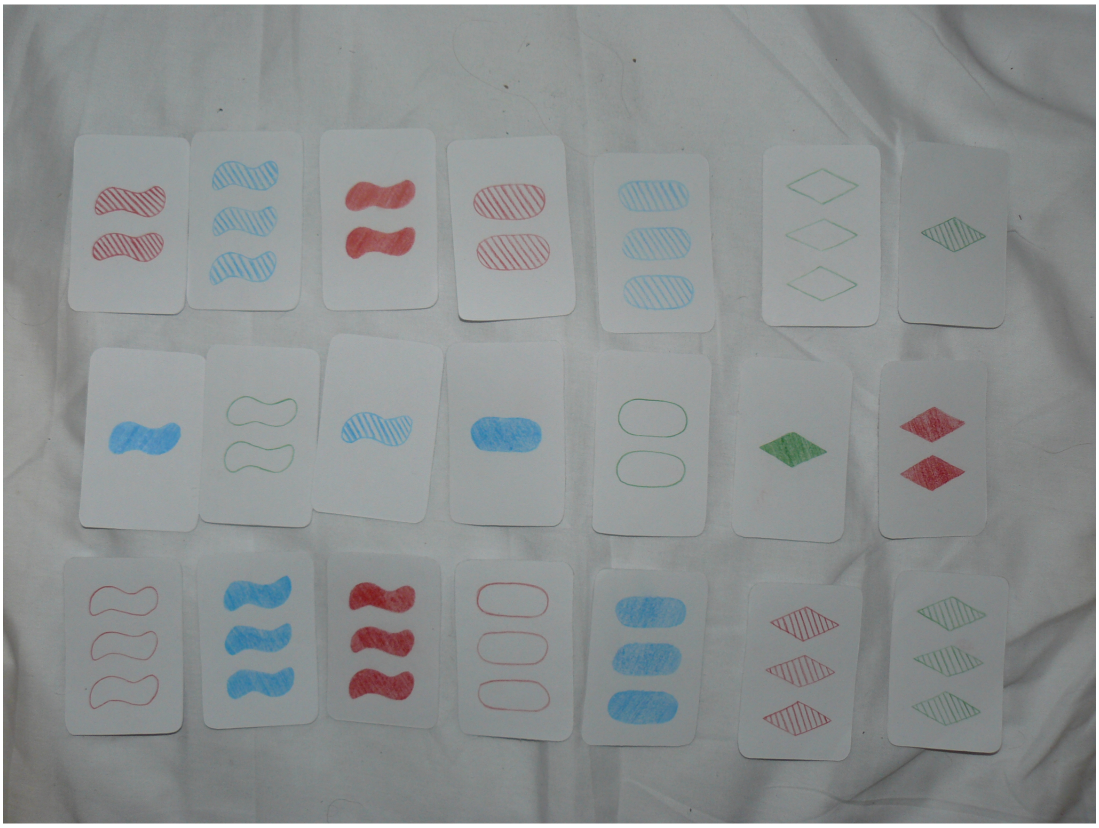
Situace, kdy se v poměru 9:8:4 vyskytují hodnoty vlastnosti TVAR - máme zde 9 vlnek, 8 oválků a 4 kosočtverce.

Příloha č.17



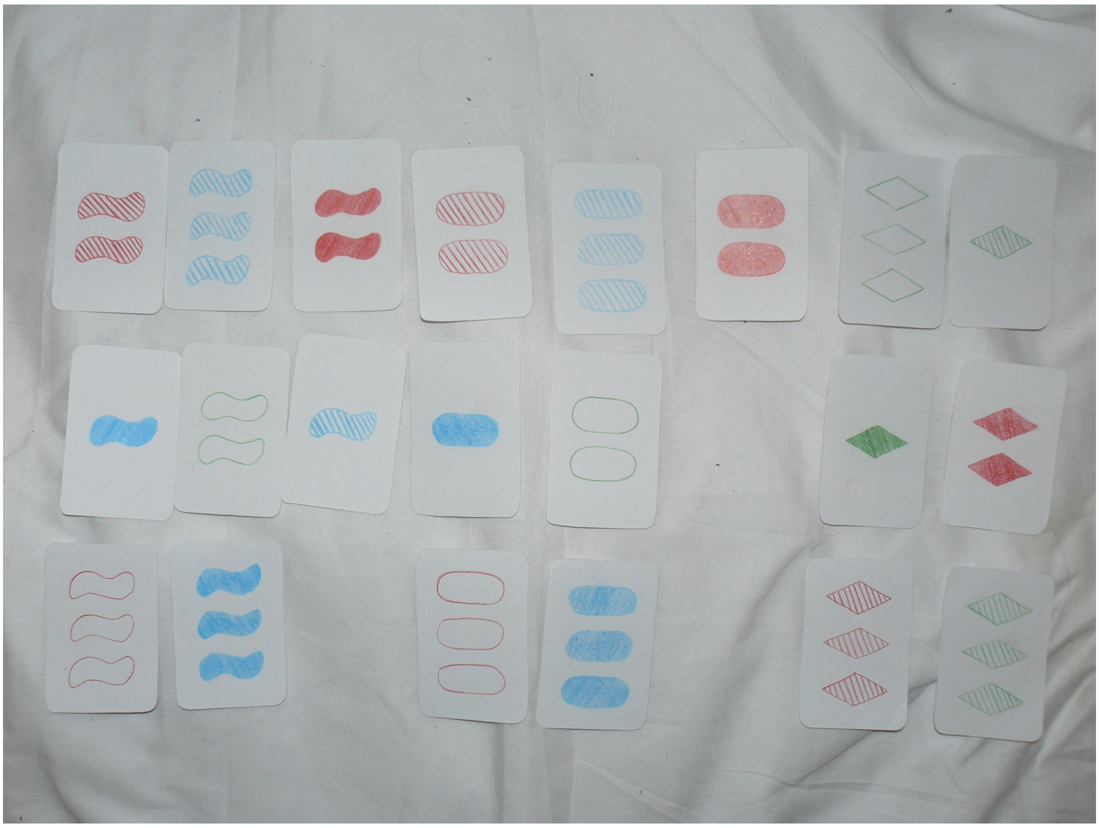
Situace, kdy se v poměru 9:7:5 vyskytují hodnoty vlastnosti TVAR - máme zde 9 vlnek, 7 oválků a 5 kosočtverců.

Příloha č.18



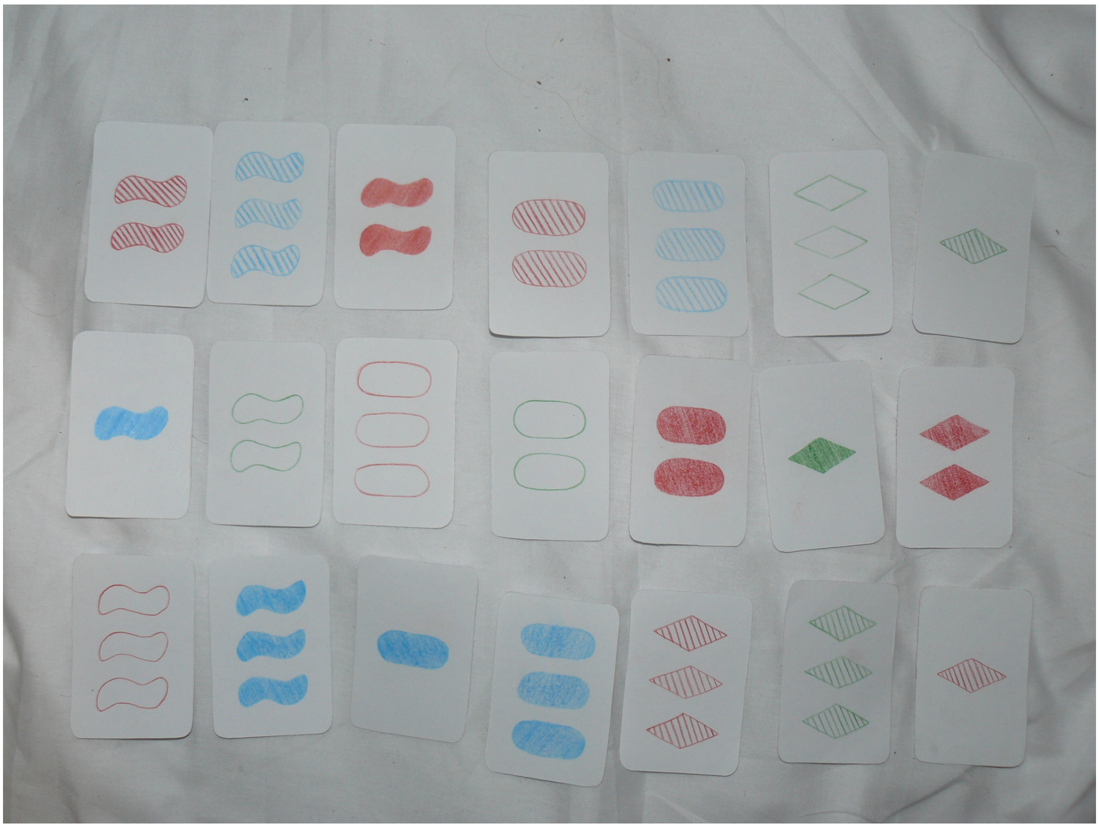
Situace, kdy se v poměru 9:6:6 vyskytují hodnoty vlastnosti TVAR - máme zde 9 vlnek, 6 oválků a 6 kosočtverců.

Příloha č.19



Situace, kdy se v poměru 8:7:6 vyskytují hodnoty vlastnosti TVAR - máme zde 8 vlnek, 7 oválků a 6 kosočtverců.

Příloha č.20



Situace, kdy se v poměru 7:7:7 vyskytují hodnoty vlastnosti TVAR - máme zde 7 vlnek, 7 oválků a 7 kosočtverců.

Příloha č.21