

Středoškolská odborná činnost

Obor SOČ: 1. Matematika a statistika

Banachův-Tarského paradox

The Banach-Tarski paradox

Autor: Ondřej Kincl

Škola: Gymnázium Oty Pavla
Praha 5- Radotín

Konzultant: Prof. RNDr. Luboš Pick, CSc., DrSc.
Matematicko-fyzikální fakulta
Univerzity Karlovy v Praze

Prohlašuji, že jsem svou práci vypracoval samostatně, použil jsem pouze podklady (literaturu, SW atd.) uvedené v příloženém seznamu a postup při zpracování a dalším nakládání s prací je v souladu se zákonem č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon) v platném znění.

V dne podpis:

Děkuji prof. RNDr. Luboši Pickovi, CSc., DrSc. za poskytnutí odborného dohledu, za jeho ochotu a nepopíratelnou trpělivost, jež umožnila dovést tuto práci ke zdárnému konci. Poděkování si nepochybně zaslouží i RNDr. Pavel Novotný, který mě svou motivací již delší dobu podněcuje k matematické činnosti.

ANOTACE

Těžko najít v dějinách matematiky překvapivější výsledek než ten, k němuž došli vědci Stefan Banach a Alfred Tarski ve dvacátých letech minulého století. Banachův-Tarského paradox je tvrzení na poli množinové geometrie, které zcela odporuje intuici:

Existuje rozložení koule na konečný počet nepřekrývajících se částí, z nichž se pomocí rotací a posunů složí dvě nepřekrývající se kopie původní koule.

To znamená, že libovolnou kouli v prostoru je možné rozdvojit, aniž bychom cokoliv deformovali nebo roztahovali.

ANOTATION

It is hard to find a more controversial mathematical result in the history than the one found by scientists Stefan Banach and Alfred Tarski in the Twenties of the last century. Banach-Tarski paradox is a statement in the field of set geometry which completely contradicts an intuitive judgment:

There is a decomposition of a ball into finite amount of non-overlapping parts that can be transformed into two copies of the original ball using solely translations and rotations.

In other words it is possible to “duplicate” the ball without stretching it.

Obsah

Úvod	4
Spočetné a nespočetné množiny	5
Klasická verze Banachova-Tarského paradoxu	7
I. krok: Volná grupa se dvěma generátory	8
II. krok: Volná grupa rotací	10
III. krok: Odstranění spočetné množiny	12
IV. krok: Paradoxní rozklad koule	14
Silnější verze Banachova-Tarského paradoxu	16
I. Lemma: Vlastnosti relace (\succsim)	16
II. Jak přeskládat hrášek na Slunce	18
Závěrem	19
Zdroje:	20

Úvod

Je poměrně snadné pochopit podstatu Banachova-Tarského paradoxu. Snad nejpřístupnějším podáním je tato matematická anekdota:

„Žil, byl jeden neúspěšný spisovatel, který se rozhodl napsat slovník. Naneštěstí neuměl žádný jazyk s výjimkou mateřské angličtiny a taky trochu toužil být originální, a proto dostal velkolepý nápad sepsat slovník všech slov. Nikoliv všech smysluplných slov, nýbrž všech myslitelných sledů písmen latinské abecedy. Je jasné, že takový slovník by byla tlustá kniha – přesněji řečeno nade všechny meze tlustá. Pročež se rozhodl vydat ji ve dvaceti šesti svazcích podle počátečního písmene. A aby ušetřil za tisk, napadlo ho každé slovo zkrátit o první písmeno – vždyť je možné dohledat jej podle názvu svazku. Když se nad tím zamyslel, se zděšením zjistil, že pro jakékoliv slovo základní verze, například „cat“, bychom ve svazku A našli slovo „acat“, po zkrácení „cat“. A tak by vytvořil dvacet šest kopií původní bichle.“¹

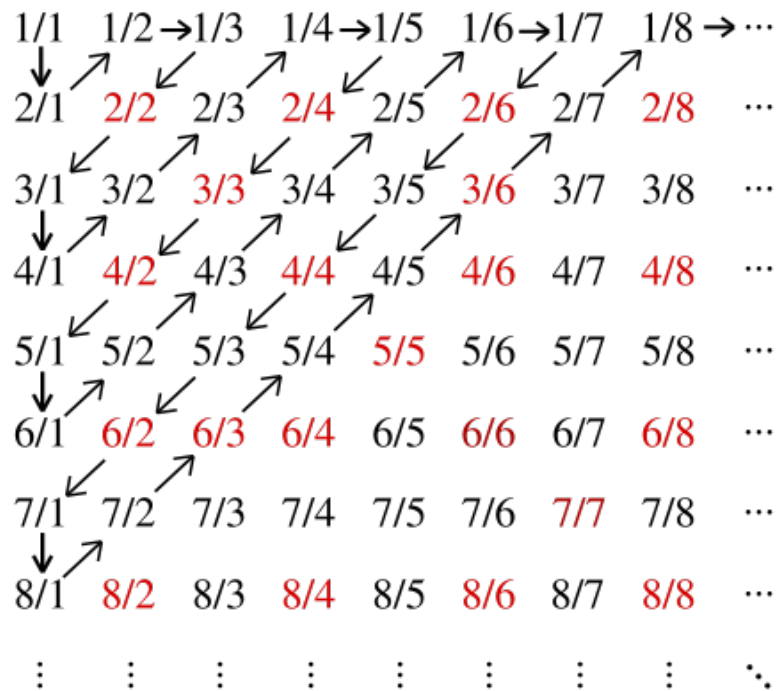
Ve stejném duchu se ponese i důkaz Banachova-Tarského paradoxu, až na to, že namísto písmen budou rotace, ze kterých se budou skládat složené rotace. Dále se definuje nejmenší množina M taková, že každý bod koule bude obsažen v nějakém potočení množiny M . Tak rozdělením množiny rotací rozdvojíme samotnou kouli.

Správný matematik se ovšem s tímto vágním vysvětlením neuspokojí a nevěří ničemu, dokud to není tak zřejmé, jako že dva krát dvě jsou čtyři. Proto cílem tohoto textu není nic menšího nebo snazšího než přesný důkaz paradoxu. Pochopitelně se neobejdeme bez konvenčních matematických „zbraní“, jmenovitě *relací, zobrazení, goniometrických funkcí, vektorů, grup a matic*. Ze základů teorie grup bude rovněž potřeba *podgrup, grup generovaných množinou, akcí grup na množině a orbitů prvků*. Je nutné, aby čtenář tyto pojmy již znal.

¹ Anekdota je volný překlad z knihy [7].

Spočetné a nespočetné množiny

Definice: Říkáme, že množina A je *spočetná*, existuje-li její prosté zobrazení na nějakou podmnožinu přirozených čísel \mathbb{N} . Množina racionálních čísel \mathbb{Q} je spočetná (viz obrázek), neboť všechny zlomky můžeme nejprve seřadit podle součtu čitatele a jmenovatele (diagonály) a v rámci každé podmnožiny, kde nastává shoda, seřadit prvky podle velikosti čitatele.



Šipky na obrázku určují seřazení všech prvků \mathbb{Q} (vlastně víc než to – červené zlomky nejsou v základním tvaru). A seřadit množinu znamená přiřadit každému prvku unikátní přirozené číslo. Mohutnost přirozených čísel (a tedy i racionálních) značíme písmenem arabské abecedy alef s indexem nula:

$$|\mathbb{N}| = \aleph_0$$

Naproti tomu množina reálných čísel \mathbb{R} je *nespočetná*. To demonstroval Georg Cantor na intervalu $(0,1)$ pomocí slavné diagonální metody. Představíme-li si nějaký očíslovaný seznam čísel intervalu:

1. 0,478199 ...
2. 0,883454 ...
3. 0,182210 ...
4. 0,592634 ...
- ⋮

Můžeme sestavit číslo z červených číslic po hlavní diagonále:

$$x := 0,4826 \dots$$

A nahradit každou číslici na každém místě desetinného rozvoje, třeba následujícím způsobem:

$$x' := 0,5937 \dots$$

Číslo x' se musí lišit od prvního čísla na prvním místě za desetinnou čárkou, od druhého na druhém, atd. ad infinitum. Z čehož plyne, že číslo x' není na seznamu. Mohutnost reálných čísel nazýváme mohutnost kontinua a píšeme:

$$|\mathbb{R}| = c$$

Klasická verze Banachova-Tarského paradoxu

Definice: Necht' $(G, *)$ je grupa, která působí na nějaké neprázdné množině S akcí $(\circ): G \times S \rightarrow S$. Říkáme, že množiny $A, B \subseteq S$ mají **kongruentní rozklad**², jestliže existují rozklady množin:

$$A = \bigcup_{i=1}^n A_i; B = \bigcup_{i=1}^n B_i$$

$$i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = B_i \cap B_j = \emptyset$$

$$0 < i \leq n \Rightarrow \text{existuje } g_i \in G: A_i = g_i \circ B_i$$

To znamená, že lze obě množiny rozdělit na i podmnožin tak, že každou odpovídající dvojici přemostíme nějakou operací grupy G . V našem případě budeme pracovat s rotacemi, takže zkrátka každé A_i bude pootočené B_i . Tuto skutečnost značíme jako relaci $A \cong_G B$.

V případě, že množiny mají kongruentní rozklad přes grupu působící jako *Euklidovské* transformace (posuny a rotace), budeme psát $A \sim B$.

Věta:

$$B \sim B \cup (B + \mathbf{t})$$

kde $B = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid |\mathbf{x}| \leq r\}$ je trojrozměrná koule ($r \in \mathbb{R}^+$ je poloměr koule $|\mathbf{x}|$ vzdálenost bodu od počátku souřadnic) a konečně $B + \mathbf{t}$ je kopie původní koule posunutá o vhodně zvolený vektor \mathbf{t} .

Důkaz: Větu dokážeme ve čtyřech krocích

- I. Ukážeme jádro paradoxu na jisté grupě, které prozatím říkejme F_2 .
- II. Najdeme grupu rotací, která je isomorfní (tj. mající stejnou strukturu) s F_2 .
- III. Vymyslíme metodu, která rotacemi odstraní z koule nežádoucí pevné body (jedná se o takzvaný *posuv do nekonečna*).
- IV. S pomocí předchozích tvrzení provedeme per partes paradoxní rozklad koule.

Tvrzení: Kongruentní rozložitelnost je relace ekvivalence.

Důkaz: vyplývá z definičních vlastností grupy. Připomínám, že e je konvenčně prvek identity grupy.

- reflexivita plyne z: $A_i = e \circ A_i$
- symetrie plyne z: $A_i = g \circ B_i \Rightarrow B_i = g^{-1} \circ A_i$

² Říká se též „ A a B jsou ekvidekomponovatelné“. To je sice méně slov, ale více písmen.

- Pro důkaz transitivitu využijeme již dokázané symetrie a překrytí rozkladů:

$$A \cong_G B; B \cong_G C \implies A \cong_G B; C \cong_G B$$

Definice nám slíbila, že najdeme rozklady B na B_i a B'_j takové, že:

$$g_i \circ B_i = A_i$$

$$h_j \circ B'_j = C_j$$

Dále nadefinujeme nový, jemnější rozklad množiny B na $B_{i,j} = B_i \cap B'_j$. (To je také rozklad množiny B , neboť aby pro $x \in B$ platilo $x \in B_{i,j}$ musí nastat $x \in B_i$ zároveň $x \in B'_j$, což z definice rozkladu nastane právě pro jednu kombinaci i, j .) Pro neprázdné $B_{i,j}$ dále vytvoříme množiny:

$$g_i \circ B_{i,j} = A_{i,j}$$

$$h_j \circ B_{i,j} = C_{i,j}$$

$$\implies A_{i,j} = g_i h_j^{-1} \circ C_{i,j} \implies A \cong_G C$$

Q. E. D.

I. krok: Volná grupa se dvěma generátory

V kostce řečeno, volná grupa je grupa, jež nemá žádná pravidla, s výjimkou definičních vlastností grupy samotné. Prvky těchto grup potom můžeme vnímat jako formální slova složená jediným možným způsobem z písmen, přičemž abecedou je generující množina této grupy.

Definice: Necht X je konečná generující množina grupy $G = \langle X \rangle$; $e \notin X$. Pod pojmem **slovo grupy** G budeme rozumět konečnou posloupnost w :

$$w := (w_i)_{i=1}^n : w_i \in X \text{ nebo } w_i^{-1} \in X, w_{i+1} \neq w_i^{-1} \text{ pro všechna } 0 < i < n.$$

Přičemž **transkripce** slova je funkce:

$$\tau: \{w\} \rightarrow G$$

$$\tau(w) = w_1 w_2 \cdots w_n$$

V řeči slov sledujeme prvky G jako sledy generátorů (resp. jejich inverzí) a bereme ohled v jejich pořadí. Podmínka $w_{i+1} \neq w_i^{-1}$ má ten smysl, že nechceme, aby translaci slov bylo možné zkrátit rovností $w_i w_{i+1} = e$. Posloupnost w vyjadřuje to, jak se slovo píše, hodnota $\tau(w)$ vyjadřuje to, co znamená. Grupu G označujeme jako **volnou** tehdy a jen tehdy, najdeme-li generující množinu X : $G = \langle X \rangle$, aby pro jakoukoli dvojici slov w, v platilo:

$$w = v \iff \tau(w) = \tau(v)$$

V analogii s lingvistikou můžeme říct, že volná grupa G je jazyk, jenž neobsahuje žádná synonyma.

Tvrzení: Grupa $(G, *) = \langle X \rangle$ je volná, pokud pro všechna slova w platí:

$$\tau(w) \neq e$$

Důkaz: Necht' w, v jsou odlišná slova a zároveň $\tau(w) = \tau(v)$. Jestliže existuje největší přirozené číslo i pro něž $w_i \neq w'_i$, tehdy můžeme určit slovo

$$c := (w_1, w_2, \dots, w_i, v_i^{-1}, \dots, v_2^{-1}, v_1^{-1})$$

$$\tau(c) = e$$

V opačném případě můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že mezi počtem prvků w resp. v , které označíme jako m resp. n , existuje nerovnost:

$$m > n$$

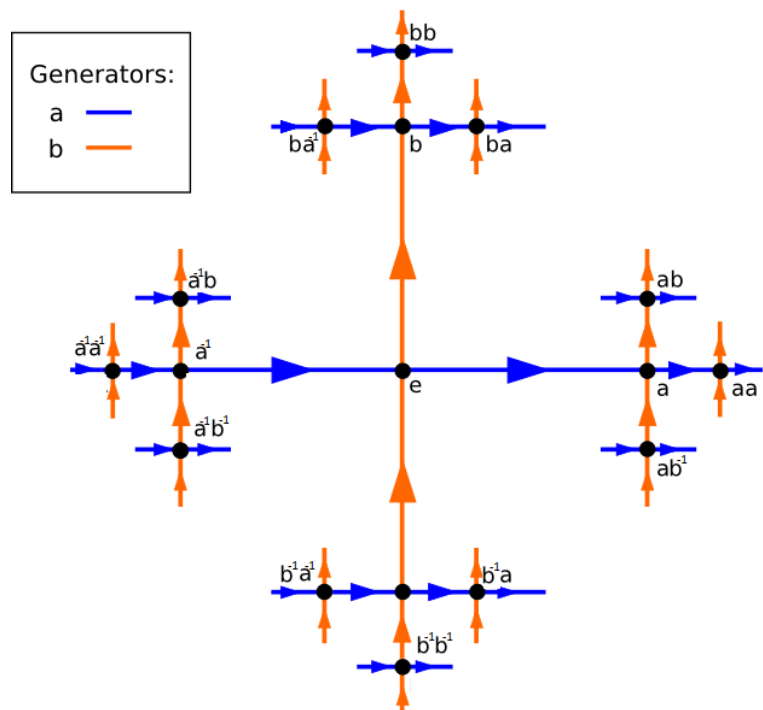
$$c := (w_{n+1}, w_{n+2}, \dots, w_m)$$

$$\tau(c) = e$$

Logické obrácení implikace je dokazované tvrzení. Metaforicky je volná grupa struktura, kde platí řecké přísloví: *Nevstoupíš dvakrát do téže řeky*. **Grupa F_2** není nic víc než volná grupa se dvěma generátory a, b . Tu je možné znázornit na takzvaném Cayleyho schématu, kde ve středu je prvek identity e a slovo o délce $n+1$ odvodíme ze slova o délce n posunem nahoru, je-li jeho pravým b násobkem; dolů, je-li jeho pravým b^{-1} násobkem a totéž v pravolevém směru pro násobení zprava prvkem a .

Volnost grupy F_2 nám zaručuje, že každý prvek na schématu je zobrazen právě jednou. Je očividné, že každá volná grupa je nekonečná – správně by tedy měl být Cayleyho graf větvený do neomezeně jemných nuancí.

Jak brzy uvidíme, Banachův-Tarského paradox skrývá určité souvislosti se *soběpodobností* fraktálů.



Definice: Pro generátor x volné grupy je $S(x)$ množina všech slov (resp. jejich transkripcí), které zleva začínají na prvek x . Formálně:

$$S(x) = \{\tau(w) \mid w_1 = x\}$$

Vidíme, že grupu $F_2 = \langle a, b \rangle$ můžeme rozložit na čtyři podmnožiny:

$$A_1 := S(a) \quad A_2 := S(a^{-1}) \quad A_3 := S(b) \quad A_4 := S(b^{-1})$$

Celá pointa Banachova-Tarského paradoxu spočívá v těchto dvou řádcích:

$$F_2 = a \circ A_2 \cup A_1$$

$$F_2 = b \circ A_4 \cup A_3$$

V dalším kroku totiž ukážeme, že F_2 se dá zvolit tak, že a, b jsou pouhé rotace! Tady však paradoxně zjišťujeme, že grupa F_2 má více prvků, než je na její rozdělení nutné – konkrétně je nutné někde vložit prvek $\{e\}$ – třeba do $A_1 := S(a) \cup \{e\}$. Zároveň však musíme odebrat prvek $\{a^{-1}\}$ z množiny A_2 , jinak by totiž $a \circ A_2 \cup A_1$ nebylo disjunktní sjednocení kvůli prvku $aa^{-1} = e$ (v reálu nechceme, aby se jednotlivé části po rozdělení překrývaly).

Takže prvek $\{a^{-1}\}$ přesuneme z A_2 do A_1 :

$$A_1 := S(a) \cup \{e\} \cup \{a^{-1}\}$$

$$A_2 := S(a^{-1}) - \{a^{-1}\}$$

Teď se ovšem prvek $\{a^{-1}\}$ nachází duplicitně... A tak dále ad infinitum. Protože však lidský život je krátký, musíme z A_2 odebrat veškeré prvky tvaru $\{a^{-i}\}$:

$$A_1 := S(a) \cup \{e\} \cup Q$$

$$A_2 := S(a^{-1}) - Q$$

$$\text{kde } Q = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} a^{-i}$$

Teprve teď platí, že množiny A_1, A_2, A_3, A_4 jakožto $a \circ A_2 \cup A_1$ tvoří rozklad F_2 .

Tvrzení: Řád grupy $F_2 = \langle a, b \rangle$ je spočetný.

Důkaz: Oběma generátorům a jejich inverzím můžeme přiřadit číselky 1,2,3,4. Slova grupy budou potom čísla a grupa F_2 se prostě zobrazí na podmnožinu přirozených čísel.

II. krok: Volná grupa rotací

Existuje volná grupa rotací $R(\psi, \phi)$ na dvojrozměrné sféře.

Důkaz: Uvažujme střed koule jako počátek soustavy souřadnic x, y, z s měřítkem $r = 1$, kde r je poloměr koule. Nechť ψ resp. ϕ je rotace kolem osy x resp. z o úhel $\arccos(3/5)$.

Jde o to, aby zvolený úhel byl iracionálním násobkem celého oblouku.) Připomínám, že rotace se dají vyjádřit v maticovém tvaru.

$$\phi^{\pm 1} = \begin{pmatrix} 3/5 & \mp 4/5 & 0 \\ \pm 4/5 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & \mp 4 & 0 \\ \pm 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

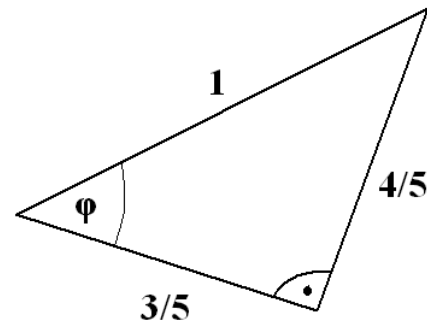
$$\psi^{\pm 1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/5 & \mp 4/5 \\ 0 & \pm 4/5 & 3/5 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \mp 4 \\ 0 & \pm 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Násobíme-li sled rotací $\phi^{\pm 1}$ resp. $\psi^{\pm 1}$, můžeme ze všech násobených matic vytknout koeficient $1/5$, abychom dostali výsledek ve tvaru

$$\tau(w) = \frac{1}{5^n} A$$

kde $n \in \mathbb{N}$ je počet prvků posloupnosti w a A je jistá celočíselná matice. Naším cílem bude dokázat, že pro všechna slova w platí:

$$\tau(w) \neq e$$



Díky symetrii problému můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat $w_1 = \phi$, neboli první člen posloupnosti w , jakožto první provedená rotace na sféře S^2 je ϕ . Uvažujme nějaký výchozí bod, například $i = (1,0,0) \in S^2$. Provedeme-li akci $\tau(w)$ na $(1,0,0)$ dostaneme:

$$\tau(w) \circ (1,0,0) = (a, b, c)/5^n$$

pro vhodně zvolená čísla $a, b, c \in \mathbb{Z}$. V dalším kroku dokážeme matematickou indukcí, že souřadnice b na ose y není nikdy dělitelná pěti.

Báze: Nechť $n = 1$. Tehdy $w = (\phi)$ a

$$\phi \circ (1,0,0) = (1,0,0) * \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = (3, -4, 0)/5$$

-4 není dělitelné pěti.

Indukční krok: Nechť $n \geq 2$. Potom můžeme ze slova w vytknout nejméně dva poslední prvky $w_n, w_{n-1} \in \{\phi^{\pm 1}, \psi^{\pm 1}\}$

$$\tau(w) = \delta w_{n-1} w_n$$

kde $\delta \in R(\psi, \phi)$.

Dále definujeme:

$$(\delta w_{n-1}) \circ (1,0,0) = w_{n-1} \circ (\delta \circ (1,0,0)) := (a', b', c')/5^{n-1}$$

$$\delta \circ (1,0,0) := (a'', b'', c'')/5^{n-2}$$

Vyšetříme všechny možné kombinace w_n, w_{n-1} :

- $x = \psi^{\pm 1}$

$$b = 3b' \pm 4c'$$

- $y = \phi^{\pm 1}$ nebo $y = \phi^{\mp 1}$

$$c' = 5c$$

$$b = 3b' \pm 20c'$$

$$5|b \Leftrightarrow 5|b'$$

- $y = \psi^{\pm 1}$

$$b' = 3b'' \pm 4c''$$

$$c' = \pm 4b'' + 3c''$$

$$b = 3b' \pm 4(\pm 4b'' + 3c'')$$

$$b = 3b' + 16b'' \pm 12c''$$

$$b = 3b' + 5b'' + 3(3b'' \pm 4c'')$$

$$b = 6b' + 5b''$$

$$5|b \Leftrightarrow 5|b'$$

Vidíme, že pro $x = \psi^{\pm 1}$ platí $5|b \Leftrightarrow 5|b'$. Totéž bychom mohli odvodit pro $x = \phi^{\pm 1}$, ale postup by byl zcela symetrický, takže jej přenechávám čtenáři. Z indukčního předpokladu plyne, že b' není dělitelné pěti a totéž musí platit pro b . Tím je důkaz hotový.

Konečně bod $(1,0,0)$ má souřadnici $b = 0$ dělitelnou pěti, a proto

$$\tau(w) \circ (1,0,0) \neq (1,0,0)$$

$$\tau(w) \neq e$$

Q. E. D.

III. Krok: Posuv do nekonečna

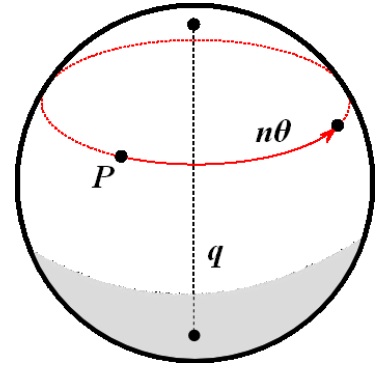
Existuje cyklická grupa $R(\theta)$ generovaná rotací θ taková, že pro dvojrozměrnou sféru S^2 (povrch koule) a libovolnou spočetnou množinu D platí:

$$S^2 \cong_{R(\theta)} S^2 - D$$

Důkaz: Protože množství bodů na povrchu koule je nespočetné, existuje přímka q procházející středem koule, která neprotíná žádný bod z množiny D . Necht' Ψ je množina všech grup $R(\rho)$ takových, že jejich působením na množině S^2 rotací kolem osy q existuje nějaké $P \in D, n \in \mathbb{N}$:

$$n\rho \circ P \in D$$

kde $n\rho \circ P$ značí rotaci bodu P o úhel $n\rho$. Vyjádřeno česky je $R(\rho)$ grupa rotací, která dokáže přesunout jeden bod $P \in D$ na nějaký jiný bod $P' \neq P: P' \in D$. Sporem dokážeme, že $|\Psi| \leq \aleph_0$. Předpokládejme naopak, že počet prvků množiny Ψ je *nespočetný*. Všechny grupy v Ψ můžeme zařadit do skupin $\Psi(P, P')$ v závislosti na tom, které dva různé body $P, P' \in D$ mohou rotací přesunout jeden do druhého (jedna grupa může být ve více skupinách zároveň). Protože D je *spočetná*, množství těchto skupin



$$\frac{|D|(|D| - 1)}{2} = \aleph_0$$

je také *spočetné* a podle Dirichletova principu holubníku tedy musí existovat skupina Λ zahrnující *nespočetné* množství grup. Je-li však úhel ρ_0 velikost oblouku $\widehat{PP'}$ určující skupinu Λ , potom $R(\rho) \in \Lambda \Rightarrow \rho_0 \in R(\rho)$ a tedy

$$\rho_0 = n\rho$$

kde $n \in \mathbb{N}$. Množina $\{\rho | \rho = \rho_0/n : n \in \mathbb{N}\} = |\Lambda|$ je však spočetná – spor! Proto $|\Psi| \leq \aleph_0$. Vzhledem k tomu, že množství všech reálných úhlů je nespočetné, můžeme vybrat úhel $\theta \in (0, 2\pi): R(\theta) \notin \Psi$. Pro tento úhel je množina

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{n\theta \circ D\}$$

sjednocení po dvou disjunktních podmnožin S^2 . Díky tomu můžeme provést následující postup:

$$S^2 = (S^2 - X) \cup X \cong_{R(\theta)} S^2 - D$$

$$S^2 \cong_{R(\theta)} (S^2 - X) \cup (\theta \circ X)$$

$$S^2 \cong_{R(\theta)} (S^2 - X) \cup (X - D)$$

$$S^2 \cong_{R(\theta)} S^2 - D$$

Q. E. D.

S trochou nadsázky si to můžeme představit tak, že z povrchu koule „vytřeseme“ množinu D . Až na to, že D přitom záhadně zmizí z povrchu zemského.

IV. krok: Paradoxní rozklad koule

Ve druhém kroku jsme našli volnou grupu rotací, jež působí na množině S^2 . Necht' D je podmnožina S^2 , která obsahuje všechny **pevné body** akce grupy $R(\psi, \phi)$. (Pevný bod je prvek S^2 , jehož stabilizátor je množina větší než $\{e\}$). Protože mohutnost grupy $R(\psi, \phi)$ je spočetná a pro každou její nenulovou rotaci existují právě 2 pevné body – průsečíky osy rotace s povrchem koule – je D spočetná (každý složený prvek $R(\psi, \phi)$ si musíme představit jako jednodílnou rotaci kolem nějaké osy). Spočetnou množinu „setřepeme“ tak, jako jsme to udělali ve třetím kroku.

$$S^2 \sim S^2 - D$$

Množina $S^2 - D$ je tvořená (nespočetným) množstvím orbitů akce $R(\psi, \phi)$. Uvažujme výběrovou množinu M , jež obsahuje právě po jednom prvku z každého orbitu. Z definice orbitu plyne:

$$S^2 - D = R(\psi, \phi) \circ M$$

Teď už stačí provést dekompozici grupy $F_2 \sim R(\psi, \phi)$:

$$S^2 - D = R(\psi, \phi) \circ M = X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup X_4$$

kde

$$X_1 = [S(\psi) \circ M] \cup [Q \circ M] \cup M$$

$$X_2 = [S(\psi^{-1}) - Q] \circ M$$

$$X_3 = S(\phi) \circ M$$

$$X_4 = S(\phi^{-1}) \circ M$$

$$Q = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \psi^{-i}$$

Skutečnost, že $S^2 - D$ nemá pevné body, nám má zaručit, že všechny množiny X_i jsou po dvou disjunktní. Přesvědčme se o tom. Zvolme náhodně $\alpha, \beta \in R(\psi, \phi)$; $s \in S^2 - D$:

$$\alpha \circ s = \beta \circ s$$

$$(\beta^{-1}\alpha) \circ s = s$$

(s nemá stabilizátor mimo identitu e)

$$\beta^{-1}\alpha = e$$

$$\alpha = \beta$$

Zvolme vektor $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^3$: $|\mathbf{t}| > r$ ve směru osy x , kde r je poloměr sféry S^2 . Protože ψ je rotace kolem osy x , pro $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^3$ platí:

$$\psi \circ (\mathbf{s} + \mathbf{t}) = (\psi \circ \mathbf{s}) + \mathbf{t}$$

Ted' už stačí provést jenom pár posunů a rotací:

$$X_3 \sim X_3 + \mathbf{t}$$

$$X_4 \sim X_4 + \mathbf{t} \sim (\psi \circ X_4) + \mathbf{t} = (X_1 \cup X_2 \cup X_4) + \mathbf{t}$$

$$X_2 \sim \psi \circ X_2 = X_2 \cup X_3 \cup X_4$$

Pro shrnutí – získali jsme dvě čtveřice množin:

$$X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup X_4 = S^2 - D$$

$$(X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup X_4) + \mathbf{t} = (S^2 - D) + \mathbf{t}$$

Výsledek zpětně převedeme na celé sféry:

$$S^2 \sim S^2 - D$$

$$S^2 \sim X_1 \cup X_2 \cup ((X_3 \cup X_4) + \mathbf{t})$$

$$S^2 \sim (S^2 - D) \cup ((S^2 - D) + \mathbf{t})$$

$$S^2 \sim S^2 \cup (S^2 + \mathbf{t})$$

Doposud jsme pracovali výhradně s povrchem koule. Avšak dedukce tvrzení pro celou kouli je jenom kosmetická záležitost. Stáčí si uvědomit, že plná koule B je v podstatě sjednocení nespočetného množství dvojrozměrných sfér o poloměru $r \in \langle 0, k \rangle$, kde k je poloměr koule B . Potom

$$B = \bigcup_r S^2(r) \sim \bigcup_r [S^2(r) \cup (S^2(r) + \mathbf{t})] = B \cup (B + \mathbf{t})$$

Přičemž množinu M z postupu výše definujeme jako $M = \bigcup_r M(r)$, takže počet částí rozkladu je zachován na konečném čísle.

Q. E. D.

Důkaz Banachova-Tarského paradoxu je skutečně bezchybný a snahy v minulosti o jeho vyvrácení vedly k jeho zpětnému potvrzení. Počet množin rozkladu je možné snížit na 5, nebo dokonce na 4, zanedbáme-li střed koule. V roce 2005 bylo dokázáno, že se dá zajistit, aby při posunech a rotacích jednotlivé množiny neprocházely přes sebe.

Silnější verze Banachova-Tarského paradoxu

Dovedeme-li předchozí výsledek do větší hloubky, dospějeme k ještě podivnějšimu výsledku, který definitivně bortí představu zachování objemu v prostoru. Cílem následujícího textu bude dokázat, že libovolnou množinu $M \subset \mathbb{R}^3$ s jistými dobrými vlastnostmi lze „přeskládat“ (ve významu, který byl demonstrován v slabé verzi paradoxu) na jakoukoliv jinou množinu s jistými dobrými vlastnostmi.

Věta: Pro libovolné dvě ohraničitelné³ množiny $A, B \subset \mathbb{R}^3$ s neprázdným vnitřkem⁴ platí:

$$A \sim B$$

Důkaz: K důkazu bude nejprve zapotřebí definovat novou asymetrickou relaci:

$$A \succcurlyeq B \Leftrightarrow \text{existuje } A_B \subseteq A: A_B \sim B$$

Neboli B můžeme kongruentně rozložit na podmnožinu A.

I. Lemma: Vlastnosti relace (\succcurlyeq)

Reflexivita vztahu je zřejmá: $A \sim A \Rightarrow A \succcurlyeq A$.

Tvrzení: Jestliže $A \sim B$, existuje bijekce $f: A \rightarrow B$ taková, že pro $A_0 \subseteq A$, $A_0 \sim f(A_0)$.

Důkaz: Z definice kongruentního rozkladu existuje grupa E , jež zprostředkuje kongruenci množin

$$g_i \circ A_i = B_i$$

pro nějaká $g_i \in E$. Převědeme tento koncept na zobrazení $f: A \rightarrow B$

$$a \in A_i \Rightarrow f(a) = g_i \circ a$$

$f(x)$ je ze samého předpokladu surjektivní, ale vzhledem k tomu, že je definováno přes akci grupy, pro $a \in A_i$; $a_2 \in A_j$:

$$g_i \circ a = g_j \circ a_2 \Rightarrow g_i \circ a \in B_i \cap B_j \Rightarrow i = j$$

$$g_i \circ a = g_i \circ a_2 \Rightarrow a = a_2$$

$f(x)$ prokazuje vlastnosti injektivní a přirozeně je dobře definováno. Necht' $A_0 \subseteq A$. Bijekce $f(x)$ zaručuje kongruentní rozklad na prvky A_0 :

$$f: A_0 \leftrightarrow f(A_0) \Rightarrow A_0 \sim f(A_0)$$

Q. E. D.

Důsledek: $A_0 \preccurlyeq B$

Důsledek: Relace (\succcurlyeq) je transitivní.

³ Množina $A \subset \mathbb{R}^3$ je ohraničitelná, existuje-li koule $K: A \subset K \subset \mathbb{R}^3$.

⁴ Množina $A \subset \mathbb{R}^3$ má neprázdný vnitřek, jestliže existuje koule $K: A \supset K \subset \mathbb{R}^3$

Důkaz: Předpokládejme $A \preceq B \preceq C$ a nalezneme množiny B_0, C_0 takové, že $A \sim B_0; B \sim C_0$. Necht' $g(x)$ je bijekce kongruentního rozkladu z předchozí věty $g: B \leftrightarrow C_0$.

$$B_0 \subseteq B \implies B_0 \sim g(B_0) \subseteq C_0$$

$$A \sim B_0$$

$$A \sim g(B_0) \subseteq C_0 \subseteq C$$

$$A \preceq C$$

Q. E. D.

Tvrzení: $A \sim B$ právě tehdy, když $A \preceq B$ a zároveň $A \succcurlyeq B$.

Důkaz: Směr (\implies) je zřejmý, zpětná implikace je o něco trnitější.

Zvolme opět bijekce kongruentních rozkladů: $f: A \rightarrow B_0 \subseteq B; g: B \rightarrow A_0 \subseteq A$. Dále sestrojíme posloupnost množin rekurentním určením:

$$C_0 = A \setminus A_0$$

$$C_{n+1} = g \circ f(C_n)$$

$$\bigcup C_i = C \subseteq A$$

přičemž $g \circ f(x)$ značí složenou funkci $g(f(x)): A \rightarrow A_0$. Z předchozích výsledků zřejmě platí $C \sim f(C)$. Přejeme si dokázat, že i zbylé množiny mají kongruentní rozklad: $A \setminus C \sim B \setminus f(C)$.

Naše hypotéza zní, že $A \setminus C = g(B \setminus f(C))$. Zvolíme libovolně $t \in B \setminus f(C)$ a dokážeme, že následující tvrzení nemohou nastat

$$g(t) \in C_n; n > 0 \implies t \in f(C_{n-1})$$

$$g(t) \in C_0 = A \setminus A_0$$

První eventualita je v rozporu s volbou $t \in B \setminus f(C)$ tedy $t \notin f(C)$. Druhá je rovněž nesmysl, neboť funkce $g(x)$ se zobrazuje právě na A_0 . Výlučně tedy $g(t) \notin C$, protože $g(t) \in A \setminus C$. Na druhou stranu zvolme libovolně $u \in A \setminus C$.

$$A \setminus C \supseteq A_0 \setminus C$$

$$A \setminus C \subseteq A \setminus C_0 = A_0 \subseteq A_0 \setminus C$$

$$\implies A \setminus C = A_0 \setminus C$$

Můžeme bez újmy předpokládat $u \in A_0 \setminus C$. Protože u náleží do obrazu surjektivního zobrazení $g(x)$, existuje $t \in B: u = g(t)$. Dovolíme si zavést ještě jednu neznámou v takovou, že $t = f(v)$, potom $u = g \circ f(v)$. Námi definovaná množina C má tu zvláštní vlastnost, že $v \in C$ má za následek $g \circ f(v) \in C$. To je spor s předpokladem $u \in A \setminus C$, protože $v \notin C$.

$$v \notin C \implies t \notin f(C) \implies t \in B \setminus f(C) \implies u \in g(B \setminus f(C))$$

Množiny $A \setminus C, g(B \setminus f(C))$ se neliší svými prvky, takže $A \setminus C = g(B \setminus f(C))$. A konečně je tu finále. Sestrojíme zobrazení $\chi: A \rightarrow B$ předpisem

$$\chi(x) = \begin{cases} g(x), & \text{pokud } x \in A \setminus C \\ f(x), & \text{pokud } x \in C \end{cases}$$

Díky předešlým výsledkům víme, že $\chi(x)$ je surjektivní. Injektivita je přenesena z vlastností $g(x), f(x)$. Bijekce $\chi(x)$ je mostem kongruentního rozkladu $A \sim B$.

Q. E. D.

II. Jak přeskládat hrášek na Slunce⁵

Buďte A, B množiny v \mathbb{R}^3 takové, že A má neprázdný vnitřek a B je ohraničitelná. To znamená, že existují koule $K, J \subseteq \mathbb{R}^3: K \subseteq A; B \subseteq J$. Idea následujícího postupu bude namnožit kouli K tak, aby její kopie překryly kouli J .

Jako nástroj definujeme prostorové kartézské souřadnice s počátkem ve středu J . Takto rozdělíme kouli J na podmnožiny konečného množství krychlí o hraně $a = 1$. Zvolíme-li měřítko dostatečně malé, každá z těchto krychlí bude podmnožinou nějaké translace koule K . Rozdělme kouli J výše uvedeným způsobem:

$$J = \bigcup J_i$$

Kdekoli v prostoru definujeme stejný počet koulí o velikosti K tak, aby se vzájemně nepřekrývaly.

$$S = \bigcup K_i$$

Zřejmě pro každé i existuje translace t_i , která danou část J_i přesune „dovnitř“ odpovídající koule K_i .

$$J \sim \bigcup (J_i + t_i) \subseteq \bigcup K_i = S$$

$$J \preceq S$$

Ovšem použijeme-li slabou verzi Banachova-Tarského paradoxu n -krát, dostaneme $K \sim S$.

$$B \subseteq J \preceq S \sim K \subseteq A$$

$$B \subseteq J \preceq S \preceq A$$

Dále podle lemmatu (\preceq) je transitivní:

$$B \subseteq J \preceq A$$

A díky tvrzení o zobrazení kongruentního rozkladu:

$$B \preceq A$$

⁵ Název podkapitoly je inspirován knihou [1].

Pokud jsou obě množiny A, B zároveň ohraničitelné a nemají prázdný vnitřek, pak symetricky $A \leq B$. To vzhledem k lemmatu implikuje $A \sim B$. Ve velmi konkrétním případě můžeme rozložit hrášek A o poloměru $5 * 10^{-3}m$ a přeskládat jej ve Slunce B s poloměrem $1,392 * 10^8m$! Q. E. D.

Závěr

Přestože postup důkazu je korektní, existuje stanovisko, z něhož se Banachův-Tarského paradox může jevit jako nepravdivý. Tato volba vyžaduje zpochybnění kontroverzního *axiomy výběru* (AC):

„Pro každý soubor neprázdných množin \mathbb{M} existuje výběrová funkce f , která každou z množin $X \in \mathbb{M}$ zobrazí na prvek $x \in X$.“

Toto tvrzení se může jevit jako samozřejmé (je to koneckonců axiom). Množina \mathbb{M} však vůbec nemusí být konečná (kdy je vše přehledné), ale může být nekonečná, dokonce nespočetná, což nás vystavuje do problémů, kdy nelze sepsat algoritmus pro konstrukci zobrazení f . Příkladem je definice množiny M ve slabé verzi Banachova-Tarského paradoxu. Nepravdivost AC by neohrozila existenci paradoxních grup jako takových, avšak znemožnila by jejich uplatnění v množinové geometrii.

AC, jako každý axiom, se nedá nijak dokázat ani vyvrátit. Buď jej můžeme přijmout, nebo ne. Zaleží výhradně na filosofickém postoji. Z toho důvodu můžeme vzít v potaz jeho užitečnost. AC je nepostradatelným nástrojem v řadě důležitých výsledků algebry a teorie množin. Opírají se o něj základy topologie a teorie míry, bez níž se neobejde např. Lebesgueův integrál. S AC je matematika jednodušší a přehlednější [4].

I kdyby Banachův-Tarského paradox byl pravdivý, žádný potrhlý matematik by jej nevyužil ke kopírování zlatých cihlíček. Jednak proto, že dekompozice by vyžadovala nekonečně složitý řez, což je technicky nemožné; ale podstatněji, na hmotě není nic celistvého. Každý předmět je struktura konečného množství elementárních částic, které nemají žádný objem. Dojem celistvosti je iluze podmíněná zadržováním fotonů, které jsou přitahovány elektromagnetickou silou [5]. Banachův-Tarského paradox proto můžeme interpretovat jako jednu z mnoha podivností nekonečna, jež se vymyká našim přirozeným zkušenostem.

Na druhou stranu jediná (alespoň mně) známá entita, která spolehlivě zaujímá nějaký objem, je prostor sám o sobě. A ten se překotně rozpíná a nikdo neví proč. Přitom Banach-Tarského paradox jinými slovy říká, že objem je nestabilní a neplatí pro něj žádný zákon zachování. Fakt, že důkaz tohoto tvrzení je velmi umělý a vyžaduje axiom výběru, ještě nemusí nutně znamenat, že nemá přírodní význam. Navíc bylo zjištěno, že galaxie v pozorovaném vesmíru upřednostňují asi o sedm procent jeden směr rotace a vzhledem k množství naměřených dat je možnost, že se jedná o náhodný fenomén, prakticky vyloučena [6]. Z toho astronomové vyvozují, že vesmír pravděpodobně rotuje daným směrem [6]. Samozřejmě nelze předpokládat, že vesmír také provádí nekonečně složité řezy, ale jak už jsem naznačil, ty bych spíš přisuzoval nevyhnutelné umělosti důkazu. A proto se domnívám, že Banach-Tarského paradox je právě naopak v naprosté shodě s fyzikální realitou.

Zdroje:

1. WAPNER, Leonard M. *The pea and the Sun: a mathematical paradox*. Wellesley: A K Peters, 2007, xiv, 218 s. ISBN 15-688-1213-2.
2. SU, Francis Edward. *Harvey Mudd College Department of Mathematics* [online]. 1990 [cit. 2014-03-06]. Dostupné z: <http://www.math.hmc.edu/~su/papers.dir/banachtarski.pdf>
3. SVRŠEK, Jiří. *Gymnázium Tachov* [online]. 2004 [cit. 2014-03-06]. Dostupné z: <http://gymtc.cz/seminar/tarski.pdf>
4. PICKOVER, Clifford A. *Matematická kniha: od Pythagora po 57. dimenzi : 250 milníků v dějinách matematiky*. 1. vyd. v českém jazyce. Praha: Argo, 2012, 542 s. Zip (Argo: Dokořán). ISBN 978-80-257-0705-0.
5. BROOKS, Michael. *Velké otázky*. Vyd. 1. Praha: Knižní klub, 2011, 208 s. Universum (Knižní klub). ISBN 978-80-242-3065-8.
6. *The Daily Galaxy* [online]. 2011 [cit. 2014-03-06]. Dostupné z: http://www.dailygalaxy.com/my_weblog/2011/07/is-the-universe-spinning-new-research-says-yes.html
7. STEWART, Ian. *From Here to Infinity*. New York: Oxford, 1996. ISBN 978-0192832023.

Obrázky:

Cornell University: The Department of Mathematics [online]. 2008-2009 [cit. 2014-03-06]. Dostupné z: <http://www.math.cornell.edu/~mec/2008-2009/Victor/part4.htm>

[Http://personal.maths.surrey.ac.uk/st/H.Bruin/](http://personal.maths.surrey.ac.uk/st/H.Bruin/) [online]. 2009 [cit. 2014-03-06]. Dostupné z: <http://personal.maths.surrey.ac.uk/st/H.Bruin/MMath/Cardinality.html>