STŘEDOŠKOLSKÁ ODBORNÁ ČINNOST

Obor SOČ: 01. Matematika a statistika

Dirichletův princip

The pigeon-hole principle

Autor: Tadeáš Kučera

Škola: Gymnázium, Brno,
třída Kapitána Jaroe 14

Konzultant: Mgr. Aleš Kobza, Ph.D.

Brno 2013

Prohlašuji, že jsem svou práci vypracoval samostatně, použil jsem pouze podklady (literaturu, SW atd.) citované v práci a uvedené v přiloženém seznamu a postup při zpracování práce je v souladu se zákonem č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon) v platném znění.

V Brně dne 27. února 2013 ....

Na tomto místě bych chtěl poděkovat svému učiteli matematiky Mgr. Aleši Kobzovi, Ph.D. za velmi dobře vedené hodiny matematiky, za pomoc s výběrem tématu této práce a spoustu dobrých rad při jejím psaní.
Chtěl bych také poděkovat tvůrcům systému LaTeX, v němž je práce vysázena a dále autorům volného softwaru GeoGebra, který mi posloužil při tvorbě obrázků.

Abstrakt

Tato práce se zabývá Dirichletovým principem a příklady řešenými právě pomocí tohoto kombinatorického pravidla. Později ukazuje i jeho užití v důkazech některých pozoruhodných vět.

Klíčová slova: Dirichletův princip; prvočísla v aritmetických posloupnostech; racionální aproximace reálných čísel

Abstract

This work deals with the pigeon-hole principle and problems solved by this combinatorial statement. Later on, this rule is used in proofs of some remarkable theorems.

Key words: pigeon-hole principle; prime numbers in arithmetical sequences; rational approximations of real numbers

Obsah

1 Úvod

Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859) byl německý matematik, který přispěl dnešní matematice zejména v oblasti teorie čísel nebo matematické analýzy. Mezi nejznámější jeho práce patří studie konvergence Furierovy řady, Dirichletova věta o aproximaci reálných čísel a v neposlední řadě také Dirichletův princip.

Dirichletův princip je velmi jednoduše formulovatelné a pochopitelné tvrzení, které může někomu připadat až banální. Proto je potřeba zdůraznit, že Dirichlet je dodnes velmi uznávaný matematik, který objevil spoustu významných poznatků. Mnohé z nich jsou natolik pokročilé svou obtížností, že se jim v této práci nemůžeme věnovat.

2 Dirichletův princip

Dirichletův princip je následující snadno formulovatelné kombinatorické pravidlo, které je však navzdory své jednoduchosti velmi užitečné:

Věta 2.1. *Je-li alespoň $nk+1$ prvků rozdělených do n množin, pak alespoň v jedné množině je alespoň $k+1$ těchto prvků.*

Důkaz 2.1. Postupujme sporem: kdyby v každé z n množin bylo nejvýše k prvků, bylo by jich celkem nejvýše nk. □

Příklad 1. *V zahradě tvaru obdélníka o šířce 35 a délce 42 roste 100 stromů. Existuje pak obdélník o rozměrech 3×5 takový, že v něm rostou alespoň dva stromy?*

[2, úloha 10]

Řešení. Protože $3|42$ a $5|35$, můžeme si snadno zahradu rozdělit na 98 obdélníků tvaru 3×5. Protože je v zahradě 100 stromů, musí dle Dirichletova principu být alespoň v jednom obdélníku alespoň dva stromy. □

Úloha 2.2. *Dědeček koupil pozemek tvaru obdélníka o šířce 24 a délce 42 metrů, který chce nechat náhodně osázet 80 stromy. Jeho vnuk Karlík dostal novou houpací síť, ale má strach, že nenajde dva stromy, jejichž vzdálenost není více než 5 metrů. Ukažte, že existují dva stromy se vzdáleností nejvýše 5 metrů.*

Úloha 2.3. *Na stole tvaru čtverce o straně jeden metr je umístěno několik kruhových koláčků, které se mohou překrývat. Žádný koláček nepřesahuje hranu stolu. Celkový obvod všech koláčků je 10 metrů. Ukažte, že je možné jedním řezem nožem (tj. jednou přímkou) protnout alespoň čtyři koláčky.*

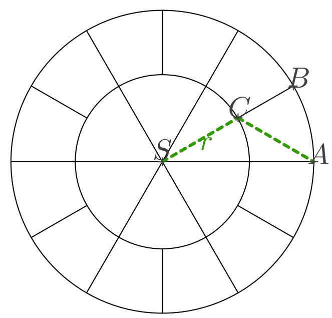
[4, ročník 00/01, serie 1]

Úloha 2.4. *Ukažte, že lze na kruhový stůl o poloměru 15 vyskládat 19 mincí o poloměru 3 tak, že se žádné dvě nepřekrývají. Mince leží celé na stole.*

Příklad 2. *Kruhový terč o poloměru 12 zasáhlo 19 střel. Dokažte, že vzdálenost některých dvou zásahů je menší než 7.*

[3, ročník 59, ústřední kolo]

Řešení. Označme $r = 4\sqrt{3}$ a celý terč rozdělme na 18 částí takto: Prvních šest částí budou shodné výseče o středovém úhlu $60°$ v kruhu o poloměru r uprostřed terče. Zbylé mezikruží rozdělíme na 12 shodných „mezivýsečí“ o středových úhlech $30°$.



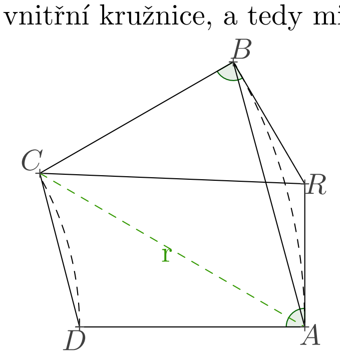
Ukažme, že pro $r = 4\sqrt{2}$ je trojúhelník ACS rovnoramenný se základnou AS : Označme C_0 kolmý průmět bodu C na stranu AS. Potom

$$|C_0S| = |CS| \cdot \cos|\angle CSA| = r \cdot \cos 30° = \frac{r\sqrt{3}}{2} = 6.$$

Potom je C_0 střed $|SA|$, tedy $|CA| = r$.

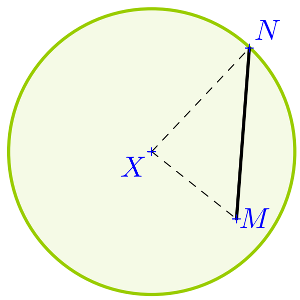
Protože máme celkem 19 šípů, plyne z Dirichletova principu, že v alespoň jedné oblasti jsou alespoň dva šípy. Pokud ukážeme, že vzdálenost každých dvou bodů ležících v jedné z těchto 18 oblastí je menší než 7, musí existovat alespoň dva šípy, jejichž vzdálenost je menší než 7.

Jednu ze shodných „mezivýsečí“ označme $ABCD$ jako na obrázku a dále označme S střed terče. Nyní ukažme, že každá úsečka v „mezivýseči“ $ABCD$ je kratší než 7: Nechť R je průsečík tečen v bodech A, B ke vnější kružnici se středem S a poloměru 12. Pak jistě leží úsečky AR, BR (až na body A, B) mimo terč. Úsečka CD je tětiva vnitřní kružnice. Leží tedy až na body CD uvnitř vnitřní kružnice, a tedy mimo naši „mezivýseč“.



Proto se celá mezivýseč $ABCD$ vejde do pětiúhelníka $ARBCD$. Pokud ukážeme, že každá úsečka v pětiúhelníku $ARBCD$ je kratší než 7, jsme hotovi.

Snadno ukážeme, že největší možná vzdálenost bodu X od bodu ležícího na úsečce MN je $|XM|$ nebo $|XN|$:
Nechť je bez újmy na obecnosti $|XM| \leq |XN|$. Sestrojme kruh K se středem v bodě X a poloměrem $|XN|$.



Protože $|XM| \leq |XN|$, patří oba body M, N do kruhu K. Protože K je konvexní, patří do něj i celá úsečka MN. Protože je N na obvodu K, musí být nejdelší možná vzdálenost bodu X od bodu na úsečce MN rovna $|XN|$.

Proto je nejdelší vzdálenost dvou bodů v pětiúhelníku $ARBCD$ rovna některé ze vzdáleností jeho vrcholů. V trojúhelníku ABC jsou velikosti vnitřních úhlů

$$|\angle ABC| = \frac{180^\circ - |\angle ASB|}{2} = 75^\circ$$

a

$$|\angle BCA| = |\angle ASC| + |\angle SAC| = 60^\circ.$$

Proto je strana AC nejdelší strana trojúhelníka ABC a

$$|AC| > |AB| > |BC|.$$

Protože $|\angle ABC| = 75^\circ$ a $|\angle RBC| = 90^\circ$, je $|\angle ABR| = 15^\circ$, a tedy AB je nejdelší strana rovnoramenného trojúhelníka ABR.
Je tedy $|AC| > |AB| > |AR| = |BR|$. Ze stejnolehlosti obou soustředných kružnic dále plyne, že $|AB| > |CD|$. Protože je trojúhelník CRB pravoúhlý, platí $|\angle CRB| < 90^\circ$. Protože je $|\angle ARB| = 150^\circ$, platí $|\angle ARC| > 60^\circ$. Přitom $|\angle RAC| = 90^\circ - |\angle CAD| = 60^\circ$. Je proto strana AC trojúhelníka ARC delší než strana RC.

Pak s ohledem na symetrii pětiúhelníka $ARBCD$ žádná spojnice dvou bodů z vrcholů tohoto pětiúhelníka není delší nežli $|AC| = r = 4\sqrt{3} < 7$.

Důkaz toho, že dva libovolné body některé z šesti vnitřních výsečí mají vzdálenost menší než 7 ponechávám čtenáři. □

Znalost následující věty by úvahy při řešení **Příkladu 2** výrazně ulehčila. Její důkaz je uveden v závěru práce v Doplňku.

Věta 2.5. *Nechť M je konvexní množina bodů, která vznikla jako sjednocení konvexního n-úhelníka a několika kruhových úsečí, jejichž tětivou je vždy některá strana tohoto n-úhelníka. Označme V množinu všech vrcholů n-úhelníka a všech středů $S \in M$ kruhů, jimž tyto úseče z M náleží. Dále nechť d je délka nejdelší úsečky, která je podmnožinou M. Pak existují body $A, B \in V$ takové, že průnik přímky AB a množiny M je úsečka délky d.*

Příklad 3. *Je dáno 6 přirozených čísel, jejichž součin není násobek 11. Ukažte, že součet nebo rozdíl některých dvou z nich naopak dělitelný 11 je.*

Řešení. Protože součin těchto čísel není dělitelný 11, není ani jedno z nich násobek 11. Je celkem 10 nenulových zbytků po dělení 11. Rozdělme našich šest čísel do pěti množin podle toho, do které z následujících pěti množin patří zbytek, který dají po dělení jedenácti: $\{1, 10\}$,$\{2, 9\}$,$\{3, 8\}$, $\{4, 7\}$,$\{5, 6\}$. Protože každé z našich šesti čísel dává zbytek po dělení jedenácti, který leží v jedné z těchto 5 množin, dle Dirichletova principu jsou v alespoň jedné z těchto 5 množin alespoň dvě z našich šesti čísel. Jejich zbytky jsou pak z množiny $\{x, 11-x\}$. Pak zřejmě součet nebo rozdíl těchto dvou čísel je násobek 11. □

Příklad 4. *Ukažte, že z $n+1$ přirozených čísel nepřevyšujících $2n$ lze vybrat dvě tak, že jedno z nich je dělitelem druhého.*

[1]

Řešení. Zapišme si každé z těchto přirozených čísel $m_i,\ i \in \{0, \ldots, n\}$ jako součin nějakého lichého čísla b_i a mocniny dvou, tedy $m_i = 2^{a_i} \cdot b_i$, kde $a_i \in \mathbb{N}_0$. Zřejmě je $b \leq 2n$. Protože lichých čísel v intervalu $\langle 1, 2n\rangle$ je n, musí mít dle Dirichletova principu dvě ze zadaných čísel stejné liché číslo b v našem rozkladu. Protože jsou tvaru $2^{a_i} \cdot b$ a $2^{a_j} \cdot b$, je zřejmě jedno z nich dělitelem druhého. □

Úloha 2.6. *Nechť je dáno 16 přirozených čísel, z nichž žádné není dělitelné 3 ani 11. Dále součet ani rozdíl žádných dvou z nich není dělitelný 99. Dokažte, že z nich lze vybrat dvě tak, aby jejich součet byl dělitelný 11 a rozdíl 9 nebo součet byl dělitelný 9 a rozdíl 11.*

Úloha 2.7. *Pro každé přirozené n nalezněte co největší přirozené k takové, že z každé n-prvkové množiny lze vybrat k různých podmnožin takových, že žádné dvě z nich nejsou disjunktní.*

[3, Jugoslávie 1972]

Příklad 5. *Ukažte, že existuje přirozené číslo, které se dá alespoň 100 způsoby zapsat jako součet 2012 čísel, z nichž každé je 2011-tou mocninou přirozeného čísla. Zápisy, které se liší jen pořadím sčítanců, považujeme za stejné.*

[4, ročník 11/12, Finální myšmaš]

Řešení. Neklesajících 2012-prvkových posloupností, jejichž prvky jsou přirozená čísla nepřevyšující r, je

$$\binom{2012+r-1}{r-1}.$$

Důkaz: Představme si, že jdeme do obchodu nakupovat čísla od 1 do r a chceme jich přesně 2012. Pak můžeme zřejmě nakoupit právě $\binom{2012+r-1}{r-1}$ možnými způsoby. Po cestě domů si čísla seřadíme podle velikosti a máme neklesající posloupnost přírozených čísel nepřevyšujících r, zřejmě ze dvou různých nákupů sestavíme dvě různé posloupnosti a každou posloupnost takto umíme „nakoupit“.

Každé z těchto posloupností umím bijektivně přiřadit zápis součtu 2012 sčítanců (u zápisu součtu nezáleží na pořadí jeho prvků) tvaru i^{2011}, kde i je přirozené číslo nepřevyšující r. Stačí totiž prvky vybrané posloupnosti umocnit na 2011 a mezi ně napsat znaménka $+$.

Počet všech různých součtů 2012 čísel, z nichž každé je 2011-tou mocninou přirozeného čísla nepřevyšujícího r, je jistě menší než $2012 \cdot r^{2011}$, protože největší možný z nich je právě $2012 \cdot r^{2011}$ a všechny jsou přirozené.

Pokud ukážeme, že existuje přirozené r tak, že zápisů (našich posloupností) bude více, než stonásobek počtu všech možných různých součtů, bude pak dle Dirichletova principu alespoň jeden součet, jehož nabývá alespoň 100 různých zápisů. Zbývá tedy dokázat, že existuje přirozené r takové, že

$$\begin{aligned}
\binom{2012+r-1}{r-1} &> 100 \cdot 2012 \cdot r^{2011} \\
\frac{(2011+r)!}{2012!(r-1)!} &> 201200 \cdot r^{2011} \\
\frac{r(r+1)(r+2)\cdots(r+2011)}{r^{2011}} &> 201200 \cdot 2012! = k \\
1 \cdot \frac{r+1}{r} \cdot \frac{r+2}{r} \cdots \frac{r+2010}{r} \cdot (r+2011) &> k
\end{aligned}$$

Na levé straně předešlé nerovnice vidíme součin 2011 čísel větších než 1 a čísla $r+2011$, které s dostatečně velkým r převýší každou konstantu, tedy i k. Proto existuje r tak, že nerovnost platí. Tím je důkaz proveden $\square$

Úloha 2.8. *V každém políčku tabulky $n \times n$ je vypnutá žárovka. Když Majkl na některou z nich ukáže, všechny žárovky ve stejném řádku a sloupci, včetně té, na kterou ukazuje, se přepnou. Na kolik nejméně ukázání dokáže Majkl rozsvítit všechny žárovky?*

[4, ročník 11/12, Finální myšmaš]

3 Prvočísla v aritmetických posloupnostech

V další části se budeme věnovat Dirichletově větě, což je velmi zajímavé a snadno formulovatelné tvrzení, které si však nedokážeme obecně, ale jen pro několik speciálních případů. Důkaz v plné obecnosti, kterému je věnována celá kapitola VI knihy [5], totiž svou obtížností výrazně přesahuje rámec této práce.

Věta 3.1. *Nechť a, d jsou přirozená nesoudělná čísla. Pak aritmetická posloupnost s diferencí d, jejíž prvním členem je a, obsahuje nekonečně mnoho prvočísel.*

Definice 3.2. *Nechť a, m jsou celá čísla splňující $0 \leq a < m$. Pak označme $\mathcal{P}_{m,a}$, množinu všech prvočísel dávajících zbytek a po dělení m.*

Pokud jsou čísla a, m soudělná, existuje prvočíslo p, které dělí obě dvě čísla. Potom jistě p dělí každé číslo tvaru $km + a, k \in \mathbb{Z}$. Prvočíslem tvaru $km+a$ může být tedy jen p. Proto je množina $\mathcal{P}_{m,a}$ prázdná anebo obsahuje jen prvočíslo p, a tedy je

$$|\mathcal{P}_{m,a}| \leq 1.$$

Všimněme si, že množina $\mathcal{P}_{m,a}$ obsahuje právě ta prvočísla, jež jsou prvky aritmetické posloupnosti s prvním členem a a diferencí m. Věta 3.1 nám říká, že pro nesoudělná a, m je množina $\mathcal{P}_{m,a}$ nekonečná.

Příklad 6. *Dokažte, že množina $\mathcal{P}_{4,3}$ je nekonečná.*

Řešení. Důkaz povedeme sporem: Předpokládejme, že množina $\mathcal{P}_{4,3}$ je konečná a vypišme její prvky:

$$\mathcal{P}_{4,3} = \{p_0 = 3, p_1 = 7, p_2 = 11, \ldots, p_n\}.$$

Nyní rozložme číslo $c = 4 \cdot p_1 p_2 \ldots p_n + 3$ na prvočinitele. Protože $2 \nmid c$, je každé prvočíslo q dělící číslo c liché, tedy $q \equiv 1 \pmod 4$ nebo $q \equiv 3 \pmod 4$. Součin čísel, která dávají zbytek 1 po dělení čtyřmi, dává opět zbytek jedna po dělení čtyřmi. Stačí totiž vynásobit kongruence

$$\begin{aligned} a &\equiv 1 \pmod 4 \\ b &\equiv 1 \pmod 4), \end{aligned}$$

abychom dostali kongruenci $ab \equiv 1 \pmod 4$. Protože dává číslo c po dělení čtyřmi zbytek 3, musí být alespoň jedno z prvočísel v jeho rozkladu na prvočinitele tvaru $4l + 3$, tedy patřit do množiny $\mathcal{P}_{4,3}$. Zřejmě však žádné prvočíslo z $\mathcal{P}_{4,3}$ číslo c nedělí. Tím dostáváme spor. $\square$

Úloha 3.3. *Dokažte, že množina $\mathcal{P}_{6,5}$ je nekonečná.*

Úloha 3.4. *Dokažte, že alespoň jedna z množin $\mathcal{P}_{5,2}$ a $\mathcal{P}_{5,3}$ je nekonečná.*

Úloha 3.5. *Dokažte, že alespoň jedna z množin $\mathcal{P}_{7,3}, \mathcal{P}_{7,5}$ a $\mathcal{P}_{7,6}$ je nekonečná.*

Příklad 7. *Dokažte, že alespoň dvě z množin $\mathcal{P}_{12,5}, \mathcal{P}_{12,7}$ a $\mathcal{P}_{12,11}$ jsou nekonečné.*

Řešení. Stačí, abychom ukázali, že všechna sjednocení

$$\mathcal{P}_{12,5} \cup \mathcal{P}_{12,7}, \qquad \mathcal{P}_{12,5} \cup \mathcal{P}_{12,11}, \qquad \mathcal{P}_{12,7} \cup \mathcal{P}_{12,11}$$

jsou nekonečná. To dokážeme podobně, jako v předcházející úloze 3.4. Rozdělme pro přehlednost řešení na tři podobně vedené části:

a) Předpokládejme, že sjednocení $\mathcal{P}_{12,5} \cup \mathcal{P}_{12,7}$ je konečná množina. Vypišme si všechny její prvky:

$$\mathcal{P}_{12,5} \cup \mathcal{P}_{12,7} = \{p_0 = 5, p_1 = 7, p_2 = 17, \dots, p_n\}.$$

Zřejmě jsou všechna prvočísla z tohoto sjednocení nesoudělná s číslem

$$c = 12p_1p_2 \dots p_n + 5,$$

které je liché a nedělitelné třemi. V rozkladu na prvočinitele má číslo c pouze prvočísla tvaru $12k \pm 1$ a $12k \pm 5, k \in \mathbb{N}_0$, protože jiná prvočísla s výjimkou 2 a 3 neexistují. Přitom pro dvě celá a, b taková, že

$$\begin{aligned} a &\equiv \pm 1 \pmod{12} \\ b &\equiv \pm 1 \pmod{12} \end{aligned}$$

platí $ab \equiv \pm 1 \pmod{12}$. Číslo c však dává po dělení 12 zbytek 5, a proto se v jeho prvočíselném rozkladu vyskytuje prvočíslo tvaru různého od

$12k\pm 1$, tedy nutně $12k\pm 5$. Toto prvočíslo pak patří do $\mathcal{P}_{12,5}\cup\mathcal{P}_{12,7}$. Ale žádné z prvočísel tohoto sjednocení není dělitel čísla c. Tím dostáváme spor. Je nekonečně mnoho prvků sjednocení $\mathcal{P}_{12,5}\cup\mathcal{P}_{12,7}$. Proto je mimo jiné v sjednocení prvků dvou aritmetických posloupností o diferenci 12 a počátečních prvcích 5 a 7 nekonečně mnoho prvočísel.

b) V druhé části potřebujeme ukázat, že $\mathcal{P}_{12,5}\cup\mathcal{P}_{12,11}$ má nekonečně mnoho prvků. Přitom $\mathcal{P}_{12,5} \cup \mathcal{P}_{12,11} = \mathcal{P}_{6,5}$ a o této množině už to z úlohy 3.3 víme.

c) Třetí část bude zase trošku zdlouhavější. Předpokládejme opět pro spor, že je sjednocení $\mathcal{P}_{12,7}\cup\mathcal{P}_{12,11}$ konečná množina. Vypišme si všechny její prvky:

$$\mathcal{P}_{12,7} \cup \mathcal{P}_{12,11} = \{p_0 = 7, p_1 = 11, p_2 = 19, \dots, p_n\}.$$

Zřejmě jsou všechna prvočísla z tohoto sjednocení nesoudělná s číslem

$$c = 12p_1p_2\dots p_n + 7,$$

které je navíc liché a nedělitelné třemi. Proto má v rozkladu na prvočinitele číslo c pouze prvočísla tvaru $12k + 1$ a $12k + 5, k \in \mathbb{N}_0$. (Jiná prvočísla jsou už jen 2, 3 a prvočísla tvaru $12k + 7$ a $12k + 11$, o nichž jsme již ukázali, že číslo c nedělí.) Přitom pro každá dvě celá a, b taková, že

$$\begin{aligned} a &\equiv 1; 5 \pmod{12} \\ b &\equiv 1; 5 \pmod{12} \end{aligned}$$

platí $ab \equiv 1; 5 \pmod{12}$. Víme, že číslo c je součinem prvočísel tvaru $12k + 1$ nebo $12k + 5$, a tedy platí $c \equiv 1; 5 \pmod{12}$, což je spor. Je proto nekonečně mnoho prvků sjednocení $\mathcal{P}_{12,5} \cup \mathcal{P}_{12,7}$.

Tím jsme ukázali, že libovolná dvojice z množin $\mathcal{P}_{12,5}, \mathcal{P}_{12,7}$ a $\mathcal{P}_{12,11}$ má nekonečné sjednocení. To nám stačí, protože pokud by byla nejvýše jedna z nich nekonečná, bylo by minimálně sjednocení těch dvou dalších konečné.

□

Nyní ještě uvedeme slíbenou silnější verzi věty 3.1:

Označme $\mathcal{P}$ množinu všech prvočísel.

Definice 3.6. *O podmnožině A množiny $\mathcal{P}$ řekneme, že má přirozenou hustotu k, jestliže existuje limita*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{|\{x \in A;\ x \leq h\}|}{|\{x \in \mathcal{P};\ x \leq h\}|} = k.$$

Pokud tato limita neexistuje, řekneme, že A nemá přirozenou hustotu.

Poznámka: Ihned je vidět, že celá množina $\mathcal{P}$ má hustotu 1 a že každá konečná podmnožina množiny $\mathcal{P}$ má nulovou hustotu. Také není těžké odvodit, že jsou-li A_1, A_2 dvě disjunktní podmnožiny množiny $\mathcal{P}$ a mají-li přirozené hustoty k_1, k_2, pak jejich sjednocení má přirozenou hustotu a je rovna $k_1 + k_2$.
Uvědomme si, že A_1, A_2 vlastně ani nemusí být disjunktní – stačí, aby jejich průnikem byla množina s nulovou přirozenou hustotou.
Naproti tomu je docela obtížné ukázat, že nějaká podmnožina množiny $\mathcal{P}$ přirozenou hustotu nemá. Příkladem může být množina všech prvočísel, jejichž dekadický zápis začíná cifrou 1.

Věta 3.7. *Nechť a, m jsou nesoudělná celá čísla, $0 \leq a < m$. Pak množina $\mathcal{P}_{m,a}$ všech prvočísel dávajících zbytek a po dělení číslem m má přirozenou hustotu $\frac{1}{\varphi(m)}$, kde $\varphi(m)$ je počet všech s m nesoudělných přirozených čísel nepřevyšujících m.*

Například množina $P_{4,3}$, o níž jsme již mluvili v Příkladu 6, má přirozenou hustotu $\frac{1}{2}$. Znamená to, že na každém „hodně dlouhém“ intervalu je přibližně stejně prvočísel dávajících zbytek 1 po dělení čtyřmi jako těch, co dávají zbytek 3 po dělení čtyřmi.

4 Racionální aproximace

Lidé se od pradávna snažili najít nějaké racionální číslo s hodnotou blízkou π, aby mohli co nejpřesněji počítat obvod kruhu.

Nejstarší písemně doložené odhady π se datují do doby okolo 1900 př.n.l. Jsou to $\frac{256}{81}$ v Egyptě a $\frac{25}{8}$ v Babylonu. Oba dva odhady se od skutečné hodnoty liší o méně než 1 procento.

Archimedes (287-212 př.n.l) spočítal horní a dolní odhady π výpočtem obvodu pravidelního 96-úhelníka vepsaného a opsaného jednotkové kružnici a dostal

$$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}.$$

Okolo roku 480 čínský matematik Cu Čchung-č' podobně jako Archimedes zjistil uvážením pravidelného 12288-úhelníka, že π je přibližně $\frac{355}{113}$, což je hodnota lišící se od π o méně než $3 \cdot 10^{-7}$.

Důvod, proč se Dirichletovu principu – poměrně jednoduchému tvrzení – říká Dirichletův, je to, že jej Dirichlet užíval při studiu racionálních aproximací reálných čísel. Například objevil následující zajímavé tvrzení, které říká přibližně to, že pro každé reálné číslo existuje vhodná aproximace racionálním číslem s celkem malým jmenovatelem.

Věta 4.1. *Nechť $\alpha \in \mathbb{R}$ je libovolné reálné číslo a $n \in \mathbb{N}$ přirozené číslo větší než 1. Potom existují $p \in \mathbb{Z}$ a $q \in \mathbb{N}, q < n$ taková, že $|\alpha - \frac{p}{q}| \leq \frac{1}{qn}$.*

Ilustrujme znění této věty pro konkrétní hodnotu α, zvolme

$$\alpha = \pi \doteq 3,141592.$$

Zvolíme-li $n \leq 7$, dostáváme jedinou možnou dvojici $p = 3, q = 1$. Skutečně $|\pi - 3| = \pi - 3 \leq \frac{1}{7}$, ale $\pi - 3 > \frac{1}{8}$. Proto pro $n \geq 8$ musíme dostat lepší aproximaci čísla π.

- Pro $8 \leq n \leq 106$ dostáváme aproximaci $\frac{22}{7}$.
- Pro $107 \leq n \leq 112$ dostáváme aproximace $\frac{22}{7}$ a $\frac{333}{106}$.
- Pro $n = 113$ je vhodná jediná aproximace $\frac{333}{106}$.
- Pro $114 \leq n \leq 33102$ máme jedinou aproximaci $\frac{355}{113}$.
- Předchozí aproximace $\frac{355}{113}$ je vskutku velmi přesná, přesnější aproximací je až $\frac{103993}{33102}$.

Důkaz 4.1. Interval $[0, 1]$ rozdělme na n intervalů

$$[0, \tfrac{1}{n}), [\tfrac{1}{n}, \tfrac{2}{n}), \ldots, [\tfrac{n-1}{n}, 1].$$

Uvažme $n+1$ čísel $0, 1, \langle\alpha\rangle, \langle 2\alpha\rangle, \ldots, \langle(n-1)\alpha\rangle$, kde $\langle\alpha\rangle$ značí necelou část čísla α. Každé z těchto čísel lze napsat ve tvaru:

$$\begin{aligned} 0 &= 0\cdot\alpha + 0 \\ 1 &= 0\cdot\alpha + 1 \\ \langle\alpha\rangle &= 1\cdot\alpha + k_1 \\ &\vdots \\ \langle(n-1)\alpha\rangle &= (n-1)\cdot\alpha + k_{n-1} \end{aligned}$$

pro vhodně zvolená $k_1, k_2, \ldots, k_{n-1} \in \mathbb{Z}$.

Pro všechna tato čísla platí, že patří do jednoho z předchozích n intervalů. Je jich přitom $n+1$. Proto dle Dirichletova principu existuje interval, v němž jsou alespoň dvě z našich čísel. Jistě však nejsou 0 a 1 ve stejném intervalu.

Absolutní hodnota rozdílu dvou čísel ze stejného intervalu je nejvýše $\frac{1}{n}$. Proto odečtením dostáváme, že existuje $q \in \mathbb{N}, q < n$ a $k \in \mathbb{Z}$ takové, že

$$|q\cdot\alpha + k| \leq \tfrac{1}{n}.$$

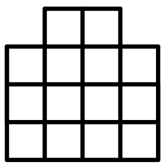
Vydělením přirozeným číslem q dostaneme

$$|\alpha + \tfrac{k}{q}| \leq \tfrac{1}{qn}.$$

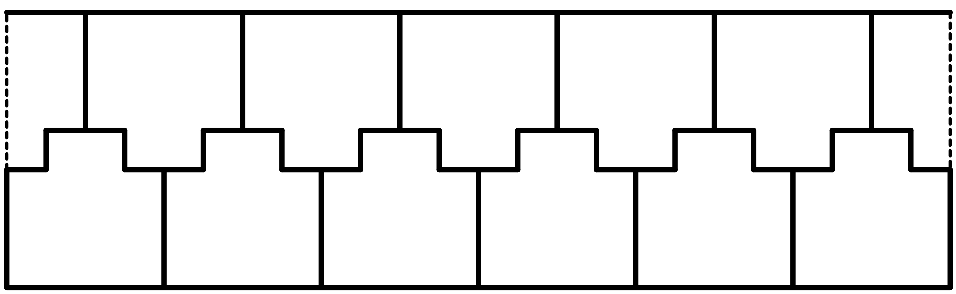
Nyní již jen nechť $p = -k$ je celé číslo a důkaz je hotov. $\square$

5 Řešení úloh

2.2. Uvažme osmiúhelník jako na obrázku složený z 14 čtverců o stranách jeden metr. Snadno nahlédneme, že libovolná dvojice bodů tohoto útvaru má od sebe vzdálenost nejvýše 5 metrů.



Každý pás pozemku o rozměrech 7 x 24 jsme schopni rozdělit na 13 dílů, z nichž každý se vejde do našeho osmiúhelníka. Přitom celou zahradu lze pokrýt šesti takovými pásy.

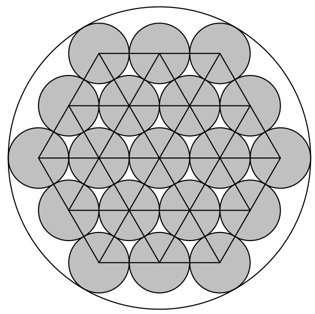


Tak jsme rozdělili dědův pozemek na $6 \cdot 13 = 78$ dílků. Protože stromů je 80, musí být dle Dirichletova principu alespoň v jednom z dílků alespoň dva stromy. Ty jsou pak od sebe nejvýše pět metrů daleko.

2.3. Důkaz povedeme sporem: Předpokládejme, že existuje uspořádání koláčků, v němž neexistuje přímka protínající více než 3 koláče. Nyní pracujme s takovýmto uspořádáním.

Promítneme-li koláček o průměru d kolmo na jednu stranu čtverce, zobrazí se nám na úsečku o délce d. Protože na žádné kolmici na tuto stranu čtverce neleží více než tři koláčky, nikde se nepřekrývají více než tři úsečky. Proto je součet délek našich úseček nejvýše trojnásobek délky strany čtverce, tedy nejvýše 3 metry. Protože je celkový obvod všech koláčků 10 metrů, je součet všech průměrů koláčků roven $\frac{10}{\pi}$ metrů, což je více než tři metry. Promítneme-li tedy na jednu stranu všechny koláčky, dostaneme několik úseček se součtem jejich délek více než 3 metry, což je spor.

2.4. Příkladem vhodného uspořádání může být například:



2.6. Označme $C_{a,b}$ množinu všech přirozených čísel x takových, že

$$\begin{aligned} x &\equiv \pm a \pmod 9 \\ x &\equiv \pm b \pmod{11}. \end{aligned}$$

Přitom protože naše čísla nejsou násobky 3 ani 11, je každé z daných čísel právě v jedné z množin $C_{a,b}$ pro

$$\begin{aligned} a &\in \{1,2,4\} \\ b &\in \{1,2,3,4,5\}. \end{aligned}$$

Máme tedy celkem 15 různých dvojic čísel a, b. Proto budou podle Dirichletova principu alespoň v jedné množině $C_{a,b}$ alespoň dvě čísla x_1, x_2 z našich 16 daných čísel. Pro rozdíl a součet čísel x_1, x_2 nastanou čtyři možnosti:

a) $9|\ x_1 + x_2 \ \wedge\ 11|\ x_1 + x_2$, tedy $99|x_1 + x_2$, což je spor se zadáním.

b) $9|\ x_1 + x_2 \ \wedge\ 11|\ x_1 - x_2$

c) $9|\ x_1 - x_2 \ \wedge\ 11|\ x_1 + x_2$

d) $9|\ x_1 - x_2 \ \wedge\ 11|\ x_1 - x_2$, tedy $99|x_1 - x_2$, což je spor se zadáním.

Mohou tedy nastat jen možnosti $b), c)$. Tím je důkaz hotov.

2.7. Mějme n-prvkovou množinu X, zvolme pevně $a \in X$. Všech podmnožin množiny X, které obsahují prvek a, je 2^{n-1}. Přitom všechny obsahují a, nejsou tedy žádné dvě z nich disjunktní. Je proto $k \geq 2^{n-1}$.

Všechny podmnožiny neprázdné množiny X si rozdělme na 2^{n-1} dvojic doplňkových podmnožin, které jsou disjunktní a jejichž sjednocení je X.

Předpokládejme, že $k > 2^{n-1}$ a dojděme ke sporu. Protože vybíráme více než polovinu všech podmnožin, musíme podle Dirichletova principu alespoň z jedné dvojice vzít obě se doplňující podmnožiny. Tím dostáváme spor, alespoň dvě z k podmnožin množiny X jsou pro $k > 2^{n-1}$ disjunktní. Proto $k = 2^{n-1}$.

2.8. Rozlišme dva případy dle parity čísla n.

a) Číslo n je liché.
Každým ukázáním Majkl ukáže na jednu žárovku, čímž změní stav žárovek v jednom sloupci a jednom řádku. Pokud by Majkl ukázal na méně než n žárovek, byl by z Dirichletova principu řádek i sloupec, v němž na žádnou žárovku nikdy neukázal. Jejich průnikem je žárovka, která nikdy nebyla přepnuta, a tedy nesvítí. Proto musí Majkl ukázat alespoň na n žárovek. Je-li n liché, postačí, aby ukázal na všechny žárovky v prvním řádku tabulky. Každou žárovku v prvním řádku tak přepne n-krát, kde n je liché. Tedy ji rozsvítí. Všechny ostatní žárovky rozsvítí zřejmě také, protože neukáže na žádný řádek kromě toho prvního a přitom každý sloupec bude zvolen právě jednou. Proto odpověď zní n.

b) Číslo n je sudé.
Zřejmě nezáleží na pořadí Majklových kroků. Jistě také nemá smysl ukazovat na nějakou žárovku dvakrát, protože je to stejné, jako by na ni Majkl vůbec neukázal. Pokud ukáže Majkl na všech n^2 žárovek, bude každá žárovka přepnuta tolikrát, kolik žárovek je ve stejném řádku nebo sloupci jako ona. Tedy $2n-1$ krát, což je liché číslo, a tedy každá žárovka bude svítit. Podívejme se na to, proč by to nešlo s méně ukazováním. Budeme si pomáhat představou, že Majkl na všechny žárovky ukázal, tedy všechny svítí a nyní jen vybíráme, na jakou množinu žárovek vlastně Majkl ani nemusel ukazovat. Pokud žádná taková neprázdná množina neexistuje, je jistě řešením n^2. Označme nyní M množinu všech žárovek, na které Majkl nemusel ukazovat.
V každém kříži (kříž je sjednocení žárovek v jednom řádku a v jednom sloupci) **musí být sudý počet žárovek z množiny** M, protože pokud by byl kříž, v němž je lichý počet žárovek z M, byla by žárovka v jeho středu přepnuta lichokrát, tudíž by nesvítila. Pro každé přirozené $j \leq n$ označím x_j počet prvků množiny M v j-tém sloupci. Zvolme libovolný i-tý sloupec. Podívejme se nyní na všech n křížů, co mají střed na tomto sloupci a na počty prvků jejich průniků s M. Součet všech počtů prvků

těchto průniků je s ohledem na **tučnou** podmínku sudý. Lze zapsat ve tvaru:

$$n \cdot x_i + \sum_{j=1, j\neq i}^{n} x_j \equiv 0 \pmod 2.$$

Zde suma vlastně značí počet prvků množiny M mimo i-tý sloupec. Po úpravě dostáváme, že

$$x_i(n-1) + |M|$$

je sudé číslo. Proto x_i má stejnou paritu jako $|M|$, kde i jsme volili libovolné.
Symetricky pro libovolné l dostáváme, že y_l má stejnou paritu jako $|M|$, kde y_l je počet prvků M v l-tém řádku. Proto mají čísla x_i a y_l stejnou paritu. Jejich součet je proto sudý.
Podívejme se nyní na průnik M s křížem, který obsahuje i-tý sloupec a l-tý řádek. Počet jeho prvků společných s M je s ohledem na **tučnou** podmínku sudý. Pokud by jeho střed patřil do M, lze počet prvků jeho průniku s M napsat jako $x_i + y_l - 1$, což je však liché číslo. Proto jeho střed do M nepatří. Ale i a l jsou libovolná. Pro každou žárovku snadno najdeme i, l tak, aby byla středem našeho kříže. Proto žádná žárovka nepatří do M. Množina M všech žárovek, na něž Majkl nemusel ukazovat je prázdná, a proto je řešením úlohy n^2.

3.3. Řešte obdobně jako příklad 6, označte

$$\mathcal{P}_{6,5} = \{p_0 = 5, p_1 = 11, p_2 = 17, \ldots, p_n\}$$

a číslo $c = 6 \cdot p_1 p_2 \ldots p_n + 5$.

3.4. Řešte obdobně jako příklad 6, označte

$$\mathcal{P}_{5,2} \cup \mathcal{P}_{5,3} = \{p_0 = 2, p_1 = 3, p_2 = 7, \ldots, p_n\}$$

a číslo $c = 5 \cdot p_1 p_2 \ldots p_n + 2$. Všimněte si, že

$$\begin{aligned} a &\equiv \pm 1 \pmod 5 \\ b &\equiv \pm 1 \pmod 5 \end{aligned}$$

dává $ab \equiv \pm 1 \pmod 5$.

3.5. Řešte obdobně jako úlohu 3.4. Označte

$$\mathcal{P}_{7,3} \cup \mathcal{P}_{7,5} \cup \mathcal{P}_{7,6} = \{p_0 = 3, p_1 = 5, p_2 = 13, \ldots, p_n\}$$

a číslo $c = 7 \cdot p_1 p_2 \ldots p_n + 3$. Všimněte si, že pro a, b přirozená splňující

$$\begin{aligned} a &\equiv 1; 2; 4 \pmod 7 \\ b &\equiv 1; 2; 4 \pmod 7 \end{aligned}$$

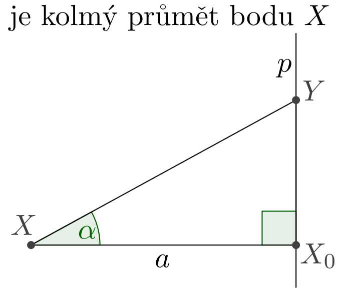
platí $ab \equiv 1, 2, 4 \pmod 7$.

6 Doplněk

Věta 2.5. *Nechť M je konvexní množina bodů, která vznikla jako sjednocení konvexního n-úhelníka a několika kruhových úsečí, jejichž tětivou je vždy některá strana tohoto n-úhelníka. Označme V množinu všech vrcholů n-úhelníka a všech středů $S \in M$ kruhů, jimž tyto úseče z M náleží. Nechť d je délka nejdelší úsečky, která je podmnožinou M. Pak existují body $A, B \in V$ takové, že průnik přímky AB a množiny M je úsečka délky d.*

Důkaz 2.5. Proveďme nejprve dvě pozorování, která nám pomohou důkaz dokončit:

1. pozorování:
   Nechť p je přímka v rovině a Y je libovolný bod na ní. Dále nechť X je bod na $p$neležící. Označme a vzdálenost bodu X od přímky p. Nechť X_0 je kolmý průmět bodu X na přímku p.

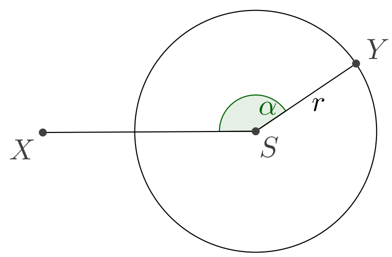


   Pro délku XY platí:
   $$|XY| = \frac{a}{\cos \alpha},$$
   kde α je velikost úhlu X_0XY. Nezáporná velikost úhlu α je menší než $\frac{\pi}{2}$. Přitom na intervalu $[0, \frac{\pi}{2})$ je funkce $\frac{1}{\cos \alpha}$ rostoucí. Proto délka úsečky XY se vzdalujícím se bodem Y od bodu X_0 roste. Pro libovolnou úsečku na přímce p obsahující bod Y proto platí, že vzdálenost alespoň jednoho z jejích krajních bodů od bodu X je větší nebo rovna $|XY|$.
   Proto pro libovolnou úsečku AB a bod X je nejvzdálenějším bodem úsečky AB od bodu X některý z jejích krajních bodů, tj. A nebo B.

2. pozorování:
   Nechť k je kružnice se středem S o poloměru r a Y libovolný bod na ní. Dále nechť X je bod různý od S. Platí

$$|XY|^2 = |XS|^2 + r^2 - 2r\,|XS| \cdot \cos\alpha,$$

   kde $\alpha \in [0, \pi]$ je velikost úhlu XSY. Funkce $\cos\alpha$ je na intervalu $[0, \pi]$ klesající. Proto vzdálenost $|XY|$ roste s rostoucí velikostí úhlu α.



   Proto pro libovolný oblouk AB na kružnici k je nejvzdálenějším bodem oblouku AB od bodu X některý z jeho krajních bodů, tj. A nebo B, anebo bod C kružnice k určený podmínkou, že úsečka XC obsahuje S (tj. vzdálenější ze dvou průsečíků přímky XS s kružnicí k).

Protože je M ohraničená a uzavřená, existuje v M úsečka CD maximální délky. Zřejmě body C, D leží na hranici M. Jsou čtyři možnosti podle toho, zda jsou C, D ve V:

1) Oba body C, D jsou ve V. Pak jsme jistě hotovi.

2) Bod C leží ve V, ale D nikoli. Bod D tedy leží uvnitř hraniční úsečky množiny M nebo uvnitř některého hraničního oblouku. Ukážeme, že na hranici M leží body C', D' takové, že délka úsečky $C'D'$ je rovna $|CD|$ a úsečka $C'D'$ obsahuje alespoň dva body z množiny V.
   Rozlišme tři možnosti podle toho, kde na obvodu našeho útvaru se nachází bod D:

   a) Bod D je uvnitř strany n-úhelníka. Označíme-li A, B její vrcholy, podle úvahy v 1. pozorování platí $|CA| > |CD|$ nebo $|CB| > |CD|$, spor.

   b) Bod D je uvnitř některého oblouku tvořícího hranici množiny M a C je střed kruhu, na jehož obvodu je tento oblouk.

Nechť $C' = C$ a D' je jeden z krajních bodů na tomto hraničním oblouku se středem C' a poloměrem $|CD|$. Pak $D' \in V$ a protože jsou body D, D' na kružnici se středem $C = C'$ a poloměrem $|CD|$, je $|C'D'| = |CD|$ a úsečka $C'D'$ má maximální možnou délku a přitom body $C', D' \in V$.

c) Bod D je uvnitř některého oblouku tvořícího hranici množiny M a C není střed S kruhu, na jehož obvodu je tento oblouk. Pak podle úvahy ve 2. pozorování leží střed S uvnitř CD. Protože $C, S \in V$, jsme hotovi.

3) Bod C neleží ve V zatímco D ano – to je ale zcela symetrické s případem 2).

4) Pokud není ani jeden z bodů C, D prvkem množiny V, nemůže být ani jeden z nich středem žádného kruhu, na jehož obvodu je oblouk, který tvoří část obvodu útvaru M. Přitom z a) jasně plyne, že ani jeden z bodů nemůže být na úsečce ohraničující M. Zbyla nám možnost, kdy oba body leží uvnitř hraničních oblouků, ale ne ve V. Tedy bod D je uvnitř některého oblouku tvořícího hranici množiny M a C není střed S_1 kruhu, na jehož obvodu je tento oblouk, a současně bod C je uvnitř některého oblouku tvořícího hranici množiny M a D není střed S_2 kruhu, na jehož obvodu je tento oblouk. Potom protože je CD maximální délky, musí s ohledem na 2. pozorování středy S_1 i S_2 ležet uvnitř CD. Pokud $S_1 \neq S_2$, jsme hotovi. V opačném případě máme kružnici se středem v $S_1 = S_2$ o poloměru S_1C, na níž leží bod C a kružnici se stejným středem o poloměru S_1D, na níž leží bod D. Pak jen rotací kolem S_1 otáčíme CD, dokud jeden z bodů C, D nepřejde na jeden z prvků množiny V (to přitom jistě jednou nastane, protože i kdyby $|S_1C| = |S_1D|$ a hranici množiny M tvořila celá kružnice a ne jen její oblouk, musí na ní být nějaký vrchol mnohoúhelníku, s nímž jsme začínali). Pak máme úsečku $C'D'$ o délce $|CD|$ procházející $S_1 \in V$ s krajním bodem, který leží ve V. To jsme měli dokázat.

$\square$

Literatura

[1] B. Bollobás, *The Art of Mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge, 2006

[2] L. Bukovský, I. Kluvánek, *Dirichletov Princíp*, ÚVMO, Mladá Fronta, Praha, 1970

[3] Matematická olympiáda

[4] Matematický korespondenční seminář

[5] J-P. Serre, *A Course in Arithmetic*, Graduate Texts in Mathematics 7, Springer-Verlag, New York, 1973

[6] wikipedia.org (O Dirichletovi a aproximaci π)

[◯▷] Vlastní úlohy