

STŘEDOŠKOLSKÁ ODBORNÁ ČINNOST

EXPERIMENTÁLNÍ STUDIUM VALIVÝCH POHYBŮ

Luboš Vozdecký

V y š k o v 2013

STŘEDOŠKOLSKÁ ODBORNÁ ČINNOST

Obor SOČ: 2 Fyzika

Experimentální studium valivých pohybů *Experimental Research of Rolling Motions*

Autor: Luboš Vozdecký

Škola: Gymnázium a Střední odborná škola
zdravotnická a zemědělsko-ekonomická Vyškov
Komenského náměstí 16
682 01 Vyškov
Česká republika

Školitel: Mgr. Jiří Bartoš, PhD.

Konzultant: prof. RNDr. Jana Musilová, Csc.

V y š k o v 2013

Prohlašuji, že jsem svou práci vypracoval samostatně, použil jsem pouze podklady (literaturu, SW atd.) uvedené v příloženém seznamu a postup při zpracování a dalším nakládání s prací je v souladu se zákonem č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon) v platném znění.

V dne podpis:

Poděkování

V první řadě bych chtěl *vřele* poděkovat panu doktoru **Mgr. Jiřímu Bartošovi, PhD.** a paní profesorce **RNDr. Janě Musilové, CSc.** Panu doktoru Bartošovi bych chtěl poděkovat za odbornou asistenci u experimentů, za poskytnutí konzultací k experimentům a za cenné rady a připomínky. Paní profesorce Musilové bych chtěl poděkovat za ochotu a vstřícnost při vysvětlování teoretické stránky věci.

Tato práce byla vypracována za finanční podpory JMK a JCMM.



ANOTACE

Valení je jedním z nejfrekventovanějších pohybů v běžném životě i v technické praxi. Jeho podrobné studium má proto široké aplikační možnosti. Valivé pohyby byly mj. i v minulosti základem experimentů, pomocí nichž se podařilo odhalit zcela klíčové fyzikální zákonitosti. Cílem práce je především experimentální studium různých aspektů valivých pohybů: stanovení podmínek valení bez klouzání, popis valivého pohybu s prokluzem, vliv valivého odporu v závislosti na vlastnostech materiálu podložky a valícího se tělesa, tvaru a rozměrech tělesa.

Klíčová slova: valení, valivý pohyb, prokluz, valivý odpor

ANNOTATION

Rolling is one of the most frequent motions in a common life and in technical practice as well. The detailed study of this kind of motion has high possibility for wide application. Rolling motions were the base of the experiments that helped to discover crucial physical rules. The goal of this project is primarily to study various aspects of rolling motions, such as: conditions for rolling without slipping, description of rolling with slipping, dependence of rolling resistance on properties of the ground material and the material of the rolling object (shape, size etc.).

Key words: rolling, rolling motion, slipping, rolling resistance

OBSAH

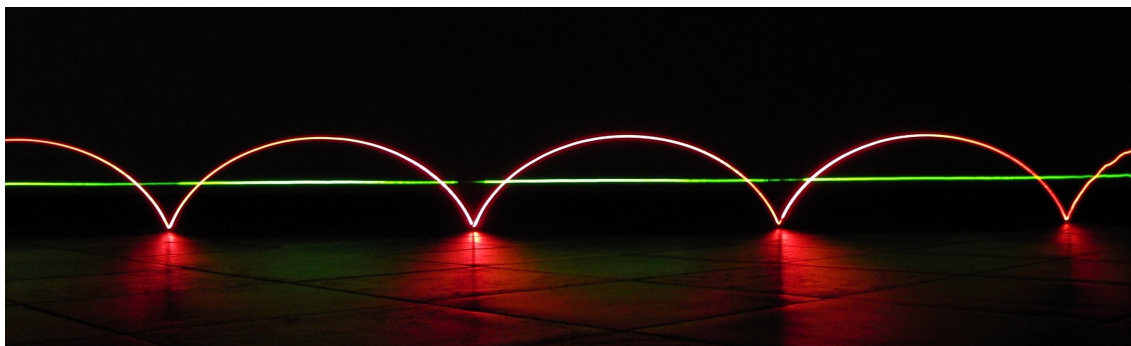
ÚVOD	6
1 Zpracování dat	7
1.1 Software	7
1.2 Zpracování experimentálních dat	9
2 Valení po nakloněné rovině	10
2.1 Impulsové věty	10
2.2 Valení po nakloněné rovině	12
2.3 Moment setrvačnosti a poloměr valení	14
2.4 Experiment a jeho odchylky od teorie	15
2.5 Fitování experimentální křivky	20
3 Pátrání po původu valivého odporu	23
3.1 Úvod	23
3.2 Současná představa o valivém odporu	25
3.3 Normálové síly a rameno valivého odporu	26
3.4 Deformace povrchu na nakloněné rovině	30
3.5 Deformace povrchu na vodorovné rovině	50
3.6 Vlastnosti použitých materiálů	51
3.7 Deformace tělesa na pevné podložce	53
4 Valení s prokluzem	55
4.1 Co říká teorie	55
4.2 Co říká experiment	61
Závěr	63
Zdroje	64

ÚVOD

Valení je typ pohybu, se kterým se setkáváme každý den. Valivý pohyb vykonává kolo auta, kutálející se míč, ale i kuličky ve valivém ložisku. Valení je nejefektivnější typ pohybu vůbec. Dochází při něm k minimálnímu tření a tím pádem i minimálním ztrátám. Studium valivého pohybu a pohyb samotný provází lidstvo od nepaměti. Vše začalo objevem kola asi 5 tisíc let před našim letopočtem. Kolo je považováno za jeden z největších vynálezů starověku. Provází nás až do dnešní doby 21. století, doby výpočetní techniky a nanotechnologií.

Cílem této práce je dopodrobna prozkoumat tento druh pohybu a potvrdit či vyvrátit různé hypotézy, které se týkají valení a valivého odporu. Jeden z dalších problémů, kterými se budu zabývat, je valení s prokluzem. Budeme se snažit zjistit, za jakých podmínek nastává valení s prokluzem, jaký je jeho průběh a na jakých okolnostech závisí. V práci je kladen důraz na experimentální část, která bude doprovázená také částí teoretickou. Jako jeden z cílů si tato práce klade vypracování teoretického modelu, který by vysvětloval valivý odpor, a následné experimentální testování tohoto modelu.

Pro uvedení čtenáře do problematiky začneme s popisem nejjednodušších situací. Vycházejíce ze základních fyzikálních zákonů (Newtonovy zákony, impulsové věty apod.) postupně odvodíme příslušné rovnice pro netriviální situace. Pro tyto situace provedeme experiment a data z experimentu zpracujeme přes video a příslušný software, abychom je následně mohli porovnat s experimentem.



Ilustrační obrázek – vlastní záznam

Zpracování dat

1.1 Software

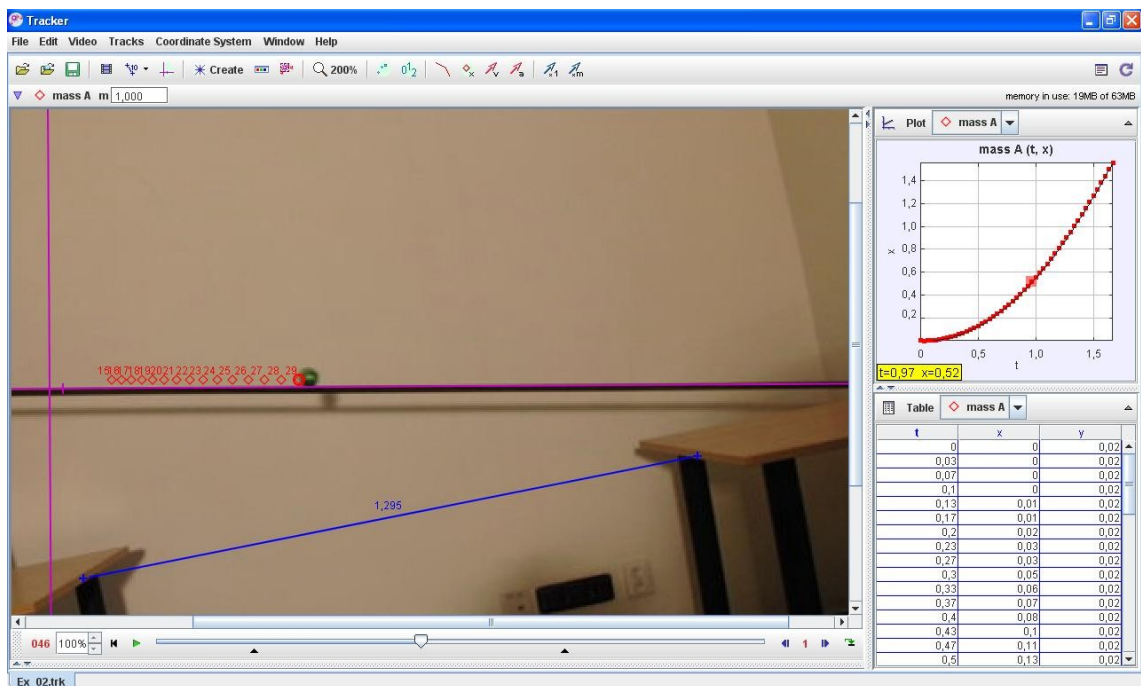
Při experimentálním zkoumání valivých pohybů bude potřeba zaznamenávat vývoj polohy několika bodů v čase. Poté se data budou muset přesunout do počítače pro další zpracování. Nejefektivnější způsob, jak to provést, je zaznamenat experiment na video a pomocí speciálního softwaru v počítači získat vývoj polohy vhodně zvýrazněných bodů v čase. Pro zpracování dat z videí budeme používat opensource program Tracker^[1], který je určen pro analyzování experimentů zaznamenaných na video.

Po nahrání videa do programu Tracker se musí provést několik kalibračních kroků. Nejprve se zkontroluje, zda je správně nastavena frekvence snímkování. Po nahrání videa by to měl program udělat automaticky, ale pro jistotu je vhodné porovnat frekvenci v nastavení se skutečnou frekvencí snímkování. Program totiž u každého snímku videa zaznamená polohu předem určeného bodu. Pro naše potřeby nám samotný tvar trajektorie nestačí. Potřebujeme získat polohu v závislosti na čase. To znamená, že program musí ke každé zaznamenané poloze přiřadit i čas. Program si podle snímkovací frekvence vypočítá, kolik uběhne času mezi dvěma snímky. Program implicitně určí čas u prvního snímku jako nula a pak pouze přičítá vypočtený čas při každém přechodu na další snímek. Kdyby však byla nastavena frekvence špatně, program by špatně určoval čas.

Další věc, kterou je nezbytné provést, je nastavení škálování. Program není schopen říci, o kolik metrů se zvolený bod posunul. Program dokáže pouze určit, o kolik *pixelů* se daný bod posunul. Proto je nezbytné do programu zadat, kolik pixelů obsahuje jeden metr. Program polohu převede a my na výstupu spatříme metry místo pixelů. Tento kalibrační proces umožňuje program Tracker zadat graficky. Na videu si určíme dva libovolné body, jejichž vzájemnou vzdálenost již známe, a v programu mezi ně položíme kalibrační hůl a zadáme vzdálenost. Tyto dva body by měly být ve svislé rovině, ve které bude probíhat experiment – tj. vzdálenost bodů od kamery by měla být přibližně stejná jako vzdálenost experimentu od kamery. Budou-li blíže/dále, bude se zdát vzdálenost mezi nimi větší/menší a celé škálování bude chybné. O něco důležitější je, aby body byly v rovině kolmé na pohled kamery. Kamera se na pomyslnou úsečku mezi škálovacími body nesmí dívat z úhlu. Tato kritéria vyplývají z toho, že na video

můžeme zaznamenat pouze dva rozměry. Také samotný experiment musí probíhat v jedné rovině, která je kolmá na pohled kamery. Program nepozná, že se nějaký bod pohybuje dopředu či dozadu vzhledem ke kameře.

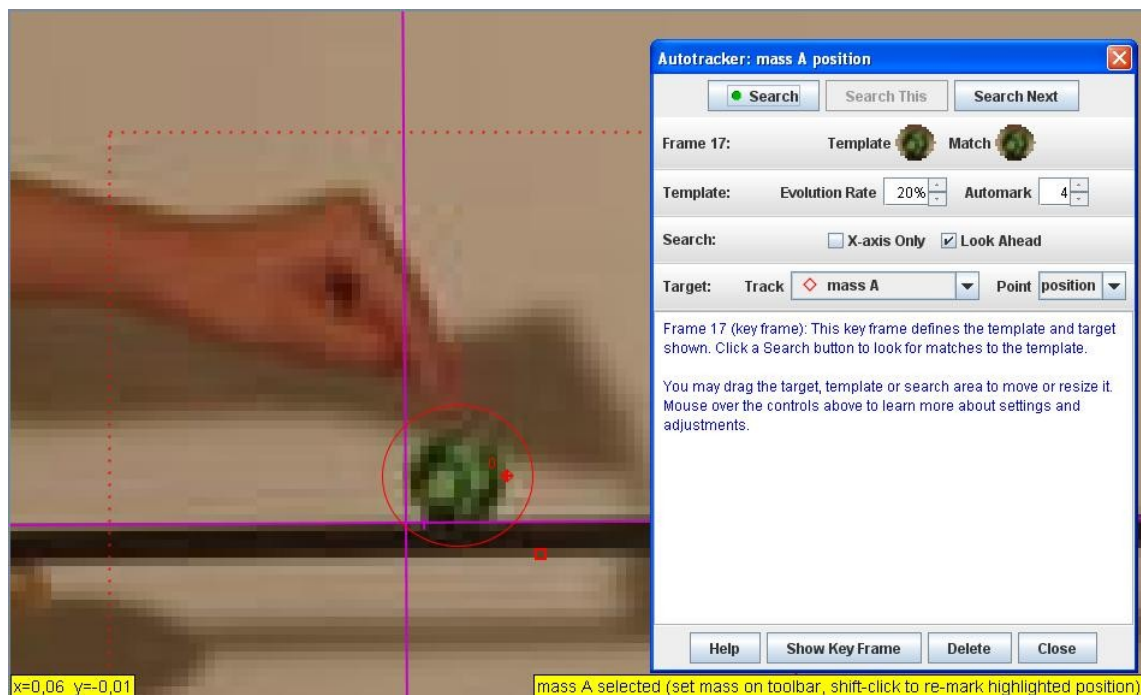
Jednou z posledních věcí, kterou je nutné udělat, je volba počátku souřadnicového systému a natočení os souřadnicového systému. V případě tělesa pohybujícího se po nakloněné rovině s jedním stupněm volnosti je výhodné zvolit osu x rovnoběžnou s předpokládanou trajektorií (kolejnice, deska apod.). Počátek je vhodné zvolit zhruba v místě, kde se objekt začíná pohybovat.



Obr. 1.1: Program Tracker^[1]. Kalibrační hůl (modře), osy souřadnic (fialově) a zaznamenané body (červeně)

Zaznamenávání polohy můžeme uskutečnit dvěma způsoby. Buď budeme zaznamenávat z každého snímku polohu manuálně, nebo použijeme funkci autotracker a program to udělá za nás. Při používání funkce autotracker musíme nejdříve označit bod, který budeme chtít sledovat. Kromě onoho bodu ještě musíme zvolit oblast, ve které by měl program zvolený bod hledat. Tato oblast by neměla být moc malá, ale ani moc velká. Ze zkušeností by měla být o něco větší, než je pozorovaný objekt.

Z programu se pak exportují všechna data v podobě textového souboru, který se následně importuje do tabulkového procesoru.



Obr. 1.2: Inicializace autotrackeru dva snímky před uvolněním objektu.

1.2 Zpracování experimentálních dat

Aby se dala zaznamenaná data porovnat s teorií, musíme zajistit, aby počáteční souřadnice $[x, t]$ byly nulové. Ve skutečnosti totiž začíná pohyb v naší soustavě souřadnic v čase t_0 s nějakou počáteční polohou x_0 . Pro jednoduchost budeme v teorii předpokládat, že se těleso pohybuje už od počátku souřadnicové soustavy. Takže vlastně potřebujeme posunout naši soustavu tak, aby byly počáteční poloha a čas nulové. Toho dosáhneme tak, že ke každé souřadnici přičteme takovou konstantu, aby první souřadnice byla nulová. To stejné se provede s časem.

Ještě před tím by se měla data vhodně upravit. První souřadnice by měla pocházet ze snímku, na kterém je těleso uvolněno, ale ještě se nepohybuje. Tato ideální situace bohužel nikdy nenastane. Máme vždy dva snímky "na hraně". Na jednom je těleso ještě zajištěno a jeho rychlost je nulová. Na dalším snímku je těleso odjištěno, ale už se pohybuje nějakou velmi malou rychlostí. Zvýšením frekvence snímků nastane úplně stejná situace. Jediný rozdíl bude v tom, že rychlost objektu bude na druhém snímku menší. Z toho vyplývá, že pokud nebude frekvence snímků nekonečně velká, budeme muset pro experiment vždy uvažovat nenulovou počáteční rychlost.

Valení po nakloněné rovině

2.1 Impulsové věty

Při popisu pohybu tělesa, při kterém dominuje pohyb translační a veškeré rotace lze zanedbat, můžeme rozměry tohoto tělesa také zanedbat. Těleso pak můžeme považovat za hmotný bod. Aproximaci hmotného bodu můžeme použít např. při popisu pohybu tělesa v gravitačním poli. V tomto případě nezáleží na tom, jak a jestli vůbec těleso rotuje kolem své osy, ale hlavně nás zajímá pohyb jeho střed hmotnosti (v homogenním gravitačním poli splývá těžiště se středem hmotnostní, proto někdy budeme pro zkrácení používat termín těžiště)

V případě valivého pohybu rotace zanedbat nelze. Valivý pohyb je totiž kombinací pohybu translačního a rotačního. Při situacích, kdy rotační pohyb zanedbat nelze, využijeme impulsových vět.

První věta impulsová je důsledkem aplikace druhého a třetího Newtonova zákona na soustavu částic a říká, že časová derivace celkové hybnosti tělesa je rovna výslednici všech vnějších sil na těleso působících.

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}_1^{\text{ext}} + \mathbf{F}_2^{\text{ext}} + \mathbf{F}_3^{\text{ext}} \dots \dots \dots + \mathbf{F}_N^{\text{ext}} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{\text{ext}} \quad (2.1)$$

V tomto případě nás nezajímají působišť sil. Zajímá nás velikost a směr každé síly. Levá strana rovnice (2.1) by se dala napsat i jako $m\mathbf{a}$, kde \mathbf{a} je zrychlení středu hmotnosti tělesa.

První věta impulsová tedy popisuje translační pohyb, který je zastoupen pohybem těžiště. Druhá věta impulsová bude popisovat rotační pohyb. A zní: časová derivace momentu hybnosti tělesa je rovna výslednému momentu všech vnějších sil na těleso působících.

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}_1^{\text{ext}} + \mathbf{M}_2^{\text{ext}} + \mathbf{M}_3^{\text{ext}} \dots \dots \dots + \mathbf{M}_N^{\text{ext}} = \sum_{i=1}^N \mathbf{M}_i^{\text{ext}} \quad (2.2)$$

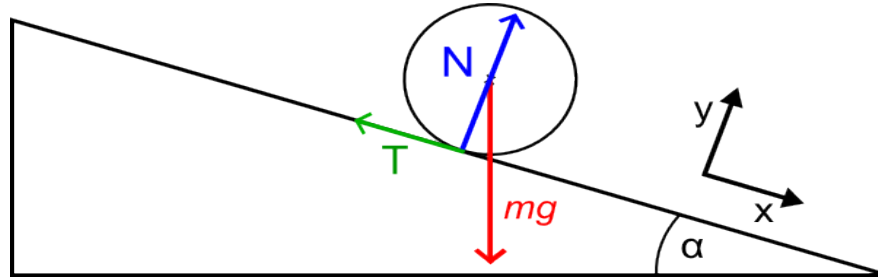
kde externí moment i -té síly $\mathbf{M}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{\text{ext}}$. Vektory \mathbf{r}_i mají počátek obecně v jakémkoliv pevném bodě, popřípadě ve středu hmotnosti tělesa, a směřují vždy do

působíště vektoru síly $\mathbf{F}_i^{\text{ext}}$. Derivaci momentu hybnosti lze vyjádřit pro případ tuhého tělesa jako $\mathbf{I}\boldsymbol{\varepsilon}$, kde \mathbf{I} je v obecném případě tenzor setrvačnosti a $\boldsymbol{\varepsilon}$ je vektor úhlového zrychlení.

2.2 Valení po nakloněné rovině

V této kapitole aplikujeme impulsové věty na konkrétní případ. S využitím impulsových vět spočítáme zrychlení těžiště koule, která se valí po nakloněné rovině.

První věc, která se v tomto případě musí udělat, je určení všech sil působících na těleso.



Obr. 2.1: Znázornění sil působících na kouli na nakloněné rovině

$$\mathbf{F}_g = (mg \sin \alpha, -mg \cos \alpha, 0) \quad \mathbf{N} = (0, N, 0) \quad \mathbf{T} = (-T, 0, 0) \quad (2.3)$$

Uvažujme, že se koule bude valit po kolejnici, a proto se nemůže pohybovat ve směru osy z . Vezmeme tedy v úvahu pouze pohyb v rovině xy . Souřadnicové osy jsme si zvolili tak, že osa x je rovnoběžná s kolejnici. Normálová síla je vždy kolmá k podložce, proto jediná nenulová složka této síly bude v ose y . Třecí síla je naopak vždy s podložkou rovnoběžná.

Podle první věty impulsové platí

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}_g + \mathbf{N} + \mathbf{T} \Rightarrow ma_x = mg \sin \alpha - T \quad ma_y = -mg \cos \alpha + N \quad (2.4)$$

kde \mathbf{a} je zrychlení středu hmotnosti tělesa.

Ze zkušeností víme (a experiment nám to potvrdí), že y -ová souřadnice těžiště tělesa bude konstantní. Těleso se kolejnici nepropadne, a ani se nebude vznášet. Aby tato podmínka byla splněna, musí být y -ová složka rychlosti po celou dobu nulová. To nastane pouze tehdy, pokud bude y -ové zrychlení nulové. a_y je nulové jen tehdy, bude-li výslednice součtu všech sil ve směru y nulová. Proto platí:

$$N = mg \cos \alpha \quad (2.4)$$

Nyní jsou na řadě impulsové věty. V první impulsové větě musíme sečíst všechny síly na těleso působící. Problém jsme si dostatečně zjednodušili předchozími

důkazy. Víme, že z -ové složky všech vektorů jsou nulové. Podle vazební podmínky součet y -ových složek *musí* být nulový. Zbývá nám tedy sečíst x -ové složky.

$$ma = mg \sin \alpha - T \quad (2.5)$$

U druhé impulsové věty si budeme všimnout ramen sil. Momenty sil budeme vztahovat ke středu hmotnosti kuličky. Tíhová síla má působíště v těžišti. Budeme předpokládat, že kulička je homogenní a má těžiště ve středu. Osa rotace bude tedy procházet těžištěm. Tím pádem je rameno tíhové síly nulové a moment této síly je také nulový. Rameno normálové síly není sice nulové, ale je rovnoběžné se samotnou silou. Zdůvodníme to: podložka, po které se koule valí, je rovinnou tečnou ke kouli. To je patrné z obr. 2.1. Normálová síla je kolmá na podložku a její působíště je v bodě dotyku. Přímka, která je kolmá na tečnu kružnice a prochází bodem dotyku, prochází také středem kruhu. Tím dokážeme, že vektor normálové síly směřuje do středu koule. Z toho jednoznačně vyplývá, že vektory leží na jedné přímce. Vektorový součin takových vektorů je nulový vektor. Poslední síla, to jest tření, má rameno síly rovné poloměru koule, polohový vektor třecí síly vzhledem k těžišti je k této síle kolmý. Proto má druhá věta impulsová tvar:

$$I \varepsilon = TR \quad (2.6)$$

Kde I je moment setrvačnosti (analogie hmotnosti), ε úhlové zrychlení a R poloměr koule.

Máme dvě rovnice, v nichž vystupují 3 neznámé (T , ε , a). Dokud nenajdeme nějakou další rovnici, nedostaneme jednoznačné řešení soustavy rovnic. Když se nějaké těleso valí, vykonává zároveň translační i rotační pohyb. Pokud budeme uvažovat valení bez prokluzu, svazuje tyto dva pohyby vazební podmínka. Aby nedocházelo k prokluzu, musí být velikost rychlosti středu hmotnosti stejná jako obvodová rychlost bodu na povrchu:

$$v_T = \omega R \quad (2.7)$$

kde ω je úhlová rychlost a v_T je rychlost těžiště vzhledem k podložce. Pak dostáváme

$$\omega = \frac{v_T}{R} \quad (2.8)$$

Po zderivování této rovnice podle času dostaneme

$$\varepsilon = \frac{a_T}{R} \quad (2.9)$$

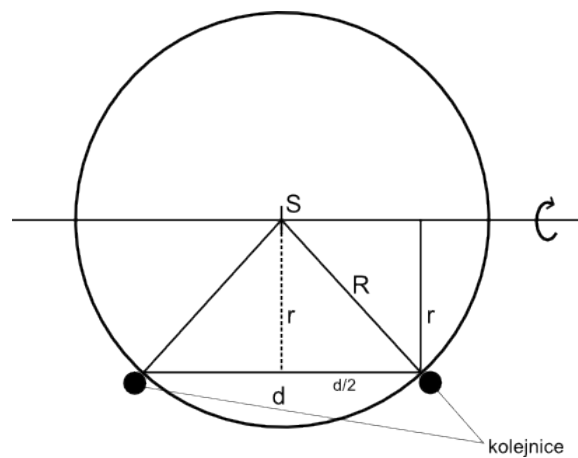
Takto vyjádřené ε v rov. (2.9) dosadíme do (2.6) a dostaneme tak spolu s rov. (2.5) soustavu dvou rovnic o dvou neznámých. Po úpravách dostáváme pro a_T

$$a_T = \frac{R^2 m g \sin \alpha}{I + m R^2} \quad (2.10)$$

Poloha těžiště v závislosti na čase bude v následující kapitole vyjádřena pomocí zrychlení těžiště a_T v rovnici (2.10). Poté se porovná s naměřenými polohami těžiště z experimentu.

2.3 Moment setrvačnosti a poloměr valení

Když jsme v minulé kapitole popisovali pohyb bez prokluzu rov. (2.7), tak jsme předpokládali, že poloměr koule je stejný jako vzdálenost bodu dotyku od osy valení. To nemusí být vždy pravda. Příklad takové situace je naznačen na obr. 2.2.



Obr. 2.2: Koule s odlišným geometrickým poloměrem a poloměrem valení

Koule se na tomto obrázku bude kutálet po dvojité kolejnici. Poloměr koule je označen jako R a vzdálenost bodů dotyku od osy (tuto veličinu nazvěme poloměrem valení) je označená jako r . Když si v takovém případě změříme vzdálenost bodů dotyku d , jsme schopni spočítat r pomocí Pythagorovy věty.

$$r = \sqrt{R^2 - \frac{d^2}{4}} \quad (2.11)$$

Spočtené r dosadíme místo R do (2.6) a (2.9). Dostaneme

$$a_T = \frac{r^2 m g \sin \alpha}{I + m r^2} \quad (2.10a)$$

Další věcí, kterou je třeba spočítat, je moment setrvačnosti vzhledem k ose rotace, v našem případě osa z . Ten se spočte integrováním přes celý objem tělesa. Pro homogenní těleso platí

$$I = \rho \int_V q^2 dV \quad (2.12)$$

Kde q je vzdálenost elementu objemu dV od osy rotace. Pro kouli pak platí:

$$I = \frac{2}{5} m R^2 \quad (2.13)$$

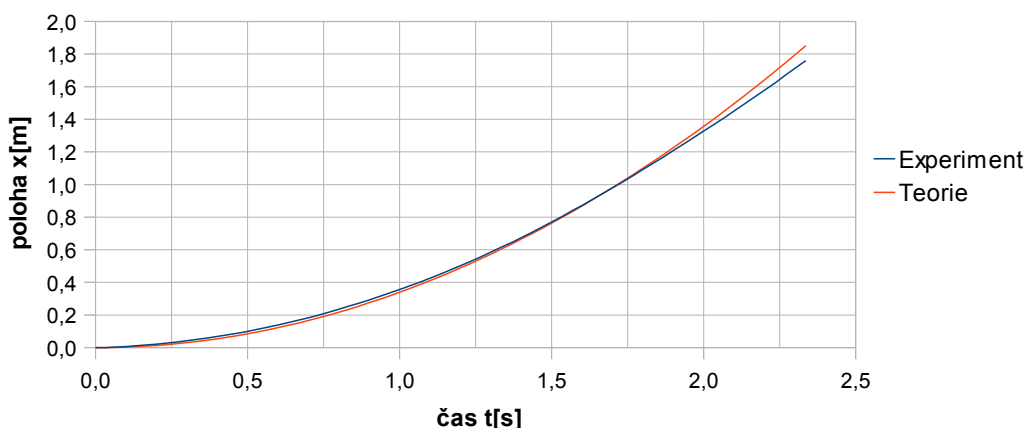
Nyní vezměme rovnici pro zrychlení těžiště (2.10a) a zlomek na pravé straně usměrníme členem $1/mr^2$ a dosadíme I vyjádřené v (2.13). Takto dostaneme tvar:

$$a_T = \frac{g \sin \alpha}{1 + \frac{2}{5} \frac{R^2}{r^2}} \quad (2.14)$$

To je finální tvar pro určení teoretického zrychlení těžiště koule při valení po nakloněné rovině.

2.4 Experiment a jeho odchylky od teorie

Abychom ověřili, zda jsou postupy pro měření popsané v prvních kapitolách relevantní, provedli jsme jednoduchý experiment. Na tomto experimentu také prozkoumáme veškeré odchylky experimentálních dat od teorie z předchozí kapitoly.



Obr. 2.3: Graf srovnávající experiment s teorií

Jako experiment jsme zaznamenali na video valení koule po nakloněné dvojkolejnici. Pomocí programu Tracker jsme zaznamenali polohu koule v závislosti na čase a data jsme zpracovali, jak je uvedeno v kapitole 1.1 a 1.2. Na obrázku 2.3 jsou data zaznamenána v grafu a proložena funkcí polohy $x(t)=a_T t^2/2$, kde a_T jsme spočítali podle rov. (2.14).

Na první pohled se zdá, že teorie téměř přesně odpovídá experimentu. Když se však podíváme na graf pozorněji, vidíme, že se teorie od experimentu přece jen liší, zejména ke konci grafu, tj. pro větší hodnoty časové proměnné.

Pokusme se tuto odchylku popsat a zdůvodnit. Pro lepší názornost vyneseme do grafu rozdíl obou křivek, experimentální a teoretické, tj. $x_E(t) - x_T(t)$. Tato křivka (obr. 2.4) připomíná parabolu s vrcholem t_V mezi body 1,7 s a 1,8 s. Předpokládejme v nejjednodušší možné aproximaci, že se skutečně jedná o parabolu. Pak polohu vrcholu na časové ose dostaneme z experimentu jako střed mezi hodnotami, v nichž křivka na obr. 2.4 protíná osu x . Taková parabola by měla rovnici

$$\Delta x(t) = \Delta x(t_V) + \frac{1}{2} \Delta a (t - t_V)^2, \quad t_V = 1,8 \text{ s}$$

kde Δa je konstanta s rozměrem zrychlení, která v každém bodě křivky určuje její strmost. Tento model předpokládá:

- Počáteční rychlost koule v_0 při experimentu není nulová.
- Zrychlení středu hmotnosti (těžiště) koule při experimentu je konstantní a menší

než zrychlení teoretické spočtené podle (2.14), přitom $\Delta a = a_T - a_E$.

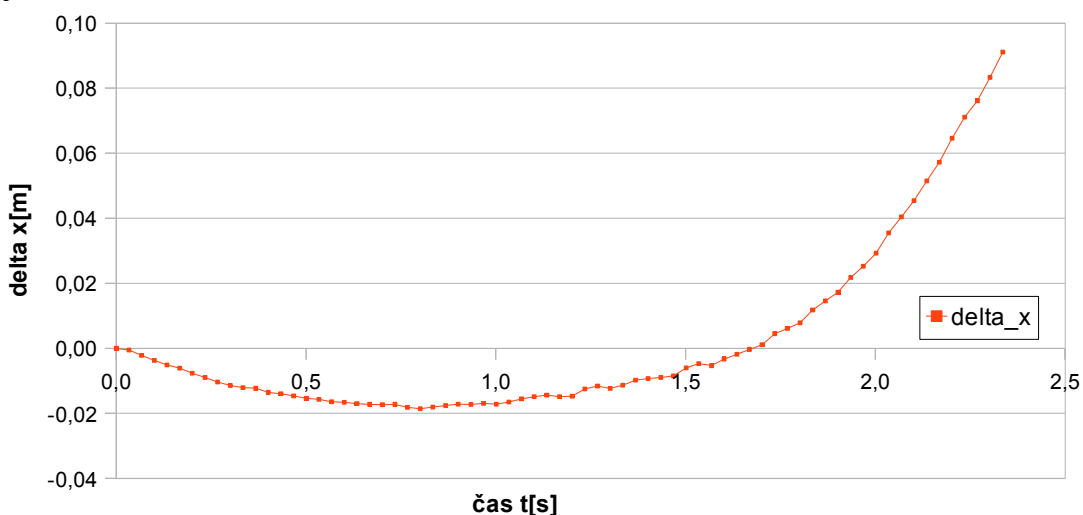
Ke změně Δa mohou přispívat dva efekty:

- Odporové síly, které vedou ke snížení zrychlení oproti teoretické hodnotě o Δa_{odp} (síla valivého odporu se v základním modelu předpokládá konstantní).
- Nerovnost kolejnic (kolejnice neleží přesně v rovině, neboť se vlastní vahou prohnu).

Popišme vliv průhybu: Naši nakloněnou rovinu tvoří kovová kolejnice podložená podpěrami, které jsou od sebe vzdáleny asi $d = 180$ cm. Na začátku je tedy sklon nakloněné roviny větší, na konci menší. Zrychlení koule je tedy časově proměnné (na začátku větší než zrychlení odpovídající rovným kolejnicím o úhlu sklonu

$tg\alpha = \frac{h}{d}$ kde h je rozdíl výšek podpěr, na konci menší). V našem modelu si

představujeme, že proměnný sklon lze popsat určitou konstantní hodnotou úhlu sklonu $\bar{\alpha}$, obecně různou od α . Tuto hodnotu nelze jednoduše určit. Podle tvaru průhybu může být kladná, nulová, záporná a odpovídá hodnotě dodatečného zrychlení Δa_p . Pak $\Delta a = \Delta a_{odp} + \Delta a_p$. Z našeho experimentu (graf 2.4) je zřejmé, že $\Delta a > 0$. V případě, že by kvadratický model odchylky experimentu od teorie nebyl správný, nebyla by křivka na obr. 2.4 parabola a museli bychom uvažovat, jak do výpočtu zahrnout proměnný sklon kolejnic.



Obr. 2.4: Graf odchylky teorie od experimentu jako funkce času

V další části se pokusíme prověřit relevanci kvadratického modelu. Nejprve se zaměříme na předpoklad, že počáteční rychlost koule není nulová a zjistíme okamžik,

v němž se experimentální a teoretická křivka protínají.

Ted' se zaměříme na další bod, ve kterém uvažujeme $v_0 \neq 0$. Abychom zjistili, v jakém čase se křivky protínají položíme jejich předpisy rovny:

$$a_e t^2/2 + v_0 t = a_t t^2/2 \quad (2.15)$$

Menší úpravou dostaneme

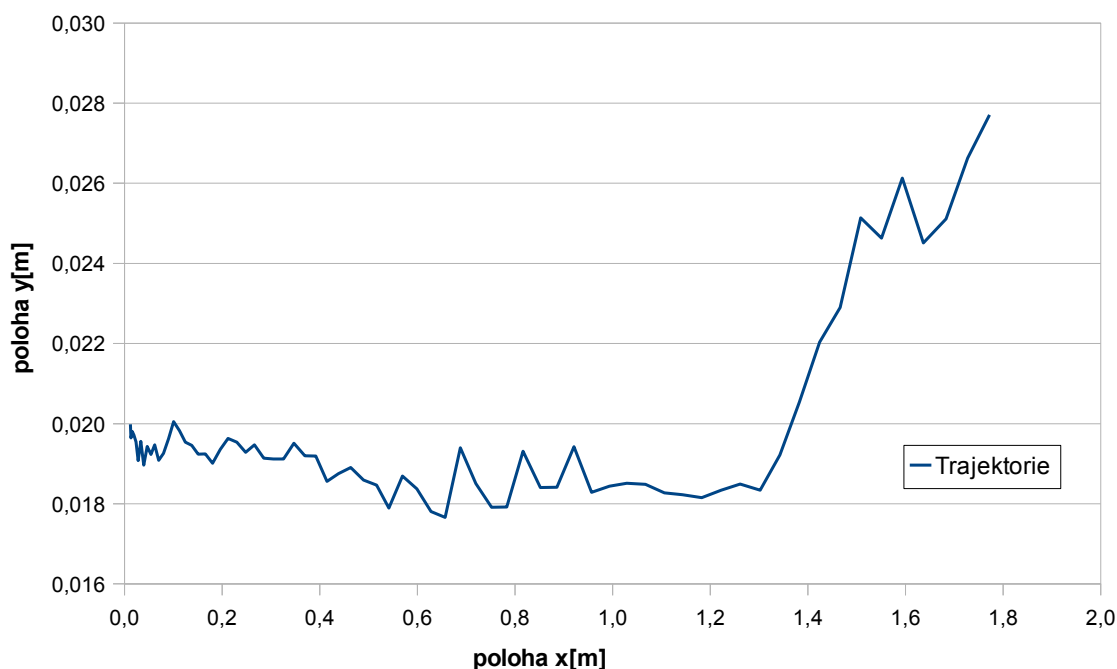
$$t(a_e t/2 - a_t t/2 + v_0) = 0 \quad (2.16)$$

Rovnice má dvě řešení. První řešení vidíme hned a to je $t=0$. To odpovídá prvnímu protnutí hned v počátku grafu. Další řešení dostaneme, když položíme závorku nule a vyřešíme tuto rovnici pro t . Dostaneme:

$$t = \frac{2v_0}{a_t - a_e} \quad (2.17)$$

V ideálním případě bude v_0 nulové, my dostaneme dvojnásobné řešení a graf se nám protne pouze v počátku. Z kapitoly 1.2 víme, že taková ideální situace nemůže nastat. Podle rov. (2.17) bude jev zřetelnější tím víc, čím je menší odchylka teoretického zrychlení. Tento problém probereme v další kapitole.

Nyní se podíváme detailněji na první zdroj odchylky a tou je nerovnost trajektorie nakloněné roviny. Graf závislosti polohy y na poloze x je tvar trajektorie tělesa. Takový graf máme na obr. 2.5.



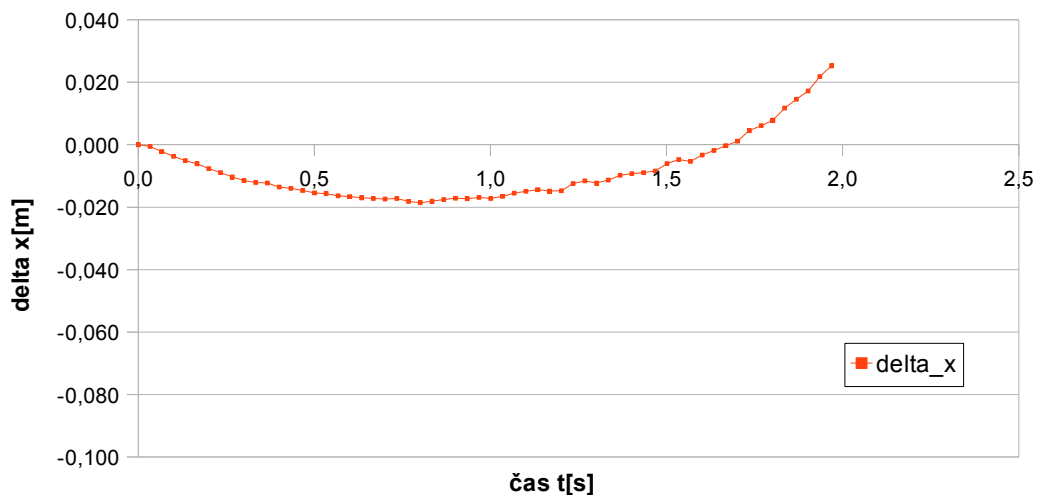
Obr. 2.5: Trajektorie koule valící se po nakloněné kolejnici. Souřadnicový systém je natočený tak, že x-ová osa je totožná s kolejnicí.

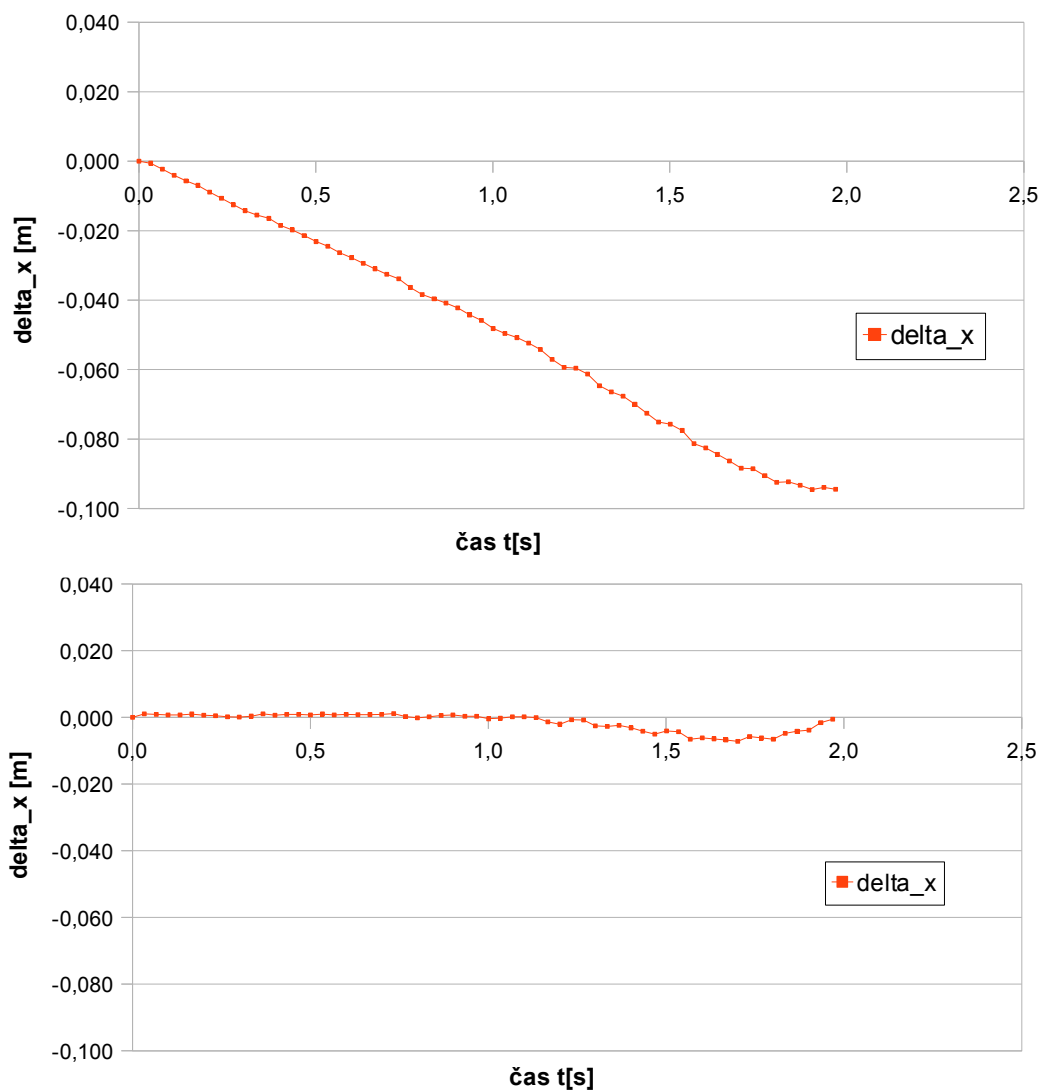
Na první pohled trajektorie v průměru zřetelně klesá a poté zase roste. Ve skutečnosti se však jedná pouze o sklon asi 2mm na jednom metru. Koule byla uvolněna poblíž prvního opěrného bodu trajektorie. A zaznamenávání končí u druhého opěrného bodu. Při prohnutí kolejnice by trajektorie klesala a stoupala tak, jako na obr. 2.5. Avšak by musela začínat a končit se stejnou souřadnicí y . Proto nebudeme nadále brát poslední část grafu v úvahu. Zdrojem těchto relativně velkých odchylek mohou být chyby způsobené nepřesností Autotrackeru, nerovnost kolejnice anebo nějaký další neznámý důvod.

2.5 Fitování experimentální křivky

Abychom definitivně potvrdili, co stojí za tím, že se křivka experimentu dvakrát protne s křivkou teorie, budeme muset vytvořit v tabulkovém procesoru parabolu s předpisem $at^2/2+v_0t+x_0$. Hodnoty a , v_0 a x_0 budeme nastavovat tak dlouho, dokud parabola nebude totožná (respektive přibližně totožná) s křivkou experimentu. Na pomoc si vytvoříme graf rozdílu parabolické funkce a křivky teorie.

Budeme postupovat systematicky. Hodnoty a , v_0 , x_0 nastavíme tak, jak předpovídá naše teorie (tj. $v_0=x_0=0$). Graf rozdílu bude úplně stejný, jako na obrázku 2.4 Víme, že když hodnota a bude stejná jako zrychlení v experimentu, tak budou stejné i kvadratické členy a v rozdílu se navzájem odečtou. Tím bude funkce rozdílu lineární a graf odchylky bude přímka. Takže začneme postupně zmenšovat a a pozorovat graf rozdílu. Parabola v grafu rozdílu se začne pomalu "narovnávat" až se z ní stane přímka přímé úměrnosti. Následně začneme upravovat v_0 tak, aby se strmost této přímky zmenšovala a postupně se z ní stala přímka rovnoběžná s osou t – tj. konstantní funkce. Princip je stejný – odečtou se lineární členy a zůstanou nám pouze členy absolutní. Pokud není graf funkce rozdílu totožný s osou t , tak upravíme x_0 tak, aby byl. Když graf funkce rozdílu leží na ose t , znamená to, že je funkce rozdílu nula.





Obr. 2.6: Grafy pomocné funkce rozdílu v jednotlivých fázích využité při postupném manuálním fitování experimentální křivky

Když je rozdíl dvou funkcí nula, tak bezpečně víme, že jsou funkce totožné.

Tabulka níže porovnává hodnoty, které předpovídá teorie nastíněná v kapitole 2.2 a 2.3, s hodnotami, které byly získány z experimentálních dat fitováním.

	Zrychlení	Počáteční rychlost
Teorie	0,679 ms ⁻²	0
Experiment	0,617 ms ⁻²	0,048 ms ⁻¹
Odchylka	0,062 ms ⁻²	0,048 ms ⁻¹

Zrychlení je o něco menší, než jsme z teorie předpokládali. Při hmotnosti tělesa 47,8 g na něho musela působit síla o velikosti asi 3 mN. Tato odchylka je z velké části způsobena valivým odporem, chybou měření a z menší části aerodynamickým odporem.

Počáteční rychlost způsobuje již diskutované protnutí parabol experimentu a teorie. Díky fitování jsme dokázali, že koule má na začátku určitou počáteční rychlost, a tím i vysvětlili tento jev. Použijeme-li vztah (2.17) a dosadíme do něj hodnoty z tabulky, tak nám vyjde čas křížení $t=1,4\text{s}$. Když se ale podíváme na graf 2.4, tak vidíme, že se křivky kříží až v čase $t=1,6\text{s}$. Takže nenulová počáteční rychlost řeší náš problém z dost velké části, ale ne úplně.

Frekvence snímkování videa je 30 obrázků za sekundu. Na jeden snímek tedy připadá interval dlouhý 0,034 s. Pokud skutečné zrychlení koule je $0,617\text{ ms}^{-2}$, tak čas, který potřebuje na zrychlení z klidu na rychlost $0,048\text{ ms}^{-1}$, se rovná 0,077 s. To odpovídá asi dvěma snímkům na videu. To znamená, že asi polovina počáteční rychlosti je způsobená nedokonalostí videa – tj. konečnou frekvencí snímkování.

Pátrání po původu valivého odporu

3.1 Úvod

Uvedeme-li těleso do pohybu po vodorovné podložce, začne se zpomalovat v okamžiku, kdy na ně přestaneme působit a po krátké době se zastaví úplně. Z prvního a druhého Newtonova zákona vyplývá, že na těleso musí působit síla, která těleso zpomaluje. Tato síla musí působit v opačném směru, než v jakém se těleso pohybuje.

Chceme-li uvést těleso ležící na podložce, do pohybu, musíme na ně působit určitou silou F . Při působení síly se pak takové těleso podle druhého Newtonova zákona zrychluje se zrychlením o velikosti $a=F/m$. Ze zkušenosti víme, že pokud velikost síly působící na těleso ležící na drsné podložce nepřekročí určitou hodnotu, těleso se nepodaří do pohybu uvést.

Předchozí dva odstavce kvalitativně popisují statickou a dynamickou třecí sílu. Statická třecí síla působí proti síle, která se snaží uvést těleso do pohybu. Jakmile velikost síly překročí maximální přípustnou velikost síly statického tření, začne se těleso zrychlovat. Je to způsobeno nerovnostmi (drsnotami) podložky a povrchu tělesa. Nicméně těleso se bude zrychlovat pomaleji, než bychom čekali. Do výsledné síly musíme totiž započítat i sílu dynamického tření, která působí proti urychlující síle F . Dynamická třecí síla je, stejně jako statická, způsobena interakcí mezi styčnými povrchy. Oba typy třecí síly souvisejí s normálovou silou, kterou na sebe povrchy navzájem působí. Platí

$$\begin{aligned} F_s &\leq f_s N \\ F_d &= f_d N \end{aligned} \quad (3.1)$$

kde f_s a f_d jsou koeficienty statického a dynamického tření. Veličina $f_s N$ představuje maximální přípustnou statickou třecí sílu a definuje koeficient statického tření. Ve většině případů platí $f_s > f_d$.

Síla statického tření, na rozdíl od síly dynamického tření, nekoná žádnou práci. Síla dynamického tření práci naopak koná, a tak se při přemísťování předmětů smýkáním ztrácí energie a uvolňuje se ve formě tepla. Přesun nějakého těžkého předmětu smykem je proto velmi náročný a neefektivní.

Podmínkou pro vznik dynamického tření je vzájemný pohyb povrchu tělesa a povrchu podložky (země). Vychází tudíž otázka: je možné přemísťovat tělesa tak, aby povrch tělesa a podložky byly vůči sobě v klidu? Kdyby existovala kladná odpověď na tuto otázku, znamenalo by to, že by se daly všechny předměty přesunovat bez vynaložení větší energie. Předpokládejme, že se jedná o přemísťování při velmi malých rychlostech a tím pádem lze aerodynamický odpor zanedbat.

Výše popsaný způsob přemísťování předmětu opravdu existuje. Jedná se o valivý pohyb. Valivý pohyb je kombinací translačního a rotačního pohybu. Efektivnost valení bez prokluzu spočívá v tom, obvodová rychlost při valení ($v=\omega R$) je stejná jako velikost rychlosti středu hmotnosti tělesa. To znamená, že bod kontaktu tělesa s podložkou má vzhledem k podložce nulovou rychlost a dynamické tření se neuplatní.

Experiment v kapitole 2.4 dopadl zřejmě jinak, než jak předpovídá teorie vycházející z Newtonových pohybových zákonů. Kouli evidentně zpomaluje nějaká síla přibližně o velikost 3mN. Nabízí se otázka, zda se při zpomalování koule neuplatňuje také aerodynamický odpor. Pojďme tedy odhadnout odpor vzduchu, který by na kouli působil. Pro jednoduchost nebudeme počítat se střední hodnotu rychlosti, ale s tou nejvyšší – tj. rychlostí na konci ($t=2s$).

$$F_{od} = \frac{1}{2} C S \rho v^2 \quad (3.2)$$

Rovnice 3.2 je předpis pro výpočet aerodynamického odporu. Součinitel odporu C se stanovuje většinou experimentálně, ale obecně pro kouli se bude pohybovat kolem hodnoty 0,5. Účinný průřez S bude v našem případě πR^2 . Hustotu média ρ stanovme jako hustotu vzduchu o teplotě 0°C a tlaku 1000 hPa, tj. $\rho=1,276 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. Rychlost zjistíme z dat experimentu. Na posledních třech setinách sekundy změnila koule polohu o $\Delta x=0,385\text{m}$. To znamená přibližně $v = \Delta x/\Delta t = 1,28 \text{ ms}^{-1}$. Náš odhad odporové síly tedy činí:

$$F_{od} = \frac{0,5 \cdot 1,45 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 \cdot 1,276 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3} \cdot (1,28 \text{ ms}^{-1})^2}{2} \quad (3.3)$$

$$F_{od} = 7,58 \cdot 10^{-4} \text{ N}$$

Odporová síla působící na kouli při nejvyšší rychlosti je 0,758mN. To je ale pouhých 25 % z celkové síly, která těleso zpomaluje. Nesmíme zapomenout, že jsme brali v úvahu tu nejvyšší rychlost, takže střední odporová síla, která těleso zpomaluje je ve skutečnosti ještě menší. Musíme si tedy položit otázku: jaká další síla zpomaluje tělesa při valivém pohybu a čím je způsobena?

3.2 Současná představa o valivém odporu

Internet a literatura podávají o valivém odporu rozporuplné informace. Informace často nejsou podložené experimentálními daty a většinou vůbec neodkazují na experiment. Existuje ale jistá základní představa o valivém odporu. Většina zdrojů se shoduje na tom, že valivý odpor je způsoben deformacemi povrchu, po kterém se těleso valí, popřípadě deformací samotného tělesa. Valivý odpor by podle současné představy neměl záviset na rychlosti, ale naopak by měl být nepřímo úměrný poloměru tělesa.

Jako příklad si můžeme vzít středoškolskou učebnici fyziky (Přehled středoškolské fyziky, E. Svoboda a kol.). Ta tvrdí, že je valivý odpor způsobený deformací povrchu anebo materiálu. Síla odporu je přímo úměrná normálové tlakové síle a nepřímo úměrná poloměru tělesa. To znamená

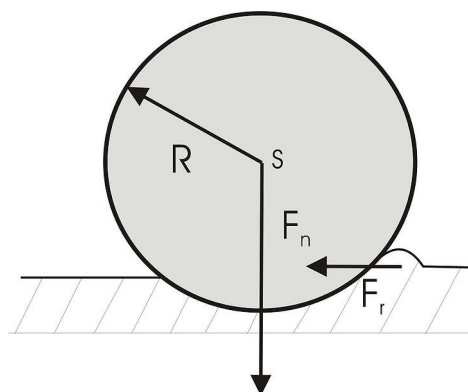
$$F_{\text{od}} \sim \frac{N}{R} \quad (3.4)$$

Pokud odpor nezávisí na žádné další veličině, stačí přidat konstantu úměrnosti, která závisí na vlastnostech materiálu.

$$F_{\text{od}} = \xi \frac{N}{R} \quad (3.5)$$

Konstanta úměrnosti se určuje experimentálně. Nikde se ale bohužel nedozvíme, na jakých vlastnostech konstanta závisí.

Dále je k vysvětlení přiložen obrázek, který vnukne čtenáři představu, že se před objektem vytvoří deformace ve tvaru jakéhosi kopečku, která těleso zpomaluje. Příklad takového obrázku je obr. 3.1. Tento obrázek byl převzat z české Wikipedie a od obrázku ve výše zmíněné učebnici se liší jen v tom, že není barevný.



Obr. 3.1: Grafické znázornění valivého odporu z české Wikipedie^[2]

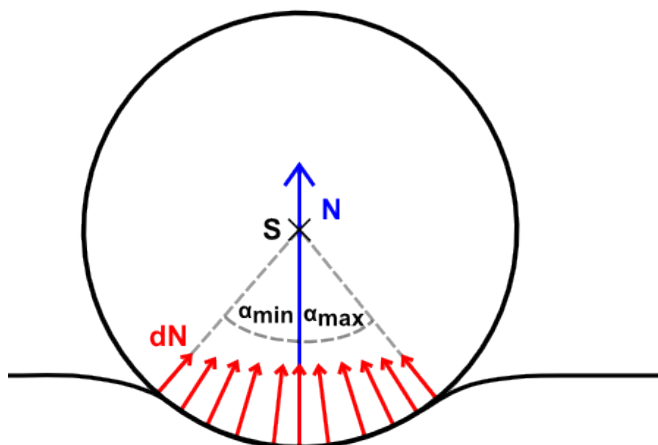
Jak je patrné, představa o původu odporu není důkladně teoreticky podložena. Vztah (3.5) nevzešel z nějakých elementárnějších zákonů. Pro běžné účely je však dostačující. Konstrukteři si mohou v tabulkách najít koeficienty pro různé povrchy, které před nimi už někdo experimentálně zjistil, a pak s nimi mohou jednoduše počítat. O původu a důvodu valivého odporu však nemusí vědět absolutně nic. Ale k důkladnému porozumění problému valivého odporu tato představa zdaleka nestačí.

3.3 Normálové síly a rameno valivého odporu

V některých učebnicích se píše, že koeficient valivého odporu se často označuje jako *rameno valivého odporu*. Bohužel nikde není vysvětleno, proč. Jedná se sice o konvenci, takže si můžeme tento koeficient pojmenovat jak chceme a na experiment to nebude mít žádný vliv. Nicméně nazvat koeficient, který závisí na vlastnostech materiálu, ramenem valivého odporu nějaký hlubší smysl mít musí.

Ze vztahu 3.5 plyne, že koeficient ξ musí mít rozměr v metrech. Když si toto uvědomíme, tak by nám už nemělo být divné, že se koeficientu odporu říká rameno odporu.

Předpokládejme, že valivý odpor je opravdu způsobován deformací povrchu, po kterém se těleso valí. Dokud je těleso v relativním klidu vzhledem k povrchu, tak na něj nepůsobí žádná síla valivého odporu. Jediné dvě síly, které na těleso působí jsou gravitační síla Země a normálová tlaková síla, která drží těleso v klidu na povrchu. Berme v úvahu, že podložka není dokonale tuhá, ale že se deformuje (obr. 3.2). Normálová síla je ve skutečnosti součet všech normálových sil působících na všechny infinitesimálně malé stykové plochy. Každá tato elementární tlaková síla je kolmá na povrch tělesa a tím pádem směřuje k ose rotace (těleso má rotační symetrii).



Obr. 3.2: Úhly měříme od svislé polopřímky spojující bod S s centrálním místem prohlubně, přičemž úhel měřený proti směru i po směru hodinových ručiček je kladný.

Pokud funkce $n(\alpha)$ (definovaná pouze na intervalu $\alpha \in [-\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$) vyjadřuje rozdělení mechanického napětí podél zakřivené stykové plochy, tak malý příspěvek normálové síly je vyjádřen $dN = -n(\alpha) \mathbf{v} dS$, kde \mathbf{v} je jednotkový vektor kolmý k povrchu, směřující do středu. Element plochy dS lze rozepsat jako $dS = r d\alpha dl$, kde r je poloměr válce a dl je element délky ve směru osy souměrnosti válce. Dosazením do předchozího vztahu dostaneme $dN = -n(\alpha) \mathbf{v} r dl d\alpha$. Jelikož se jedná o vektor, tak ho je potřeba rozložit do komponent x a y . Tedy:

$$dN_y = r n(\alpha) \cos(\alpha) dl d\alpha$$

$$dN_x = r n(\alpha) \sin(\alpha) dl d\alpha$$

Integrováním přes celou stykovou plochu dostaneme

$$\begin{aligned}
 N_y &= \int_{-\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} \int_0^{l_0} r n(\alpha) \cos(\alpha) dl d\alpha \\
 N_x &= \int_{-\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} \int_0^{l_0} r n(\alpha) \sin(\alpha) dl d\alpha
 \end{aligned}
 \tag{3.6}$$

Jelikož funkce $n(\alpha)$ nezávisí na l , tj. napětí je konstantní podél osy souměrnosti válce a mění se pouze v závislosti na úhlu α , lze integraci podle dl snadno provést násobením. Napíšeme tedy normálovou sílu \mathbf{N} jako vektor

$$\mathbf{N} = \left(\int_{-\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} l_0 r n(\alpha) \sin(\alpha) d\alpha, \int_{-\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} l_0 r n(\alpha) \cos(\alpha) d\alpha \right) \quad (3.7)$$

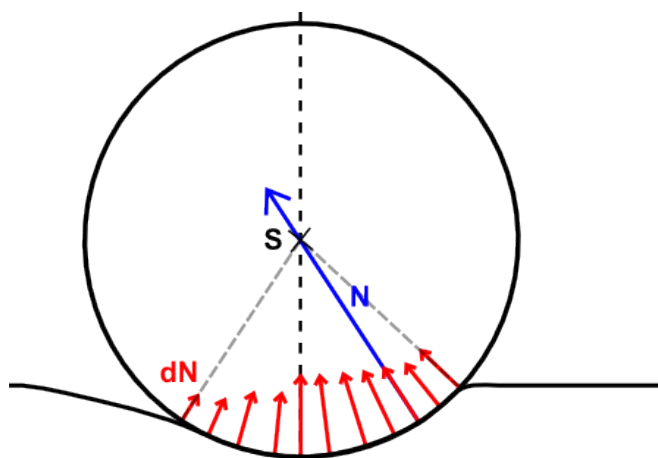
kde proměnné l_0 a r jsou výška a poloměr válce.

Nezávislost funkce $n(\alpha)$ na poloze ve směru osy válce je získána empiricky. Napětí totiž závisí pouze na velikosti stlačení a zakřivení povrchu materiálu. To je pro konkrétní úhel α ve všech místech stejné. Velikost stlačení a zakřivení materiálu závisí jen na úhlu α .

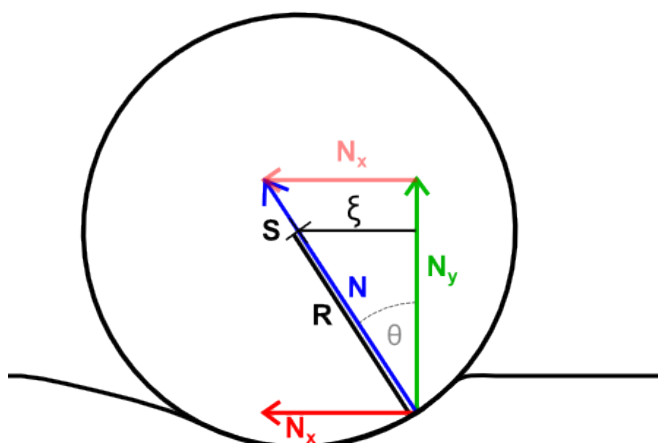
Předpokládejme, že deformace je symetrická vzhledem ke svislé rovině procházející osou válce (rovina souměrnosti). Pak funkce $n(\alpha)$ je vzhledem k této rovině sudá. Tedy matematicky řečeno: $n(-\alpha) = n(\alpha)$. Když v takovém případě sečteme všechny nekonečně malé příspěvky $d\mathbf{N}$, tak výsledná síla \mathbf{N} bude směřovat ve směru osy y , protože její x -ová komponenta bude nulová. Je tomu tak, protože pro každý vektor $d\mathbf{N}$ existuje vektor se stejnou velikostí na druhé straně roviny souměrnosti, který má x -ovou komponentu přesně opačnou. Proto při sčítání příspěvků $d\mathbf{N}$ se x -ové komponenty vektorů vzájemně odečtou a zůstane nám pouze vektor ve směru osy y . Nesmíme zapomenout, že toto platí *tehdy a jen tehdy*, pokud je deformace symetrická a tady platí vztahy $n(-\alpha) = n(\alpha)$ a $|\alpha_{\min}| = |\alpha_{\max}|$.

Výsledná normálová síla \mathbf{N} nevyvolává moment síly ani v případě asymetrie funkce $n(\alpha)$, proto ji také můžeme umístit do středu hmotnosti válce anebo libovolně tak, aby směřovala do středu hmotnosti. Toto tvrzení dokážeme následujícím způsobem. Každý elementární příspěvek normálové síly je kolmý k ploše, na kterou působí. To znamená, že musí směřovat k ose rotace. Když síla směřuje k ose rotace, nevytváří žádný moment síly. Abychom mohli elementární příspěvky sil nahradit jednou ekvivalentní silou \mathbf{N} , musí se tato síla rovnat součtu všech infinitesimálně malých vektorů $d\mathbf{N}$ a zároveň moment tvořený touto silou musí být ekvivalentní součtu všech momentů tvořenými silami $d\mathbf{N}$. Součet všech momentů sil takových vektorů je nulový, protože moment každého vektoru $d\mathbf{N}$ je nulový. Proto musí být moment výsledné normálové síly taktéž nulový. Proto směřuje výsledný vektor \mathbf{N} k ose rotace. Toto platí pro všechny případy včetně těch, ve kterých se vyskytne asymetrie v deformaci podložky.

Předpokládejme, že by se při valivém pohybu válce vyskytla v deformaci podložky nějaká asymetrie. Je jedno jak bude vypadat, uvažujme obecný případ. Povrch podložky se může od válce oddělovat na každé straně při jiném úhlu α , tj. $|\alpha_{\min}| \neq |\alpha_{\max}|$. Nemusí ani platit, že funkce $n(\alpha)$ je sudá, tj. obecně $n(\alpha) \neq n(-\alpha)$. V takovém případě už nemůžeme říct, že x -ová komponenta výsledné síly N bude vždy nulová, neboť neplatí, že se x -ové komponenty vzájemně odečtou. Normálová síla v tomto případě není ve směru osy x nulová a proto také *nebude* směřovat ve směru osy y , jak tomu je na obr. 3.2. Nesmíme zapomenout, že i v tomto případě musí síla N procházet středem hmotnosti. Tuto situaci vystihuje obr. 3.3.



Obr. 3.3: Normálové síly při asymetrické deformaci podložky



Obr. 3.4: Grafické znázornění ramena valivého odporu

Normálovou sílu N rozložíme do složek N_x a N_y , jak je znázorněno na obr. 3.4. x -ová složka normálové tlakové síly je ve skutečnosti síla valivého odporu a y -ová složka působí proti gravitační síle. V obrázku 3.4 je zakreslena kolmá vzdálenost vektorové přímky vektoru N_y od středu S , označena jako ξ . Z obrázku je také zřejmé, že

platí:

$$\sin \theta = \frac{N_x}{N} = \frac{\xi}{r} \quad (3.8)$$

Už jsme dokázali, že $N_x = F_{od}$. Proto po menších úpravách můžeme psát:

$$F_{od} = \xi \frac{N}{R} \quad (3.9)$$

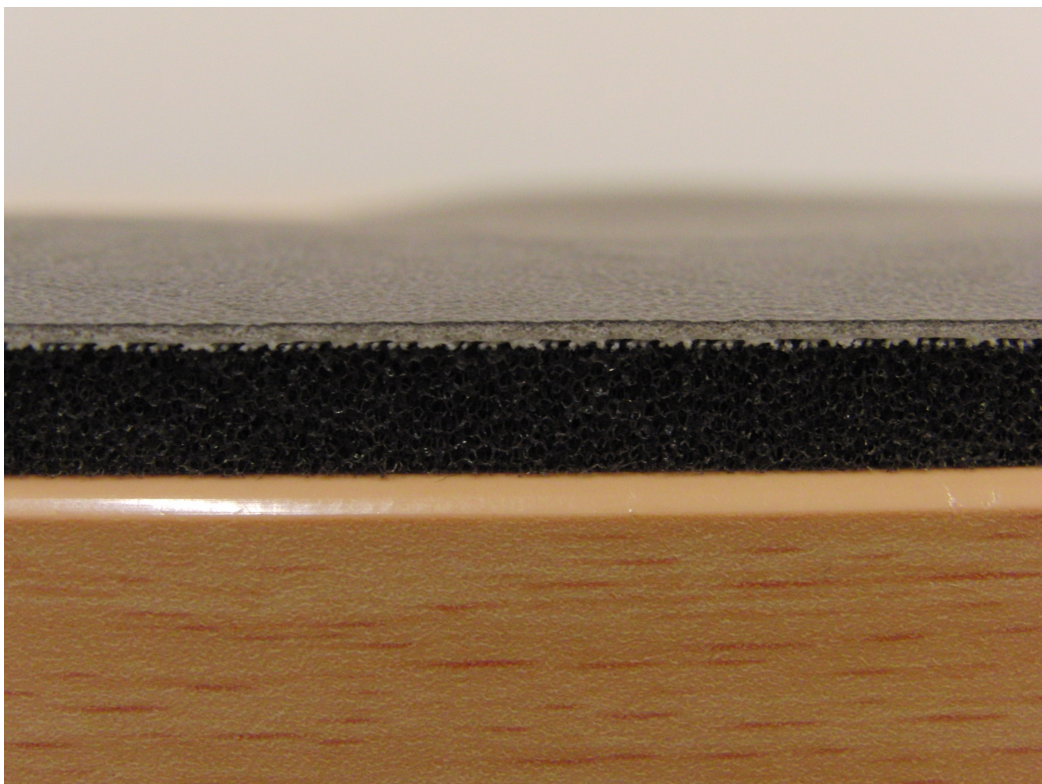
Získali jsme vztah pro valivý odpor. Zdá se, že je zde jistá nekonzistence v terminologii. Rameno síly je standardně definováno jako vzdálenost bodu, k němuž vztahujeme moment této síly, od její vektorové přímky. V tomto smyslu je veličina ξ ramenem síly N_x , zatímco valivým odporem je síla N_x .

Není pochyb o tom, že člověk, který zavedl pojem rameno valivého odporu, věděl přesně proč a s největší pravděpodobností vyšel z úvah, které jsou podobné těm, které byly popsány v této kapitole. Bohužel dnes bychom ve středoškolských učebnicích hledali takové odvození těžko. Studenti se bohužel musí spokojit s tím, že se jedná o jakýsi koeficient valivého odporu, který má rozměr v metrech (aby souhlasily jednotky) a z nějakého neznámého důvodu se mu říká rameno valivého odporu.

3.4 Deformace povrchu na nakloněné rovině

Ačkoliv je na obrázcích 3.2 až 3.4 znázorněna konkrétní deformace podložky, tak zatím přesně nevíme, jak deformace doopravdy vypadá. Jediný způsob jak to zjistit je provést experiment.

Jako materiál podložky byly vybrány dva pěnové polyuretany původně určené k izolaci. Podmínkou při vybírání materiálů byla dostatečně velká pružnost a přibližně lineární deformace (viz. kapitola 3.6). Při použití materiálů s příliš velkým modulem pružnosti, jako má například ocel či železo, by bylo v našich podmínkách prakticky nemožné změřit jejich deformaci pod valícím se tělesem. Při experimentech se bude využívat toho, že použité materiály mají podobné vlastnosti jako materiály, které tvoří běžné povrchy (koleje apod.). Dva vybrané materiály jsme pracovníčně pojmenovali jako materiál A a B. Materiál B je homogenní, kdežto materiál A má kožený potah.



Materiál A na dřevěné podložce



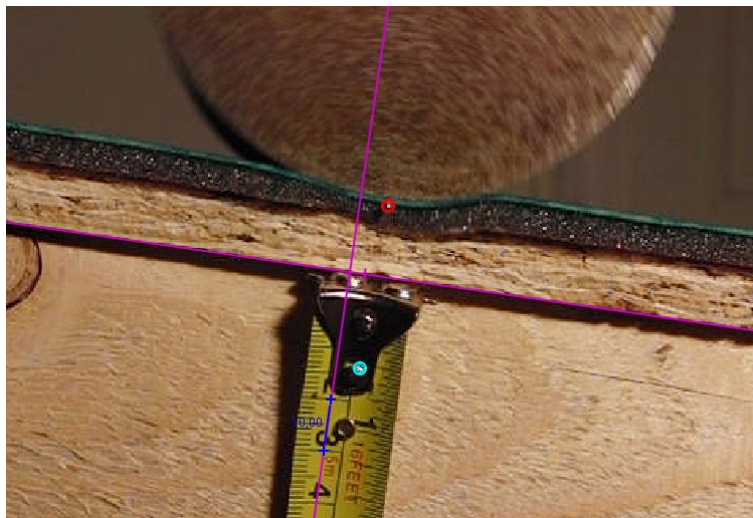
Materiál B na dřevěné podložce

Existuje několik způsobů jak změřit deformaci podložky a my jsme museli najít ten nejefektivnější. V dalším budeme křivkou deformace podložky konkrétně rozumět závislost y -ové souřadnice vhodně označeného bodu na povrchu podložky během kontaktu s valícím se válcem.

První pokus probíhal tak, že jsme pustili železný válec po nakloněné rovině. Válec jsme zachytili na fotografii, z ní získali závislost deformace podložky na čase a určili její charakteristiky. Tento způsob měření se ukázal jako naprosto nevyhovující. Pro zjištění křivky bylo potřeba válec zachytit v okamžiku, kdy jeho podstava je na kraji povrchu. Když se válec pouštěl z větší vzdálenosti, aby nabral rychlost, tak bylo velmi obtížné ho nasměrovat tak, aby jel přesně po okraji. Ještě větší problém dělalo načasování spouště fotoaparátu. Při vyšších rychlostech bylo nesmírně namáhavé válec vůbec zachytit. Tyto dva faktory způsobily to, že na jeden povedený pokus připadlo asi 15 nepovedených pokusů. Navíc z fotografie by se nedala určit rychlost válce v daný okamžik. Získávání informací o křivce z fotografie do tabulkového procesoru by bylo zdoluhavé a zbytečně složité. I kdyby se nám nakonec nějakým způsobem povedlo určit rychlost, abychom mohli udělat analýzu závislosti deformací na rychlosti, byl by celý proces časově příliš náročný.

Další způsob je měřit deformaci nepřímou. Tento způsob se osvědčil a po několika úpravách se zdá být jako nejlepší. Část povrchu se zaznamenává na video v okamžiku, kdy přes něj přejíždí válec. Video se následně importuje do programu Tracker, kde se zaznamená poloha vhodně zvoleného bodu na povrchu v závislosti na čase. Data se pak přenesou do tabulkového procesoru, kde se dále zpracují. Tímto způsobem sice nezískáme křivku deformace, ale budeme mít závislost polohy bodu na čase $y(t)$. Když budeme znát rychlost válce, tak snadno určíme i funkci deformace $y(x)$. Pro označení bodu na povrchu byl nejprve použit lihový fix. Takto označený bod nebyl pro program Tracker dostatečně čitelný. Nakonec jsme použili obyčejný špendlík. To vyřešilo několik problémů zároveň. Špendlík jsme zafixovali těsně pod povrchem, tak aby hlavička špendlíku „snímala“ polohu pomyslného bodu na povrchu podložky. Celý experiment je nasvícený výbojkou s příkonem 500 W, takže hlavička špendlíku se leskne a je pro Tracker dostatečně čitelná. Válec se už nemusí pohybovat přesně po okraji, neboť když se pohybuje pár milimetrů od okraje, tak stejně díky nenulové délce špendlíku přijde jeho hlavička do kontaktu s válcem. Naopak nebude problém, když

bude válec přesahovat pár milimetrů přes okraj, protože špendlík není úplně zasunutý do podložky a tím pádem ho válec nezakryje. Když se označí střed válce a vhodně se nastaví záběr kamery, pak už nebude problém zjistit rychlost těžiště válce.



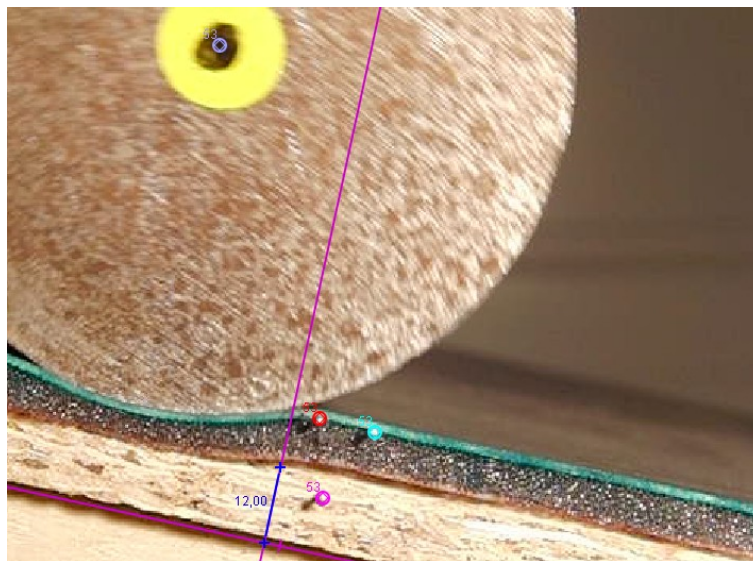
Obr. 3.5: Hlavička špendlíku je po nasvícení pro Tracker dostatečně čitelná. Koženka materiálu A má podobné zabarvení jako zvolený bod, proto jsme ji pro jistotu přebarvili na zelenou.

Povrch je přilepen k deskám, které jsou přibité ke dvěma dřevěným trámům. Trámy jsou dost silné na to, aby se pod tíhou válce neprohýbaly. Přesto průjezd válce způsobuje nezanedbatelné vibrace. Proto jsme se rozhodli, že budeme snímat určitý bod na této konstrukci a pak od souřadnic všech naměřených bodů odečteme souřadnice tohoto bodu. Tím se zaznamenaná data „očistí“ od rušivých vibrací, prohýbání apod. Tato metoda se nejvíce osvědčila při vysokých rychlostech (viz. níže).

Po přezkoumání videí jsme si všimli, že se bod pro snímání deformací pohybuje i ve směru osy x . Tento pohyb je vizuálně patrný. Graf funkce $x(t)$, tj. pohyb po ose x , vytvořený z naměřených dat to potvrzuje. To naznačuje, že se podložka deformuje i ve směru x . Abychom důkladněji prozkoumali stlačování a rozpínání podložky v ose x , přidali jsme další špendlík. Ten umístíme pár milimetrů od prvního špendlíku. Rozdíl x -ových souřadnic obou bodů nám ukáže, jak se povrch povrch stlačuje v závislosti na čase.

Dohromady budeme v Trackeru zaznamenávat 4 body. Jeden bod ve středu válce pro zjištění jeho rychlosti, dva pro měření deformace podložky a jeden pro snímání vibrací celé konstrukce. Abychom zjistili závislost tvaru deformace na rychlosti válce, provedeme tento experiment osmkrát pro každý povrch. Rychlost válce musíme měnit

tak, že budeme měnit výšku, ze které je uvolněn. Úhel nakloněné roviny musí být stejný, jinak by se měnila normálová síla a my potřebujeme mít všechny veličiny kromě rychlosti konstantní, aby se zkoumala závislost deformace *pouze* na rychlosti.



Obr. 3.6: Finální provedení experimentu s čtyřmi body.

Všechna zaznamenaná data jsem importoval do tabulkového procesoru. Celkově se jedná o 7 sloupců (viz. obr. 3.7) plus poloha středu válce v závislosti na čase (tzn. další tři sloupce, které na obr. chybí).

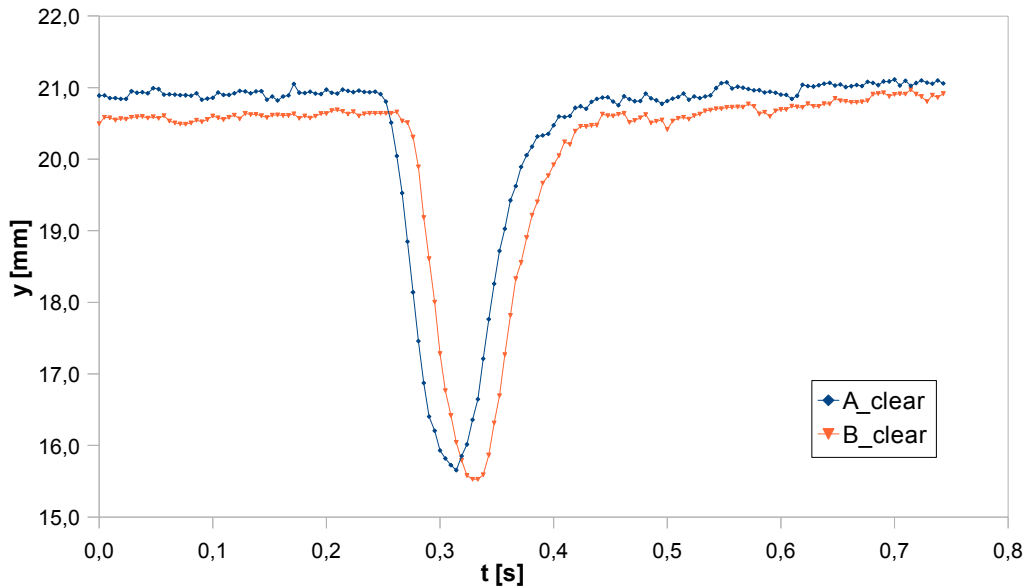
t	x	A		B		Background		A_clear		B_clear	
		y	x	y	x	y	X	y	X	y	
0.000000000	4.1934801150	20.8885613700	13.0334727800	20.4963968600	7.5239482890	8.7829533960	4.1934801150	20.8885613700	13.0334727800	20.4963968600	
0.0047619048	4.2241094210	20.8952029300	13.0135481000	20.5882847800	7.5231219180	8.7873837650	4.2249357920	20.8907725610	13.0143744710	20.5838544110	
0.0095238095	4.2307509790	20.8645736200	13.0135481000	20.5882847800	7.5220831730	8.7925854700	4.2326160950	20.8549415460	13.0154132160	20.5786527060	
0.0142857143	4.2307509790	20.8645736200	13.0201896600	20.5576554800	7.5194942320	8.7946900280	4.2352050360	20.8528369880	13.0246437170	20.5459188480	
0.0190476191	4.2001216740	20.8579320600	12.9829188000	20.5816432200	7.5215132200	8.7996416520	4.2025567430	20.8412438040	12.9853538690	20.5649549640	
0.0238095238	4.2307509790	20.8645736200	12.9829188000	20.5816432200	7.5203582210	8.8052746720	4.2343410470	20.8422523440	12.9865088680	20.5593219440	
0.0285714286	4.1429261340	20.9738077300	12.9762772400	20.6122725300	7.5203297820	8.8087094990	4.1465446410	20.9480516270	12.9798957470	20.5865164270	
0.0333333333	4.1801969980	20.9498199800	12.9762772400	20.6122725300	7.5229250280	8.8049775000	4.1812202590	20.9277958760	12.9773005010	20.5902484260	
0.0380952381	4.1801969980	20.9498199800	13.1054360200	20.6082094600	7.5258927950	8.7965704930	4.1782524920	20.9362028830	13.1034915140	20.5945923630	
0.0428571429	4.2174678620	20.9258322300	13.1120775800	20.5775801500	7.5288311090	8.7874826120	4.2125850420	20.9213030140	13.1071947600	20.5730509340	
0.0476190476	4.1939749760	20.9848769900	13.0135481000	20.5882847800	7.5385879770	8.7776986840	4.1793352880	20.9901317020	12.9989084120	20.5935394920	
0.0523809524	4.1984026820	20.9644574500	13.0201896600	20.5576554800	7.5438949950	8.7696935420	4.1784559760	20.9777173040	13.0002429540	20.5709153340	
0.0571428571	4.2161135050	20.8827793000	13.0135481000	20.5882847800	7.5445701900	8.7641814680	4.1954916040	20.9015512280	12.9592619900	20.6070567080	
0.0619047619	4.2161135050	20.8827793000	13.0947313900	20.5096799800	7.5455503650	8.7612476830	4.1945114290	20.9044850130	13.0731293140	20.5313856930	
0.0666666667	4.2161135050	20.8827793000	13.1320022500	20.4856922400	7.5414699400	8.7628164090	4.1985918510	20.9029162870	13.1144805960	20.5058292270	
0.0714285714	4.2161135050	20.8827793000	13.1013729500	20.4790506800	7.5347465300	8.7707555450	4.2053152640	20.8949771510	13.0905747090	20.4912485310	
0.0761904762	4.2161135050	20.8827793000	13.1013729500	20.4790506800	7.5308359180	8.7733006880	4.2092258760	20.8924320080	13.0944853210	20.4887033880	
0.0809523810	4.2161135050	20.8827793000	13.0641020800	20.5030384200	7.5260882580	8.7785949330	4.2139735360	20.8871377630	13.0619621110	20.5073968830	
0.0857142857	4.1868385560	20.9191906700	13.0880898300	20.5403092900	7.5237045350	8.7807707560	4.1870823100	20.9213733100	13.0883335840	20.5424919300	
0.0904761905	4.2045493790	20.8375125200	13.0268312200	20.5270261700	7.5202359940	8.7876900470	4.2082616740	20.8327758690	13.0305435150	20.5222895190	
0.0952380952	4.2001216740	20.8579320600	13.0508189700	20.5642970300	7.5166238270	8.7934020990	4.2074461360	20.8474833570	13.0581434320	20.5538483270	
0.1000000000	4.1956939680	20.8783516000	13.0375358500	20.6255556500	7.5121110140	8.8060059900	4.2075312430	20.8552990060	13.0493731250	20.6025030560	
0.1047619048	4.1779831450	20.9600297500	13.1054360200	20.6082094600	7.5085089290	8.8123205950	4.1934225050	20.9306625510	13.1208753800	20.5788422610	
0.1095238095	4.1824108510	20.9396102100	13.0441774100	20.5949263400	7.5095611280	8.8240236730	4.1967980120	20.8985399330	13.0585645710	20.5538560630	
0.1142857143	4.1824108510	20.9396102100	13.0375358500	20.6255556500	7.5080155010	8.8237720910	4.1983436390	20.8987915150	13.0534686380	20.5847369550	
0.1190476190	4.1779831450	20.9600297500	13.0308942900	20.6561849500	7.5115742040	8.8242581810	4.1903572300	20.9187249650	13.0432683750	20.6148801650	
0.1238095238	4.1939749760	20.9848769900	13.0441774100	20.5949263400	7.5174116270	8.8140440290	4.2005116380	20.9537863570	13.0507140720	20.5638357070	
0.1285714286	4.1984026820	20.9644574500	13.0308942900	20.6561849500	7.5213604260	8.8005784320	4.2009905450	20.9468324140	13.0334821530	20.6385599140	

Obr. 3.7: Dvojsloupce A a B jsou souřadnice bodů snímajících deformaci podložky, dvojsloupec Background (pozadí) sleduje vibrace konstrukce. A_clear a B_clear jsou souřadnice bodů A a B očištěny od vibrací. Všechny jednotky jsou v milimetrech nebo v sekundách.

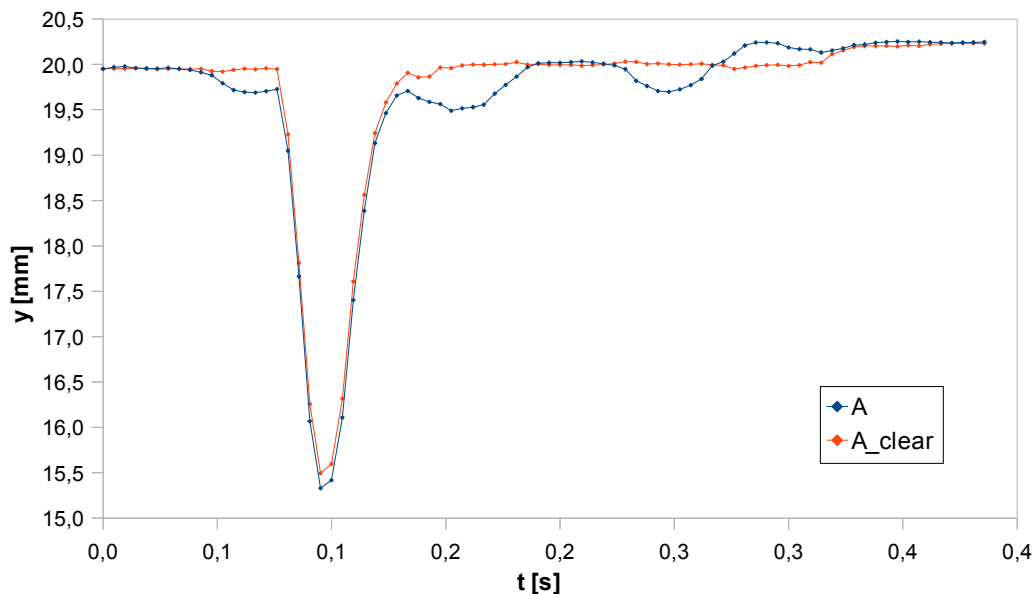
Očištěné souřadnice získáme z rozdílu souřadnic pozadí a daného bodu. Dohromady máme tedy 16 experimentů a tím pádem i 16 takových souborů dat. U každého souboru jsem vložil graf souřadnice y v závislosti na čase pro oba body. Zde

přikládám jen několik z nich.

Na druhém grafu (obr. 3.9), který ukazuje deformaci podložky při nejvyšší rychlosti ($1283\text{mm}\cdot\text{s}^{-1}$) lze vidět, jak se osvědčila metoda se snímáním pozadí.



Obr. 3.8: Graf deformace povrchu A ve směru y při rychlosti $486\text{mm}\cdot\text{s}^{-1}$



Obr. 3.9: Rozdíl mezi původní křivkou(modrá) a křivkou očištěnou od vibrací(oranžová)

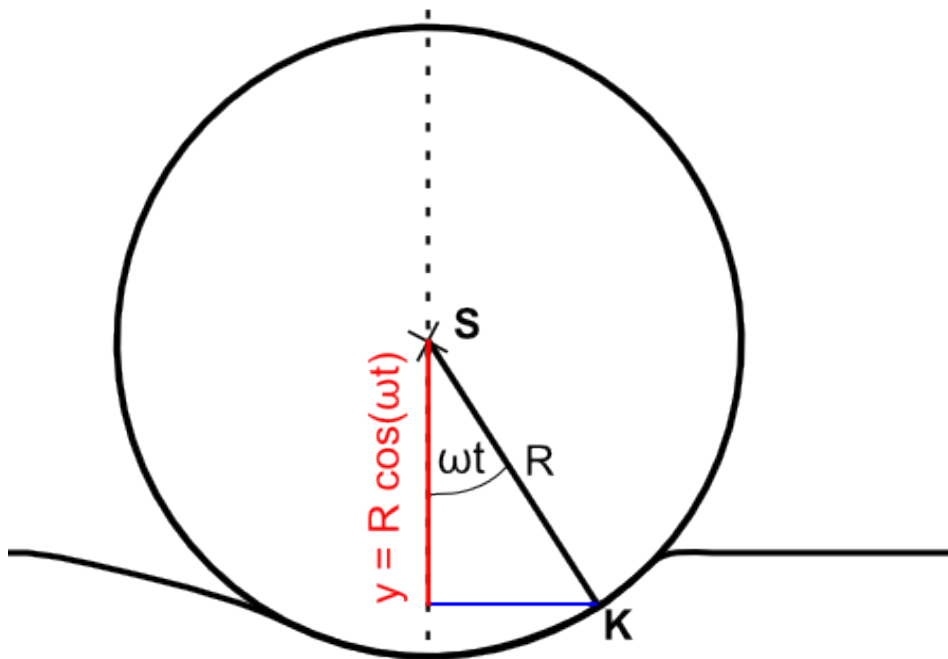
Už na první pohled je jasné, že grafy deformací jsou vzhledem k „ose“ procházející minimem nesymetrické. Další velmi důležitou informací, kterou můžeme z grafů vyčíst je ta, že se před válcem nevyskytuje „hrbol“, který by valící se těleso zpomaloval. Tedy v našem případě nenastává situace, která je znázorněna na obrázcích ze středoškolských učebnic fyziky. Pokud se nám podaří prokázat (a to by neměl být

žádný problém), že na válec valící se po našem povrchu působí valivý odpor, pak můžeme vyvrátit to, že hrbol je hlavní příčina valivého odporu.

Abychom zjistili, kdy dochází k oddělení a kontaktu povrchu s válcem, musíme do grafu zanést pohyb bodu K na povrchu válce (respektive y -ovou komponentu polohy). Takže to znamená:

$$y = -R \cos(\omega t + \varphi) + c \quad (3.10)$$

Rovnici (3.10) a její odvození je patrná z obrázku (3.10)

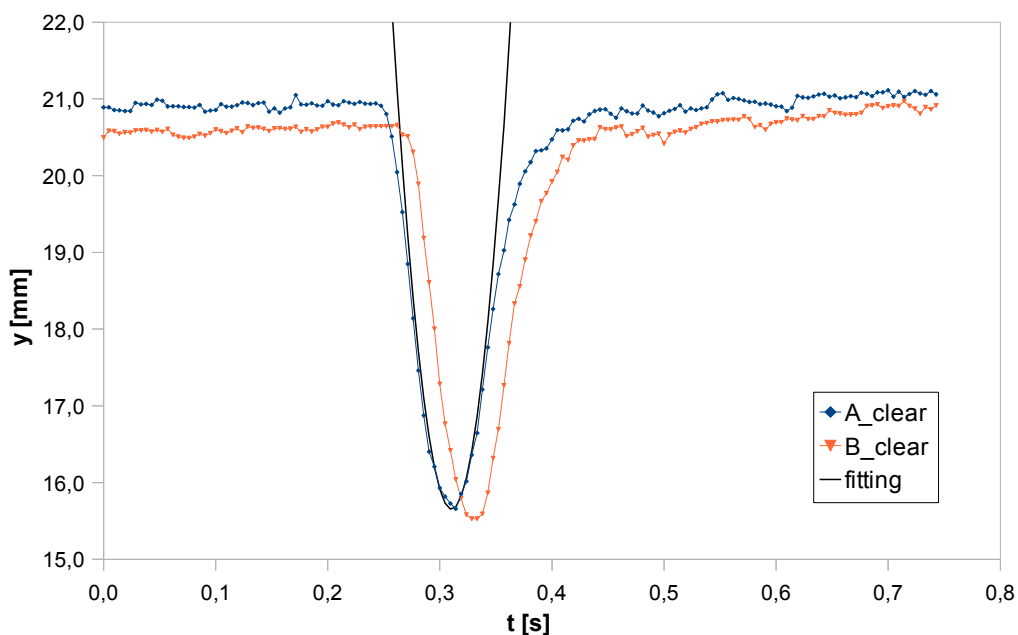


Obr. 3.10: Grafické znázornění polohy y bodu K, který je na povrchu válce.

Úhlovou rychlost válce ω určíme z podmínky pro valení bez prokluzu $v = \omega R$. Rychlost v určíme ze zaznamenané polohy středu válce v závislosti na čase. Jelikož se jedná o nakloněnou rovinu a tím pádem zrychlení válce je nenulové, rychlost se bude měnit. Nejdůležitější je pro nás rychlost válce ve chvíli, kdy dochází k deformaci podložky. Použijeme průměrnou rychlost válce při průjezdu sledovanou oblastí. Výraz (3.10) pak nabude tvaru:

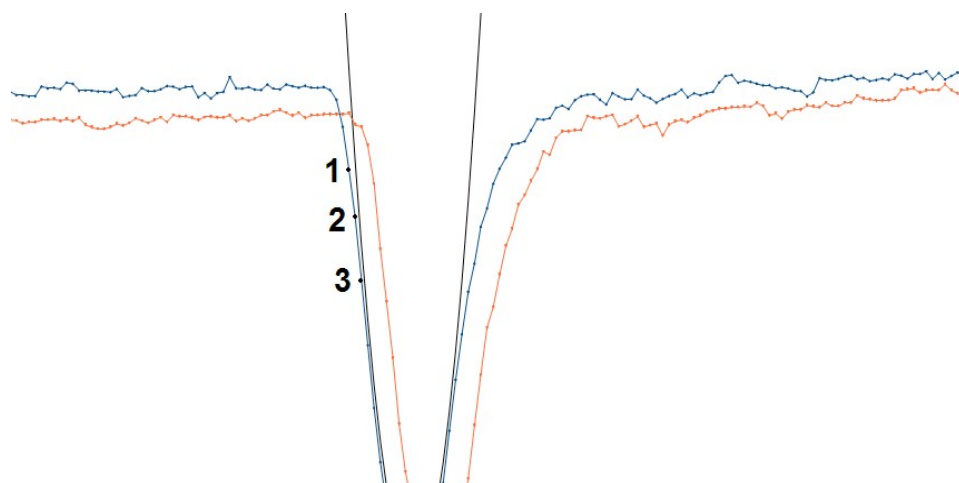
$$y = -R \cos\left(\frac{v}{R} t + \varphi\right) + c \quad (3.11)$$

Konstantu c a fázi φ si zvolíme tak, aby minimum této funkce se krylo s minimem funkce $y(t)$.



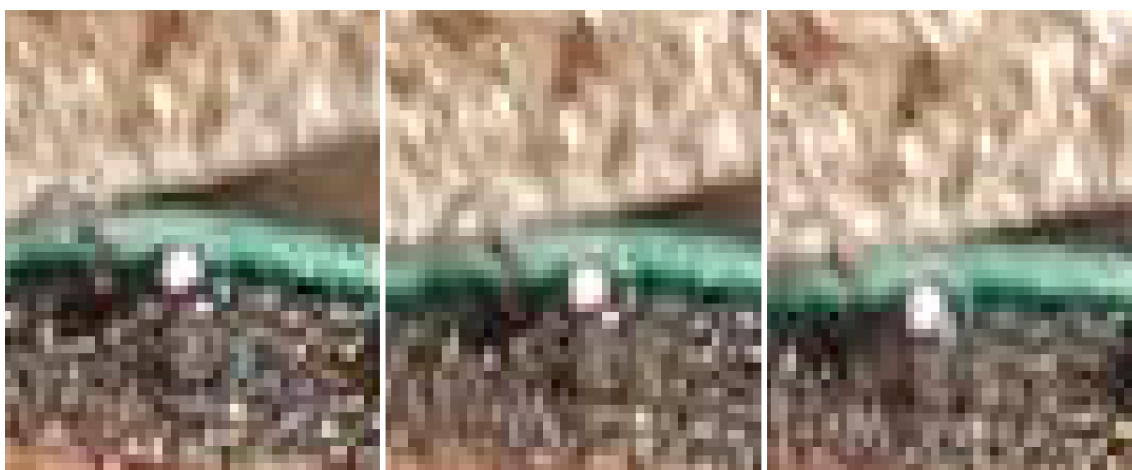
Obr. 3.11: Graf deformace v obou bodech s fitovací funkcí

Fitovací křivka (3.11) je v grafu zakreslena černě. Teď jsou asymetrie křivky deformace ještě více zřetelné. Fitovací křivka je symetrická a znázorňuje pohyb pomyslného bodu K, který se od povrchu válce nikdy neoddělí. Pomocí fitovací křivky můžeme jednoduše a relativně přesně určit, kde se odděluje povrch od válce. Je to tam, kde se graf deformace začne prudce odchylovat od fitovací křivky. Předpověď z grafu si můžeme ověřit na videu, jestli se jedná opravdu o okamžik, ve kterém se začne povrch oddělovat.



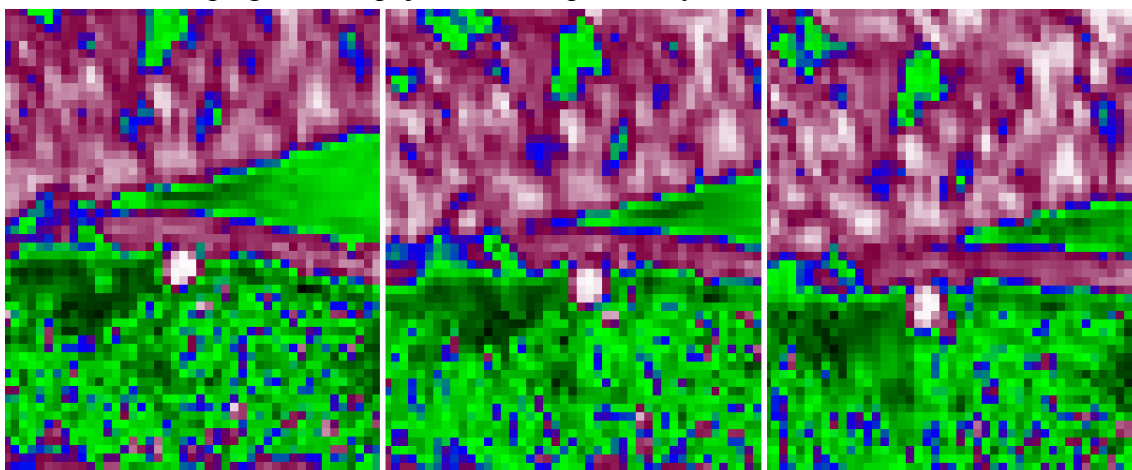
Obr. 3.12: Zde jsou vyznačeny tři hraniční body

Na obr. 3.12 jsou vyznačeny 3 body. Bod č. 1 ještě není v kontaktu s povrchem. U bodu č. 2 nemůžeme přesně určit, zda je v kontaktu či ne. Bod č. 3 v kontaktu s válcem už bezesporu je. Nyní porovnáme tyto tři body se screenshoty videa.



Obr. 3.13: Screenshoty videa odpovídajícím bodům 1, 2, 3 z obr. 3.12.

Na obr. 3.13 jsou screenshots třech bodů z obr. 3.12. Můžeme potvrdit, že bod č. 1 není v kontaktu s válcem a naopak bod č. 3 v kontaktu s válcem je. Abychom rozhodli, zda bod č. 2 je či není v kontaktu s válcem, musíme udělat mapu gradientů obrázku. Na mapě gradientů půjdou vidět lépe „skoky“ barev.



Obr. 3.14: Předchozí obrázek se zvýrazněnými gradienty.

S obrázkem 3.14 už můžeme bezpečně říct, že bod č. 2 ještě není v kontaktu s válcem, neboť na mapě gradientů vidíme mezeru mezi podložkou a válcem.

Ověřili jsme, že místo, kde dochází ke kontaktu podložka-válec, můžeme určit z grafu deformace za pomoci fitovací křivky (3.11), to je daleko úspornější oproti zkoumání videa. Nikdy ale nemůžeme určit, kde *přesně* dochází ke kontaktu a oddělení. Vždy budeme mít bod, na kterém není podložka v kontaktu, a dalším bod už v kontaktu je. Můžeme tedy říct, že dochází ke kontaktu někde mezi těmito body. Když chceme zkoumat závislost deformací na rychlosti, budeme muset zaznamenat oba dva body. Celkově dostaneme pro jeden špendlík v jednom experimentu 4 hodnoty – dvě pro y_1

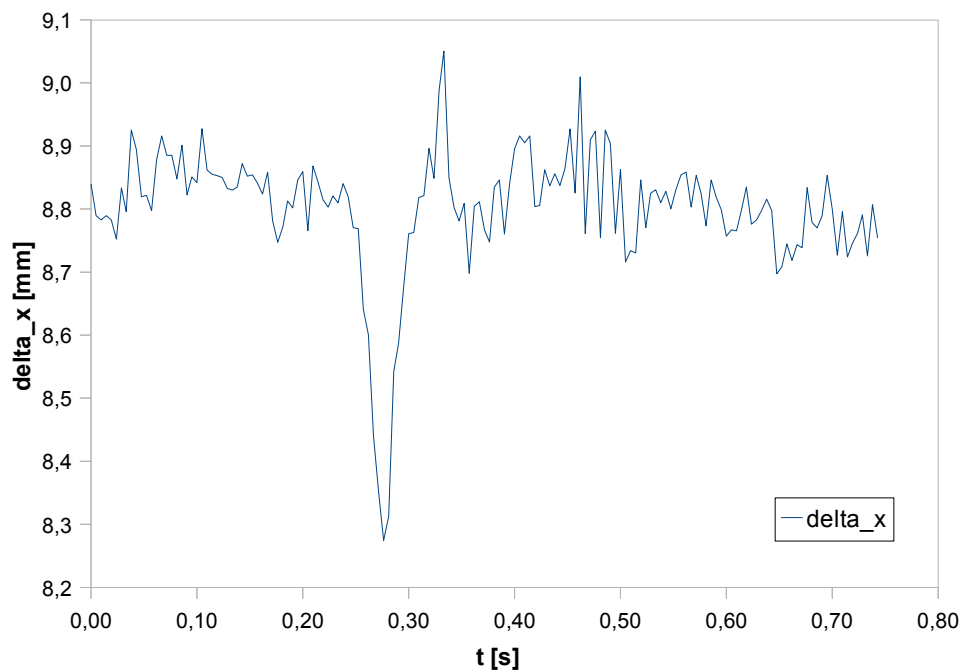
(souřadnice špendlíku v okamžiku, kdy přichází ke styku s válcem) a dvě hodnoty pro y_1 (souřadnice špendlíku v okamžiku, kdy špendlík ztrácí kontakt s válcem). To stejné se bude zaznamenávat i u druhého špendlíku, i když byl primárně určen pouze pro měření deformace ve směru osy x . Někdo by mohl namítnout, že je to zbytečné. Vyskytne-li se nějaký jev pouze u jednoho bodu, bude se s největší pravděpodobností jednat o chybu. To pro nás znamená nakonec 8 hodnot.

U každého experimentu je zaznamenána poloha těžiště v závislosti na čase. Abychom z polohy dostali rychlost, musíme polohu zderivovat. To provedeme tak, že uděláme podíl rozdílu dvou poloh a rozdíl jim odpovídajících časů. Postup je znázorněn na obrázku 3.14. Poté spočítáme průměrnou rychlost $\langle v \rangle$ z rychlostí, které odpovídají časům průjezdu válce. Tuto rychlost mj. použijeme do rov. 3.11 pro fitovací sinusoidu.

	A	B	C	D	E	F
1	t	x	y	dx/dt	$\langle v \rangle$	
2	0,2380952381	-28,9010755800	74,6047659100		486,4128653202	
3	0,2428571429	-27,0659636400	74,5372638700	$=(B3-B2)/(A3-A2)$		
4	0,2476190476	-25,2122301400	74,4670811800	389,2840400607		
5	0,2523809524	-23,2634580500	74,4524905000	409,2421356261		
6	0,2571428571	-21,3559231700	74,3988076000	400,5823300076		
7	0,2619047619	-19,3887317000	74,3494574300	413,1102053951		
8	0,2666666667	-17,3780399100	74,2805842100	422,2452725220		
9	0,2714285714	-15,3705336700	74,1931614000	421,5763158805		
10	0,2761904762	-13,3352815500	74,1145412300	427,4029417808		
11	0,2809523810	-11,3056744800	74,0471437700	426,2174812903		
12	0,2857142857	-9,1993165220	73,9865221100	442,3351769304		
13	0,2904761905	-7,1364876120	73,9332023400	433,1940676344		
14	0,2952380952	-4,9862721300	73,9145849300	451,5452570901		
15	0,3000000000	-2,8487670290	73,8869601100	448,8760676190		
16	0,3047619048	-0,6625027779	73,8465439000	459,1154890581		
17	0,3095238095	1,4901995310	73,8445188300	452,0674907459		
18	0,3142857143	3,7593951780	73,8921810900	476,5310820578		

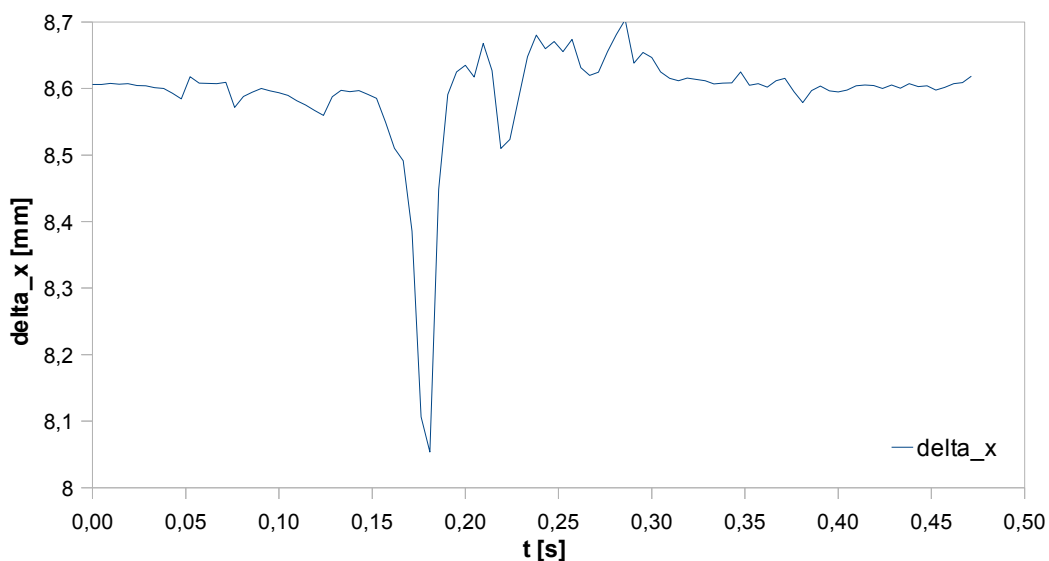
Obr. 3.15: Sloupec D obsahuje hodnoty zderivované funkce x -ové polohy ve sloupci B

Celkově se z každého experimentu získá 9 čísel. Nesmíme ale zapomenout na jednu velmi důležitou věc, a sice na deformaci podložky ve směru osy x . V každém souboru (každý soubor odpovídá jednomu experimentu) jsme udělali jeden sloupec pro rozdíl x -ových souřadnic obou bodů. Poté jsme udělali graf tohoto rozdílu v závislosti na čase. Na obr. 3.16 je znázorněn jeden takový graf. Pomocí vzdálenosti špendlíků ve směru osy x můžeme sledovat stlačování a rozpínání v tomto směru. Podle tohoto grafu ke stlačování nepochybně dochází. Podložka se stlačuje a poté se rozpíná. Jedná se o ten stejný experiment, který popisuje graf na obr. 3.11. Když porovnáme časy těchto dvou grafů, dojdeme k závěru, že válec před sebou povrch stlačuje a za sebou ho zase rozpíná. Povrch se nakonec vrací do původního stavu.



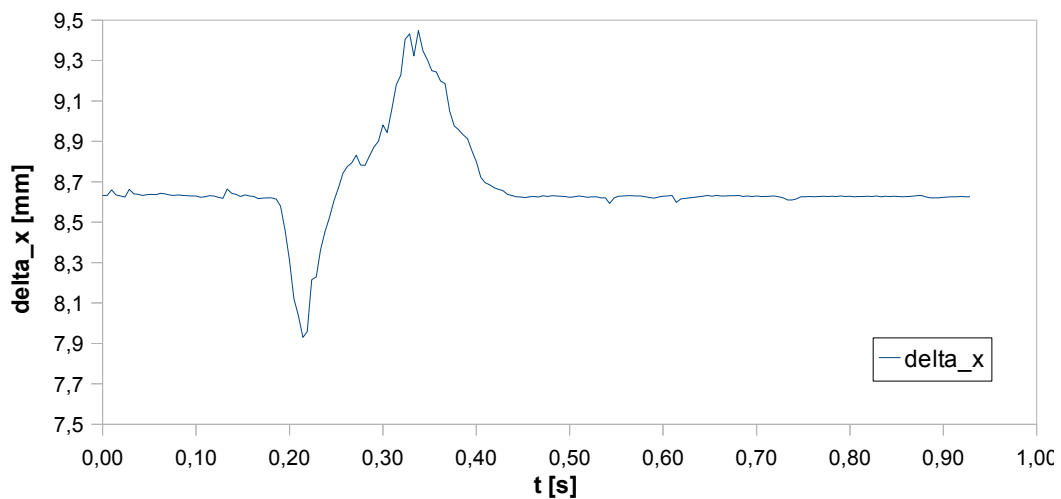
Obr. 3.16: Deformace povrchu A ve směru x při rychlosti 486 mms^{-1}

Pík představující stlačování materiálu je výrazně větší, než pík představující rozpínání. V některých případech rozpínání nenastalo vůbec:

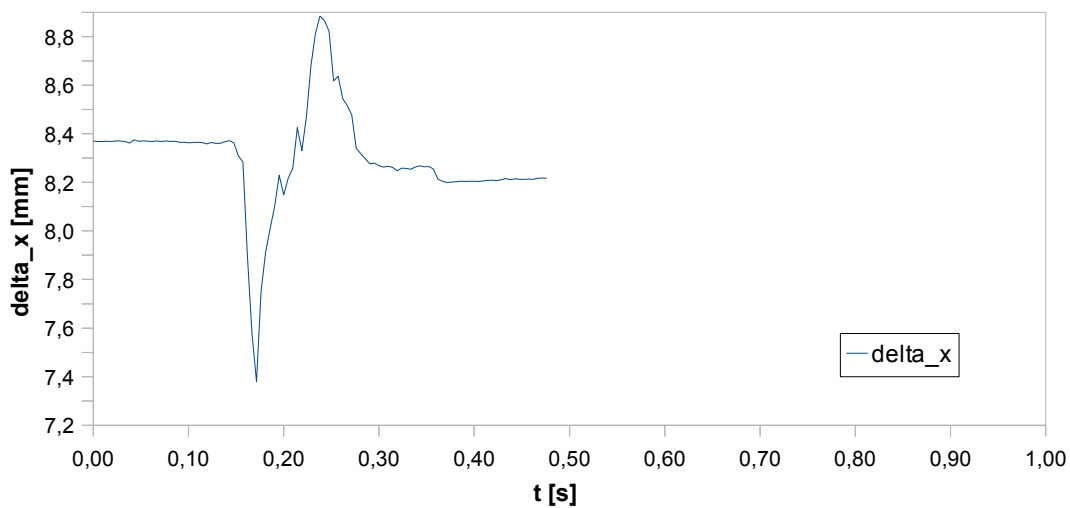


Obr. 3.17: Deformace povrchu A ve směru x při rychlosti 862 mms^{-1}

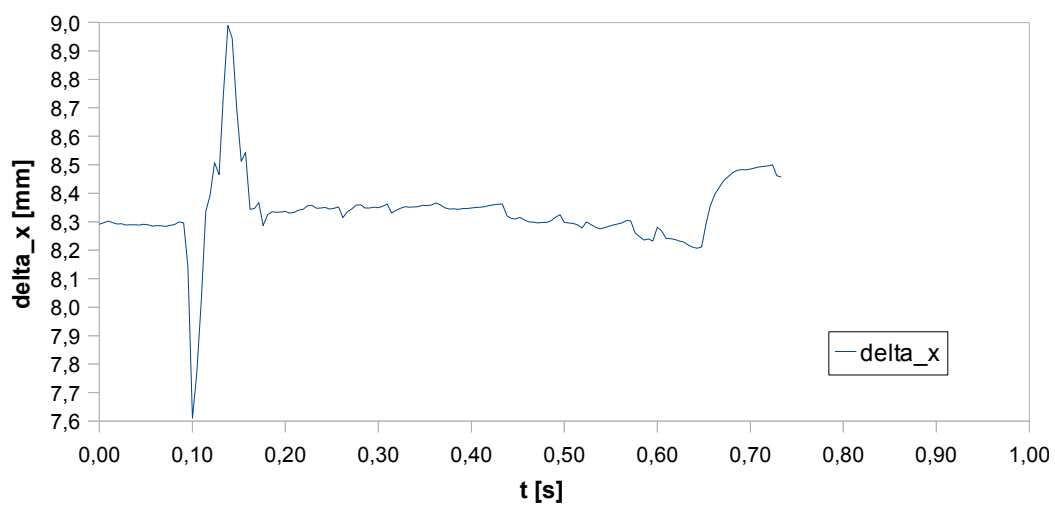
Když se podíváme na povrch B, který je homogenní a tedy i více „pocitivý“, tak zjistíme, že ve všech případech dochází ke stlačování i rozpínání. Pro ilustraci uvádíme deformace při rychlostech $440 \text{ mm}\cdot\text{s}^{-1}$, $746 \text{ mm}\cdot\text{s}^{-1}$ a $1393 \text{ mm}\cdot\text{s}^{-1}$.



Obr. 3.18: Deformace povrchu B ve směru x při rychlosti $440 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$



Obr. 3.19: Deformace povrchu B ve směru x při rychlosti $746 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$



Obr. 3.20: Deformace povrchu B ve směru x při rychlosti $1393 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$

Stlačování/rozpínání ve směru x pro nás znamená další 3 hodnoty na každý experiment. Jedna hodnota bude vzdálenost dvou bodů v normálním stavu a další dvě hodnoty budou hodnoty dvou píků. Dohromady tedy z každého experimentu vytáhneme 12 hodnot (toto množství už je konečné).

Z šestnácti experimentů (osm pro každý povrch) nám vznikne tabulka 12x16, ze které získáme grafy různých veličin v závislosti na rychlosti.

experiment	rychlost	Bod A						Bod B					
		dy _l _min	dy _l _max	dy _t _min	dy _t _max	x-	x+	x0	dy _l _min	dy _l _max	dy _t _min	dy _t _max	
A01	486,4128653	19,52529313	20,04358651	17,7621937	18,26008979	8,274105826	9,050438912	8,8	18,60731127	19,18466203	17,8159576	18,329127	
A02	633,4051264	18,60398556	19,19789305	16,92296491	17,43328427	8,173771726	0	8,67	18,87506619	18,3343593	16,22622157	16,72595407	
A03	799,8569908	17,7868905	18,77972142	15,56595124	16,33440185	8,325453644	9,074119266	9	18,49086996	19,17220941	16,38288045	17,11790009	
A04	862,6794447	19,0973101	19,72968206	17,14733979	17,85978499	8,05334543	8,667996735	8,6	19,26272407	19,64663284	17,09991818	17,89915524	
A05	990,8185678	18,04097803	18,81336968	16,16642777	16,90050652	8,197954057	8,874948596	8,6	17,26571093	18,26865294	16,22126345	17,13265397	
A06	1060,600992	17,58735352	18,7567683	15,97849871	17,00894227	8,223284252	8,817151343	8,7	18,15850087	18,93087535	16,22935744	17,07672901	
A07	1210,198457	18,64278953	19,28570971	17,40631914	18,19923256	8,414486756	8,838606464	8,5	18,5992826	19,02191937	17,80523385	18,5158231	
A08	1282,620961	19,22900303	19,94733474	17,607613	18,56381139	8,190163467	8,749788983	8,5	19,16331443	19,87467719	16,90502638	18,15127224	
B01	439,7068525	21,04630177	21,46887857	18,71866842	19,31339996	7,929190258	9,448163476	8,6	20,37581438	21,04930389	19,28357231	19,89491801	
B02	537,3007013	20,96406655	21,62649012	19,3044492	19,92721226	7,887458866	9,009903368	8,55	20,63589763	21,42253334	20,00525197	20,59259016	
B03	661,4733421	21,00054236	21,77662722	20,06459811	20,53876477	7,650336685	8,958936623	8,4	21,19813944	21,71133154	19,96142764	20,73093467	
B05	746,2480248	20,85909415	21,86885439	19,2149731	20,09864884	7,378983469	8,884917231	8,4	21,96794437	22,22482073	20,43320762	21,24571952	
B06	859,6789176	20,54563714	21,62919128	19,15240403	20,1049392	7,265296045	8,994904936	8,4	20,91607435	21,67572269	19,22335831	20,34810597	
B07	1196,168094	21,42457195	21,67747482	19,56109784	20,65798969	7,779408184	9,314777303	8,75	20,1003448	21,60357296	18,21421788	19,94026264	
B08	1295,47435	20,73650757	20,95320197	19,03464767	20,02744271	7,422163017	9,11732227	8,5	20,03874363	20,73177164	18,8388285	19,90162357	
B10	1393,469782	18,76378552	20,66210412	18,24656981	19,80186159	7,609976383	8,989169343	8,3	19,61188685	21,39865764	19,72561573	20,52579693	

Obr. 3.21: Tabulka se všemi hodnotami pro zkoumání závislosti některých charakteristických veličin na rychlosti

Nejdůležitější veličina, kterou budeme muset z tabulky znázorněné na obr 3.21 získat, je rozdíl $(y_l - y_t)$, protože ten je přímo úměrný velikosti N_x , tedy i síle valivého odporu. Fakt, že platí $N_x \sim (y_l - y_t)$ si teď dokážeme.

Pro element tlakové síly dN působící na válec platí:

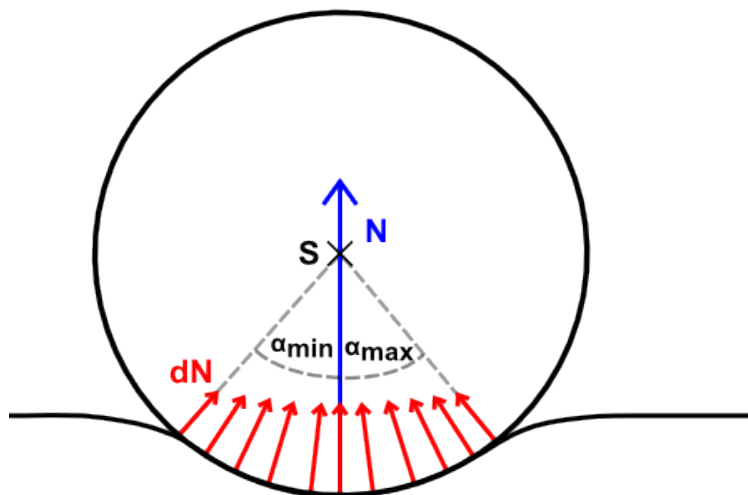
$$dN = n dS \quad (3.12)$$

kde n představuje tlak, ten není rovnoměrně rozprostřen a tak je to funkce úhlu α , tj. $n = n(\alpha)$. Element plochy dS jde rozepsat jako $dS = Rh d\alpha$, kde h je výška válce a R je poloměr. Protože odporové síle odpovídá složka N_x (ta se rovná $N \sin \alpha$), dostáváme:

$$dN_x = Rh n(\alpha) \sin(\alpha) d\alpha \quad (3.13)$$

Budeme integrovat od $-\alpha_{\min}$ do α_{\max} (viz. obr. 3.22 níže).

$$N_x = \int_{-\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} Rh n(\alpha) \sin(\alpha) d\alpha \quad (3.14)$$



Obr. 3.22: Integrál jako suma všech elementárních sil dN

Bohužel dostáváme integrál součinu dvou funkcí, který řešit per partes nepůjde, protože neznáme předpis funkce $n(\alpha)$. Proto funkci $n(\alpha)$ nahradíme její střední hodnotou na intervalu $[-\alpha_{\min}; \alpha_{\max}]$. Velikost střední hodnoty neznáme, ale lze ji vyjádřit takto:

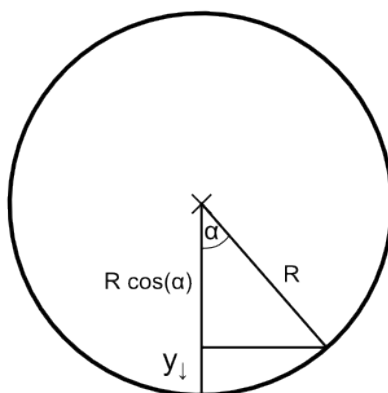
$$\langle n \rangle = \eta = \frac{1}{\alpha_{\max} + \alpha_{\min}} \int_{-\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} n(\alpha) d\alpha \quad (3.15)$$

Přibližně pak platí:

$$N_x = Rh\eta \int_{-\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} \sin(\alpha) d\alpha = Rh\eta [\cos(\alpha_{\min}) - \cos(\alpha_{\max})] \quad (3.16)$$

Když se podíváme na obrázek 3.23, tak platí:

$$y_{\downarrow} + R \cos(\alpha_{\max}) = R \quad \Rightarrow \quad R \cos(\alpha_{\max}) = R - y_{\downarrow} \quad (3.17)$$



Obr. 3.23

za proměnou y_{\downarrow} se může dosadit i y_{\uparrow} , zároveň se ale musí zaměnit i úhel α_{\max} . Roznásobíme-li částečně předešlou rovnici, dostaneme:

$$N_x = Rh\eta[\cos(\alpha_{\min}) - \cos(\alpha_{\max})]$$

$$N_x = h\eta[R\cos(\alpha_{\min}) - R\cos(\alpha_{\max})]$$

$$N_x = h\eta[(R - y_{\uparrow}) - (R - y_{\downarrow})]$$

$$N_x = h\eta(y_{\uparrow} - y_{\downarrow})$$

Ať už je η jakékoliv, N_x je úměrné rozdílu y -ových souřadnic krajních bodů kontaktu válce s podložkou.

$$N_x \sim (y_{\downarrow} - y_{\uparrow}) \quad (3.18)$$

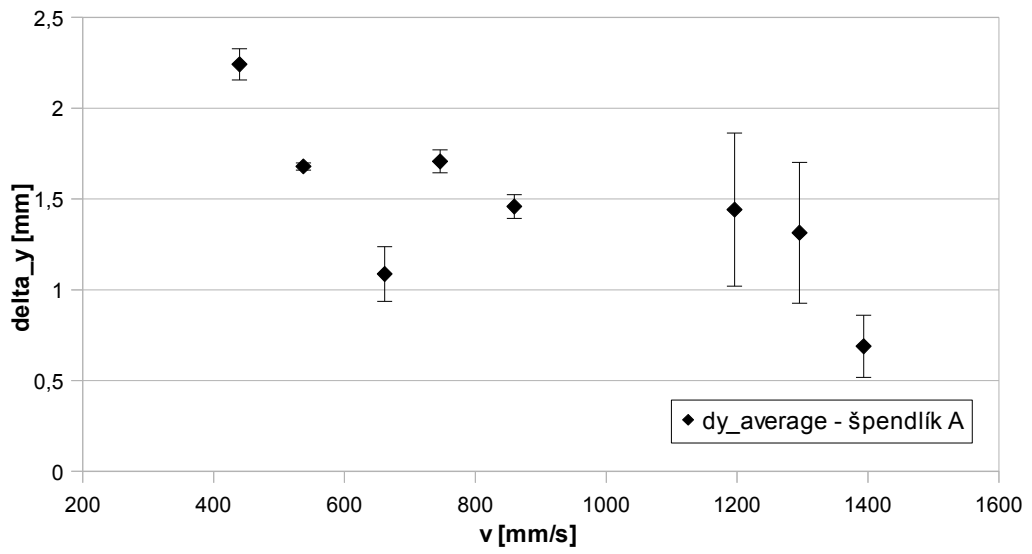
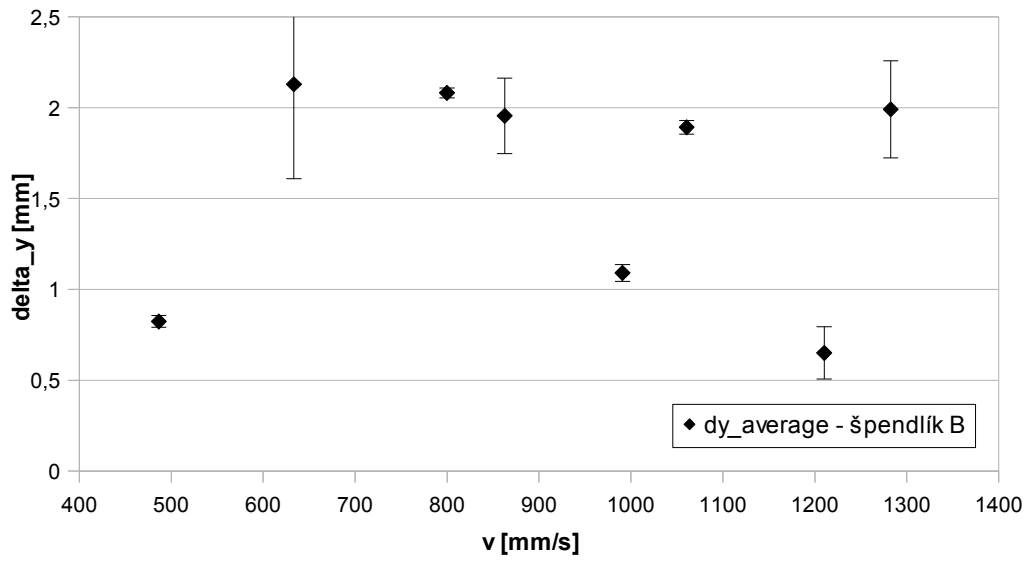
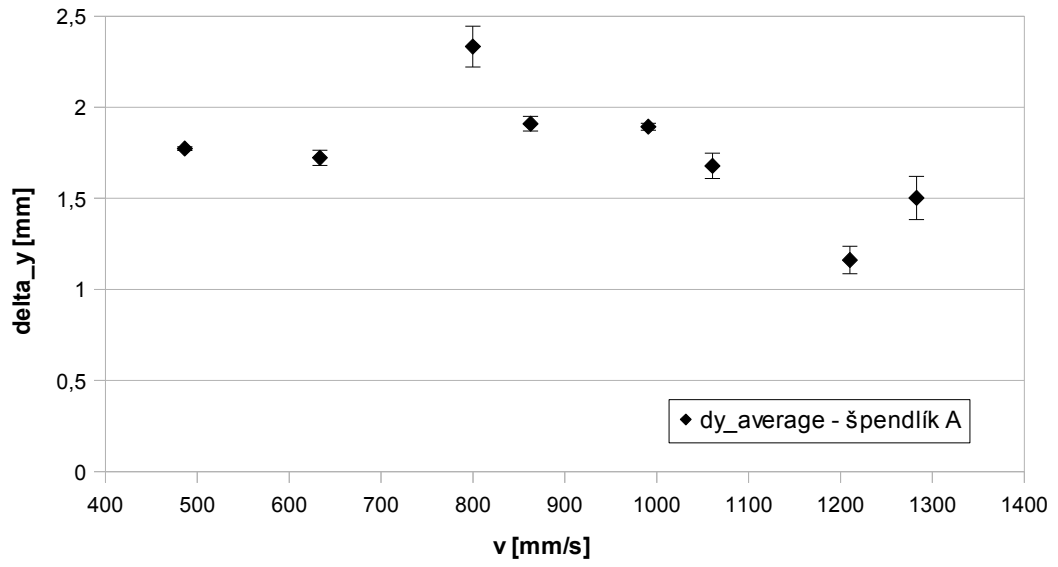
V tabulce z obrázku 3.21 máme pro y_{\downarrow} dvě hodnoty. Jak už bylo řečeno, je to dáno neurčitostí, tj. nevíme, kdy přesně dochází ke kontaktu podložky a válce. Můžeme však říci, že v jednom bodě (na jednom snímku) kontakt určitě není a na dalším kontakt zcela jistě je. Budeme mít tedy dvě hodnoty: $y_{\downarrow\max}$ a $y_{\downarrow\min}$. Úplně stejné to je u y_{\uparrow} . Rozdíl těchto hodnot stanovíme tak, že odečteme nejdřív minimální hodnoty. Tím dostaneme spodní hranici, tu zprůměrujeme s rozdílem maximálních hodnot. Tedy:

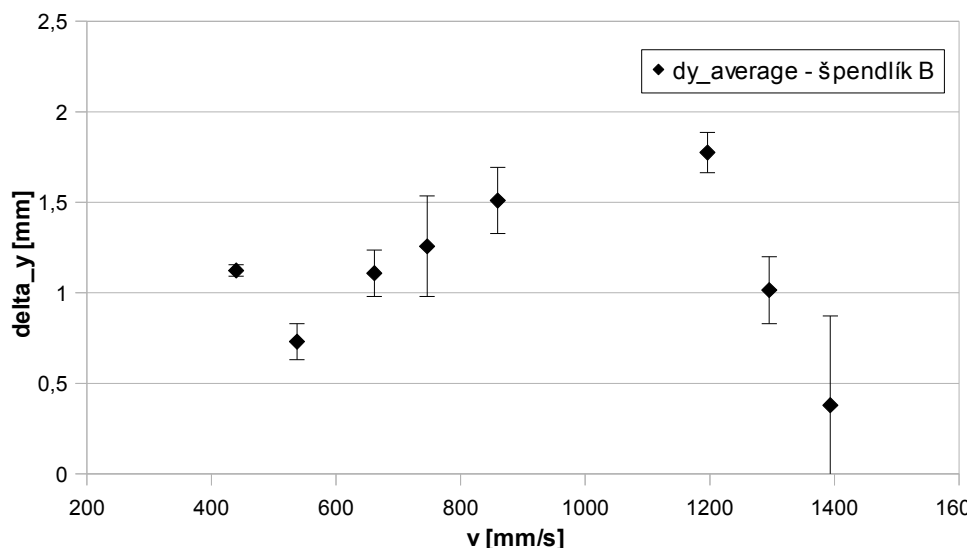
$$\Delta y_{\text{avrg}} = \frac{(y_{\uparrow\max} - y_{\uparrow\min}) + (y_{\downarrow\max} - y_{\downarrow\min})}{2} \quad (3.19)$$

Protože se jedná o průměr a ve skutečnosti Δy_{avrg} může být větší/menší. Proto definujeme odchylku $\Delta y_{+/-}$, abychom pokryli celé spektrum možných hodnot. Pak můžeme psát Δy ve tvaru $\Delta y_{\text{avrg}} \pm \Delta y_{+/-}$. Definujeme tedy

$$\Delta y_{+/-} = \frac{(y_{\uparrow\max} - y_{\uparrow\min}) - (y_{\downarrow\max} - y_{\downarrow\min})}{2} \quad (3.20)$$

Uděláme tedy závislost Δy na rychlosti u každého povrchu pro oba dva špendlíky. Celkem tedy dostaneme 4 grafy.



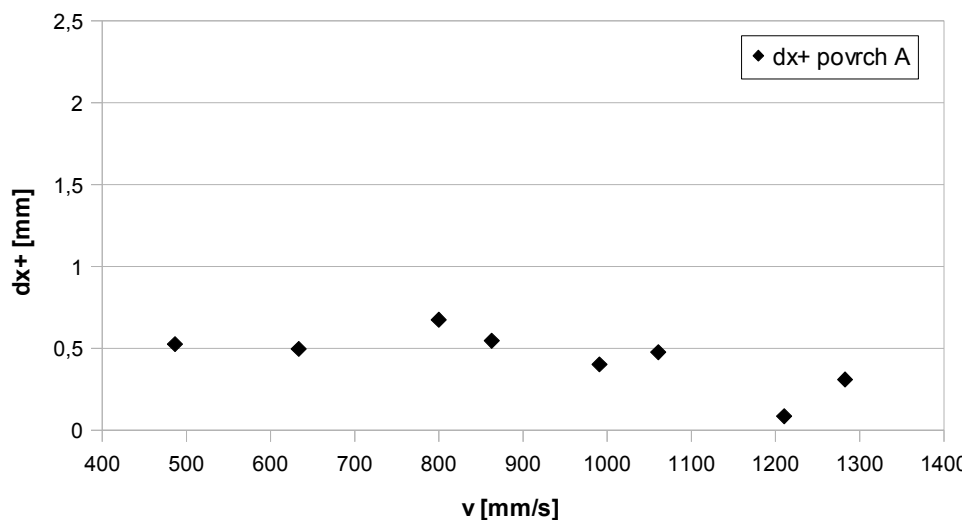


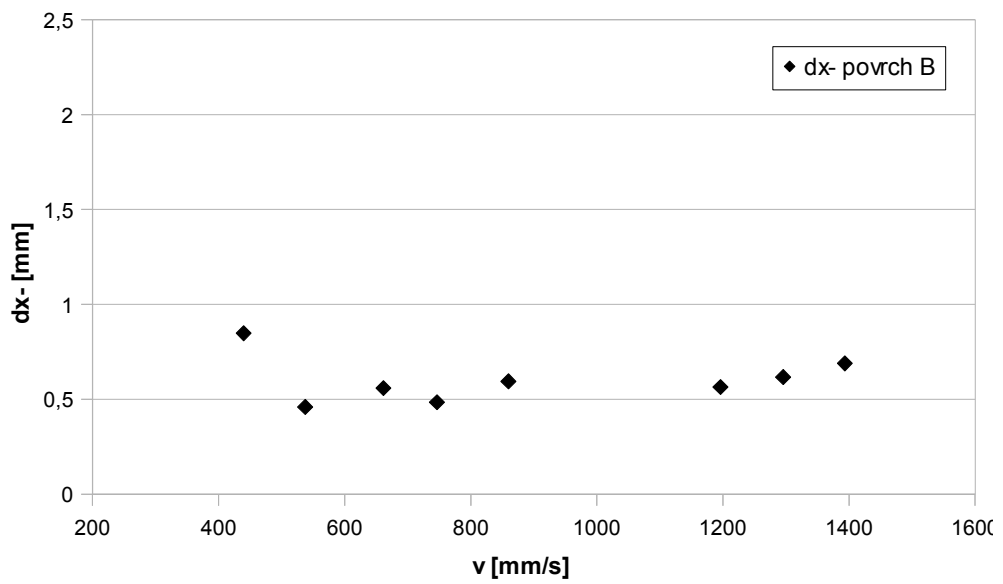
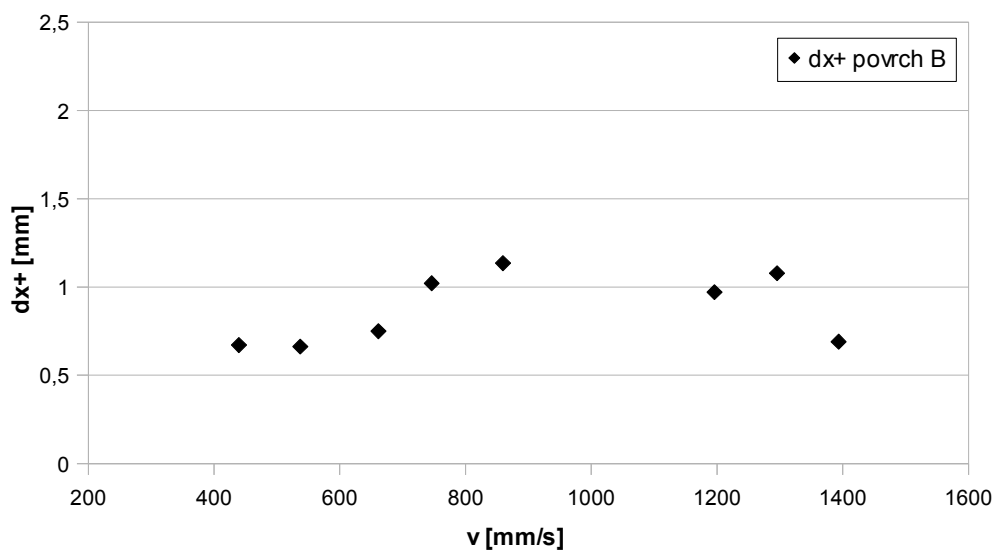
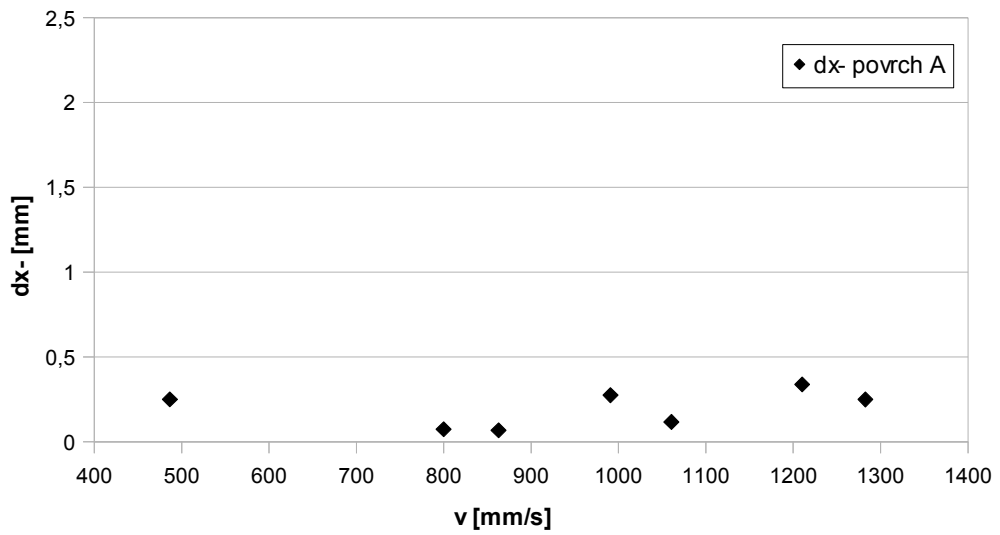
Obr. 3.24: Deformace povrchu ve směru osy x

První dva grafy odpovídají povrchu A. V obou případech není z grafu patrný jakýkoliv trend – ať už vzestupný, nebo sestupný. Deformace se pohybuje v rámci statistických chyb kolem hodnoty 1,8 mm. U druhého špendlíku je sice statistický rozptyl znatelně větší, ale stále zde není patrný žádný trend. Nesmíme však zapomenout, že hlavička špendlíku má rozměry přibližně 1 mm x 1 mm.

Další dva grafy popisují deformaci povrchu B. Na druhém grafu je možné spatřit klesající tendenci. První graf to ale nepotvrzuje, takže se jedná nejspíše o statistickou chybu. Velikost valivého odporu pro rychlosti, v jakých jsme měřili, by měla být nezávislá na rychlosti.

Další zkoumanou veličinou bylo stlačování povrch ve směru osy x. Na grafech níže je zachycena závislost velikosti kladných a záporných píků pro oba povrchy.



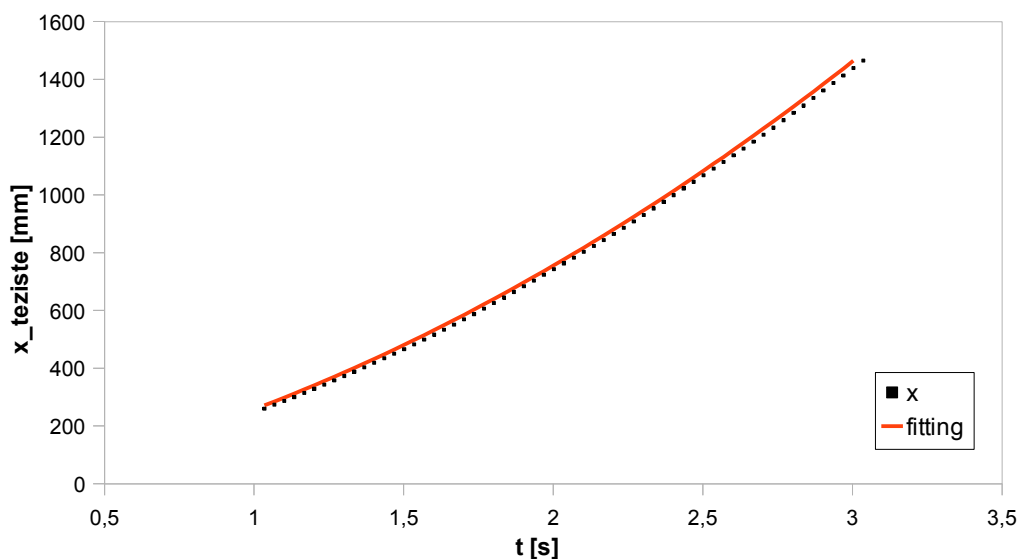


Obr. 3.25: Deformace povrchu ve směru osy x

Z grafů 3.25 je patrné, že stlačení i rozpínání je taktéž nezávislé na rychlosti válce. Všechny parametry deformací podložky se zdají být v rychlostech do 1400 mms^{-1} nezávislé na rychlosti. Proto by i velikost síly valivého odporu měla být nezávislá na rychlosti.

Abychom dokázali výše zmíněnou nezávislost valivého odporu na rychlosti, provedeme jednoduchý experiment. Změříme vývoj polohy (v čase) těžiště válce, který se bude valit na nakloněné rovině po povrchu A, resp. B. Bude-li graf polohy v závislosti na čase parabolický (konstantní zrychlení), máme jistotu, že pokud na válec působí nějaká odporová síla, je rovněž konstantní, tj. nemění se s rychlostí.

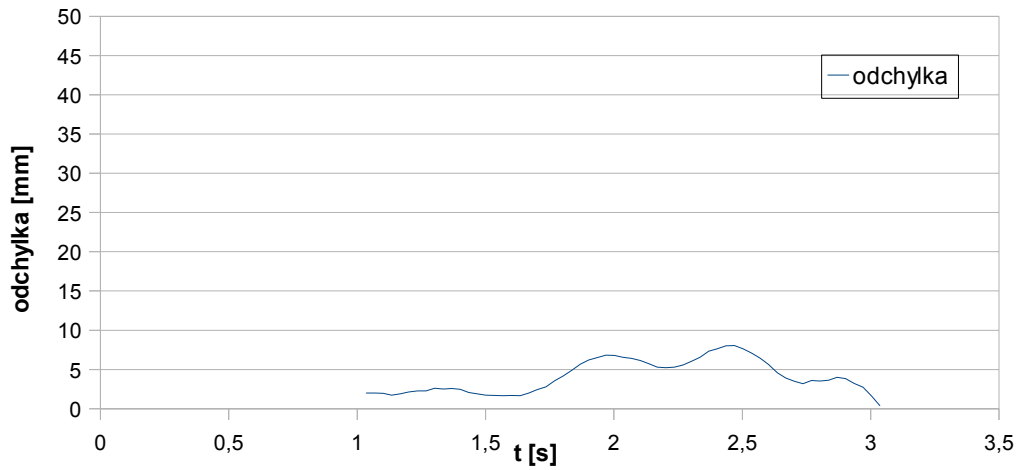
Níže máme graf pro povrch A nafilovaný na zrychlení $0,21 \text{ ms}^{-2}$.



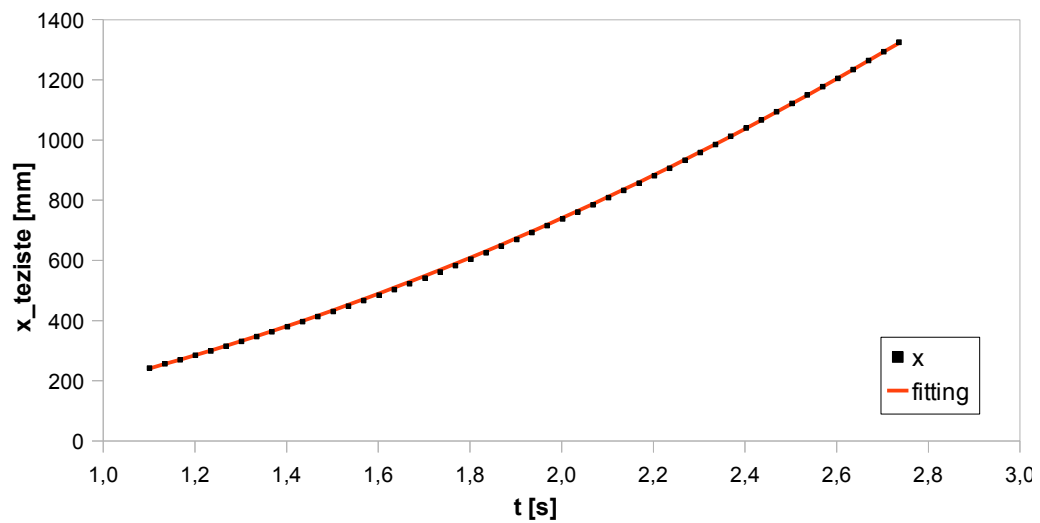
Obr. 3.26: Zrychlení těžiště válce na povrchu A a fitovací křivka se zrychlením $0,21 \text{ ms}^{-2}$

Křivka grafu začíná v čase, kdy má těžiště válce rychlost 400 mms^{-1} a končí při rychlosti 770 mms^{-1} . Jak je z grafu patrné, jedná se o parabolu (křivka je totožná s fitovací parabolou). Fitování proběhlo tak, jak bylo popsáno v kapitole 2.5. Na obr. 3.27 je rozdíl křivek z grafu 3.26. Křivka odchylky je ve střední hodnotě konstantní a není patrný žádný vzestupný, resp. sestupný trend. Maximální odchylka je 8 mm – to se dá považovat za chybu v rámci měření.

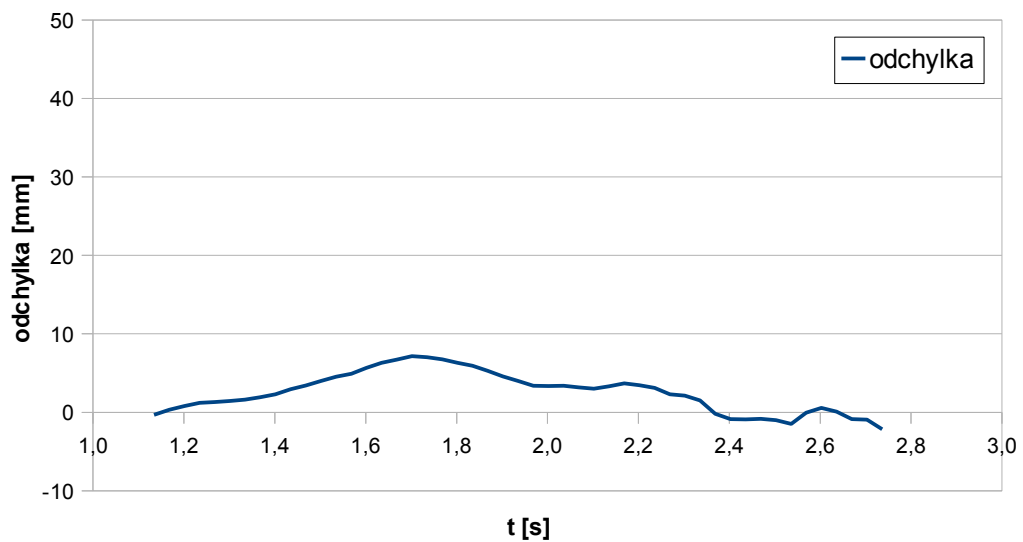
Následuje táž dvojice grafů pro povrch B. Graf z experimentu byl nafilován parabolou pro zrychlení 290 mms^{-2} . Maximální odchylka od fitovací křivky je v tomto případě něco málo přes 7 mm. Síla valivého odporu je tedy pro toto rozmezí rychlostí nezávislá na rychlosti, stejně tak jako deformace podložky.



Obr. 3.27: Odchylka fitovací křivky od experimentu, povrch A



Obr. 3.28: Zrychlení těžiště válce na povrchu B a fitovací křivka se zrychlením $0,29\text{ms}^{-2}$



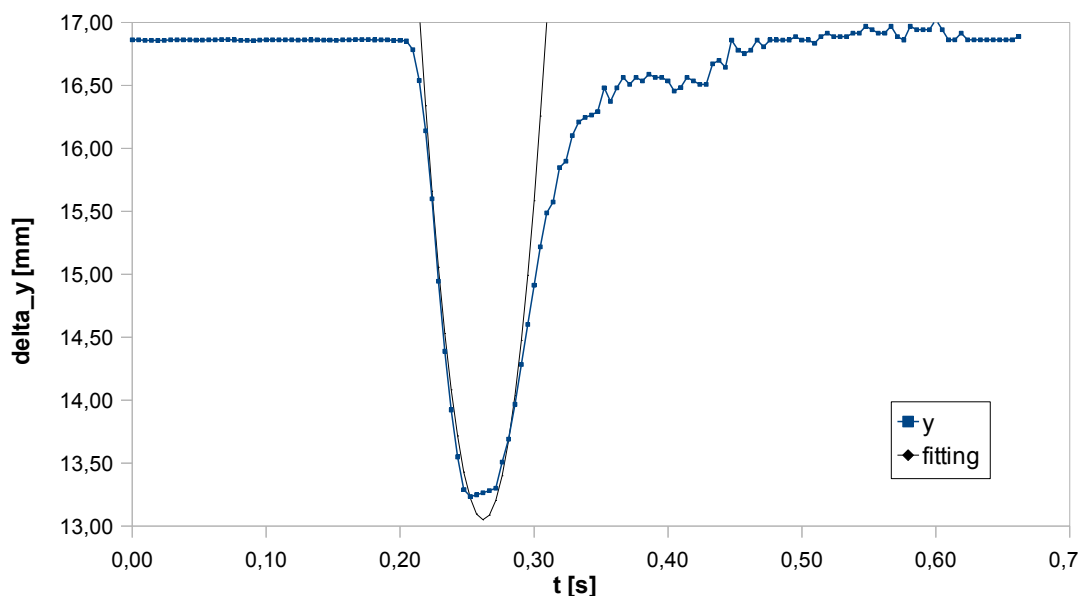
Obr. 3.29: Odchylka fitovací křivky od experimentu, povrch B

3.5 Deformace povrchu na vodorovné rovině

V minulé kapitole jsme prozkoumali deformace povrchu pod válcem při valivém pohybu. Zjistili jsme, že se povrch asymetricky stlačuje ve směru kolmém na pohyb válce (tj. ve směru osy y). V kapitole 3.3 jsme teoreticky ukázali skutečnost, že když je deformace podložky asymetrická, normálová síla má nenulovou x -ovou komponentu, která zpomaluje válec. Také jsme zjistili, že se povrch před válcem stlačuje ve směru, který je rovnoběžný se směrem pohybu (tj. ve směru osy x). Logicky se musí tedy povrch za válcem rozepínat – to se také děje. Stlačený povrch před válcem způsobuje to, že síly působící na přední stranu válce jsou větší, než síly působící na zadní stranu válce. To efekt valivého odporu ještě více umocňuje.

Abychom vyloučili, že asymetrie deformací jsou způsobené pouze tím, že se jedná o nakloněnou rovinu, provedeme další sérii experimentů, tentokrát ale na vodorovné rovině. Válec necháme urychlit na nakloněné rovině, která následně přejde ve vodorovnou rovinu, kde provedeme měření.

Experimenty potvrdily, že sledované asymetrie v deformacích jsou důsledkem čistě pohybu válce, nikoliv nakloněnou rovinou nebo zrychlením válcem. Pro ilustraci uvádíme graf deformace povrchu A při rychlosti 420 mms^{-1} .

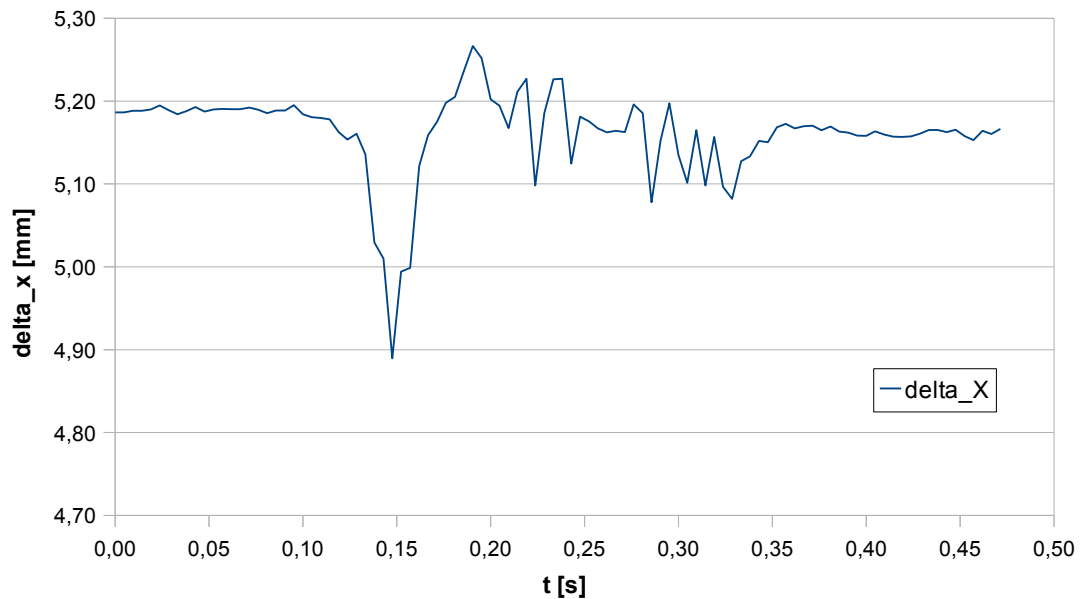


Obr. 3.30: Graf y -ové deformace povrchu A na vodorovné rovině při rychlosti 420 mms^{-1}

Asymetrie (jak je patrné z obr. 3.30) se vyskytují i při valení po vodorovné rovině. To nám potvrzuje, že jsou tyto nesouměrnosti příčinou valivého odporu. Síly

valivého odporu působí na těleso vždy, když vykonává valivý pohyb. Kdyby se nesouměrnosti na vodorovné rovině nepotvrdily, vyvrátilo by to teorii, že asymetrie deformací jsou příčinou valivého odporu.

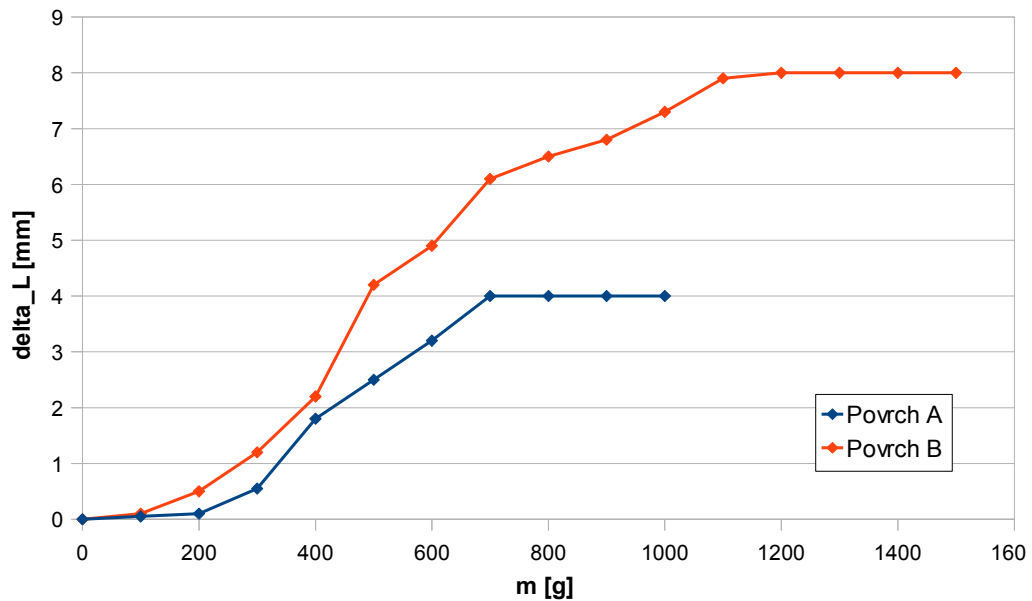
Dalším jevem, který byl zkoumán, bylo stlačování povrchu ve směru pohybu (v ose x). Opět se potvrdilo to, co bylo naměřeno na nakloněné rovině. Graf 3.31 ukazuje takové deformace na povrchu A při rychlosti 640mms^{-1} .



Obr. 3.31: Deformace povrchu A v ose x na vodorovné rovině při rychlosti 640mms^{-1}

3.6 Vlastnosti použitých materiálů

Prozkoumejme nyní základní vlastnosti použitých materiálů A a B. První vlastnost, kterou prozkoumáme, je deformace materiálů. Postupně jsme na oba dva povrchy pokládali stogramové závaží a posuvným měřidlem jsme měřili změnu tloušťky materiálu. Křivky pro oba povrchy jsme zanesli do grafu 3.32. Tento graf není typickou σ - ϵ charakteristikou, protože zde není závislost napětí na relativním prodloužení, nýbrž závislost deformace na hmotnosti závaží. Pro naše účely ale postačí takový graf, protože nás nejvíce zajímá hlavně to, v jakém rozmezí je deformace lineární. Z grafu vyčteme, že pro povrch A je deformace zhruba lineární v intervalu 0,5mm až 4mm, pro povrch B je deformace lineární v intervalu 1mm až 8mm. U povrchu A jsme se pohybovali na hranici linearitu, kdežto u povrchu B byly deformace vždy lineární.



Obr. 3.32: Graf deformace v závislosti na zatížení

Experimenty s povrchem B můžeme považovat za relevantnější.

Dále spočítáme rameno valivého odporu. Na konci kapitoli 3.4 jsme fitováním změřili zrychlení pro oba povrchy. Nyní určíme rozdíl mezi těmito zrychleními a zrychlením spočteným z rov. (2.10). Ten totiž bude v převažující míře způsoben valivým odporem. Moment setrvačnosti válce vzhledem k ose rotace je:

$$I = \frac{1}{2} mR^2$$

Po dosazení do rov. (2.10) se vztah zjednoduší na:

$$a_T = \frac{2}{3} g \sin \alpha$$

Konkrétně pro úhel $\alpha=8^\circ$

$$a_T = 0.91 \text{ ms}^{-2}$$

Po odečtení pro povrch A platí

$$\xi_A \frac{g}{R} = 0,91 \text{ ms}^{-2} - 0,21 \text{ ms}^{-2} = 0,70 \text{ ms}^{-2}$$

Poloměr válce je 0,05m, proto

$$\xi_A = 0,0036 \text{ m}$$

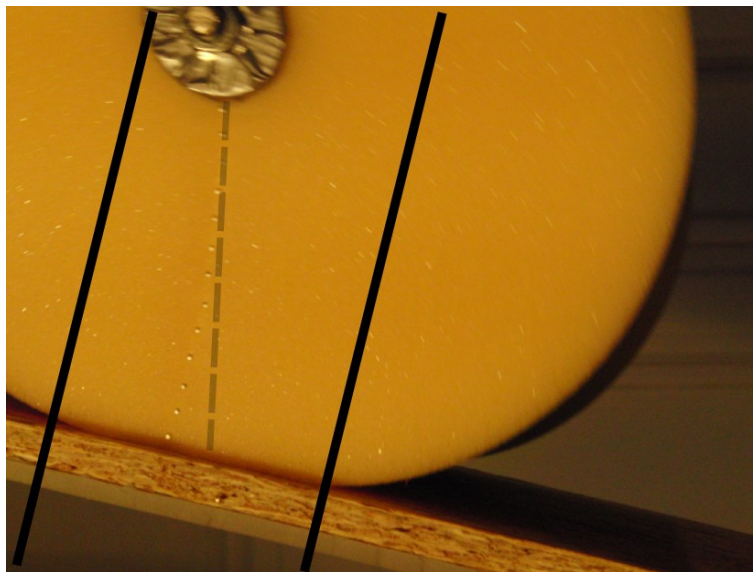
To stejné platí pro povrch B, proto:

$$\xi_B = 0,0032 \text{ m}$$

3.7 Deformace tělesa na pevné podložce

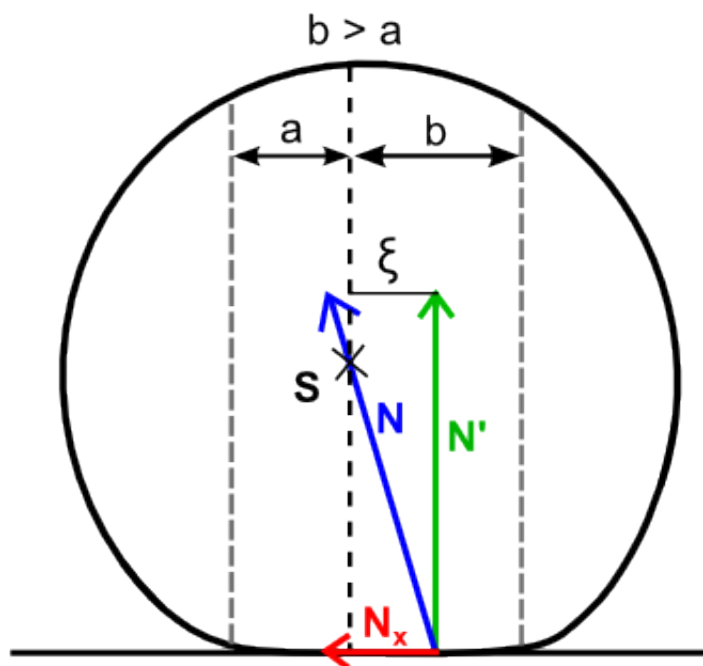
V předchozí kapitole jsme prozkoumali souvislost valivého odporu s deformací podložky. Kromě podložky se deformuje také samotné těleso. Deformaci tělesa jsme v předchozí kapitole nebrali v úvahu. Nyní prozkoumáme charakter deformací samotného tělesa.

Provedli jsme jednoduchý experiment. Nechali jsme valit molitanový válec po nakloněné rovině a pořídili jsme fotografii. Abychom deformace umocnili, umístili jsme do osy válce kovovou tyč. Do válce jsme napíchali špendlíky tak, aby byly v jedné přímce, která spojuje spojující osu válce s okrajem. Pořízená fotografie je na obr. 3.33.



Obr. 3.33: Deformace válce na nakloněné rovině

Z obrázku je patrné, že styková plocha je vyosená. Díky špendlíkům můžeme vidět, jak se válec deformuje. Přidáme ještě schématický obrázek 3.34. Na něm je znázorněna tlaková síla \mathbf{N}' , která je vyosená. Součet elementárních tlakových sil bude mít působiště mimo osu, protože vzdálenosti a a b jsou rozdílné. Síla \mathbf{N}_x způsobuje deformaci válce ve směru osy x a má za následek zkřivení řady špendlíků.



Obr. 3.34: Schématický obrázek deformace válce

Síla N je rovna vektorovému součtu sil $N' + N_x$. Obr. 3.34 připomíná obrázek 3.4. Výsledná síla N má vzhledem ke středu hmotnosti nulový moment. Velikost ramena síly N' je ξ .

Valení s prokluzem

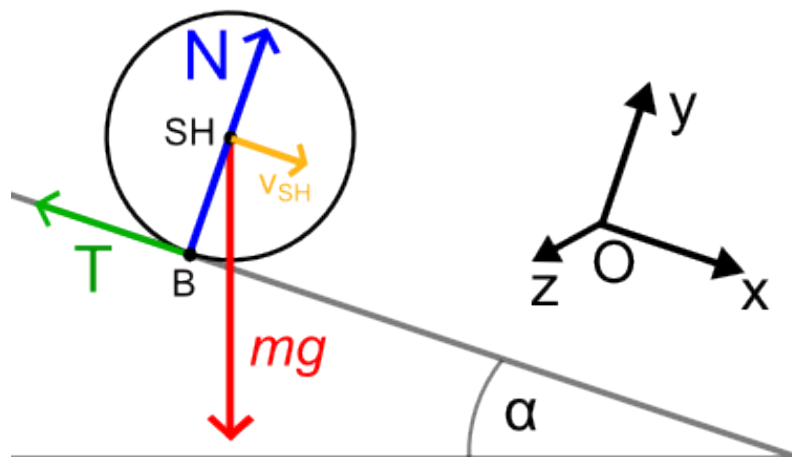
4.1 Co říká teorie

Nyní se podíváme na obecnější případ valení po nakloněné rovině. Nebudeme totiž automaticky uvažovat podmínku pro valení bez prokluzu. Pojďme si situaci rozebrat nejdříve kvalitativně.

Položíme-li válec na nakloněnou rovinu a uvolníme jej z klidu (nulová počáteční rychlost středu hmotnosti a nulová rychlost rotace kolem osy válce), začne se valit. Valení může začít buď bez prokluzu, nebo se válec může po podložce také sunout. V prvním případě způsobuje roztáčení válce vzhledem k jeho ose symetrie statická třecí síla, v druhém případě třecí síla dynamická. (Obě působí v bodech dotykové přímky válce s nakloněnou rovinou, směřují proti pohybu válce rovnoběžně s nakloněnou rovinou a mají tedy nenulový moment vzhledem ke středu hmotnosti válce. Předpokládáme, že válec je homogenní, takže jeho střed hmotnosti leží na jeho ose.) V případě prokluzu mohou nastat dvě situace:

V případě, že sklon roviny bude dostatečně malý (zrychlení středu hmotnosti tělesa nebude příliš velké) a zároveň koeficient dynamického tření bude dostatečně velký, moment třecí síly a (tím pádem i úhlové zrychlení) bude natolik velký, že úhlová rychlost bude narůstat rychle a obvodová rychlost povrchu válce po nějaké době „dožene“ rychlost těžiště a nastane valení bez prokluzu se zrychlením podle rov. (2.10).

Odlíšná situace nastane v případě, že sklon roviny bude příliš velký (a přispěje tak k většímu zrychlení středu hmotnosti tělesa) a koeficient dynamického tření (a tedy



Obr. 4.1

i moment třecí síly) malý. V tomto případě se úhlová rychlost nezvětšuje dostatečně rychle na to, aby obvodová rychlost povrchu válce někdy „dohnala“ rychlost jeho těžiště. Valení bez prokluzu nenastane nikdy.

Nyní tento jev prozkoumáme kvantitativně. Vztažnou soustavu S spojíme se středem hmotnosti válce (SH) a její osy namíříme shodně s osami vyznačené soustavy souřadnic. Budeme uvažovat obecně - vezmeme v úvahu i možnost, že počáteční rychlost středu hmotnosti a počáteční úhlová rychlost jsou nenulové, přičemž může nastat kterákoli ze situací: obvodová rychlost při rotaci válce je větší, resp. menší než rychlost středu hmotnosti, popřípadě jí může být rovna (valení bez prokluzu). Situaci znázorňuje obr. 4.1 v řezu svislou rovinou procházející středem hmotnosti válce.

Teď si vypíšeme všechny vektory sil, rychlostí, zrychlení, úhlových rychlostí a zrychlení:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{SH} &= (v_x, 0, 0) & \boldsymbol{\omega} &= (0, 0, \omega_z) \\ \mathbf{a}_{SH} &= (a_x, 0, 0) & \boldsymbol{\varepsilon} &= (0, 0, \varepsilon_z) & \mathbf{r}' &= (0, -r, 0) \\ \mathbf{T} &= (T_x, 0, 0) & \mathbf{N} &= (0, N, 0) & m\mathbf{g} &= (0, -mg, 0) \\ \boldsymbol{\sigma} &= (1, 0, 0) \text{ pro } v_{B,x} > 0, & \boldsymbol{\sigma} &= (-1, 0, 0) \text{ pro } v_{B,x} < 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\mathbf{T}_d = -Nf\boldsymbol{\sigma} = (-Nf\sigma_x, 0, 0)$$

$$\mathbf{T}_s = (-T_s, 0, 0) \quad T_s \leq f_0 N$$

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_{SH} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' = (v_x + \omega_z r, 0, 0)$$

kde \mathbf{v}_B je rychlost bodu B (viz. obr. 4.1) vzhledem k nakloněné rovině. Jednotkový vektor $\boldsymbol{\sigma}$ směřuje na jednu či druhou stranu podle smyslu vektoru \mathbf{v}_B . Jednoduše řečeno když válec prokluzuje platí $\sigma_x = -1$, když válec „hrabe“, platí $\sigma_x = 1$. Polohový vektor \mathbf{r}' směřující od středu hmotnosti válce do bodu B má počátek ve středu hmotnosti válce. Připomeňme, že bod B je bodem dotyku válce s podložkou ležícím ve svislé rovině procházející středem hmotnosti válce. Vektorem \mathbf{T} je označena třecí síla obecně, přičemž v případě, že válec prokluzuje, se uplatní dynamická třecí síla \mathbf{T}_d , v případě

splnění vazební podmínky pro valení bez prokluzu třecí síla statická \mathbf{T}_s (míří vždy proti směru osy x). f_0 je koeficient statického tření.

První impulsovou větu formulujeme vzhledem k inerciální vztažné soustavě spojené s podložkou. Druhou impulsovou větu vztáhneme k soustavě S spjaté se středem hmotnosti válce.

$$\begin{aligned} m \mathbf{a}_{SH} &= \mathbf{T} \\ I \boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{r}' \times \mathbf{T} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Pro $v_{B,x} \neq 0$ se uplatňuje dynamické tření, pro $v_{B,x} = 0$ tření statické. Rozepíšeme rovnici (4.2) do složek pro $v_{B,x} \neq 0$:

$$\begin{aligned} m a_x &= mg \sin \alpha - N f \sigma_x \\ N &= mg \cos \alpha \\ I \varepsilon_z &= -N f r \sigma_x \end{aligned} \quad (4.3)$$

Řešíme soustavu rovnic (4.3). Výraz pro N z prostřední rovnice dosadíme do zbývajících rovnic. Po úpravě dostaneme:

$$\begin{aligned} a_x &= g(\sin \alpha - f \sigma_x \cos \alpha) \\ \varepsilon_z &= \frac{-mgfr \sigma_x \cos \alpha}{I} \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} v_x &= v_x(0) + g(\sin \alpha - f \sigma_x \cos \alpha) t \\ \omega_z &= \omega_z(0) - \frac{mgfr \sigma_x \cos \alpha}{I} t \end{aligned} \quad (4.5)$$

Podle poslední vztahu v (4.1) pro rychlost v_B , tj. rychlost bodu ve vztažné soustavou O , platí:

$$v_{B,x} = \left(v_x(0) + \omega_z(0) r \right) + g \left(\sin \alpha - f \sigma_x \cos \alpha \left(1 + \frac{mr^2}{I} \right) \right) t \quad (4.6)$$

Nyní napíšeme soustavu rovnic pro valení bez prokluzu, tj. $v_{B,x} = v_x(t) + \omega_z(t)r = 0$:

$$\begin{aligned} m a_x &= mg \sin \alpha + T_{s,x} \\ I \varepsilon_z &= r T_{s,x} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Protože se jedná o valení bez prokluzu, platí podmínka pro valení bez prokluzu a soustava rovnic (4.7) má řešení stejné, jako rov. (2.10) kapitole 2.2.

$$a = \frac{r^2 m g \sin \alpha}{I + m r^2} \quad (4.8)$$

Napišme ještě velikost síly statického tření pro valení bez prokluzu

$$T_s = \frac{m g \sin \alpha}{1 + \frac{m r^2}{I}} \quad (4.9)$$

Vazební podmínka pro valení bez prokluzu může být splněna pouze tehdy, nepřekročí-li velikost statického tření nejvyšší přípustnou hodnotu Nf_0 , tj.

$$\frac{m g \sin \alpha}{1 + \frac{m r^2}{I}} < m g f_0 \cos \alpha \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha < f_0 \left(1 + \frac{m r^2}{I} \right) \quad (4.10)$$

Podmínka pro valení bez prokluzu je pro zadané parametry válce (hmotnost, vnější poloměr, moment setrvačnosti) závislá výhradně na úhlu sklonu nakloněné roviny.

Diskutujme nyní případy s prokluzem. Předpokládejme, že je těleso v prokluzu od začátku – tj. rychlost $v_{B,x}$ bude nenulová.

Řešme úlohu nejprve pro případ $v_{B,x}(0) > 0$, takže platí $\sigma_x = 1$. Zkoumejme, do kdy bude těleso v prokluzu, tj. pro jaké t platí $v_{B,x}(t) > 0$

$$\left(v_x(0) + \omega_z(0)r \right) + g \left(\sin \alpha - f \cos \alpha \left(1 + \frac{m r^2}{I} \right) \right) t > 0 \quad (4.11)$$

$$\left(v_x(0) + \omega_z(0)r \right) > -g \left(\sin \alpha - f \cos \alpha \left(1 + \frac{m r^2}{I} \right) \right) t \quad (4.12)$$

Chceme nerovnici vyjádřit pro t , takže ji musíme vydělit koeficientem u proměnné t . Mohou vzniknout dvě možnosti podle toho, zda je závorka kladná, či záporná. Hodnotu úhlu sklonu, pro kterou je závorka nulová, nazvěme třeba "kritickou". Tohoto případu si

všimneme později.

$$t > -\frac{(v_x(0) + \omega_z(0)r)}{g\left(\sin\alpha - f\cos\alpha\left(1 + \frac{mr^2}{I}\right)\right)} \quad (4.13)$$

$$\text{platí pro } \sin\alpha > f\cos\alpha\left(1 + \frac{mr^2}{I}\right)$$

$$t < -\frac{(v_x(0) + \omega_z(0)r)}{g\left(\sin\alpha - f\cos\alpha\left(1 + \frac{mr^2}{I}\right)\right)} = t_{max} \quad (4.14)$$

$$\text{platí pro } \sin\alpha < f\cos\alpha\left(1 + \frac{mr^2}{I}\right)$$

Pravá strana nerovnice 4.13 bude vzhledem k podmínce vždy záporná. Proto rov. 4.13 bude platit pro všechna kladná t . Jinak řečeno těleso bude stále prokluzovat. To nastane v případě, že bude sklon roviny větší než kritický.

Pokud bude sklon menší než kritický, bude splněna podmínka pro rov. (4.14). Podmínka zajišťuje, že závorka ve jmenovateli bude záporná, znaménka se vyruší a pravá strana nerovnice bude kladná. Těleso bude prokluzovat do určitého času t_{max} .

V případě rovnosti

$$\begin{aligned} \sin\alpha = f\cos\alpha\left(1 + \frac{mr^2}{I}\right) &\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = f\left(1 + \frac{mr^2}{I}\right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha < f_0\left(1 + \frac{mr^2}{I}\right) \end{aligned} \quad (4.15)$$

nezávisí rychlost v_B na čase, ale pouze na počáteční rychlosti středu hmotnosti válce a na počáteční úhlové rychlosti, samozřejmě při splnění výchozí podmínky $v_{B,x} > 0$;

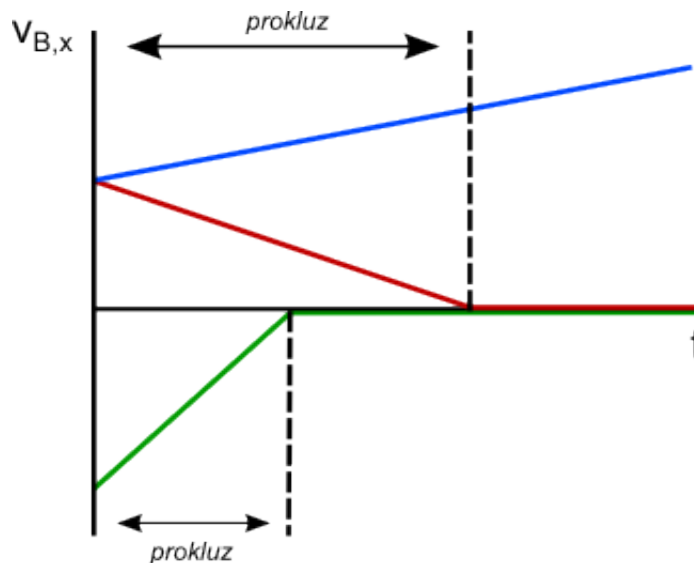
Diskutujme další případ pro prokluz $v_{B,x}(0) < 0$, takže platí $\sigma_x = -1$.

$$(v_x(0) + \omega_z(0)r) + g\left(\sin\alpha + f\cos\alpha\left(1 + \frac{mr^2}{I}\right)\right)t < 0 \quad (4.16)$$

Protože závorka bude vždy kladná, řešení je pouze jedno:

$$t < - \frac{(v_x(0) + \omega_z(0)r)}{g \left(\sin \alpha + f \cos \alpha \left(1 + \frac{mr^2}{I} \right) \right)} \quad (4.17)$$

Protože čítec rovnice (4.16) je záporný (z výchozích předpokladů), proto pravá strana rovnice bude vždy kladná (znaménka se vyruší). Těleso bude prokluzovat po určitou dobu, pak nastane valení bez prokluzu. Znázorníme schématicky všechny situace:



Obr. 4.2 Závislost rychlosti $v_{B,x}$ pro různé situace

Modrá přímka reprezentuje rovnici (4.13) – válec bude stále prokluzovat. Červený graf ilustruje situaci, kdy platí podmínka pro rovnici (4.14) – válec bude prokluzovat do určitého času t_{max} . Zelený graf reprezentuje jedinou situaci pro $v_{B,x}(0) < 0$, vztah (4.17). Nerovnost $v_{B,x}(0) < 0$ znamená, že těleso na začátku experimentu „hrabe“. Pro tuto situaci existuje pouze jedno východisko: těleso prokluzuje do určitého času, pak se valí bez prokluzu.

Situace, která je popsána modrou křivkou nastane v případě, že platí nerovnost:

$$\operatorname{tg} \alpha > f \left(1 + \frac{mr^2}{I} \right) \quad (4.18)$$

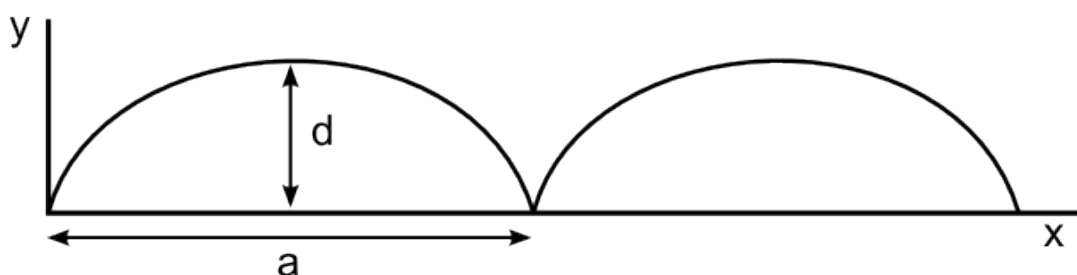
Nyní diskutujeme případ, kdy $v_{B,x}(0) = v_x(0) + \omega_z(0)r = 0$. Jinak řečeno těleso je před uvolněním v relativním klidu. Pokud bude nerovnost (4.10) splněna, uplatní se statická třecí síla, bude splněna vazební podmínka a těleso se bude valit bez prokluzu.

V případě, že podmínka (4.10) splněna nebude, těleso se bude valit neustále s prokluzem.

4.2 Co říká experiment

Provedli jsme sérii experimentů, za účelem potvrdit či vyvrátit teorii z předchozí kapitoly. Zaznamenali jsme na video válec na nakloněné rovině s malým a následně i s velkým sklonem.

Snímali jsme bod na okraji válce. V případě, že se válec bude valit bez prokluzu grafem funkce $y(x)$ bude prostá cykloida. Bude-li těleso prokluzovat, grafem bude zkrácená cykloida. Podle „délky“, respektive periody cykloidy a a také podle „výšky“ cykloidy d (viz. obr. 4.3) poznáme, zda se jedná o prostou, nebo zkrácenou cykloidu.



Obr. 4.3: Prostá cykloida a charakteristické hodnoty a a d

Pokud platí

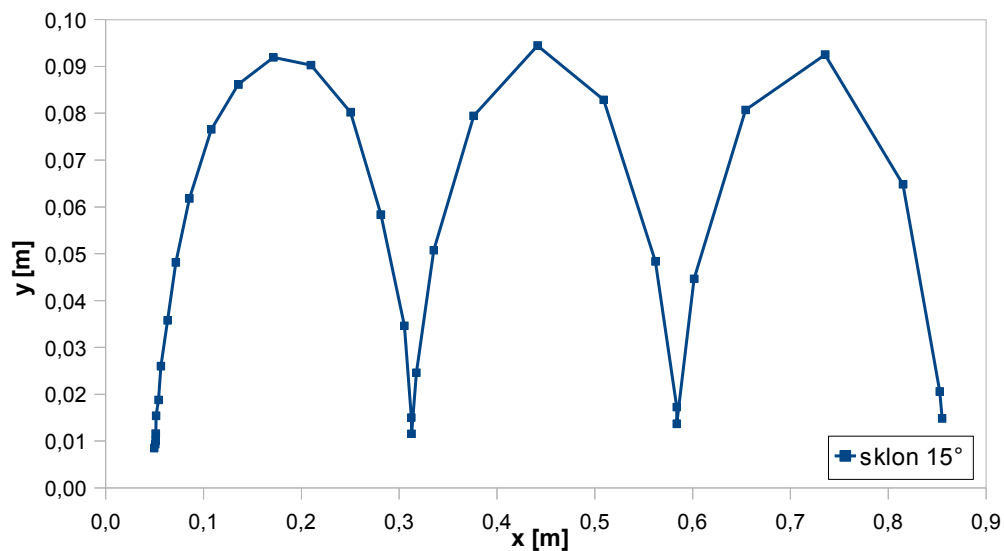
$$\pi d = a \quad (4.19)$$

jedná se o prostou cykloidu a válec se valí bez prokluzu.

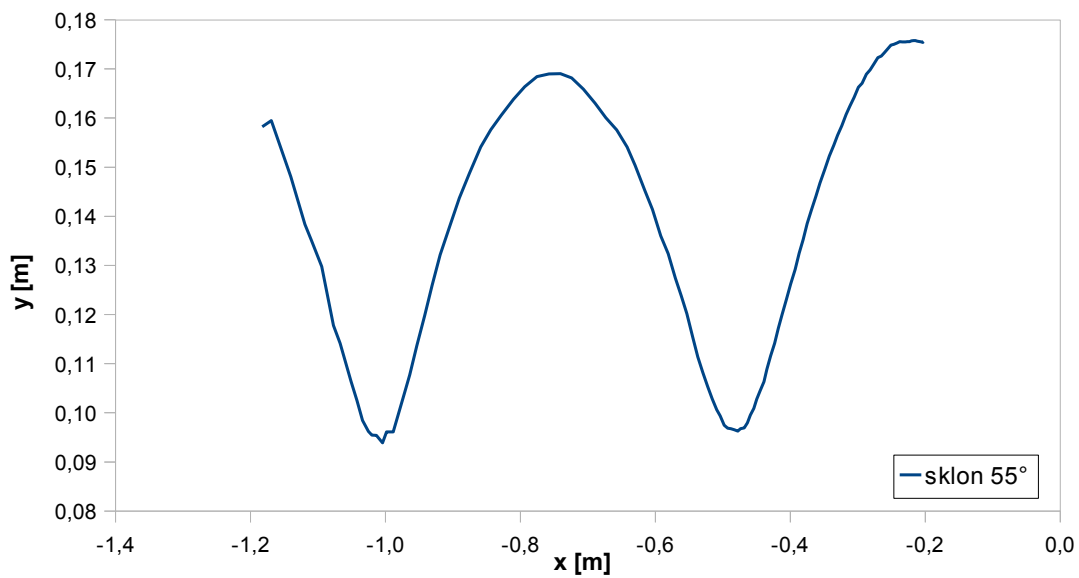
Na obrázku 4.4 je graf cykloidy válce valícího se po nakloněné rovině se sklonem 15° . Jedná se o prostou cykloidu, protože pro ni platí rov. (4.29).

Dále přikládáme graf 4.5, na kterém je zaznamenán bod na obvodu válce, který se valí na nakloněné rovině se sklonem 55° . Tato cykloida už nespĺňuje rovnici (4.19), proto se nejedná o prostou cykloidu a je to důkaz toho, že se válec valil s prokluzem.

Kritický sklon se proto nachází někde mezi 15° a 55° .



Obr. 4.4: Tvar trajektorie bodu na okraji válce, který se valí po nakloněné rovině se sklonem 15°



Obr. 4.5: Tvar trajektorie bodu na okraji válce, který se valí po nakloněné rovině se sklonem 55°

Závěr

V celé třetí kapitole jsme se věnovali valivému odporu. Valivý odpor jsme prozkoumali jak teoreticky, tak experimentálně. V teoretické části jsme popsali vznik valivého odporu způsobeného nesouměrnou deformací podložky. Zjistili jsme, co rameno valivého odporu vlastně je a proč má rozměr v metrech. Pomocí pěnových polyuretanů jsme prozkoumali deformace ve všech směrech. Deformace podložky je pro takové rozmezí lineární, má tedy podobný charakter jako u kovů. Naše experimenty prokázaly asymetrie v deformacích. Experimenty rovněž prokázaly, že se podložka deformuje i ve směru rovnoběžném ke směru pohybu. Tyto deformace se nemění a jsou nezávislé na rychlosti, na tom, zda je těleso na nakloněné či vodorovné rovině a jsou také nezávislé na velikosti zrychlení tělesa. Stejně tak se u valivého odporu prokázala nezávislost na rychlosti. V experimentech se neobjevil žádný kopeček, jak je ilustrováno na obr. 3.1. Proto tento způsob deformace není podmínkou pro vznik valivého odporu. Nicméně kopeček před valícím se předmětem může vzniknout jako důsledek Poissonova jevu.

V druhé části třetí kapitoly jsem stručně prozkoumali deformace valícího se tělesa. Ukázali jsme, že valivý odpor může být způsobený deformací valícího se tělesa, stejně tak jako deformací podložky.

Ve čtvrté kapitole jsme teoreticky popsali valení s prokluzem (za jaké situace k němu dochází apod.). Dále jsme provedli experimenty pro různé sklony, které potvrdili některé výstupy teorie.

Videa a data ze všech experimentů z třetí kapitoly obsahuje příložené CD. Data a videa z experimentů na nakloněné rovině jsou ve složce `naklonena_rovina`. Data a videa z experimentů na vodorovné rovině obsahuje složka `vodorovna_rovina`.

Zdroje

- [1] OPEN SOURCE PHYSICS. *Tracker: Video Analysis and Modeling Tool* [online]. [cit. 2013-04-13]. Dostupné z: <http://www.cabrillo.edu/~dbrown/tracker/>
- [2] Valivý odpor: Schéma valivého odporu. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2013-04-13]. Dostupné z: http://cs.wikipedia.org/wiki/Valiv%C3%BD_odpor#Valiv.C3.BD_odpor
- [3] MUSILOVÁ, Jana. *Kurz klasické mechaniky* [online]. [cit. 2013-04-13]. Dostupné z: <http://e-learning.physics.muni.cz/Texty/Hlavni.pdf>
- [4] HALLIDAY, David, Robert RESNICK a Jearl WALKER. *Fyzika: Vysokoškolská učebnice obecné fyziky*. 1. vyd. Brno: VUTIUM, 2000, 1198 s. ISBN 80-214-1869-9.
- [5] SVOBODA, Emanuel. *Přehled středoškolské fyziky*. 4., upr. vyd. Praha: Prometheus, 2005, 531 s., [12] obr. barev. příl. ISBN 978-80-7196-307-32008.