

**STŘEDOŠKOLSKÁ ODBORNÁ ČINNOST**

**Simsonova věta a její zobecnění  
v rovině a prostoru**

*Emil Skříšovský*

**ČESKÉ BUDĚJOVICE 2013**

# STŘEDOŠKOLSKÁ ODBORNÁ ČINNOST

Obor SOČ: Matematika a statistika (1)

## Simsonova věta a její zobecnění v rovině a prostoru

Simson-Wallace theorem and its  
generalization in the plane and space

**Autor:** Emil Skříšovský

**Škola:** Gymnázium Česká a olymp. nadějí, České Budějovice

**Konzultant:** prof. RNDr. Pavel Pech, CSc.

České Budějovice, 2013

## **Prohlášení.**

*Prohlašuji, že jsem svou práci vypracoval samostatně, použil jsem pouze podklady (literaturu, SW) uvedené v příloženém seznamu a postup při zpracování a dalším nakládání s prací je v souladu se zákonem č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon) v platném znění.*

V Českých Budějovicích, 8. dubna 2013

Emil Skříšovský

## **Poděkování.**

Rád bych na tomto místě poděkoval prof. RNDr. Pavlu Pechovi, CSc. za jeho odborné rady a věcné připomínky při psaní práce.

## Abstrakt

Práce představuje Simsonovu větu a z ní vycházející zobecnění, která jsou dále podrobně zkoumána. U těchto zobecnění je uvedeno několik nových tvrzení, z nichž je většina dokazována analytickou metodou.

V první části práce je čtenáři představena Simsonova věta a z jejího analytického důkazu přirozeně odvozeno Gergonneho, Guzmánovo projektivní a afinní zobecnění Simsonovy věty. Zároveň je nastíněno zobecnění věty do trojrozměrného Eukleidovského prostoru.

Zvláštní pozornost je věnována Steinerově deltoidu, na který je nahlíženo jako na obálku Simsonových přímk.

**Klíčová slova:** Simsonova věta, Simsonova přímka, Gergonneho zobecnění, afinní zobecnění, Guzmánovo zobecnění, Steinerův deltoid.

## Abstract

The paper covers Simson-Wallace theorem and its generalizations which are further examined. Several new theorems related to these generalizations are obtained using analytical methods.

In the first part the reader is introduced into the topic of Simson-Wallace theorem. From its analytical proof Gergonne, affine and Guzman projective generalizations are naturally derived. Simultaneously the generalization of the theorem into space is described.

Special attention is paid to Steiner deltoid curve as the envelope of the system of Simson-Wallace lines.

**Keywords:** Simson-Wallace theorem, Simson line, Gergonne generalization, Guzman generalization, affine generalization, Steiner deltoid curve.

# Obsah

Úvod	6
<b>1 Simsonova věta</b>	<b>7</b>
1.1 Gergonneho zobecnění Simsonovy věty . . . . .	12
<b>2 Afinní zobecnění Simsonovy věty</b>	<b>16</b>
2.1 Guzmánovo zobecnění Simsonovy věty . . . . .	26
<b>3 Systém Simsonových přímk</b>	<b>32</b>
3.1 Vztah dvou Simsonových přímk . . . . .	32
3.2 Obálka systému Simsonových přímk . . . . .	39
3.3 Steinerův deltoid . . . . .	43
<b>4 Zobecnění Simsonovy věty do prostoru</b>	<b>49</b>
<b>Závěr</b>	<b>56</b>

# Úvod

Evropská geometrie plně navázala na řeckou geometrii až v 18. století, kdy již byla plně rozvinuta analytická geometrie, která podává silnější možnosti v objevování a důkazech geometrických vět. Právě v té době vznikala podstatná část vět, jež zasahují do geometrie trojúhelníka.

Jednou z nich je Simsonova věta, která popisuje zajímavou vlastnost bodů kružnice opsané. V první části práce je čtenář s touto větou obeznámen a jsou mu představena známá zobecnění Simsonovy věty – Gergonneho ve smyslu degenerace úpatnicového trojúhelníku na přímkou a Guzmánovo projektivní zobecnění. Mimo ně je popsáno afinní zobecnění, které ačkoliv spadá do Guzmánova zobecnění, tak toto zobecnění se striktně drží kružnice opsané trojúhelníku. Poznamenejme, že oproti běžné literatuře, kde je Simsonova věta odvozována a dokazována synteticky, zde nám ryze analytické pojetí umožňuje přímo odvodit zobecnění věty.

V třetí kapitole je nahlíženo na všechny Simsonovy přímky jako na celek a je zkoumána obálka tohoto systému. Je ukázáno, že se jedná o Steinerův deltoid, jehož vlastnosti jsou v práci dále rozebrány. V samotném závěru práce je nastíněno zobecnění problematiky do prostoru.

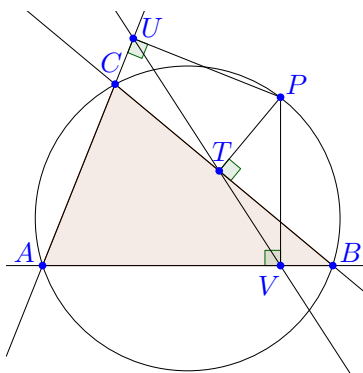
Přínos práce tkví v uvedení některých vlastností Simsonovy věty, zejména se jedná o afinní zobecnění věty, některé vlastnosti Steinerova deltoidu a systému Simsonových přímek. Přesto řada vlastností, které jsou zde prezentovány je již známa, jak je v příslušných citacích uvedeno. Vedle toho je přínosem i jednotný a mnohdy originální způsob dokazování tvrzení, založený na analytických metodách, a který se opírá o podporu počítače a výpočetních systémů.

K výpočtům bylo použito softwaru Maple v. 13 [19] a obrázky byly získány pomocí programu GeoGebra [17].

## 1 Simsonova věta

Poměrně zajímavou vlastnost bodů ležících na kružnici opsané trojúhelníku vyjadřuje Simsonova věta. Ačkoliv je pojmenována po skotském matematikovi Robertu Simsonovi, větu objevil a dokázal až roku 1797 opět skot William Wallace. V některé literatuře se proto čtenář setká i s pojmenováním Wallace-Simsonova věta.

Wallace ukázal, že pokud je dán libovolný trojúhelník, pak body na stranách trojúhelníka, které jsou nejbližší danému bodu na kružnici opsané trojúhelníku, leží na přímce. Přitom platí i opačná implikace. Jestliže tři body na stranách trojúhelníka, které jsou nejbližší danému bodu roviny, leží v přímce, pak tento bod leží na kružnici opsané trojúhelníku. Z matema-



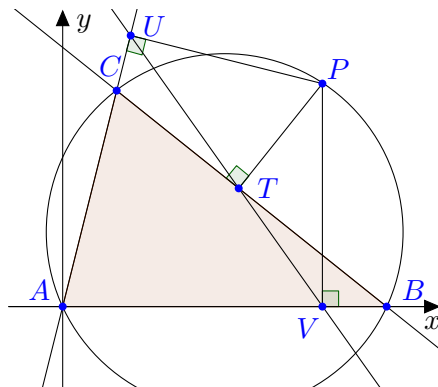
obr. 1 – Simsonova věta

tického hlediska jsou těmito body samozřejmě paty kolmic spuštěné na strany trojúhelníka. Formulujme tedy Simsonovu větu takto [4]:

**Věta 1.1 (Simsonova):** Nechť je dán v rovině trojúhelník  $ABC$  a libovolný bod  $P$ . Paty kolmic spuštěných z bodu  $P$  na strany trojúhelníka  $ABC$  leží na přímce právě tehdy, když  $P$  leží na kružnici opsané danému trojúhelníku.



*Důkaz.* Samotný důkaz této věty provedeme analyticky. Trojúhelník si umístíme do zvolené kartézské soustavy souřadnic, vrcholem  $A$  do jejího počátku a stranou  $AB$  na osu  $x$ . Tím jsou vrcholům trojúhelníka přiřazeny souřadnice:  $A = [0; 0]$ ,  $B = [b; 0]$  a  $C = [c_1; c_2]$ . Bodu  $P$  přiřadíme souřadnice  $P = [p; q]$ .



obr. 2 – k důkazu Simsonovy věty

Větu tvaru ekvivalence rozepíšeme pomocí dvou implikací. V první části důkazu nejprve dokážeme implikaci zleva – tj. leží-li paty kolmic spuštěných z daného bodu na přímce, pak je tento bod na kružnici opsané trojúhelníku.

Přímky, na nichž leží strany trojúhelníka  $ABC$ , jsou určeny rovnicemi

$$AB : y = 0,$$

$$AC : c_2x - c_1y = 0,$$

$$BC : c_2x + (b - c_1)y - bc_2 = 0.$$

Dále označme paty kolmic na strany  $a, b, c$  po řadě  $T = [t_1; t_2]$ ,  $U = [u_1; u_2]$  a  $V = [v_1; v_2]$ . Zřejmě platí:  $v_1 = p$  a  $v_2 = 0$ .

Platí, že přímka kolmá na stranu  $AC$  (určená normálovým vektorem  $\vec{n}_{AC} = (c_2, -c_1)$ ) a procházející bodem  $P$  má rovnici

$$u : c_1x + c_2y - pc_1 - qc_2 = 0.$$

Bod  $U$  má pak souřadnice<sup>1</sup>

$$u_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -c_1 \\ pc_1 + qc_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_2 & -c_1 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}} = \frac{c_1 \cdot (pc_1 + qc_2)}{c_1^2 + c_2^2} \quad (1.1)$$

a pro druhou platí

$$u_2 = \frac{\begin{vmatrix} c_2 & 0 \\ c_1 & pc_1 + qc_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_2 & -c_1 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}} = \frac{c_2 \cdot (pc_1 + qc_2)}{c_1^2 + c_2^2}. \quad (1.2)$$

Normálový vektor ke straně  $BC$  má souřadnice  $\vec{n}_{BC} = (c_2, b - c_1)$  a tedy kolmice spuštěná z bodu  $P$  na stranu  $a$  je popsána rovnicí

$$t : x(b - c_1) - c_2y - p(b - c_1) + qc_2 = 0.$$

Zcela analogicky má bod  $T = [t_1; t_2]$  souřadnice

$$t_1 = \frac{\begin{vmatrix} bc_2 & b - c_1 \\ p(b - c_1) - qc_2 & -c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_2 & b - c_1 \\ b - c_1 & -c_2 \end{vmatrix}} = \frac{p(c_1 - b)^2 + bc_2^2 + qc_2(c_1 - b)}{(c_1 - b)^2 + c_2^2} \quad (1.3)$$

a druhá souřadnice je rovna

$$t_2 = \frac{\begin{vmatrix} c_2 & bc_2 \\ b - c_1 & p(b - c_1) - qc_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_2 & b - c_1 \\ b - c_1 & -c_2 \end{vmatrix}} = \frac{pc_2(c_1 - b) + qc_2^2 - bc_2(c_1 - b)}{(c_1 - b)^2 + c_2^2}. \quad (1.4)$$

---

<sup>1</sup>Získáme z Cramerova pravidla pro výpočet řešení soustavy lineárních rovnic.

Nyní vyšetříme, kdy dané paty kolmic  $T, U, V$  leží v jedné přímce. Proto budeme uvažovat následující determinant:

$$\begin{vmatrix} t_1 & t_2 & 1 \\ u_1 & u_2 & 1 \\ v_1 & v_2 & 1 \end{vmatrix}. \quad (1.5)$$

Mají-li dané body ležet na přímce, pak tento determinant musí být nulový.<sup>2</sup> Platí

$$\begin{vmatrix} \frac{p(c_1-b)^2+bc_2^2+qc_2(c_1-b)}{(c_1-b)^2+c_2^2} & \frac{pc_2(c_1-b)+qc_2^2-bc_2(c_1-b)}{(c_1-b)^2+c_2^2} & 1 \\ \frac{c_1 \cdot (pc_1+qc_2)}{c_1^2+c_2^2} & \frac{c_2 \cdot (pc_1+qc_2)}{c_1^2+c_2^2} & 1 \\ p & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (1.6)$$

a následnou úpravou determinantu (1.6) získáme podmínku

$$\frac{bc_2^2(c_2p^2+c_2q^2-bc_2p+bc_1q-qc_1^2-qc_2^2)}{(c_1^2+c_2^2)((c_1-b)^2+c_2^2)} = 0. \quad (1.7)$$

Jelikož  $c_1^2+c_2^2 \neq 0$  (pak by bod  $C$  přecházel v bod  $A$ ),  $(c_1-b)^2+c_2^2 \neq 0$  a zároveň  $bc_2^2 \neq 0$  (pokud  $b=0$  nebo  $c_2=0$ , pak jsou body  $A, B, C$  kolineární), podmínka (1.7) se redukuje do tvaru

$$c_2p^2+c_2q^2-bc_2p+bc_1q-qc_1^2-qc_2^2=0. \quad (1.8)$$

V dalším kroku důkazu je třeba ukázat, že touto podmínkou jsou vyjádřeny body kružnice opsané. Využijeme znalosti, že střed kružnice opsané trojúhelníku  $ABC$  leží v průsečíku os jeho stran. Označme její střed  $S$  a poloměr  $R$ . Střed  $S$  leží tedy na průsečíku osy strany  $AB$ :  $x = \frac{1}{2}b$  a osy strany  $AC$  (určené bodem  $S_{AC} = [\frac{c_1}{2}, \frac{c_2}{2}]$  a směrovým vektorem  $\vec{n}_{AC}$ ):

$$o_{AC} : c_1x + c_2y - \frac{c_1^2+c_2^2}{2} = 0.$$

---

<sup>2</sup>Vektory  $\overrightarrow{TU}$  a  $\overrightarrow{UV}$  jsou kolineární, platí tedy  $\overrightarrow{TU} = k\overrightarrow{UV}$ , neboli  $(u_1-t_1)(v_2-u_2) - (u_2-t_2)(v_1-u_1) = 0$ . Přepsáním tohoto vztahu pomocí determinantů plyne vztah (1.6). Podrobnější odvození je uvedeno v [12].

Pak má střed  $S$  souřadnice

$$S = \left[ \frac{b}{2}; \frac{c_1^2 + c_2^2 - bc_1}{2c_2} \right]$$

a poloměr kružnice opsané  $R$  je roven

$$R = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c_1^2 + c_2^2 - bc_1}{2c_2}\right)^2}. \quad (1.9)$$

Rovnice kružnice opsané trojúhelníku  $ABC$  má tedy tvar

$$\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{c_1^2 + c_2^2 - bc_1}{2c_2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c_1^2 + c_2^2 - bc_1}{2c_2}\right)^2,$$

po úpravě

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - bx - \frac{c_1^2 + c_2^2 - bc_1}{c_2} y &= 0, \\ c_2x^2 + c_2y^2 - bc_2x - c_1^2y - c_2^2y + bc_1y &= 0. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Dosadíme-li pak do této rovnice souřadnice bodu  $P$ , rovnice (1.10) se shoduje s výše odvozenou podmínkou vyjádřenou rovnicí (1.8), kterou bod  $P$  splňuje tehdy, leží-li na kružnici opsané trojúhelníku  $ABC$ .

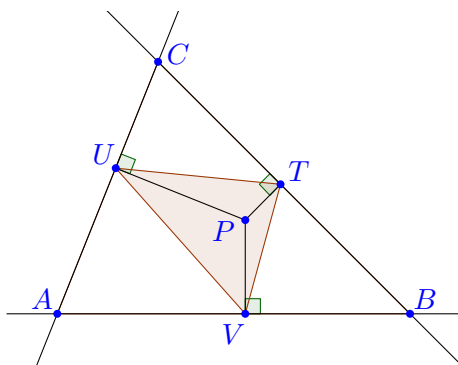
Obrácenou implikaci (implikaci zprava) převedeme na důkaz k ní obměněné implikace a dokážeme, že když neleží paty kolmic spuštěné z daného bodu na přímce, pak tento bod neleží na kružnici opsané. Pokud jsme bod  $P$  zvolili libovolně, pak z předpokladu, že pro něj neplatí podmínka (1.6), vyplývá, že neplatí ani (1.8) (resp. (1.10)). Souřadnice tohoto bodu tedy nevyhovují rovnici kružnice opsané trojúhelníku.

Simsonova věta je tímto dokázána.  $\square$

## 1.1 Gergonneho zobecnění Simsonovy věty

Zajímavé je sledovat širší a obecnější pojetí Simsonovy věty. Proto budeme hledat některé zajímavé důsledky, které plynou z postupu předchozího důkazu.

**Definice 1.1:** Úpatnicovým trojúhelníkem, jenž přísluší bodu  $P$  k trojúhelníku  $ABC$ , nazveme takový trojúhelník, jehož vrcholy jsou paty kolmic spuštěné z bodu  $P$  na strany<sup>3</sup> trojúhelníka  $ABC$  (viz obr. 3).



obr. 3 – k definici úpatnicového trojúhelníka

Budeme dále zkoumat determinant (1.5) z předchozí kapitoly. Pro případ, kdy dané tři paty kolmic  $T, U$  a  $V$  leží v jedné přímce jsme daný determinant položili roven nule. Nyní budeme uvažovat zobecnění, kdy se daný determinant rovná zvolené nenulové konstantě  $k$ :

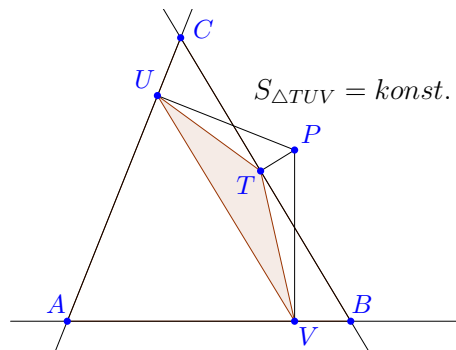
$$\begin{vmatrix} t_1 & t_2 & 1 \\ u_1 & u_2 & 1 \\ v_1 & v_2 & 1 \end{vmatrix} = k. \quad (1.11)$$

<sup>3</sup>Případně na jejich prodloužení.

Vycházíme přitom ze vztahu pro výpočet obsahu trojúhelníka, známe-li souřadnice jeho vrcholů<sup>4</sup>

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} t_1 & t_2 & 1 \\ u_1 & u_2 & 1 \\ v_1 & v_2 & 1 \end{vmatrix}. \quad (1.12)$$

Pak platí  $k = 2S$ . Vyšetřujeme a hledáme podmínku, kdy má daný úpatnicový trojúhelník příslušný bodu  $P$  roviny k danému trojúhelníku  $ABC$  konstantní obsah  $S$ .



obr. 4 – úpatnicový trojúhelník o konstantním obsahu

**Definice 1.2:** Orientovaným obsahem trojúhelníka<sup>5</sup>  $ABC$  nazveme číslo určené vztahem (1.12). To ve skutečnosti odpovídá reálnému obsahu trojúhelníka  $ABC$ , v případě značení vrcholů po směru hodinových ručiček má záporné znaménko.

Při popsání úlohy ve stejné soustavě souřadnic a při stejném přiřazení vrcholů jako v předchozí kapitole získáme dosazením souřadnic pat kolmic

<sup>4</sup>Odvození viz [12].

<sup>5</sup>Obdobně bychom mohli zavést orientovaný obsah mnohoúhelníka.

$T, U$  a  $V$  ze vztahů (1.1) – (1.4) do determinantu (1.12) pro orientovaný obsah úpatnicového trojúhelníku  $TUV$  podmínku podobnou rovnici (1.7):

$$\frac{bc_2^2(c_2p^2 + c_2q^2 - bc_2p + bc_1q - qc_1^2 - qc_2^2)}{(c_1^2 + c_2^2)((c_1 - b)^2 + c_2^2)} = 2S,$$

jejíž úpravou a nahrazením souřadnic  $p, q$  bodu  $P$  za obecné  $x, y$  dostaneme rovnici hledané množiny:

$$c_2x^2 - bc_2x + c_2y^2 + bc_1y - c_1^2y - c_2^2y = \frac{2S(c_1^2 + c_2^2)((c_1 - b)^2 + c_2^2)}{bc_2^2},$$

neboli

$$\begin{aligned} \left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{c_1^2 + c_2^2 - bc_1}{2c_2}\right)^2 &= \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c_1^2 + c_2^2 - bc_1}{2c_2}\right)^2 \\ &+ \frac{2S(c_1^2 + c_2^2)((c_1 - b)^2 + c_2^2)}{bc_2^3} \end{aligned} \quad (1.13)$$

Z rovnice (1.13) vyplývá, že množinou bodů roviny, pro které má úpatnicový trojúhelník na strany trojúhelníka  $ABC$  konstantní obsah  $S$ , je kružnice se středem na osách stran a poloměrem

$$R = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c_1^2 + c_2^2 - bc_1}{2c_2}\right)^2 + \frac{2S(c_1^2 + c_2^2)((c_1 - b)^2 + c_2^2)}{bc_2^3}}. \quad (1.14)$$

Jak snadno nahlédneme, jedná se o soustřednou kružnici ke kružnici opsané. Toto tvrzení se nazývá Gergonneho věta. [11]

**Věta 1.2 (Gergonne):** Necht' je dán trojúhelník  $ABC$ . Množinou bodů v rovině, pro které má příslušný úpatnicový trojúhelník konstantní obsah  $S$  je kružnice soustředná s kružnicí opsanou trojúhelníku a poloměrem určeným vztahem (1.14).

*Poznámka 1.* Ve skutečnosti mohou být takové kružnice dvě, ve vztahu (1.14) totiž stále hovoříme o obsahu  $S$  jako o orientovaném obsahu trojúhelníka.<sup>6</sup>

Pozornému čtenáři jistě neuniklo, že takto formulovaná věta je zobecněním Simsonovy věty. Právě připuštěním  $k = 0$  v determinantu (1.11) plyne nulový obsah úpatnicového trojúhelníku  $TUV$  a poloměr určený vztahem (1.14) přechází v poloměr kružnice opsané (1.9). To nás vede k vyslovení další formulace Simsonovy věty:

**Věta 1.3 (Simsonova):** Nechť je dán trojúhelník  $ABC$  a bod roviny  $P$ . Úpatnicový trojúhelník z bodu  $P$  na strany  $\triangle ABC$  degeneruje na přímku právě tehdy, leží-li bod  $P$  na kružnici opsané trojúhelníku  $ABC$ .

---

<sup>6</sup>Uvědomme si, že třetí člen pod odmocninou ve vztahu pro poloměr (1.14) může být záporný. Je-li tedy v absolutní hodnotě větší než součet prvních dvou, pak výraz pod odmocninou není definován.



## 2 Afinní zobecnění Simsonovy věty

Gergonneho zobecnění Simsonovy věty poskytuje zobecnění ve smyslu degenerace úpatnicového trojúhelníka na přímku. My však budeme v postupu generalizace postupovat ještě hlouběji. V této části prozkoumáme platnost předchozích vět v afinní transformaci roviny a odvodíme z nich některé zajímavé důsledky.

**Definice 2.1:** Afinní transformací roviny rozumíme takovou transformaci, která zobrazuje bod roviny  $X = [x; y]$  na bod  $X' = [x'; y']$  podle rovnic, které můžeme udat ve tvaru:

$$\begin{aligned}x' &= a_1x + b_1y + c_1 \\y' &= a_2x + b_2y + c_2, \quad \text{kde } a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0.\end{aligned}\tag{2.1}$$

Afinní transformace jsou základními druhy transformací. Z geometrického hlediska jsou tyto transformace k našim představám pojmu transformace nejbližší, z planimetrie je dávno známe a využíváme – souměrnosti, rotace nebo posunutí patří právě do této skupiny transformací. Přejděme však k jejich základním vlastnostem [12]:

**Věta 2.1:** Obrazem přímky  $p$  v afinní transformaci  $\mathcal{A}$  je přímka  $p'$ . Neboli: leží-li 3 body  $X, Y, Z$  na přímce  $p$ , pak i jejich obrazy  $X', Y'$  a  $Z'$  v této transformaci leží na přímce  $p'$ .

Důkaz této věty plyne dosazením rovnic (2.1) do obecné rovnice přímky. Podle této věty můžeme zobecnit Simsonovu větu (věta 1.1) ve smyslu afinní transformace pat kolmic  $T, U, V$  (při zachování značení z předchozí kapitoly).

**Věta 2.2:** Nechť je dán trojúhelník  $ABC$ , bod  $P$  a afinní transformace  $\mathcal{A}$ . Pak obrazy pat kolmic spuštěných z bodu  $P$  na strany trojúhelníka  $ABC$  zobrazené v afinní transformaci  $\mathcal{A}$  leží v jedné přímce právě tehdy, když  $P$  je bodem kružnice opsané trojúhelníka  $ABC$ .

Opustíme na chvíli větu 2.2 a na její důsledky a uplatnění se zaměříme později. Odvodíme pro další postup neméně důležitou vlastnost afinních transformací.

**Věta 2.3:** Nechť je dána afinní transformace  $\mathcal{A}$ . Mají-li dva trojúhelníky v kartézské soustavě  $Oxy$  orientované obsahy  $S_1$  a  $S_2$  a platí-li pro ně  $S_1 : S_2 = k$ , pak v kartézské soustavě  $O'x'y'$  ( $\mathcal{A} : Oxy \rightarrow O'x'y'$ ) jsou hodnoty orientovaných obsahů  $S'_1$  a  $S'_2$  ve stejném poměru.

Speciálně, jsou-li si orientované obsahy dvou útvarů v soustavě  $Oxy$  rovny, pak jsou si rovny i v soustavě  $O'x'y'$ .

*Důkaz.* Důkaz provedeme pro trojúhelník, vyjdeme ze vztahu (1.12) pro orientovaný obsah. Pak obsah trojúhelníku  $KLM$  v soustavě  $Oxy$  je roven

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} k_1 & k_2 & 1 \\ l_1 & l_2 & 1 \\ m_1 & m_2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Po dosazení vztahů (2.1) získáme vyjádření pro obsah  $\triangle K'L'M'$  v soustavě  $O'x'y'$

$$S' = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} a_1 k_1 + b_1 k_2 + c_1 & a_2 k_1 + b_2 k_2 + c_2 & 1 \\ a_1 l_1 + b_1 l_2 + c_1 & a_2 l_1 + b_2 l_2 + c_2 & 1 \\ a_1 m_1 + b_1 m_2 + c_1 & a_2 m_1 + b_2 m_2 + c_2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Úpravou a porovnáním determinantů se ukáže platnost následujícího:

$$2S' = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} k_1 & k_2 & 1 \\ l_1 & l_2 & 1 \\ m_1 & m_2 & 1 \end{vmatrix} = 2S \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}, \text{ neboli}$$

$$\frac{S'}{S} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \textit{konst.} \quad (2.2)$$

Ze vztahu (2.2) již přímo vyplývá platnost dokazované věty.  $\square$

Vydeme-li z platnosti této věty, dokážeme zobecnit i Gergonneho větu (věta 1.2) v obdobjím pojetí.

**Věta 2.4:** Nechť je dán trojúhelník  $ABC$  a bod  $P$  na kružnici soustředné ke kružnici opsané  $\triangle ABC$ . Obsah  $\triangle T'U'V'$ , jehož vrcholy jsou obrazy pat kolmic spuštěných z bodu  $P$  na strany  $\triangle ABC$  zobrazené v afinní transformaci  $\mathcal{A}$ , je pro všechny body  $P$  této kružnice konstantní.

Takto formulovaná věta je zobecněním věty předchozí (věta 2.2).

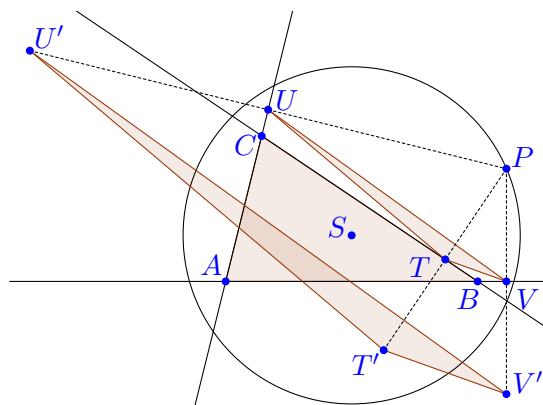
Nahradíme v této větě postupně afinní transformaci některými jejími příklady a ukažme její geometrické využití.

**Důsledek 1:** Afinní transformací ve větě 2.4 rozumějme stejnoolehlost se středem v bodě  $P$  a koeficientem  $\varkappa = 2$ . Jak snadno nahlédneme, v tomto případě se zároveň jedná o osovou souměrnost bodu  $P$  vzhledem ke stranám trojúhelníka<sup>7</sup> (obr. 5). Dané body  $T', U', V'$  jsou pak obrazy bodu  $P$  v této osové souměrnosti. Podle vztahu (2.2) pro obsah  $\triangle T'U'V'$  platí<sup>8</sup>

$$S' = 4S.$$

<sup>7</sup>Vektory  $\overrightarrow{\mathbf{TT}'}$  a  $\overrightarrow{\mathbf{TP}}$  mají stejnou velikost a jsou kolmé na stranu trojúhelníka – vyhovují definici osové souměrnosti.

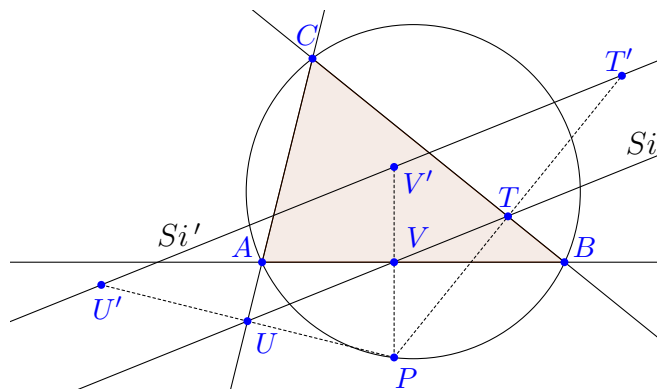
<sup>8</sup>Pro stejnoolehlost s koeficientem  $k$  ve vztahu (2.2) platí  $a_1 = \varkappa$ ,  $a_2 = 0$ ,  $b_1 = 0$ ,  $b_2 = \varkappa$ .



obr. 5 – afinní zobecnění Gergonneho věty – v osové souměrnosti

Jako speciální případ vezmeme v úvahu případ ve smyslu věty 2.2, kdy dané tři obrazy musí ležet v přímce. Toto tvrzení shrnuje věta:

**Věta 2.5:** Nechť je dán trojúhelník  $ABC$  a bod  $P$  na jeho kružnici opsané. Pak obrazy bodu  $P$  v osové souměrnosti podle stran trojúhelníka leží na přímce (obr. 6).



obr. 6 – afinní zobecnění Simsonovy věty (osová souměrnost)

Zastavme se u vlastností takto zobrazené přímky. Pokud zvolíme libo-

volnou polohu bodu  $P$  na kružnici opsané, pak tato přímka vždy prochází ortocentrem trojúhelníka. Pokusme se tuto vlastnost dokázat.

*Důkaz.* Takto zobrazená přímka je určena body  $T'$ ,  $U'$  a  $V'$ , jež získáme posunutím pat kolmic<sup>9</sup>  $T$ ,  $U$  a  $V$  po řadě o vektory  $\overrightarrow{\mathbf{PT}}$ ,  $\overrightarrow{\mathbf{PU}}$  a  $\overrightarrow{\mathbf{PV}}$ .

Platí tedy  $T' = T + \overrightarrow{\mathbf{PT}} = 2T - P$ ,  $U' = U + \overrightarrow{\mathbf{PU}} = 2U - P$  a  $V' = V + \overrightarrow{\mathbf{PV}} = 2V - P$ . Víme-li že tyto body leží na přímce (podle věty 2.2), pak pro určení její rovnice stačí dva body:

$$\begin{aligned} T' &= \left[ 2 \frac{p(b-c_1)^2 - bc_2q + c_1c_2q + bc_2^2}{(b-c_1)^2 + c_2^2} - p; 2 \frac{c_2(b-p)(b-c_1) + c_2^2q}{(b-c_1)^2 + c_2^2} - q \right], \\ U' &= \left[ \frac{2c_1(pc_1 + qc_2)}{c_1^2 + c_2^2} - p; \frac{2c_2(pc_1 + qc_2)}{c_1^2 + c_2^2} - q \right], \\ V' &= [p; -q]. \end{aligned}$$

Rovnici přímky (zvolme pro vyjádření např. body  $U'$  a  $V'$ ) získáme z následujícího determinantu<sup>10</sup>

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \frac{2c_1(pc_1 + qc_2)}{c_1^2 + c_2^2} - p & \frac{2c_2(pc_1 + qc_2)}{c_1^2 + c_2^2} - q & 1 \\ p & -q & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad (2.3)$$

jehož úpravou získáváme rovnici hledané přímky

$$\begin{aligned} \frac{2c_2(-xpc_1 - c_2xq - pc_2y + c_1q^2 + c_1qy + p^2c_1)}{c_1^2 + c_2^2} &= 0, \\ x(pc_1 + qc_2) + y(pc_2 - qc_1) - c_1(p^2 + q^2) &= 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Dosazením souřadnic ortocentra trojúhelníka  $ABC$  ( $O = [c_1, \frac{c_1(b-c_1)}{c_2}]$ ) do

<sup>9</sup>Ponecháváme již dříve zavedené značení.

<sup>10</sup>Jedná se de-facto o determinant (1.5) pro kolinaritu tří bodů, kdy jeden z bodů má obecné souřadnice.

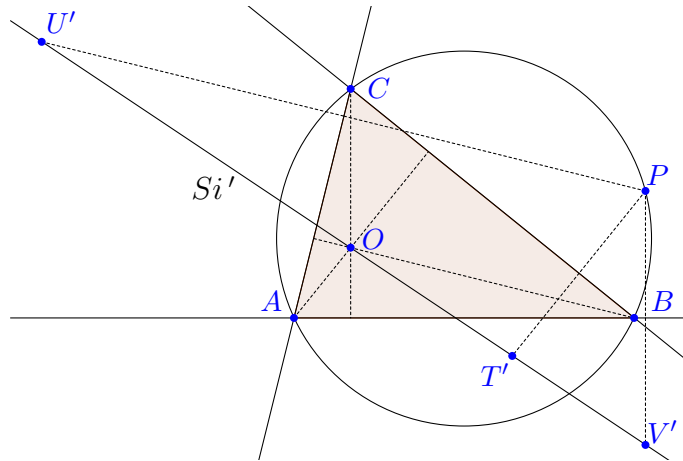
rovnice přímky (2.4) overíme, že na ní leží. Úpravou získáme výraz<sup>11</sup>

$$\frac{c_1 (c_2 p^2 + c_2 q^2 - bc_2 p + bc_1 q - qc_1^2 - qc_2^2)}{c_2} = 0. \quad (2.5)$$

Tato podmínka zřejmě platí vždy, když je bod  $P$  bodem na kružnici opsané trojúhelníku (viz (1.8)). Můžeme tedy tvrdit že všechny tyto přímky jsou svazkem přímek se středem v ortocentru trojúhelníka.  $\square$

Zjištěné tvrzení formulujeme jako větu:

**Věta 2.6:** Necht' je dán trojúhelník  $ABC$  a bod na jeho kružnici opsané  $P$ . Zobrazíme-li osově bod  $P$  podle stran trojúhelníka, pak jeho obrazy leží na přímce, která prochází ortocentrem trojúhelníka.

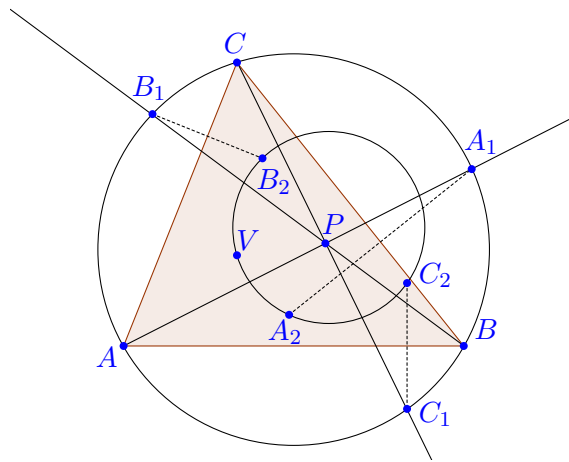


obr. 7 – zobrazená Simsonova přímka prochází ortocentrem

*Poznámka 1.* Jak snadno nahlédneme, jedná se o speciální případ Haggeovy věty. K. Hagge objevil r. 1907 konstrukci kružnice, která vždy prochází ortocentrem daného trojúhelníka. Bez důkazu uved'eme Haggeovu větu [16].

<sup>11</sup>Analogickou podmínku získáme tehdy, pokud budeme řešit determinant pro kolinearitu bodů  $O$ ,  $U'$  a  $V'$  nebo i jiné trojice bodů.

**Věta 2.7 (Hagge):** Necht' je dán trojúhelník  $ABC$  a bod roviny  $P$ . Polopřímky  $\overrightarrow{AP}$ ,  $\overrightarrow{BP}$  a  $\overrightarrow{CP}$  protínají kružnici opsanou po řadě v bodech  $A_1$ ,  $B_1$  a  $C_1$ . Jejich obrazy v osově souměrnosti podle stran trojúhelníka  $a$ ,  $b$ ,  $c$  označme  $A_2$ ,  $B_2$  a  $C_2$ . Tyto body leží na kružnici, jež prochází ortocentrem trojúhelníka (obr. 8).



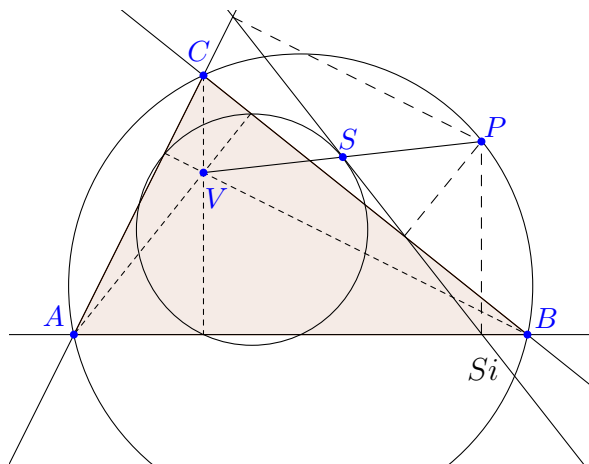
obr. 8 – k výkladu Haggeovy věty ( $V$  – ortocentrum)

Jak snadno nahlédneme, uvažujeme-li větu pro bod na kružnici opsané trojúhelníku, pak jemu příslušná Haggeova kružnice degeneruje na přímku (kružnici o nekonečně velkém poloměru) procházející ortocentrem trojúhelníka. Zároveň, je-li bod  $P$  sám ortocentrem, pak kružnice degeneruje na bod (kružnice o nulovém poloměru). Tato věta je tedy v jistém smyslu zobecněním Simsonovy věty.

*Poznámka 2.* Z rovnice (2.5) také plyne, že je-li  $\triangle ABC$  pravoúhlý s pravým úhlem u vrcholu  $A$  (podmínka  $c_1 = 0$ ), pak ortocentrum trojúhelníka  $ABC$  (tj. bod  $A$ ) leží na straně  $U'V'$  trojúhelníka  $T'U'V'$ , jehož vrcholy vzniknou zobrazením libovolného bodu roviny  $P$  podle stran  $\triangle ABC$ .

Zvolíme-li v předchozím postupu a tedy i determinantu (2.3) jinou dvojici jeho vrcholů, pak ortocentrum leží na této straně pokud je  $ABC$  pravoúhlý s pravým úhlem proti zbývajícím vrcholům.

*Poznámka 3.* Na tomto místě poznamenejme, že nejen takto zobrazená přímka, ale i původní Simsonova přímka má spojitost s ortocentrem trojúhelníka. Uvažujeme-li střed úsečky spojující ortocentrum s bodem na kružnici opsané (obr. 9), který má souřadnice  $S = \left[ \frac{p+c_1}{2}; \frac{qc_2+c_1(b-c_1)}{2c_2} \right]$ , vidíme, že splňuje rovnici Simsonovy přímky (viz dále (3.1)) příslušné tomuto bodu na kružnici opsané.<sup>12</sup>



obr. 9 – střed úsečky  $PV$  leží na Simsonově přímce a Feuerbachově kružnici

Zároveň vyjádříme-li parametry  $p$  a  $q$  ze souřadnic bodu  $S$  a dosadíme je do podmínky, že bod  $P$  je na kružnici opsané, získáme rovnici množiny těchto průsečíků

$$2c_2x^2 - 2c_2c_1x + 2c_2y^2 - c_1yb + c_1^2y - c_2xb + c_2c_1b - c_2^2y = 0. \quad (2.6)$$

<sup>12</sup>Tato věta musí zřejmě platit, neboť zobrazíme-li přímku (2.4) ve stejnolehlosti se středem  $P$  a koeficientem  $\varkappa = 0.5$  zpět na původní přímku, pak nebude procházet již ortocentrem, ale jeho obrazem – tj. středem úsečky  $PV$ .



Přesvědčíme se, že touto rovnicí je vyjádřena kružnice. Úpravou získáme její středovou rovnici

$$\left(x - \frac{2c_1 + b}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{4c_2^2 + bc_1 - c_1^2}{c_2}\right)^2 = \frac{(c_1^2 + c_2^2)((c_1 - b)^2 + c_2^2)}{16c_2^2}. \quad (2.7)$$

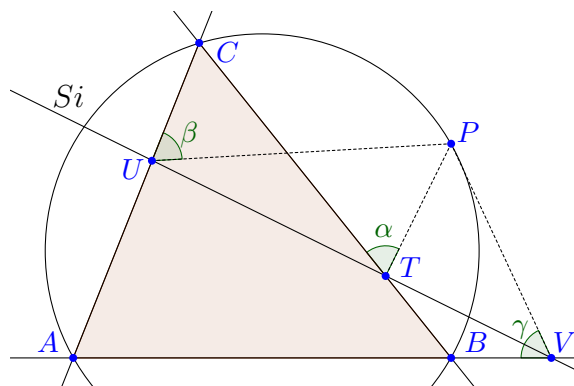
Zaměříme se jaký vztah má kružnice (2.7) k původnímu trojúhelníku. Dosazením do její rovnice se přesvědčíme, že na kružnici leží některé význačné body trojúhelníka – vidíme, že např. paty výšek trojúhelníka  $ABC$  leží na kružnici (2.7). Jedná se tedy o kružnici devíti bodů<sup>13</sup> trojúhelníka  $ABC$ . Mimo to, že tento střed leží na Simsonově přímce, tak také náleží kružnici devíti bodů trojúhelníka (obr. 9).

Uvědomíme-li si plný rozsah tohoto tvrzení, pak můžeme kromě běžné definice, také definovat kružnici devíti bodů trojúhelníka takto:

**Věta 2.8:** Kružnice devíti bodů trojúhelníka je množinou středů úseček spojujících ortocentrum trojúhelníka s body na jeho kružnici opsané.

**Důsledek 2:** Druhý zajímavý důsledek plyne pokud zvolíme za afinní transformaci zobrazení složené z rotace a stejnolehlosti. Otočením pat kolmic  $T, U, V$  kolem bodu  $P$  o úhel  $\theta$  a zobrazením ve stejnolehlosti se středem  $P$  a koeficientem  $k = \frac{1}{\cos \theta}$  je zobrazíme na body  $T', U', V'$ . Tyto body leží na stranách trojúhelníka a úsečky  $T'P$ ,  $U'P$  a  $V'P$  svírají se stranami trojúhelníka konstantní úhel  $\alpha$ . Pak platí následující věta:

<sup>13</sup>Kružnice devíti bodů (Feuerbachova kružnice) je kružnice na které leží devět význačných bodů trojúhelníka – paty výšek, středy stran a středy úseček spojující ortocentrum s vrcholy trojúhelníka [10].

obr. 10 – afinní zobecnění – přímka vedená pod obecným úhlem ( $\alpha = \beta = \gamma$ )

**Věta 2.9:** Nechť je dán trojúhelník  $ABC$ , bod roviny  $P$ , orientovaný úhel  $\alpha$ ,  $\alpha \in (0, \pi)$  a body  $T, U$  a  $V$  po řadě body na stranách trojúhelníka  $a, b, c$ . Jestliže je bod  $P$  bodem kružnice opsané trojúhelníku  $ABC$  a platí-li :  $|\angle TP, a| = |\angle UP, b| = |\angle VP, c| = \alpha$ , pak body  $T, U, V$  leží na přímce (obr. 10).

Obdobně můžeme uvažovat bod  $P$  na kružnici soustředné ke kružnici opsané. Pak v obdobné úvaze má trojúhelník  $TUV$  pro všechny body kružnice konstantní obsah.<sup>14</sup>

<sup>14</sup>Pro obsah takového trojúhelníku lze poměrně snadno ukázat, že platí  $S' = \frac{1}{\sin^2 \alpha} S$ .

## 2.1 Guzmánovo zobecnění Simsonovy věty

Všechna předchozí zobecnění Simsonovy věty měla tu vlastnost, že vycházela z kružnice opsané (či k ní soustředné) a popisovala vlastnosti prvků této množiny. Zobecnění, které objevil M. de Guzmán r. 1999 [8], tuto vlastnost mít nemusí, z této množiny nevychází, ale naopak ji hledá. Poznamenejme, že toto zobecnění v sobě zahrnuje všechny předchozí případy. Guzmán si položil následující otázku:

*Je-li dán trojúhelník  $ABC$ , bod roviny  $P$  a tři vektory  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  a  $\vec{w}$ , jaká je množina bodů roviny, pro něž je obsah trojúhelníka, jehož vrcholy vzniknou projekcí bodu  $P$  ve směrech určených po řadě vektory  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  a  $\vec{w}$  na strany trojúhelníka  $ABC$ , konstantní?*

Množinu bodů budeme vyšetřovat analytickou metodu. Nechť je zavedena kartézská soustava souřadnic v rovině, v které jsou vrcholům trojúhelníka přiřazeny souřadnice:  $A = [0; 0]$ ,  $B = [b; 0]$  a  $C = [c_1; c_2]$ . Bodu  $P$  přiřadíme souřadnice  $P = [p; q]$  a vektory, které určují směry projekce bodu  $P$  na strany  $a$ ,  $b$ , a  $c$ , označíme  $\vec{u} = (u_1, u_2)$ ,  $\vec{v} = (v_1, v_2)$  a  $\vec{w} = (w_1, w_2)$ .

Pak přímky, které jsou určeny těmito směrovými vektory, protnou strany trojúhelníku v bodech  $U$  (projekce bodu  $P$  na stranu  $a$ ),  $V$  (projekce bodu  $P$  na stranu  $b$ ) a  $W$  (projekce bodu  $P$  na stranu  $c$ ), přičemž platí

$$U = \left[ p - \frac{(pc_2 + q(b - c_1) - bc_2)u_1}{c_2u_1 + u_2(b - c_1)}; q - \frac{(pc_2 + q(b - c_1) - bc_2)u_2}{c_2u_1 + u_2(b - c_1)} \right], \quad (2.8)$$

$$V = \left[ p + \frac{(pc_2 - qc_1)v_1}{c_1v_2 - c_2v_1}; q + \frac{(pc_2 - qc_1)v_2}{c_1v_2 - c_2v_1} \right], \quad (2.9)$$

$$W = \left[ p - \frac{qw_1}{w_2}; 0 \right]. \quad (2.10)$$

Pro orientovaný obsah trojúhelníku  $UVW$  ( $S_{\Delta UVW} = S$ ) platí

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & 1 \\ v_1 & v_2 & 1 \\ w_1 & w_2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Dosazením souřadnic z (2.8) – (2.10) a náhradou souřadnic bodu  $P$  za obecné souřadnice získáme

$$\begin{aligned} & w_2 c_2 (u_1 v_2 - u_2 v_1) x^2 + [(u_1 w_2 - w_1 u_2) b v_2 + (c_1 w_2 + w_1 c_2) (u_2 v_1 - v_2 u_1)] \cdot \\ & \cdot xy + [c_1 w_1 (u_1 v_2 - u_2 v_1) + b v_1 (w_1 u_2 - w_2 u_1)] y^2 - w_2 b c_2 (u_1 v_2 - u_2 v_1) x - \\ & - b [(c_1 w_2 + w_1 c_2) v_1 - w_1 v_2 c_1] u_2 - w_2 u_1 c_2 v_1] y + \\ & + 2 \frac{(c_1 v_2 - c_2 v_1) (c_2 u_1 + u_2 (b - c_1)) w_2 S}{c_2} = 0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Jak snadno nahlédneme, koeficienty u kvadratických členů se všechny zároveň rovnají nule pouze v případě, že jsou směry rovnoběžné. Tento případ však musíme vyloučit, neboť promítneme-li takto bod  $P$ , pak  $S_{UVW} = 0$ , body  $U$ ,  $V$ ,  $W$  jsou kolineární a množinou jsou všechny body roviny  $E_2$ . Zároveň vyloučíme případ, kdy jsou směry rovnoběžné s k nim příslušným stranám trojúhelníku. V takovémto případě je zřejmé, že hledaná množina neexistuje. Ve všech ostatních případech popisuje rovnice (2.11) kuželosečku. Guzmán tedy zobecnil Simsonovu větu takto [8]:

**Věta 2.10 (Guzmán):** Nechť je dán v rovině trojúhelník  $ABC$ , bod  $P$  a tři směry určené vektory  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  a  $\vec{w}$ , které nejsou rovnoběžné navzájem, ani po řadě se stranami trojúhelníka. Množinou bodů  $P$  v rovině, pro které má trojúhelník, jehož vrcholy vzniknou projekcí bodu  $P$  na strany trojúhelníka ve směrech  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  a  $\mathbf{w}$ , konstantní obsah, je kuželosečka popsána rovnicí (2.11).

Zajímavé je sledovat druh kuželosečky v závislosti na směrech projekce a její vlastnosti ve vztahu k původnímu trojúhelníku. Druh kuželosečky, jež je dána obecnou rovnicí  $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$ , vyjadřují její diskriminanty<sup>15</sup>

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

V závislosti na hodnotě  $\delta$ -diskriminantu rovnice (2.11) může být množinou buď elipsa ( $\delta > 0$ ), hyperbola ( $\delta < 0$ ) nebo parabola ( $\delta = 0$ ), případně jejich singulární analogie (pokud  $\Delta = 0$ ).

Zabývejme se tedy některými vlastnostmi kuželosečky (2.11), které lze odvodit z její rovnice:

*Poznámka 1.* Pokud promítáme bod  $P$  ve směrech kolmých na strany trojúhelníka:  $\vec{u} = (c_2, b - c_1)$ ,  $\vec{v} = (c_2, -c_1)$  a  $\vec{w} = (0, 1)$ , pak  $\delta = b^2c_2^4$  a množinou je zřejmě kružnice ( $\delta > 0$  a zároveň jsou si koeficienty u kvadratických členů rovny). Jak již dříve bylo ukázáno, jedná se o kružnici opsanou (pro  $S = 0$ , Simsonova věta) nebo k ní soustřednou (viz Gergonneho zobecnění).

*Poznámka 2.* Poznamenejme, že nejenom při projekci ve směrech kolmých na strany trojúhelníka je hledanou množinou bodů kružnice. Jak bylo již dříve ukázáno, volíme-li takové tři směry, jež vznikly afinním zobrazením směrů, které jsou kolmé na strany trojúhelníka, pak i v tomto případě popisuje rovnice (2.11) kružnici. Důkaz také plyne dosazením do  $\delta$ -diskriminantu kuželosečky z rovnic (2.1).

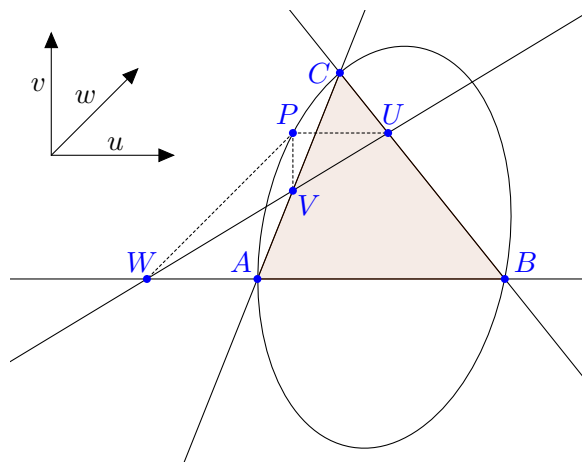
*Poznámka 3.* Simsonova věta popisuje speciální případ, kdy směry projekce jsou kolmé na strany trojúhelníka, obsah trojúhelníku  $UVW$  je nulový. Volí-

<sup>15</sup> $\Delta$ -diskriminant (diskriminant kuželosečky) a  $\delta$ -diskriminant (diskriminant kvadratických členů) jsou dva hlavní invarianty kuželoseček. Více viz [12].

me-li libovolné směry projekce, ale držíme se nulového obsahu  $\triangle UVW$ , pak platí [11]:

**Věta 2.11:** Kuželosečka (2.11) pro  $S = 0$  prochází vrcholy trojúhelníka.

Obsah je nulový v případě, že jsou  $U$ ,  $V$  a  $W$  kolineární. Uvědomme si, že promítneme-li vrchol trojúhelníka, pak právě ve dvou směrech se promítne sám na sebe a ve třetím na bod, kterým přímka prochází. Důkaz plyne také dosazením souřadnic vrcholů do rovnice (2.11).



obr. 11 – pro  $S = 0$  prochází kuželosečka vrcholy trojúhelníka

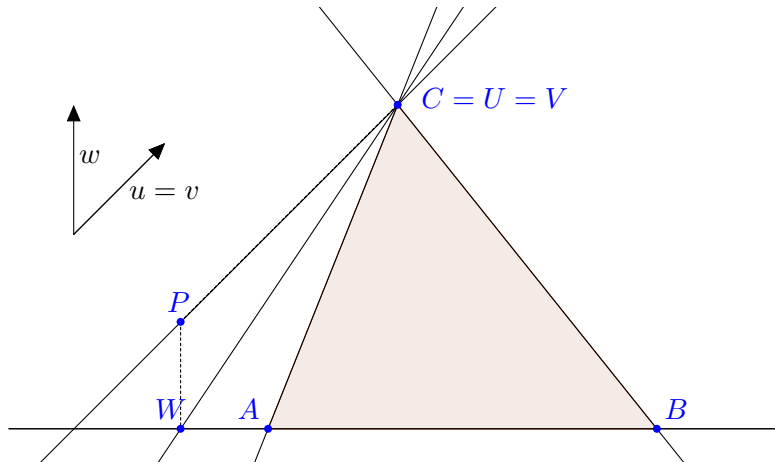
*Poznámka 4.* Ve větě 2.10 jsme řekli, že všechny směry nesmí být rovnoběžné – tedy alespoň jeden je od obou zbývajících různý. Nyní oddělme případ, kdy je právě jeden ze směrů různý.

**Věta 2.12:** Regulární kuželosečka degeneruje pro  $S = 0$  na singulární formu, jsou-li právě dva ze směrů rovnoběžné.

Kuželosečka vyjádřená rovnicí (2.11) je singulární tehdy, je-li její  $\Delta$ -diskriminant nulový. Při uvažování podmínky  $S = 0$  získáme vyjádření

$$(v_1w_2 - w_1v_2)(u_1w_2 - u_2w_1)(u_1v_2 - u_2v_1) = 0, \quad (2.12)$$

které je splněno vždy, jsou-li alespoň dva ze směrů rovnoběžné. Dá se ukázat, že množinou je v tomto případě dvojice různoběžných přímk (  $\delta < 0$  ), z nichž jedna je prodloužením strany, na kterou promítáme třetí (nerovnoběžný) vektor a druhá prochází protějším vrcholem a svírá s první úhel shodný s odchylkou příslušných vektorů. Naopak, jsou-li tři vektory od sebe různé, pak



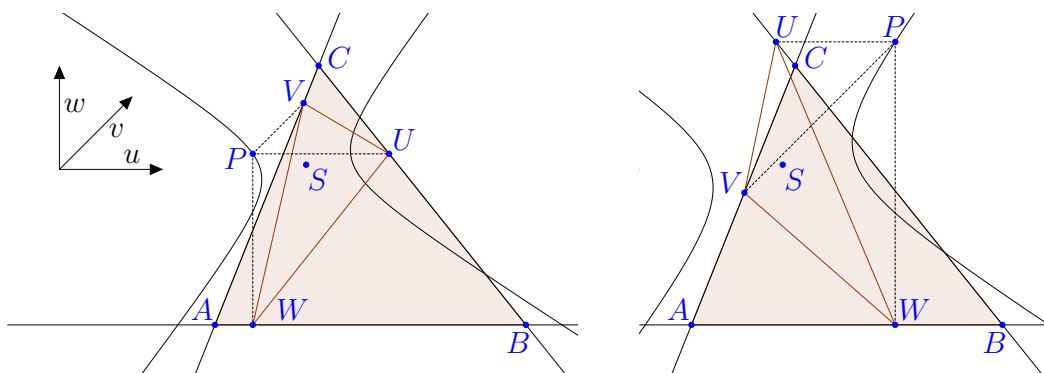
obr. 12 – k výkladu věty 2.12

je množinou bodů pro  $S = 0$  regulární kuželosečka.

*Poznámka 5.* Oproti předchozím poznámkám, kdy byly zkoumány vlastnosti pro fixní obsah  $S = 0$ , nyní budeme zkoumat vlastnosti kuželosečky (2.11) při fixních směrech projekce, ale různém  $S$ .

**Věta 2.13:** Pro dané tři směry, ale různé obsahy  $S$ , získáme svazek kuželoseček, které mají společný střed.

Důkaz plyne z  $\delta$ -diskriminantu kuželosečky (2.11). Jak se snadno přesvědčíme, tento invariant není závislý na parametru  $S$ . Zároveň na tomto parametru nezávisí ani jedna z parciálních derivací podle  $x$  a  $y$ .<sup>16</sup>



obr. 13 – k výkladu věty 2.13, vlevo pro  $S = 4$ , vpravo  $S = 5$

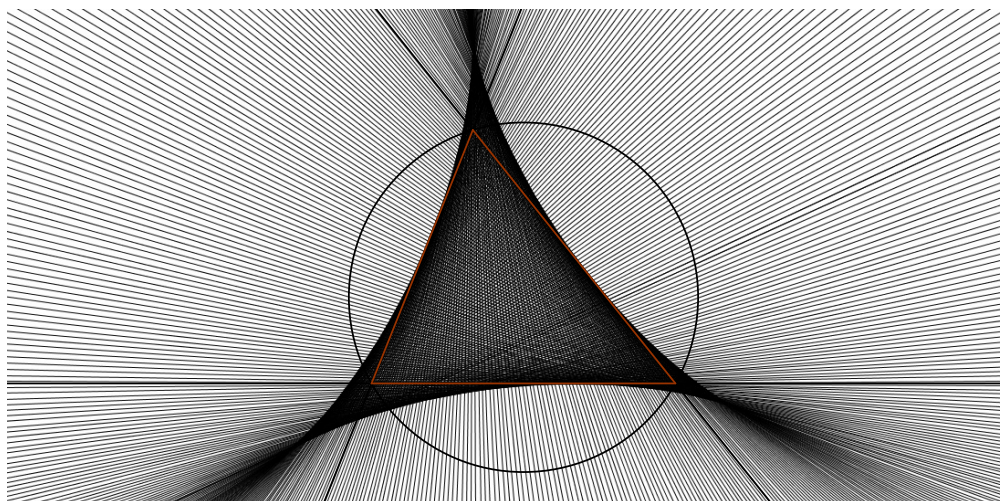
<sup>16</sup>Označme obecnou rovnici kuželosečky  $C(x, y) = 0$ . Pak souřadnice středu jsou řešením soustavy rovnic  $\frac{\partial C(x,y)}{\partial x} = 0$  a  $\frac{\partial C(x,y)}{\partial y} = 0$ . Viz [12].



### 3 Systém Simsonových přímek

Pokračujeme-li nadále v našich úvahách o Simsonově přímce, vyvstává z vazby bodu  $P$  na kružnici opsanou danému trojúhelníku otázka, jak se systém Simsonových přímek chová, pohybujeme-li bodem  $P$  po kružnici opsané.

Podívejme se na polohu Simsonovy přímky při rozličných polohách bodu  $P$  v grafickém programu [17]:



obr. 14 – systém Simsonových přímek

Z tohoto obrázku vidíme, že daná obálka zřejmě existuje a pokusíme se tedy nalézt její rovnici. K tomu se však nejprve zaobíráme obdobnou otázkou.

#### 3.1 Vztah dvou Simsonových přímek

Držme se myšlenky rotace bodu na kružnici opsané trojúhelníku. Nejprve nebudeme brát všechny tyto přímky jako systém (a hledat příslušnou obálku přímek), ale zaměříme se na ně jednotlivě. V dalším postupu budeme uvažovat

dvojici Simsonových přímek  $Si$  a  $Si'$  – Simsonovy přímky příslušné ke dvěma bodům  $P$  a  $P'$  na kružnici opsané.

Nejprve vyjádříme Simsonovu přímku rovnicí, k tomu použijeme např. paty kolmic  $U$  a  $V$ .<sup>17</sup> Danou rovnicí přímky popisuje determinant<sup>18</sup>

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \frac{c_1 \cdot (pc_1 + qc_2)}{c_1^2 + c_2^2} & \frac{c_2 \cdot (pc_1 + qc_2)}{c_1^2 + c_2^2} & 1 \\ p & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Úpravou tohoto determinantu získáme rovnici

$$Si : x(pc_1 + qc_2) + y(pc_2 - qc_1) - p(pc_1 + qc_2) = 0. \quad (3.1)$$

Bod  $P'$  vznikne zobrazením bodu  $P$  v rotaci kolem středu kružnice opsané o úhel  $\theta$ . Toto zobrazení je dáno složením více zobrazení – posunutím do počátku kartézské soustavy o vektor  $\vec{SO}$ , rotací o úhel  $\theta$  a posunutím zpět o opačný vektor. Výsledná matice tohoto zobrazení [12] je ve tvaru

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & -\frac{b \cos \theta}{2} + \frac{(c_1^2 + c_2^2 - bc_1) \sin \theta}{2c_2} + \frac{b}{2} \\ \sin \theta & \cos \theta & -\frac{b \sin \theta}{2} - \frac{(c_1^2 + c_2^2 - bc_1) \cos \theta}{2c_2} + \frac{c_1^2 + c_2^2 - bc_1}{2c_2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Bod  $P'$  má tedy souřadnice

$$P' = \begin{bmatrix} \frac{(c_2^2 - 2c_2q + c_1(c_1 - b)) \sin \theta + (2p - b)c_2 \cos \theta + bc_2}{2c_2}; \\ \frac{-(c_2^2 - 2c_2q + c_1(b - c_1)) \cos \theta + c_2(2p - b) \sin \theta + c_2^2 - c_1(b - c_1)}{2c_2} \end{bmatrix}.$$

Paty kolmic spuštěné z tohoto bodu na strany trojúhelníka jistě leží v přímce (bod leží na kružnici opsané trojúhelníku) – tuto přímku vyjádříme jako

<sup>17</sup>Ponecháváme značení z předchozí kapitoly.

<sup>18</sup>Viz poznámku 10.

přímku procházející body  $U'$  a  $V'$  (paty kolmic z bodu  $P'$  na strany trojúhelníka  $AC$  a  $AB$ ). Pro jejich souřadnice platí:

$$U' = \left[ \frac{c_1}{2(c_1^2 + c_2)} \left( \left( (c_1 + 2p - b) c_2^2 - 2c_1q - \frac{c_1^2(b - c_1)}{c_2} \right) \sin \theta + \right. \right. \\ \left. \left. + 2 \left( \left( c_2^2 + qc_2 + c_1 \left( \frac{c_1}{2} + p \right) \right) \cos \theta + \frac{c_1^2 + c_2^2}{2} \right) \right); \right. \\ \left. \frac{1}{2(c_1^2 + c_2^2)} \left( \left( (c_1 + 2p - b) c_2^2 - 2c_1c_2q - c_1^2(b - c_1) \right) \sin \theta + \right. \right. \\ \left. \left. + 2c_2 \left( \left( \frac{c_2^2}{2} + qc_2 + c_1 \left( p - \frac{c_1}{2} \right) \right) \cos \theta + \frac{c_1^2 + c_2^2}{2} \right) \right) \right]$$

a pro druhou patu kolmic získáme vyjádření:

$$V' = \left[ \frac{(c_2^2 - 2c_2q + c_1(c_1 - b)) \sin \theta + (2p - b) c_2 \cos \theta + bc_2}{2c_2}; 0 \right]$$

Rovnice přímky procházející těmito body je určena např. směrovým vektorem  $\overrightarrow{V'U'}$  – k němuž snadno určíme normálový vektor. Ten je určen např. vyjádřením:

$$\vec{n}_{U'V'} = \left( \left( (2p - c_1 - b) c_2^2 - 2c_1c_2q + c_1^2(b - c_1) \right) \sin \theta + 2 \left( \left( -\frac{c_2^2}{2} + \right. \right. \right. \\ \left. \left. + qc_2 + \left( p - \frac{c_1}{2} \right) c_1 \right) \cos \theta + \frac{c_1^2 + c_2^2}{2} \right) c_2; \\ \left( (2p - c_1 - b) c_2^2 - 2c_1c_2q + c_1^2(b - c_1) \right) \cos \theta - \left( -c_2^3 + 2c_2^2q + \right. \\ \left. + (2c_1p - c_1^2) c_2 \right) \sin \theta - (c_1^2 + c_2^2) (b - c_1) \right)$$

Nás však nebude zatím zajímat exaktní vyjádření<sup>19</sup> rovnice přímky  $S_i'$ , ale její odchylka od původní přímky. Úhel těchto dvou přímek tak vyjádříme jako odchylku jejich normálových vektorů ( $\vec{n}_{S_i'} = \vec{n}_{U'V'}$ ). Platí

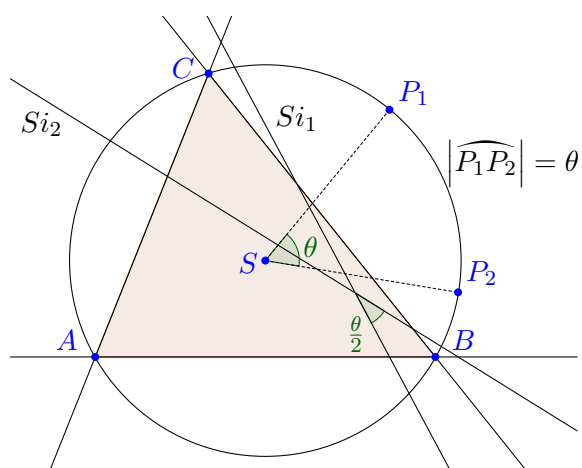
$$\cos \varphi = \frac{\vec{n}_{S_i} \cdot \vec{n}_{S_i'}}{|\vec{n}_{S_i}| \cdot |\vec{n}_{S_i'}|}.$$

<sup>19</sup>Které jistě zvládne čtenář odvodit sám.

Úpravou výrazu a dosazením podmínky, že bod  $P$  leží na kružnici opsané trojúhelníku (tj.  $c_2p^2 + c_2q^2 - bc_2p + bc_1q - qc_1^2 - qc_2^2 = 0$  – podmínka (1.8)) získáme vztah

$$\cos \varphi = \frac{1}{2} \sqrt{(2 + 2 \cos \theta)} = \cos \left( \frac{\theta}{2} \right).$$

Formulujeme toto tvrzení jako větu:



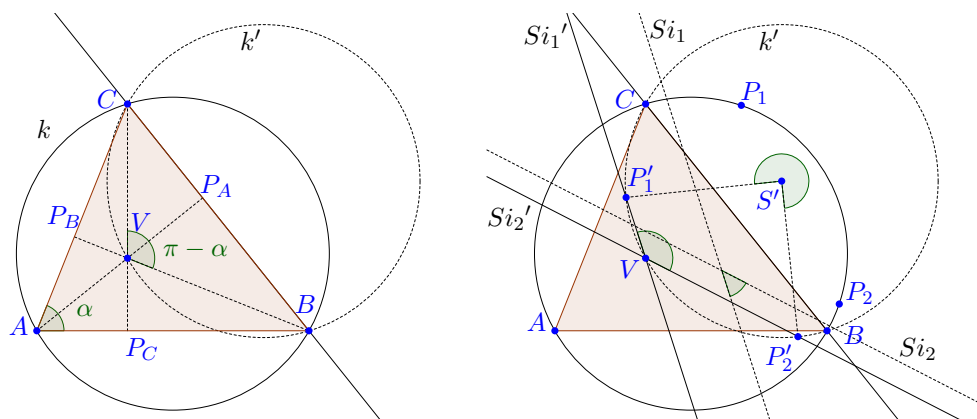
obr. 15 – věta o polovičním úhlu (pro  $\theta = \frac{\pi}{3}$ )

**Věta 3.1:** Necht' je dán v rovině trojúhelník  $ABC$ . Leží-li body  $P_1$  a  $P_2$  na kružnici opsané trojúhelníku  $ABC$  a úhlová velikost<sup>20</sup>oblouku  $|\widehat{P_1P_2}| = \theta$ , pak platí, že Simsonovy přímky příslušné k bodům  $P_1$  a  $P_2$  spolu svírají úhel  $\frac{\theta}{2}$ , viz obr. 15.

*Poznámka 1.* Pro zajímavost uved' me i syntetický důkaz této věty. Stojí totiž na důležité vlastnosti ortocentra, kterou je vhodné vyzdvihnout.

<sup>20</sup>Úhlovou velikostí oblouku rozumíme velikost menšího středového úhlu příslušného k danému oblouku.

**Lemma:** Ortocentrum trojúhelníka leží na obrazu kružnice opsané v osově souměrnosti podle libovolné strany trojúhelníka<sup>21</sup> (obr. 16, vlevo).



obr. 16 – k syntetickému důkazu věty 3.1

Důkaz plyne z následující úvahy. Nechť se kružnice opsaná zobrazí podle strany  $BC$  na kružnici  $k'$  a vrchol  $A$  na  $A'$ , který jistě leží na této kružnici. Pak je čtyřúhelník  $BVCA'$  tětívový a součet jeho protějších úhlů je roven  $\pi$ . Stačí ukázat, že  $|\angle BVC| = \pi - \alpha$ . To však zřejmě platí, neboť z podobnosti trojúhelníků  $\triangle AP_C C$  a  $\triangle VP_B C$  (podle 'uu') vyplývá, že  $|\angle P_B VC| = \alpha$ . Pro zbylé vrcholy se důkaz provede analogicky. Nyní přistupme k samotnému důkazu věty 3.1.

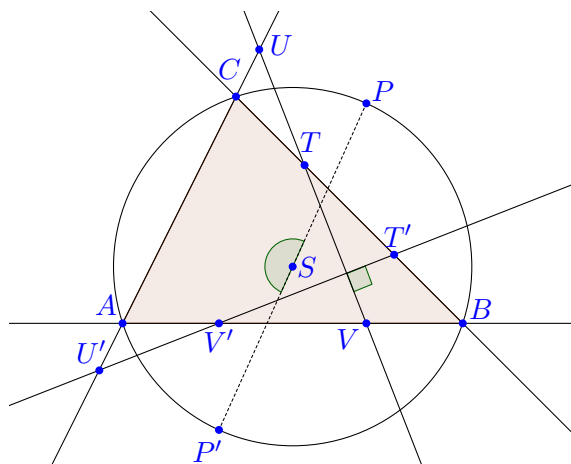
*Důkaz.* Uvažujme dvojici bodů  $P_1$  a  $P_2$  na kružnici opsané trojúhelníku  $ABC$ . K nim příslušné Simsonovy přímky posuneme do ortocentra  $V$  trojúhelníka  $ABC$  (viz obr. 16, vpravo) – které jsou s původními rovnoběžné a svírají stejný úhel. Kružnici opsanou  $k$  v osově souměrnosti podle libovolné

<sup>21</sup>Poznamenejme, že se jedná o Hageovu kružnici pro bod na této straně trojúhelníku [16].

strany trojúhelníka  $ABC$  zobrazíme na  $k'$ . Obrazy bodů  $P_1, P_2$  musí tedy ležet na takto zobrazené kružnici, ale i na posunutých přímkách a zároveň se tyto přímky protínají v ortocentru trojúhelníka (viz věta 2.6) na  $k'$ .

K obvodovému úhlu  $\angle P_1VP_2'$  existuje středový úhel  $\angle P_1SP_2'$  o dvojnásobné velikosti (věta o obvodovém úhlu). Tento obvodový úhel je buď přímo odchylkou nebo doplňkem do  $\pi$ . Zároveň středový úhel  $\angle P_1SP_2'$  je buď úhlovou velikostí oblouku  $\widehat{P_1P_2}$  nebo jejím doplňkem do  $2\pi$ . Porovnáním těchto vztahů získáme  $\varphi = \frac{\theta}{2}$ .  $\square$

Speciálním případem věty 3.1 je případ, kdy volíme úhlovou velikost oblouku  $\widehat{P_1P_2}$  rovnu  $\pi$ . Pak je podle této věty úhel, který svírá dvojice Simsonových přímek příslušných těmto bodům, roven  $\frac{\pi}{2}$  – tyto dvě přímky jsou na sebe tedy kolmé. Na tuto dvojici bodů se však můžeme dívat jako na body souměrné podle středu kružnice opsané trojúhelníku.



obr. 17 – věta o polovičním úhlu ( $\theta = \pi$ )

V tomto případě je velmi zajímavé sledovat kromě odchylky obou přímek i v kterém bodě se společně protínají. Simsonova přímka příslušná bodu  $P$  je určena rovnicí (3.1) a Simsonova přímka příslušná k diametrálně protilehlému

bodů má rovnici

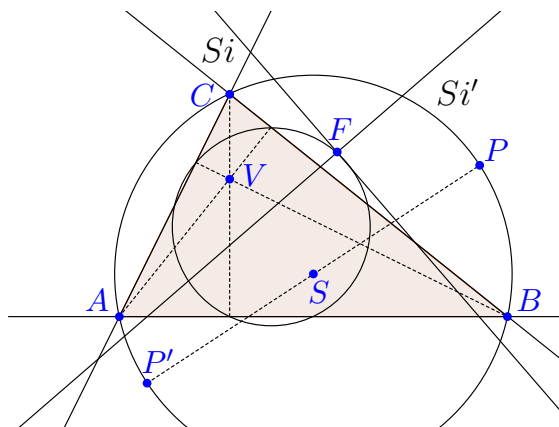
$$c_2x(c_1^2 + c_2^2 - pc_1 - qc_2) + (-c_1^3 + c_1^2b + c_2(q - c_2)c_1 + c_2^2(b - p))y + (b - p)(-c_2^2 + c_2q + c_1(p - c_1))c_2 = 0.$$

Vidíme, že obě přímky jsou závislé na parametrech  $p$  a  $q$  – pro hledanou množinu je tedy z rovnic eliminujeme a dosadíme do podmínky (1.8). Získáme vztah

$$c_1^2y - bc_1y + bc_1c_2 - 2c_1c_2x + 2c_2y^2 - c_2^2y + 2c_2x^2 - bc_2x = 0.$$

Jak snadno nahlédneme, tato rovnice se shoduje s rovnicí (2.6). Množinou těchto průsečíků je tedy kružnice devíti bodů trojúhelníka.

**Věta 3.2:** Nechť je dán trojúhelník  $ABC$  a body  $P$  a  $P'$  na jeho kružnici opsané. Stojí-li  $P$  a  $P'$  diametrálně proti sobě, pak jsou k nim příslušné Simsonovy přímky na sebe kolmé a protínají se v bodě na kružnici devíti bodů trojúhelníka.



obr. 18 – průsečík leží na Feuerbachově kružnici (věta 3.2)

Opusťme nyní tento speciální případ a poznamenejme, že se dá obdobným postupem ukázat, že v ostatních případech ( $\theta \in (0; \pi)$ ), je množinou průsečíků přímek  $Si$  a  $Si'$  hypocykloida [10] se středem ve středu kružnice devíti bodů trojúhelníka.

### 3.2 Obálka systému Simsonových přímek

V předchozím odstavci bylo nastíněno, že množinou bodů, v kterých se dvě Simsonovy přímký (příslušné dvěma bodům na kružnici opsané o konstantní úhlové velikosti oblouku, který určují) protínají, je v obecném případě hypocykloida. V prvním krajním případě jsme uvažovali úhel  $\theta = \pi$  a hypocykloida degenerovala na Feuerbachovu kružnici. Druhý limitní případ, jež budeme uvažovat, je  $\theta = 0$  – tedy přímký jsou totožné. Zde množinu průsečíků v jistém smyslu nahrazuje obálka Simsonových přímek.

Na systém všech Simsonových přímek budeme nahlížet jako na jedno-parametrickou soustavu křivek v rovině  $F(x, y, t) = 0$ . Pro určení tohoto vyjádření použijeme rovnici Simsonovy přímký (3.1):

$$Si : x(pc_1 + qc_2) + y(pc_2 - qc_1) - p(pc_1 + qc_2) = 0 \quad (3.2)$$

a podmínku (1.8), že bod  $P$  leží na kružnici opsané:

$$c_2p^2 + c_2q^2 - bc_2p + bc_1q - qc_1^2 - qc_2^2 = 0. \quad (3.3)$$

Pro eliminaci proměnných  $p$  a  $q$ , parametrizujeme rovnici (3.2) parametrem  $t$ , který přímo koresponduje s jednou proměnnou a vyjádření dosadíme do druhé rovnice.

Parametrizací rovnice (3.2) získáváme

$$p = t, \quad q = \frac{t(c_1x + c_2y - tc_1)}{tc_2 - c_2x + c_1y}$$



a dosazením do podmínky (3.3)

$$y(t-x)c_2^2 + (-t^3 + (2x+b-c_1)t^2 - (x^2 + 2(b-c_1)x + y^2)t + (b-c_1)x^2 + y^2c_1)c_2 + c_1y(t-x)(b-c_1) = 0. \quad (3.4)$$

Obálka<sup>22</sup> systému přímek je pak taková rovnice  $G(x, y) = 0$ , která vznikne [12] eliminací parametru  $t$  z rovnic

$$F(x, y, t) = 0, \quad \frac{\partial F(x, y, t)}{\partial t} = 0.$$

Derivujme tedy rovnici (3.4) podle parametru  $t$ . Získáme

$$(2(x-t)c_1 - 3t^2 + 2(b+2x)t - 2bx - x^2 - y^2)c_2 + c_1y(b-c_1) + c_2^2y = 0.$$

Z této rovnice získáváme pro parametr  $t$  dvě hodnoty<sup>23</sup>

$$t_1 = \frac{\sqrt{(3c_2^2y + ((c_1 + x - b)^2 - 3y^2)c_2 + 3c_1y(b - c_1))c_2 + (2x + b - c_1)c_2}}{3c_2}$$

$$t_2 = \frac{-\sqrt{(3c_2^2y + ((c_1 + x - b)^2 - 3y^2)c_2 + 3c_1y(b - c_1))c_2 + (2x + b - c_1)c_2}}{3c_2}.$$

Postupně dosadíme  $t_1$  a  $t_2$  do rovnice (3.4), čímž získáme rovnice  $R_1 = 0$  a  $R_2 = 0$ . Každá z těchto rovnic popisuje pouze jistou část hledané obálky (jedna pro přímky příslušné bodům na horní půlkružnici, druhá pro ostatní).

Abychom popsali obálku celou, vytvoříme rovnici ze součinu rovnic před-

---

<sup>22</sup>Obálkou systému rozumíme takovou křivku, jež má s každou křivkou daného systému dotyk prvního řádu a tento bod dotyku leží na této křivce [12].

<sup>23</sup>Uvědomme si, že  $t = p$  a pro jednu hodnotu  $p$  existují až dva body  $P$  a tedy i dvě příslušné Simsonovy přímky.

chozích ( $R_1 \cdot R_2 = 0$ ), která jistě popisuje obálku celou. Získáváme rovnici

$$\begin{aligned} & \left( (3c_2^2y + ((c_1 + x - b)^2 - 3y^2)c_2 + 3c_1y(b - c_1))^{\frac{3}{2}} \sqrt{c_2} + \left( \frac{9}{2}y(b - c_1 - x) \right. \right. \\ & \left. \left. (c_2^2 + c_1(b - c_1)) + \left( \frac{9}{2}by^2 + (b - c_1 - x)^3 - 9y^2x + 18c_1y^2 \right) c_2 \right) \right) \cdot \\ & \left( - (3c_2^2y + ((c_1 + x - b)^2 - 3y^2)c_2 + 3c_1y(b - c_1))^{\frac{3}{2}} \sqrt{c_2} + \left( \frac{9}{2}y(b - c_1 - x) \right. \right. \\ & \left. \left. (c_2^2 + c_1(b - c_1)) + \left( \frac{9}{2}by^2 + (b - c_1 - x)^3 - 9y^2x + 18c_1y^2 \right) c_2 \right) \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Jak snadno nahlédneme, pokud zavedeme v této rovnici substituci, pak lze rovnici (3.5) vyjádřit ve tvaru

$$\begin{aligned} & (P\sqrt{Pc_2} + Qc_2) (-P\sqrt{Pc_2} + Qc_2) = 0 \\ & P^3 - c_2Q^2 = 0, \end{aligned} \quad (3.6)$$

kde

$$\begin{aligned} P &= 3c_2^2y + ((c_1 + x - b)^2 - 3y^2)c_2 + 3c_1y(b - c_1) \quad \text{a} \\ Q &= \left( \frac{9}{2}by^2 + (b - c_1 - x)^3 - 9y^2x + 18c_1y^2 \right) c_2 + \frac{9}{2}y(c_2^2 + c_1(b - c_1)) \\ & (b - c_1 - x). \end{aligned}$$

Tato rovnice však nepopisuje obálku ve smyslu, který nás zajímá. Jak se snadno čtenář přesvědčí, rovnice popisuje kromě obálky i osu  $x$  (tedy Simsonovu přímkou příslušnou bodu proti vrcholu  $C$ ), která pro nás nemá význam.

Rovnici (3.6) upravíme tedy do tvaru:

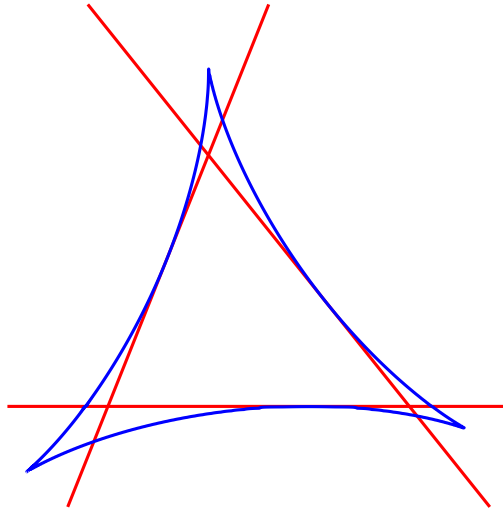
$$y^2 \cdot V(x, y) = 0,$$

kde

$$\begin{aligned}
 V(x, y) = & 4c_2^3(x^2 + y^2)^2 - 4c_2^3x^3(3b - 2c_1) + 20c_2^2x^2y(c_2^2 + bc_1 - c_1^2) + \\
 & + 4c_2^3xy^2(5b - 14c_1) - 12c_2^2y^3(c_2^2 + bc_1 - c_1^2) - c_2(c_1^4 - 2bc_1^3 + \\
 & + (b^2 - 2c_2^2)c_1^2 + 14bc_1c_2^2 - 12b^2c_2^2 + c_2^4)x^2 - (22b - 4c_1) \\
 & (c_2^2 + bc_1 - c_1^2)c_2^2xy + c_2(12c_2^4 - (b + 2c_1)(b - 10c_1)c_2^2 + 12c_1^2 \\
 & (b - c_1)^2)y^2 + 2c_2(b - c_1)(c_1^4 - 2bc_1^3 + (2c_2^2 + b^2)c_1^2 + c_2^4 - \\
 & - 2b^2c_2^2)x - 2(c_2^2 + bc_1 - c_1^2)(2c_1^4 - 4bc_1^3 + 2(2c_2^2 + b^2)c_1^2 - \\
 & - 3bc_1c_2^2 + 2c_2^4 - b^2c_2^2)y - c_2(b - c_1)^2(c_1^2 - bc_1 + c_2^2)^2 = 0. \quad (3.7)
 \end{aligned}$$

Obálkou systému Simsonových přímek je křivka vyjádřená rovnicí (3.7) (graf viz obr. 19), jež se nazývá Steinerův deltooid [3] – jedná se o limitní případ hypocykloidy.

**Věta 3.3:** Obálkou Simsonových přímek je Steinerův deltooid, popsany rovnicí (3.7).



obr. 19 – Steinerův deltooid (modře)

### 3.3 Steinerův deltoid

Zabývejme se krátce vlastnostmi Steinerova deltoidu ve vztahu k původnímu trojúhelníku. Steinerův deltoid jako hypocykloidu a jeho vlastnosti týkající se symetrie poprvé popsal Jakob Steiner r. 1857 [13].

Z grafu na obr. 19 je patrné, že se deltoid dotýká stran trojúhelníka. Hledejme tedy průsečík deltoidu se stranou  $AB$  ( $AB : y = 0$ ). Řešením soustavy rovnic ((3.7),  $y = 0$ ) pro  $x$  a  $y$  získáme tři průsečíky:

$$\begin{aligned} P_1 &= [b - c_1; 0], \\ P_2 &= \left[ \frac{b}{2} + \frac{\sqrt{(c_1^2 + c_2^2)((c_1 - b)^2 + c_2^2)}}{2c_2}; 0 \right], \\ P_3 &= \left[ \frac{b}{2} - \frac{\sqrt{(c_1^2 + c_2^2)((c_1 - b)^2 + c_2^2)}}{2c_2}; 0 \right]. \end{aligned}$$

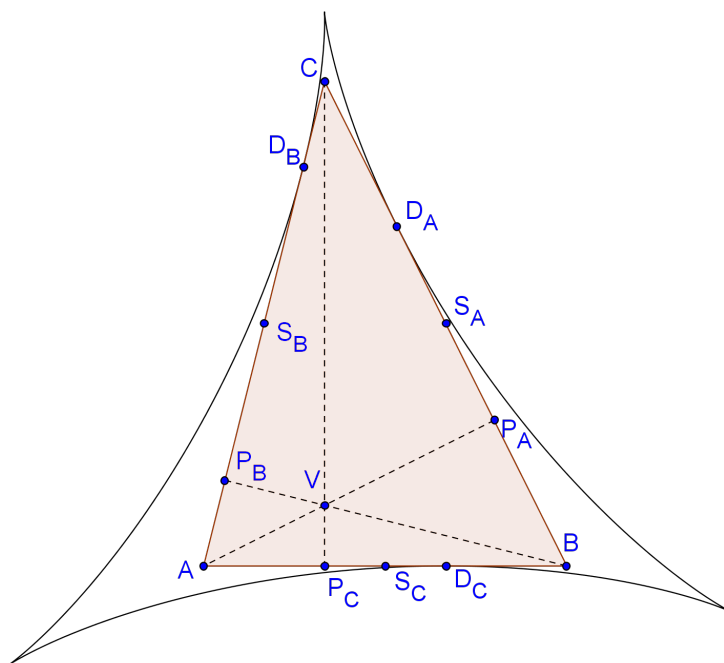
Vidíme, že pouze první z nich leží na straně  $AB$  trojúhelníku a tedy deltoid má dotyk se stranou v tomto bodě. Tento bod zřejmě reprezentuje obraz paty výšek ve středové souměrnosti podle středu strany (obr. 20). Vzhledem k symetrii deltoidu platí tato úvaha pro každou stranu. Druhé dva průsečíky již leží vně trojúhelníka, ve vzdálenosti od středu strany

$$R = \frac{\sqrt{(c_1^2 + c_2^2)((c_1 - b)^2 + c_2^2)}}{2c_2}. \quad (3.8)$$

Tvrzení pojmemme jako větu:

**Věta 3.4:** Steinerův deltoid se dotýká stran trojúhelníku  $ABC$  v bodech středově souměrných s patami výšek podle středů stran trojúhelníku (obr. 20).

Zabývejme se zbylými průsečíky, které leží na prodloužení strany  $AC$ . Jak snadno nahlédneme, tyto body leží na kružnici  $k$  se středem ve středu



obr. 20 – body dotyku se stranami trojúhelníka, věta 3.4

strany  $AC$  a poloměrem daným vztahem (3.8) (obr. 21). Tato vzdálenost je zřejmě dvojnásobkem poloměru kružnice devíti bodů trojúhelníka (porovnej (2.7)) a zároveň je její poloměr roven poloměru kružnice opsané (porovnej (1.9)). Z toho vyplývá, že se kružnice  $k$  dotýká Feuerbachovy kružnice. Tento bod dotyku leží zobrazem v středové souměrnosti podle jejího středu. Jeho souřadnice pak jsou:

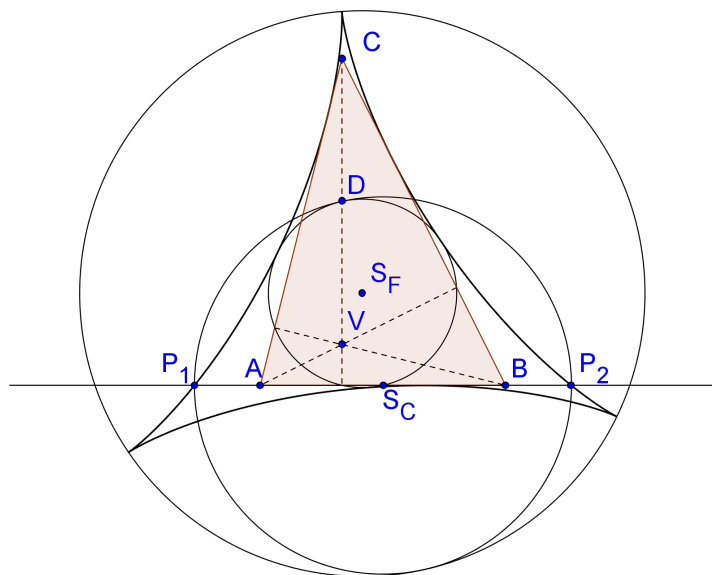
$$D = \left[ c_1; \frac{2(4c_2^2 + bc_1 - c_1^2)}{c_2} \right]$$

Tento bod leží na průsečíku Feuerbachovy kružnice s výškou trojúhelníku. Jedná se tedy o střed úsečky spojující ortocentrum s protějším vrcholem trojúhelníka.

Druhá kružnice, které se  $k$  dotýká, je kružnice se středem ve středu Feuerbachovy kružnice a s trojnásobným poloměrem. Její význam odhalíme

později.

**Věta 3.5:** Kružnice se středem ve středu strany procházející průsečíky Steinerova deltoidu s prodloužením této strany se dotýká Feuerbachovy kružnice ve středu úsečky spojující ortocentrum a protější vrchol a zároveň se dotýká kružnice se středem ve středu kružnice devíti bodů a trojnásobným poloměrem (viz obr. 21).



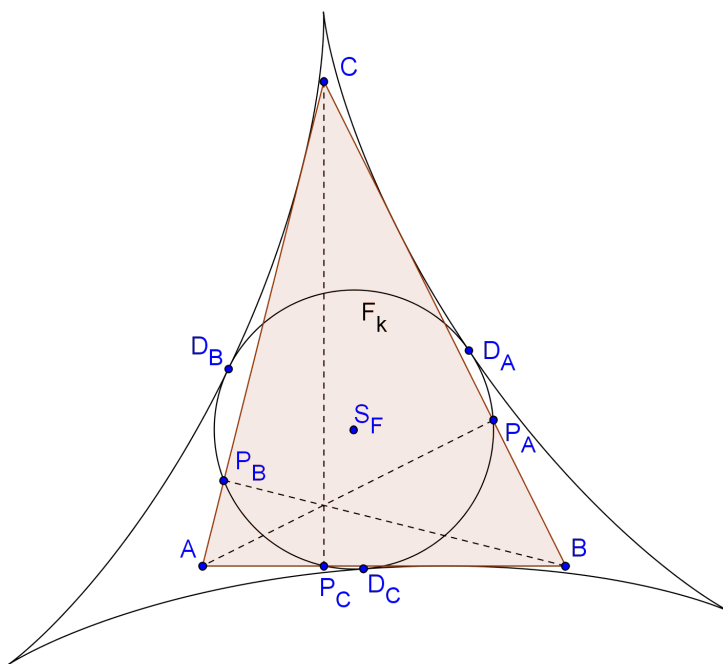
obr. 21 – dotyk kružnic, věta 3.5

Ovšem obdobná věta platí (vyjma polohy bodu dotyku a průsečíky s deltoidem) i pro ostatní body Feuerbachovy kružnice.<sup>24</sup> Všechny tyto kružnice pak mají jako obálku kružnici se středem ve středu kružnice devíti bodů a o trojnásobném poloměru – do které je deltoid vepsán. Dále sledujeme-li graf křivky na obr. 21, vidíme, že deltoid má tři vrcholy (body vratu deltoidu), které musí ležet na této kružnici.

<sup>24</sup>Uvědomme si, že obě kružnice jsou soustředné.

Tyto vlastnosti ostatně vyplývají i z toho, že deltooid je hypocykloidou, která vznikne jako množina, kterou opisuje pevně zvolený bod na kružnici o poloměru kružnice opsané, která se valí v kružnici procházející vrcholy deltooidu, resp. ji opisuje i pevně zvolený bod na kružnici o poloměru kružnice devíti bodů odvalující se v kružnici o trojnásobném poloměru [10].

Jelikož pak tyto kružnice mají v bodě dotyku s Feuerbachovou kružnicí s ní společnou tečnu, pak můžeme tvrdit i že deltooid se dotýká Feuerbachovy kružnice [10].



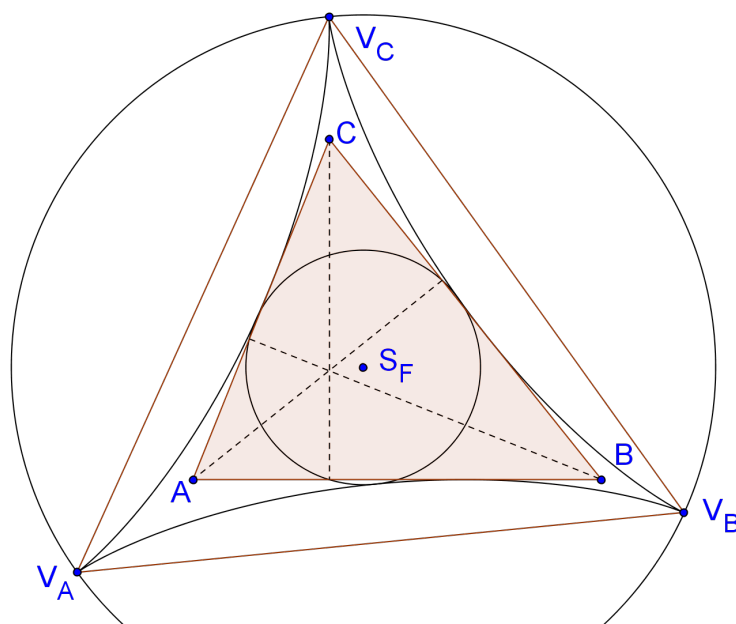
obr. 22 – Steinerův deltooid se dotýká Feuerbachovy kružnice, věta 3.6

**Věta 3.6:** Steinerův deltooid se dotýká kružnice devíti bodů trojúhelníka.

Nyní se budeme zabývat vlastnostmi Steinerova deltooidu, které plynou přímo z faktu, že je obálkou systému Simsonových přímek. Obálka přímek je

zavedena tak, že se Simsonova přímka příslušná všem bodům kružnice opsané dotýká deltoиду. Uvažujeme-li Simsonovu přímku pro vrchol trojúhelníka, pak tato přímka je zřejmě výškou na protější stranu. Platí tedy, že i přímky, na nichž leží výšky trojúhelníka, se dotýkají Steinerova deltoidu.

Dále, vzhledem k symetrii deltoidu, Simsonova přímka procházející středem deltoidu (střed Feuerbachovy kružnice) je jeho osou souměrnosti. Tyto přímky jsou tři a prochází vrcholy deltoidu. Tyto vrcholy leží na kružnici, kterou jsme popsali již dříve – a to na kružnici se středem ve středu kružnice devíti bodů a trojnásobným poloměrem (obr. 23).



obr. 23 – vrcholy deltoidu

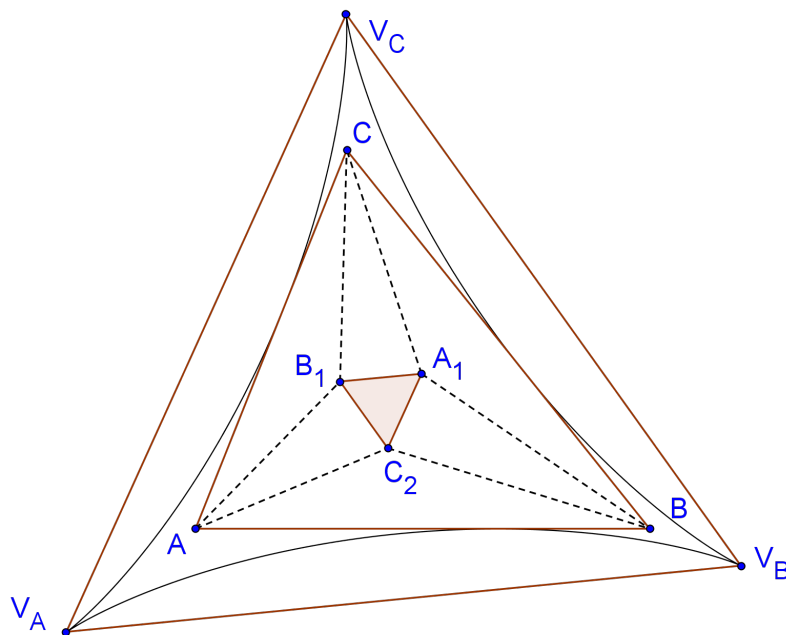
Vrcholy deltoidu jsou zřejmě singulárními body křivky [12] a proto vyhovují soustavě rovnic

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = 0, \quad F(x, y) = 0.$$



Toto vyjádření však vede na kubickou rovnici, což je důvodem, že vrcholy Steinerova deltoidu nejsou pro daný trojúhelník eukleidovsky sestrojitelné. Ostatně na kubickou rovnici vede i samotná podmínka, aby Simsonova přímka procházela středem Feuerbachovy kružnice.

Na závěr poznamenejme, že trojúhelník, který vrcholy deltoidu tvoří, je rovnostranný a má strany rovnoběžné s tzv. Morleyho trojúhelníkem.<sup>25</sup> Důkaz této věty uvádí Guzmán v [9]. Koneckonců to, že vrcholy deltoidu nejsou eukleidovsky sestrojitelné, je ve shodě s tímto poznatkem – trisekce úhlu je zřejmě ekvivalentní této konstrukci.

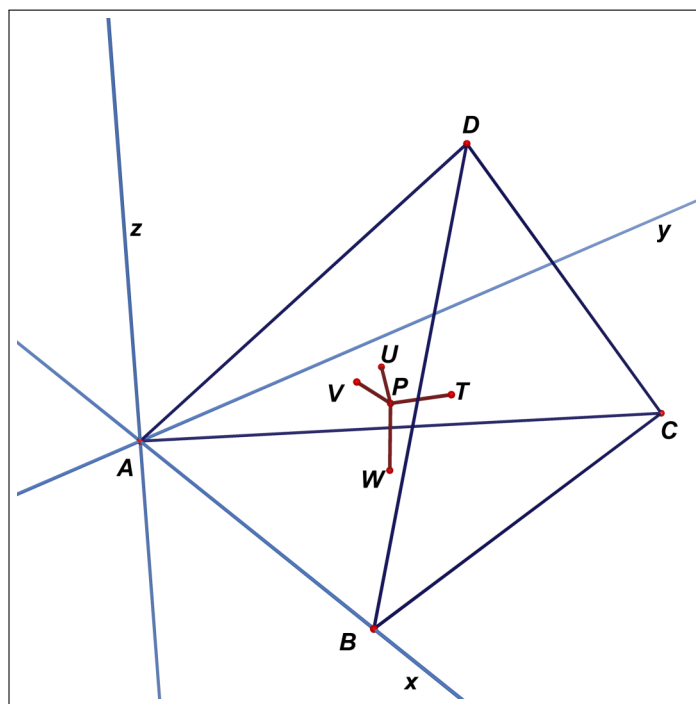


obr. 24 – Morleyho trojúhelník má strany rovnoběžné s  $\triangle V_A V_B V_C$

<sup>25</sup>Morleyho věta: Tři body na sousedních třetinách vnitřních úhlů trojúhelníka formují rovnostranný trojúhelník [5].

## 4 Zobecnění Simsonovy věty do prostoru

Uvažujme další zobecnění Simsonovy věty, tentokrát do trojrozměrného Eukleidovského prostoru. V tomto případě pojetí rošíříme na prostorový čtyřstěn a budeme uvažovat (resp. hledat) množinu bodů, pro které leží pátý kolmic spuštěných z daného bodu na stěny čtyřstěnu v jedné rovině.



obr. 25 – zobecnění problému do prostoru;  $T$ ,  $U$ ,  $V$  a  $W$  komplanární

Zavedme si kartézskou soustavu souřadnic  $Oxyz$  v prostoru  $E_3$ . Čtyřstěn  $ABCD$  umístěme vrcholem  $A$  do počátku, hranou  $AB$  na osu  $x$  a stěnou  $ABC$  do roviny  $xy$ . Pak mají vrcholy čtyřstěnu přiřazeny tyto souřadnice:  $A = [0; 0; 0]$ ,  $B = [b; 0; 0]$ ,  $C = [c_1; c_2; 0]$  a  $D = [d_1; d_2; d_3]$ .

Stěny čtyřstěnu  $ABCD$  leží v rovinách, jež jsou analyticky určeny rovni-

cemi

$$\begin{aligned} \sigma_{ABC} : & & z = 0, \\ \sigma_{ABD} : & & d_3y - d_2z = 0, \\ \sigma_{ACD} : & & c_2x - c_1y + \frac{(c_1d_2 - d_1c_2)}{d_3}z = 0, \\ \sigma_{BCD} : & c_2x + (b - c_1)y + \frac{(c_1d_2 + bc_2 - d_1c_2 - bd_2)}{d_3}z - bc_2 = 0. \end{aligned}$$

Dále přiřadíme libovolnému bodu  $P$  prostoru  $E_3$  souřadnice  $P = [p_1; p_2; p_3]$  a označme paty kolmic spuštěné z tohoto bodu na stěny čtyřstěnu po řadě  $T = [t_1; t_2; t_3]$ ,  $U = [u_1; u_2; u_3]$ ,  $V = [v_1; v_2; v_3]$  a  $W = [w_1; w_2; w_3]$ .

Pak přímky kolmé na stěny čtyřstěnu jsou určeny bodem  $P$  a normálovými vektory rovin, po řadě

$$\begin{aligned} \vec{n}_{ABC} &= (0, 0, 1) , \\ \vec{n}_{ABD} &= (0, d_3, -d_2) , \\ \vec{n}_{ACD} &= \left( c_2, -c_1, \frac{(c_1d_2 - d_1c_2)}{d_3} \right) , \\ \vec{n}_{BCD} &= \left( c_2, b - c_1, \frac{(c_1d_2 + bc_2 - d_1c_2 - bd_2)}{d_3} \right) . \end{aligned}$$

Přímky z bodu  $P$  určené těmito normálovými vektory pak protínají roviny

stěn čtyřstěnu v bodech

$$\begin{aligned}
T &= \left[ p_1 + \frac{[((b-p_1)d_3 + p_3(d_1-b))c_2 + (p_3d_2 - d_3p_2)(b-c_1)]c_2bd_3}{c_2^2d_3^2 + (d_3b - d_3c_1)^2 + (c_1d_2 + bc_2 - d_1c_2 - bd_2)^2}; \right. \\
&\quad p_2 + \frac{[((b-p_1)d_3 + p_3(d_1-b))c_2 + (p_3d_2 - d_3p_2)(b-c_1)](b-c_1)d_3}{c_2^2d_3^2 + (d_3b - d_3c_1)^2 + (c_1d_2 + bc_2 - d_1c_2 - bd_2)^2}; \\
&\quad \left. p_3 + \frac{[((b-p_1)d_3 + p_3(d_1-b))c_2 + (p_3d_2 - d_3p_2)(b-c_1)][(b-d_1)c_2 - d_2(b-c_1)]}{c_2^2d_3^2 + (d_3b - d_3c_1)^2 + (c_1d_2 + bc_2 - d_1c_2 - bd_2)^2} \right] \\
U &= \left[ p_1 - \frac{[p_3(c_1d_2 - d_1c_2) + d_3(p_1c_2 - p_2c_1)]d_3c_2}{d_3^2(c_1^2 + c_2^2) + (c_1d_2 - d_1c_2)^2}; \right. \\
&\quad p_2 + \frac{[p_3(c_1d_2 - d_1c_2) + d_3(p_1c_2 - p_2c_1)]d_3c_1}{d_3^2(c_1^2 + c_2^2) + (c_1d_2 - d_1c_2)^2}; \\
&\quad \left. p_3 + \frac{[p_3(c_1d_2 - d_1c_2) + d_3(p_1c_2 - p_2c_1)](c_1d_2 - d_1c_2)}{d_3^2(c_1^2 + c_2^2) + (c_1d_2 - d_1c_2)^2} \right] \\
V &= \left[ p_1; p_2 - \frac{d_3p_2 + d_2p_3}{d_2^2 + d_3^2}d_3; p_3 + \frac{d_3p_2 - d_2p_3}{d_2^2 + d_3^2}d_2 \right] \\
W &= [p_1; p_2; 0].
\end{aligned}$$

Podmínku, že dané čtyři body  $T, U, V$  a  $W$  leží v rovině vyjadřuje determinant<sup>26</sup>

$$\begin{vmatrix} t_1 & t_2 & t_3 & 1 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 1 \\ v_1 & v_2 & v_3 & 1 \\ w_1 & w_2 & w_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (4.1)$$

K snadnějšímu výpočtu a tedy i nalezení dané podmínky využijeme však jiného postupu. Uvažujme tři vektory  $\vec{u} = \overrightarrow{WT}$ ,  $\vec{v} = \overrightarrow{WU}$  a  $\vec{w} = \overrightarrow{WV}$ , pak vyšetřujeme, kdy jsou  $\vec{u}, \vec{v}$  a  $\vec{w}$  komplanární a namísto determinantu (4.1)

<sup>26</sup>Všimneme si analogie s determinanem (1.5), kde daný determinant vyjadřoval podmínku pro kolinearitu tří bodů.

řešíme determinant<sup>27</sup>

$$\begin{vmatrix} u_1 - t_1 & u_2 - t_2 & u_3 - t_3 \\ v_1 - t_1 & v_2 - t_2 & v_3 - t_3 \\ w_1 - t_1 & w_2 - t_2 & w_3 - t_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (4.2)$$

Tímto získáme podmínku ve tvaru

$$\frac{d_3^3 c_2^2 b \cdot V(p_1, p_2, p_3)}{(d_3^2 + d_2^2) (d_3^2 (c_2^2 + (b - c_1)^2) + (c_1 d_2 + b c_2 - d_1 c_2 - b d_2)^2)} = 0, \quad (4.3)$$

kde výraz  $V(p_1, p_2, p_3)$  je závislý na poloze bodu  $P$ .

Jak vidíme, podmínku vyjádřenou rovnicí (4.3) můžeme zjednodušit<sup>28</sup> tak, že na levé straně zůstane pouze výraz  $V(p_1, p_2, p_3)$  a následným dosazením obecných souřadnic  $x, y, z$  za souřadnice bodu  $P$  dostaneme rovnici hledané množiny bodů. Vidíme, že touto rovnicí (rovnice (4.4)) je popsána obecná kubická plocha  $R(x, y, z) = 0$  [11]

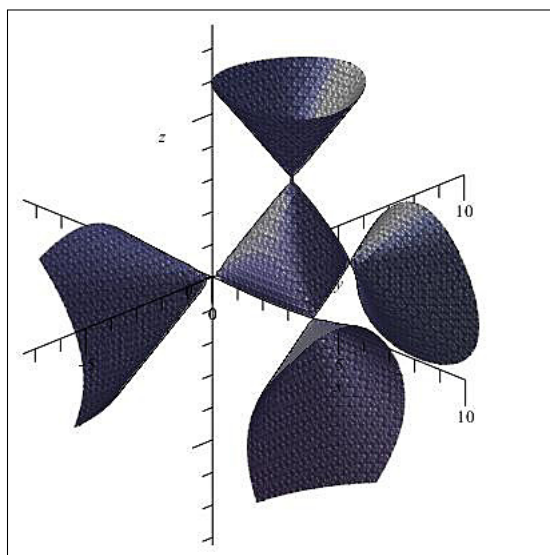
$$\begin{aligned} & c_2^2 d_3^2 x^2 y - c_2 d_3^2 (2 c_1 - b) x y^2 + d_3^2 c_1 (b - c_1) y^3 + c_2 d_3 (d_2^2 + d_3^2 - c_2 d_2) x^2 z + \\ & + 2 d_3 d_2 c_2 (c_1 - d_1) x y z + d_3 [(d_1^2 d_1 b + d_3^2) c_2 + c_1 d_2 (b - c_1)] z y^2 + \\ & + c_2 d_3^2 (b - 2 d_1) x z^2 + d_3^2 [c_2^2 - 2 c_2 d_2 - c_1 (b - c_1)] y z^2 + [c_2 (d_2^2 - d_1 (b - \\ & - d_1)) - c_2^2 d_2 + c_1 d_2 (b - c_1)] d_3 z^3 - c_2^2 d_3^2 b x y + d_3^2 c_1 b c_2 y^2 - c_2 d_3 b (d_2^2 + d_3^2 - \\ & - c_2 d_2) x z - d_3 [(d_2^2 + d_3^2) c_1^2 + (2 d_2 (b - d_1) c_2 - b (d_2^2 + d_3^2)) c_1 + (d_3^2 - \\ & - d_1 (b - d_1)) c_2^2] z y + [c_2 ((b - 2 d_1) c_1 + d_1 b) d_2^2 - c_1 (b - c_1) d_2^3 + ((d_1^2 - \\ & - d_1 b + d_3^2) c_2^2 - c_1 d_3^2 (b - c_1)) d_2 + d_1 c_2 d_3^2 b] z^2 = 0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Pro pravidelný čtyřstěn (pro hodnoty:  $b = 4, c_1 = 2, c_2 = 2\sqrt{3}, d_1 = 2, d_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}, d_3 = \frac{4\sqrt{6}}{3}$ ) získáváme rovnici ve tvaru (4.5), jíž odpovídá graf na obrázku 26.

$$\begin{aligned} & 3\sqrt{2}z (x^2 + y^2 - 4x) + \sqrt{3} (10z^2 + 8y^2) + 6xy (x - 4y) + 2 (y^3 + \sqrt{2}z^3) - \\ & - 4\sqrt{6}yz = 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

<sup>27</sup>I z hlediska lineární algebry se dá ukázat, že jsou si tyto dva determinanty rovny.

<sup>28</sup>Čtenář promyslí, že v čitateli i jmenovateli jsou pouze nenulové hodnoty.



obr. 26 – množina bodů pro pravidelný čtyřstěn

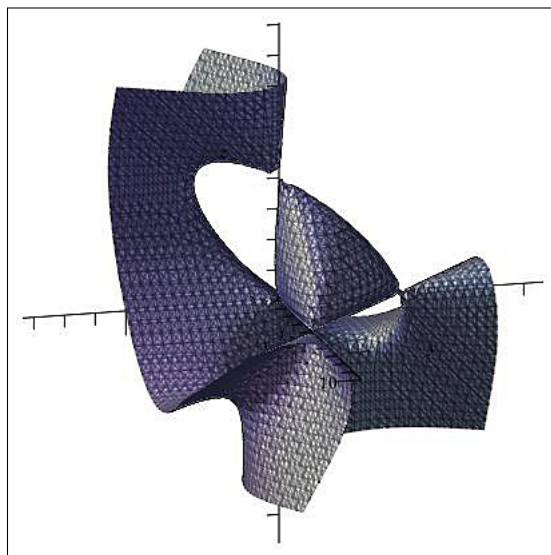
Plocha vyjádřená touto rovnicí se nazývá Cayleyho kubika. Jedná se o plochu se čtyřmi uzlovými body ve vrcholech čtyřstěnu a zároveň v ní leží devět význačných přímek, z nichž 6 jich prochází uzlovými body (hranami čtyřstěnu) [6].

A dále například pro pravoúhlý čtyřstěn ( $b = 4, c_1 = 0, c_2 = 4, d_1 = 0, d_2 = 0, d_3 = 4$ ) získáváme plochu, jejíž graf je na obr. 27 a je popsána rovnicí

$$(x^2 + y^2)z + (x + y)(z^2 + xy) - 4xz - 4xy - 4yz = 0. \quad (4.6)$$

Je překvapivé, že zobecnění Simsonovy věty do trojrozměrného prostoru na čtyřstěn nedává jako množinu bodů kulovou plochu opsanou čtyřstěnu, ale plochu danou rovnicí (4.4). V důsledku můžeme tvrdit, že existuje jistá analogie mezi Cayleyho kubikou pro daný čtyřstěn a kružnicí opsanou trojúhelníku.

Na zobecnění Simsonovy věty v prostoru nahlížejme takto [11]:



obr. 27 – množina bodů pro pravoúhlý čtyřstěn

**Věta 4.1:** Nechť je dán v prostoru čtyřstěn  $ABCD$ . Množinou bodů, pro které leží paty kolmic spuštěné na stěny čtyřstěnu v jedné rovině, je plocha popsaná rovnicí (4.4). V obecném případě se jedná o kubickou plochu.

*Poznámka 1.* Jistě se nabízí i následné zobecnění Gergonneho věty (kapitola 1.1), kdy místo komplanarity bodů  $T, U, V, W$  budeme uvažovat konstantní objem úpatnicového čtyřstěnu  $TUVW$ . Pak platí<sup>29</sup>

$$\begin{vmatrix} u_1 - t_1 & u_2 - t_2 & u_3 - t_3 \\ v_1 - t_1 & v_2 - t_2 & v_3 - t_3 \\ w_1 - t_1 & w_2 - t_2 & w_3 - t_3 \end{vmatrix} = 6 V_{TUVW} \quad (4.7)$$

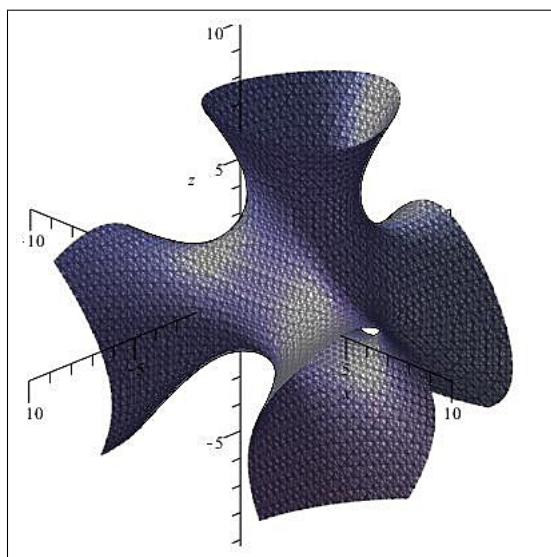
<sup>29</sup>Viz [12].

a z tohoto determinantu plyne hledaná množina bodů

$$V(x, y, z) - 6 V_{TUVW} \cdot V(ABCD) = 0,$$

kde  $V(x, y, z)$  je výraz popsáný dříve rovnicí (4.4) a

$$V(ABCD) = \frac{1}{d_3^3 c_2^2 b} \cdot (d_3^2 + d_2^2) ((c_1 + c_2)^2 d_3^2 + (c_1 d_2 - d_1 c_2)^2) \\ (d_3^2 (c_2^2 + (b - c_1)^2) + (c_1 d_2 + b c_2 - d_1 c_2 - b d_2)^2). \quad (4.8)$$



obr. 28 – množina bodů pro pravidelný čtyřstěn,  $V_{TUVW} = 1$

Opět vykreslíme graf plochy pro pravidelný čtyřstěn. Jak je z grafu plochy na obr. 28 patrné, i zde by se dala najít analogie s plochou na obr. 26.<sup>30</sup>

<sup>30</sup>Analogicky pro Gergonneho zobecnění Simsonovy věty v rovině, množinou bodů je kružnice opsaná trojúhelníku zobrazená ve stejnolehlosti (zvětšená nebo zmenšená).



## Závěr

Jak bylo v práci ukázáno, problematika Simsonovy věty je poměrně rozsáhlá a zasahuje do mnohých kapitol geometrie trojúhelníka. Právě jejím užitím lze poměrně snadno odhalit zajímavé souvislosti mezi některými geometrickými objekty.

Přesto jsme zcela opomněli nahlížet na Simsonovu větu jako na geometrické zobrazení, které každému trojúhelníku v rovině přiřazuje jednoznačně Steinerův deltooid, resp. rovnostranný trojúhelník, jehož vrcholy jsou vrcholy deltooidu, a toto zobrazení můžeme srovnat jednak s Morleyho nebo i Napoleonovou větou [5]. Jak je v práci ukázáno, tyto vrcholy nelze vzhledem ke stranám původního trojúhelníku Eukleidovskou konstrukcí sestrojít. Proto se nabízí hledání alespoň přibližné konstrukce, jež by ji mohla věrně nahradit.

Zároveň se nedostalo na řešení problematiky Morleyova trojúhelníku, jež je sama o sobě velmi rozsáhlá a výpočtově náročná. Čtenář tedy promine, že ponecháváme tuto větu bez důkazu a na její souvislost se Simsonovou větou pouze odkazujeme prostřednictvím [9].

Zanedbání se také dostalo Guzmánově zobecnění, u něž je opomenuta Eukleidovská konstrukce kuželosečky, jež je množinou hledaných bodů. Tato konstrukce je popsána např. v Guzmánově původním článku [8] nebo v [11].

Menší pozornost byla také věnována zobecnění v prostoru, kde se nabízí případná analogie Guzmánova projektivního zobecnění. Zároveň nebyla vyšetřena obalová plocha rovin a byly zanedbány vlastnosti Cayleyho kubiky jako analogie kružnice opsané trojúhelníku.

Tyto souvislosti však musely být vynechány anebo představeny pouze krátce a většinou bez důkazů, neboť jejich podrobné zkoumání by svým rozsahem vydalo na knihu. Přesto byla snaha problematiku vnímat komplexně, jak už je v matematice zvykem.

## Literatura

- [1] BAKER, H.F. An introduction to plane geometry: with many examples. Cambridge: Cambridge University Press, 1943.
- [2] BUDINSKÝ, B. Analytická a diferenciální geometrie. 1. vyd. Praha: SNTL, 1983.
- [3] BUTCHART, J.H. The Deltoid Regarded as the Envelope of Simson Lines. American Mathematical Monthly, 1939 (ročník 46), 85–86.
- [4] COXETER, H.S.M. Introduction to geometry, second edition. New York: John Wiley and Sons, 1989.
- [5] COXETER H.S.M., GREITZER S.L. Geometry revisited (New Mathematical Library). Washington: The Mathematical Association of America, 1967.
- [6] ENDRASS, S. Flächen mit vielen gewöhnlichen Doppelpunkten. DMV-Mitteilungen, 1995 (číslo 4), 17–20.
- [7] GUTENMACHER V., VASILYEV N.B. Lines and curves: A practical geometry handbook. Boston: Birkhäuser, 2004.
- [8] de GUZMÁN, M. An Extension of the Wallace-Simson Theorem: Projecting in Arbitrary Directions. American Mathematical Monthly, 1999 (ročník 106), 574–580.
- [9] de GUZMÁN, M. The envelope of the Wallace-Simson lines of a triangle: A simple proof of the Steiner theorem on the deltoid. RACSAM: Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, 2001 (ročník 95), 57–64
- [10] LOCKWOOD, E.H. A Book of Curves. Cambridge: Cambridge University Press, 1961.

- [11] PECH, P. Klasické vs. počítačové metody při řešení úloh v geometrii. 1. vyd. České Budějovice: Jihočeská univerzita, 2005.
- [12] REKTORYS, K. et al. Přehled užití matematiky. 5. nezm. vyd. Praha: SNTL, 1988.
- [13] STEINER, J. Über eine besondere Curve dritter Klasse (und vierten Grades). Journal für die reine und angewandte Mathematik, 1857 (ročník 53), 231–237. Digitalizováno, dostupné z URL: <http://eudml.org/doc/147666>
- [14] ŠVRČEK, J. Vybrané kapitoly z geometrie trojúhelníka. 2. přeprac. vyd. Praha: Karolinum, 2004.

### **Další použité zdroje a SW:**

- [15] BOGOMOLNY, A. Simson line from Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles. Dostupné z URL: <http://www.cut-the-knot.org/ctk/SimsonLine.shtml>
- [16] BRADLEY J.Ch., SMITH C.G. On a Construction of Hagge. Forum Geometricorum, 2007 (7. ročník), 231–247. Dostupné z URL: <http://forumgeom.fau.edu/FG2007volume7/FG200730index.html>
- [17] GEOGEBRA v. 4, <http://www.geogebra.org>
- [18] JACKSON F., WEISSTEIN E.W. Simson Line. From MathWorld. A Wolfram Web Resource. Dostupné z URL: <http://mathworld.wolfram.com/SimsonLine.html>
- [19] MAPLE v. 13, The Essential Tool for Mathematics and Modelling. MAPLESOFT