STŘEDOŠKOLSKÁ ODBORNÁ ČINNOST

Obor 01 - Matematika a statistika

Jednoduché orientované grafy
Simple Directed Graphs

Autor: **Jakub Kopřiva**
3. ročník, gymnázium

Škola: **Slovanské gymnázium**
tř. Jiřího z Poděbrad 13
771 11 Olomouc

Konzultant: **Mgr. Michal Botur, Ph.D.**
Katedra algebry a geometrie
Přírodovědecká fakulta
Univerzita Palackého Olomouc

Olomouc 2012

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem předloženou práci vypracoval samostatně pod vedením Mgr. Michala Botura, Ph.D. a že jsem všechny použité zdroje uvedl v seznamu literatury.

V Olomouci dne 29. února 2012

Jakub Kopřiva

Poděkování
Na tomto místě bych rád poděkoval Mgr. Michalu Boturovi, Ph.D. za jeho obětavou pomoc, důležité, podnětné a věcné připomínky a rady pozvedávající úroveň předložené práce. Chtěl bych také poděkovat všem ostatním, kteří mi při přípravě práce pomohli.

Obsah

Abstrakt

Práce zkoumá orientované grafy a kongruence na nich, zabývá se především jednoduchými orientovanými grafy, tedy orientovanými grafy majícími jen triviální kongruence. Zavádí pojem turnajového složení orientovaného grafu a dává jej do kontextu s vlastnostmi souvisejícími s kongruencemi na orientovaných grafech. Ve vztahu k turnajovým složením práce také usiluje o charakterizaci jednoduchých turnajů pomocí některých jejich podstruktur.

Klíčová slova: Orientovaný graf, turnaj, jednoduchý orientovaný graf, jednoduchý turnaj, kongruence, turnajové složení, teorie grafů.

Abstract

The paper will discuss directed graphs and their congruences it deals especially with simple directed graphs, which have only trivial congruences. We set forth a new concept of a tournament composition of directed graph and we put it into context with other properties connected with congruences of directed graphs. In relation to tournament compositions the paper also tries to describe simple tournaments in terms of some of their substructures.

Key words: Directed graph, tournament, simple directed graph, simple tournament, congruence, tournament composition, graph theory.

Kapitola 0

Úvod

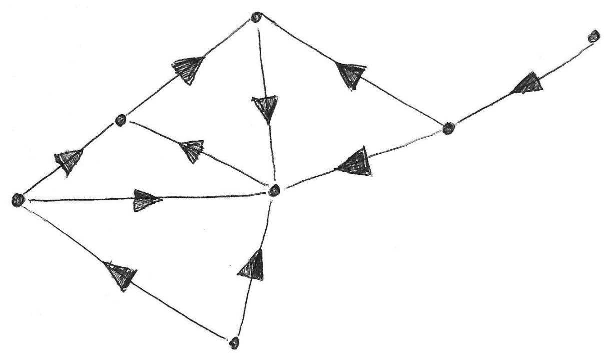
Pojem grafu poprvé zavedl Leonhard Euler[1], jeden z nejvýznamějších matematiků vůbec, když v roce 1736 vyřešil problém *Sedmi mostů města Královce* [5]. Své řešení uvedl slovy:

. . . *Nedávno byl oznámen problém, který zdánlivě zapadal do geometrie, byl však ustanoven tak, že nežádal určení délky, nebyl dokonce výpočetními metodami řešitelný; neváhal jsem proto a zařadil jsem jej do geometrie polohy, kde je zbytečné počítat. . .* [3]

Z řešení tohoto problému pak byla ustavena nová oblast matematiky, teorie grafů. Dobrým úvodem do této zajímavé části matematiky je například [2]. Vývoj a pokrok v této oblasti matematiky daly vzniknout také hlavnímu objektu této práce *oreintovanému grafu* a pojmům s ním souvisejícím. V této kapitole si některé z nich neformálně představíme, jejich definice se nacházejí v Kapitole 1.

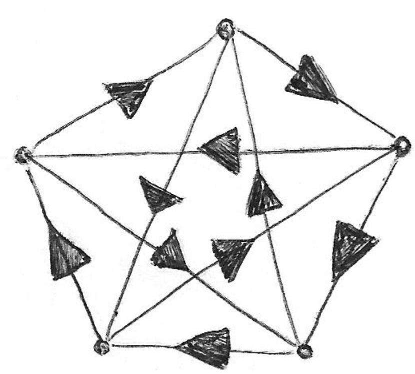
Orientovaný graf je možno jednoduše nakreslit jako několik bodů spojených šipkami, přičemž mezi každými dvěma body může být pouze jedna jednosměrná šipka. [4]

[1]**Leonhard Paul Euler** (15. dubna 1707 Basilej, Švýcarsko – 18. září 1783 Petrohrad, Rusko) byl průkopnický švýcarský matematik. Euler je považován za nejlepšího matematika 18. století a za jednoho z nejlepších matematiků vůbec. Dosáhl významných úspěchů v matematické analýze a teorii grafů. Je také tvůrcem moderní matematické notace. [7]



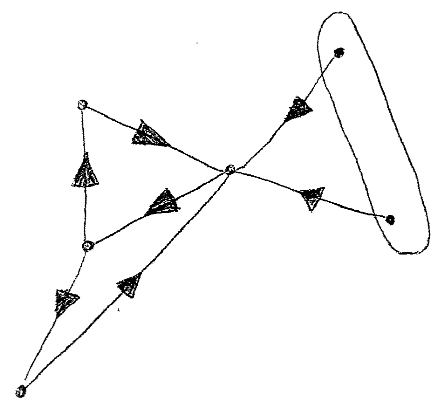
Obrázek 1: Příklad orientovaného grafu.

Turnajem pak rozumíme orientovaný graf, kde jsou šipkou spojeny každé dva vrcholy. [6]



Obrázek 2: Příklad turnaje.

Kongruencí rozumíme rozdělení bodů tvořících orientovaný graf na skupiny bodů, kde ze všech bodů skupiny jde šipka ke každému bodu mimo skupinu stejným směrem, popřípadě ze všech bodů skupiny nejde k nějakému bodu mimo skupinu vůbec.



Obrázek 3: Označená třída kongruence.

Jednoduchý orietovaný graf má pouze dvě tato rozdělení, a to první, kde každý bod je skupinou, a druhé, kde všechny body tvoří jednu skupinu.

V práci je zavedeno ještě několik dalších pojmů, které jsou spolu pak dány do souvislostí. Pro co nejhlubší pochopení obsahu potřebuje čtenář znát základní koncepty abstraktní algebry, zejména pak pojmy: *binární relace, relace ekvivalence, zobrazení* a *izomorfismus*, jejich vysvětlení a definice nalezne téměř v každé učebnici algebry, například v [1], a také se orientovat ve způsobech matematického dokazování, zvláště pak v důkazu sporem.

Práce je rozčleněna do dvou kapitol. V první kapitole je představen a dále rozvíjen pojem turnajového složení orientovaného grafu. Druhá kapitola se věnuje charakterizaci jednoduchých turnajů a grafů pomocí cest.

Tato práce částečně navazuje na loňskou autorovu práci SOČ, z níž přejímá téma a jeden výsledek. Práce vznikala mezi prosincem roku 2011 a dubnem roku 2012 v rámci projektu Badatel, který spadá pod Univerzitu Palackého v Olomouci, pod vedením dr. Michala Botura.

Kapitola 1

Turnajová složení

Všechny uvažované množiny jsou konečné.

Definice 1 Uspořádanou dvojici $\mathbf{D} = (V, E)$, kde $V(\mathbf{D})$ je *množina vrcholů* a $E(\mathbf{D})$ je reflexivní a antisymetrickou binární relací takovou, že $E(\mathbf{D}) \subseteq V(\mathbf{D})^2$, která se nazývá *množina hran*, nazýváme *orientovaným grafem*, dále jen *grafem*.

Definice 2 Graf $\mathbf{T} = (V, E)$, kde pro každé dva vrcholy $x, y \in V(\mathbf{T})$ platí, že $\langle x, y \rangle \in E(\mathbf{T})$, nebo $\langle y, x \rangle \in E(\mathbf{T})$, nazýváme *turnaj*.

Definice 3 Mějme graf $\mathbf{D} = (V, E)$. Množina

$$P(x) = \{y \in V(\mathbf{D}) \,|\, \langle x, y \rangle \in E(\mathbf{D})\}$$

se nazývá *pravé okolí vrcholu* x. Analogicky množina

$$L(x) = \{y \in V(\mathbf{D}) \,|\, \langle y, x \rangle \in E(\mathbf{D})\}$$

se nazvývá *levé okolí vrcholu* x. *Neutrálním okolím vrcholu* x pak nazýváme množinu

$$N(x) = V(\mathbf{D}) - [L(x) \cup P(x)].$$

Budeme značit $L(x) - \{x\} = \overline{L}(x)$ a $P(x) - \{x\} = \overline{P}(x)$.

Definice 4 Mějme graf $\mathbf{D} = (V, E)$. Ekvivalenci θ na něm, kde pro každé vrcholy $x, y, z \in V(\mathbf{D})$ takové, že $\langle x, y\rangle \in \theta$ a $\langle x, z\rangle \notin \theta$, platí že vrcholy x a y mají k vrcholu z stejný vztah, *i.e.* je-li $\langle x, z\rangle \in E(\mathbf{D})$, pak $\langle y, z\rangle \in E(\mathbf{D})$, nazýváme *kongruencí*.

Věta 1 (*Základní věta o kongruencích*)[1] Mějme graf $\mathbf{D} = (V, E)$ a množinu $M \subseteq V(\mathbf{D})$. Je-li splněno

$$\bigcap_{x\in M} \overline{L}(x) \cup \bigcap_{x\in M} \overline{P}(x) \cup \bigcap_{x\in M} N(x) = V(\mathbf{D}) - M,$$

pak tehdy a jen tehdy existuje kongruence $\theta \in \operatorname{Con}\mathbf{D}$ taková, že M je její třídou.

Důkaz. ($\Rightarrow$) Předpokládejme, že existuje nějaká množina $M \subseteq V(\mathbf{D})$, která splňuje

$$\bigcap_{x\in M} \overline{L}(x) \cup \bigcap_{x\in M} \overline{P}(x) \cup \bigcap_{x\in M} N(x) = V(\mathbf{D}) - M,$$

pro každý vrchol $z \in V(\mathbf{D}) - M$ tedy z vlatsností relace $E(\mathbf{D})$ vyplývá $z \in V(\mathbf{D}) - M$

$$z \in \bigcap_{x\in M} \overline{L}(x) \text{ nebo } z \in \bigcap_{x\in M} \overline{P}(x) \text{ nebo } z \in \bigcap_{y\in M} N(x).$$

Uvažujme, že pro nějaké $z \in V(\mathbf{D}) - M$

$$z \in \bigcap_{x\in M} \overline{P}(x),$$

potom musí ale pro všechna $y \in M$ platit, že $z \in \overline{P}(y)$, všechny vrcholy $y \in M$ mají tedy k z stejný vztah, toto platí analogicky pro všechny $z \in V(\mathbf{D}) - M$.

Nyní musíme dokázat, že existuje nějaká kongruence $\theta \in \operatorname{Con}\mathbf{D}$, kde M je její třídou. V libovolné kongruenci musí každý vrchol náležet do nějaké třídy. Množina M je třídou, jelikož její vrcholy mají k vrcholům mimo ni všechny stejný vztah, a také každý jednotlivý vrchol $z \in V(\mathbf{D}) - M$ je třídou kongruence, uvažujeme-li x, y, z z definice kongruence, kde $x = y$, pak má x

[1] Tato věta pochází z autorovy loňské práce SOČ, je uvedena s přepracovaným důkazem. Slouží jako základ pro všechny ostatní výsledky.

ke každému jinému vrcholu stejný vztah jako x. Existuje tedy alespoň jedna kongruence, kde M je její třídou.

($\Leftarrow$) Předpokládejme, že $M \subseteq V(\mathbf{D})$ je třídou kongruence $\theta \in \operatorname{Con} \mathbf{D}$, pak pro libovolné dva vrcholy $x, y \in M$ z definice ekvivalence platí, že $\langle x, y \rangle \in \theta$. Podle defince kongruence musí pro každé $x, y \in M$ a každé $z \in V(\mathbf{D}) - M$ takové, že $\langle x, z \rangle \notin \theta$, tedy $z \in V(\mathbf{D}) - M$, platit, že x i y mají k z stejný vztah. Uvažujme, že $\langle x, z \rangle \in E(\mathbf{D})$, tedy $z \in \overline{P}(x)$, totéž musí z definice kongruence platit i pro každé další $y \in M$, tedy $z \in \overline{P}(y)$. Víme proto, že

$$z \in \bigcap_{y \in M} \overline{P}(y).$$

Obecně můžeme říct, že pro každý $z \in V(\mathbf{D}) - M$

$$z \in \bigcap_{y \in M} \overline{L}(y) \text{ nebo } z \in \bigcap_{y \in M} \overline{P}(y) \text{ nebo } z \in \bigcap_{y \in M} N(y),$$

z tohoto však vyplývá, že pro každý $z \in V(\mathbf{D}) - M$

$$z \in \bigcap_{y \in M} \overline{L}(y) \cup \bigcap_{y \in M} \overline{P}(y) \cup \bigcap_{y \in M} N(y),$$

a proto

$$V(\mathbf{D}) - M \subseteq \bigcap_{y \in M} \overline{L}(y) \cup \bigcap_{y \in M} \overline{P}(y) \cup \bigcap_{y \in M} N(y).$$

Pro libovolné x platí $x \notin \overline{P}(x)$, $x \notin \overline{L}(x)$ a $x \notin N(x)$, proto neexistuje žádné $x \in M$ takové, že by

$$x \in \bigcap_{y \in M} \overline{L}(y) \cup \bigcap_{y \in M} \overline{P}(y) \cup \bigcap_{y \in M} N(y).$$

Tudíž platí rovnost

$$V(\mathbf{D}) - M = \bigcap_{x \in M} \overline{L}(x) \cup \bigcap_{x \in M} \overline{P}(x) \cup \bigcap_{x \in M} N(x).$$

$\square$

Důsledek 1 Mějme graf $\mathbf{D} = (V, E)$ pak pro množinu $M \subseteq V(\mathbf{D})$ musí platit

$$\min_{x \in M} |\overline{L}(x)| + \min_{x \in M} |\overline{P}(x)| + \min_{x \in M} |N(x)| \geq |V(\mathbf{D})| - |M|,$$

aby mohla existovat kongruence $\theta \in \mathrm{Con}\,\mathbf{D}$ taková, že M je její třídou.

Důkaz. Ponecháváme čtenáři. $\square$

Definice 5 Mějme graf $\mathbf{D} = (V, E)$. Množinu $\mathbf{I}(x)$ všech maximálních turnajů $\mathbf{T}_i = (V, E)$, kde $x \in V(\mathbf{T}_i)$ a kde $i \in I$ takových, že pro každé dva turnaje $\mathbf{T}_i = (V, E)$ a $\mathbf{T}_j = (V, E)$ je $V(\mathbf{T}_i) \subseteq V(\mathbf{T}_j)$ tehdy a jen tehdy, je-li $i = j$, nazýváme *turnajovým indexem vrcholu* x. Množinu

$$\mathbf{\Theta}(\mathbf{D}) = \bigcup_{x \in M} \mathbf{I}(x)$$

pak nazýváme *turnajovým složením grafu* $\mathbf{D} = (V, E)$, dále jen složením.

Pro úplnost dokážeme, že libovolný graf $\mathbf{D} = (V, E)$ může mít pouze jedno turnajové složení $\mathbf{\Theta}(\mathbf{D})$. Předpokládejme, že pro nějaký graf $\mathbf{D} = (V, E)$ existují dvě turnajová složení $\mathbf{\Theta}_1(\mathbf{D}) \neq \mathbf{\Theta}_2(\mathbf{D})$. Potom ale musí existovat turnaj $\mathbf{T} \in \mathbf{\Theta}_1(\mathbf{D})$ takový, že $\mathbf{T} \notin \mathbf{\Theta}_2(\mathbf{D})$. Množina $E(\mathbf{T})$ ale musí obsahovat alespoň jednu hranu $\langle x, y \rangle$, kterou neobsahuje žádný jiný turnaj v $\mathbf{\Theta}_1(\mathbf{D})$, v opačném případě by totiž turnaj $\mathbf{T} = (V, E)$ nepatřil do žádného turnajového indexu a tudíž ani do $\mathbf{\Theta}_1(\mathbf{D})$. Vzhledem k tomu, že bezesporu platí

$$E(\mathbf{D}) = \bigcup_{\mathbf{T}_i \in \mathbf{\Theta}_1(\mathbf{D})} E(\mathbf{T}_i) = \bigcup_{\mathbf{T}_j \in \mathbf{\Theta}_2(\mathbf{D})} E(\mathbf{T}_j),$$

musí existovat turnaj $\mathbf{T}' = (V, E)$ takový, že $\langle x, y \rangle \in E(\mathbf{T}')$. Budeme nyní diskutovat dvě situace

1. $V(\mathbf{T}) \subset V(\mathbf{T}')$

2. $V(\mathbf{T}) \supset V(\mathbf{T}')$

Ad 1. Náleží-li $\mathbf{T} \in \mathbf{\Theta}_1(\mathbf{D})$, pak musí existovat $x \in V(\mathbf{D})$, pro který $\mathbf{T} \in \mathbf{I}(x)$.

Dokážeme nyní, že pokud $\mathbf{T} \in \mathbf{I}(x)$, pro nějaké $x \in V(\mathbf{D})$, pak totéž platí pro každé $y \in V(\mathbf{T})$. Předpokládejme tedy, že to ta není, existuje tudíž nějaké $z \in V(\mathbf{T})$ takové, že $\mathbf{T} \notin \mathbf{I}(z)$. Pak ovšem podle definice turnajového indexu musí existovat nějaký turnaj $\mathbf{T}' \in \mathbf{I}(z)$, pro který $V(\mathbf{T}) \subset V(\mathbf{T}')$, ovšem pro libovolné $y \in V(\mathbf{T})$ také platí $\mathbf{T}' \in \mathbf{I}(y)$ a tedy $\mathbf{T} \notin \mathbf{I}(y)$, což je ale v rozporu s předpokladem.

Díky výše dokázanému faktu musí i $\mathbf{T}' \in \mathbf{I}(x)$, toto je ovšem v rozporu s definicí turnajového indexu, protože naším předpokladem je, že $V(\mathbf{T}) \subset V(\mathbf{T}')$, turnaj $\mathbf{T} \notin \mathbf{I}(y)$ pro žádné $y \in V(\mathbf{T})$. Složení $\mathbf{\Theta}_1(\mathbf{D})$ tedy obsahuje turnaj, který není v žádném turnajovém indexu, což odporuje jeho definici.

Ad 2. Analogicky jako situace **1.**

Věta 2 Mějme graf $\mathbf{D} = (V, E)$ a kongruenci $\varphi \in \operatorname{Con} \mathbf{D}$, pak pro každou třídu této kongruence M platí

1. pro libovolné $x \in M$

$$\bigcap_{y \in M} \mathbf{I}(y) = \mathbf{I}(x),$$

2. nebo

$$\bigcap_{y \in M} \mathbf{I}(y) = \emptyset.$$

Důkaz. Předpokládejme, že věta neplatí. Existuje tedy nějaká kongruence $\varphi \in \operatorname{Con} \mathbf{D}$ se třídou M, kde existuje $x \in M$ takový, že

$$\bigcap_{y \in M} \mathbf{I}(y) \subset \mathbf{I}(x).$$

Toto ovšem znamená, že existuje vrchol $z \in M$ a turnaj $\mathbf{T} \in \mathbf{I}(x)$ takové, že $z \notin V(T)$. Nastávají dvě situace

1. $V(\mathbf{T}) \subset M$, nebo

2. $V(\mathbf{T}) \not\subset M$

Ad 1. Pokud platí $V(\mathbf{T}) \subset M$, pak nemůže existovat žádný jiný turnaj $\mathbf{T}' = (V, E)$ takový, že by $M \subseteq V(\mathbf{T}')$, protože by potom platilo $V(\mathbf{T}) \subseteq$

$V(\mathbf{T}')$, toto by ale bylo v rozporu s definicí turnajového indexu. Proto

$$\bigcap_{x \in M} \mathbf{I}(x) = \emptyset,$$

zde ale docházíme ke sporu s předpokladem.

Ad 2. Pokud platí $V(\mathbf{T}) \not\subset M$, pak určitě existuje nějaké $a \in V(\mathbf{T})$ takové, že $a \notin M$. Víme ale, že $y \in V(\mathbf{T})$, tedy $a \in \overline{L}(y) \cup \overline{P}(y)$, ale $a \in N(z)$. Protože $a \notin M$, dostáváme se do rozporu s **Větou 1**, M tedy není třídou kongruence, to je ale ve sporu s předpokladem. □

Definice 6 Mějme graf $\mathbf{D} = (V, E)$. Kongruence jejichž třídy jsou jednotlivé prvky z $V(\mathbf{D})$, nebo jejíž třídou je celá množina $V(\mathbf{D})$, nazýváme *triviální kongruence*. Má-li nějaký graf $\mathbf{D} = (V, E)$ pouze triviální kongruence, nazýváme ho *jednoduchý*.

Definice 7 Mějme graf $\mathbf{D} = (V, E)$, pokud pro každé dvě množiny $X, Y \subset V(\mathbf{D})$ takové, že $X \cup Y = V(\mathbf{D})$ a zároveň $X \cap Y = \emptyset$, existují vrcholy $x \in X$ a $y \in Y$ takové, že $\langle x, y \rangle \in E(\mathbf{D})$, nebo $\langle y, x \rangle \in E(\mathbf{D})$, pak tento graf nazýváme *souvislý*.

Věta 3 Mějme souvislý graf $\mathbf{D} = (V, E)$. Jsou-li všechny turnaje v turnajovém složení $\mathbf{\Theta}(\mathbf{D})$ jednoduché pak

I. neexistuje žádná třída $M \subseteq V(\mathbf{D})$ nějaké netriviální kongruence $\varphi \in \mathrm{Con}\,\mathbf{D}$ taková, že pro libovolné $x \in M$

$$\bigcap_{y \in M} \mathbf{I}(y) = \mathbf{I}(x),$$

II. pro každé dva vrcholy $x, y \in M$ třídy $M \subseteq V(\mathbf{D})$ nějaké netriviální kongruence $\varphi \in \mathrm{Con}\,\mathbf{D}$, pro kterou

$$\bigcap_{y \in M} \mathbf{I}(y) = \emptyset,$$

je $\mathbf{I}(x) \cap \mathbf{I}(y) = \emptyset$.

Důkaz. Budeme dokazovat tvrzení **I.** a **II.** zvlášť.

Ad I.

Lemma 1 Mějme graf $\mathbf{D} = (V, E)$, množinu $M \subseteq V(\mathbf{D})$ a kongruenci $\varphi \in \mathrm{Con}\,\mathbf{D}$ takovou, že M je její třídou, pro každý jejíž vrchol $x \in M$ platí

$$\bigcap_{y \in M} \mathbf{I}(y) = \mathbf{I}(x).$$

Pak pro M musí v každém turnaji $\mathbf{T}_i \in \mathbf{I}(y)$ existovat kongruence $\theta_i \in \mathrm{Con}\,\mathbf{T}_i$, jejíž je M třídou.

Důkaz. Předpokládejme, že lemma neplatí. Potom existuje nějaký vrchol $x \in M$ a turnaj $\mathbf{T} \in \mathbf{I}(x)$, kde $M \subseteq V(\mathbf{T})$ a kde M není třídou žádné kongruence. Pokud by neplatilo $M \subseteq V(\mathbf{T})$, pak by pro libovolný vrchol $y \in M$ neplatilo

$$\bigcap_{x \in M} \mathbf{I}(x) = \mathbf{I}(y),$$

došli bychom tedy ke sporu s předpokladem. Pokud by platilo, že $M = V(\mathbf{T})$, pak by z definice turnajového indexu $|\mathbf{I}(x)| = 1$ pro libovolný $x \in M$ a lemma by platilo, vzhledem k tomu, že M by bylo třídou triviální kongruence. Z toho tedy vyplývá, že $M \subsetneq V(\mathbf{T})$, musí tedy existovat nějaké $a \in V(\mathbf{T})$ a zároveň $a \notin M$ takové, že k němu nemají všechny vrcholy z M stejný vztah. Z toho však můžeme vyvodit

$$a \notin \bigcap_{x \in M} \overline{L}(x) \text{ a zároveň } a \notin \bigcap_{x \in M} \overline{P}(x) \text{ a zároveň } a \notin \bigcap_{x \in M} N(x).$$

Protože $a \notin M$ dostáváme se do rozporu s **Větou 1**, M tedy není třídou žádné kongruence na $\mathbf{D} = (V, E)$, toto je ale ve sporu s předpokladem. □

Na jednoduchém turnaji nalezneme z definice jen triviální kongruence. Pro třídu $M \subset V(\mathbf{D})$ nějaké netriviální kongruence $\varphi \in \mathrm{Con}\,\mathbf{D}$, pro libolný jejíž prvek $x \in M$ platí

$$\bigcap_{y \in M} \mathbf{I}(y) = \mathbf{I}(x).$$

Protože se jedná o třídu nějaké netriviální kongruence $\varphi \in \mathrm{Con}\,\mathbf{D}$, pak musí být $|V(\mathbf{D})| > |M| > 1$. Podle výše dokázaného lemmatu musí být třída M třídou kongruence ve všech turnajích $\mathbf{T}_i \in \mathbf{I}(x)$, pro libovné $x \in M$, pro všechny turnaje $\mathbf{T}_i = (V, E)$ tedy vyvodíme, že $M = V(\mathbf{T}_i)$ pro každé $i \in I$, proto $\mathbf{I}(x) = 1$ pro libovolné $x \in M$. Musí tedy existovat turnaj $\mathbf{T} = (V, E)$, kde $M = V(\mathbf{T})$ a pro každý vrchol $x \in V(\mathbf{T})$ je $|\mathbf{I}(x)| = 1$.

Protože $V(\mathbf{T}) \subset V(\mathbf{D})$, určitě existuje množina $N \subset V(\mathbf{D})$, pro kterou platí $M \cup N = V(\mathbf{D})$ a zároveň $M \cap N = \emptyset$. Ovšem jelikož $\mathbf{I}(x) = 1$, pro každé $x \in M$, pak nemůže existovat žádný vrchol $z \in M$ a vrchol $a \in N$ takové, že $\langle a, z \rangle \in E(\mathbf{D})$, nebo $\langle z, a \rangle \in E(\mathbf{D})$, protože by platilo, že existuje turnaj $\mathbf{T}' \in \mathbf{I}(a)$, kde $V(\mathbf{T}') = \{a, z\}$ a z čehož by vyplývalo, že $|\mathbf{I}(a)| \geq 2$, což je v rozporu s výše dokázaným faktem. Aby M byla třídou nějaké netriviální kongruence $\varphi \in \mathrm{Con}\, \mathbf{D}$, musel by $\mathbf{D} = (V, E)$ být nesouvislý, tímto docházíme ale ke sporu s předpokladem.

Ad II.
Lemma 2 Mějme graf $\mathbf{D} = (V, E)$, množinu $M \subseteq V(\mathbf{D})$ a kongruenci $\varphi \in \mathrm{Con}\, \mathbf{D}$ takovou, že M je její třídou, pro kterou platí

$$\bigcap_{x \in M} \mathbf{I}(x) = \emptyset,$$

pak nemůže pro žádné $x \in M$ existovat turnaj $\mathbf{T} = (V, E)$, pro který by platilo $V(\mathbf{T}) \subseteq M$.

Důkaz. Lemma vezměme za neplatné. Potom pro nějaké $x \in M$ existuje turnaj $\mathbf{T} = (V, E)$, pro který platí $V(\mathbf{T}) \subseteq M$. Budeme diskutovat dvě situace

1. $V(\mathbf{T}) = M$, nebo

2. $V(\mathbf{T}) \subset M$

Ad 1. Tento případ byl již diskutován v důkazu **Lemma 1**. Došli bychom k tomu, že pro libovolné $y \in M$

$$\bigcap_{x \in M} \mathbf{I}(x) = \mathbf{I}(y),$$

toto je ale v rozporu s předpokladem.

Ad 2. Z platnosti $V(\mathbf{T}) \subset M$ a definice turnajového indexu nemůže existovat žádný turnaj $\mathbf{T}' \in \mathbf{I}(x)$, kde by $M \subseteq V(\mathbf{T}')$, protože by $V(\mathbf{T}) \subseteq V(\mathbf{T}')$.

Protože předpokládáme, že M je třídou nějaké netriviální kongruence $\varphi \in \mathrm{Con}\,\mathbf{D}$, pak pro ni z **Věty 1** musí

$$\bigcap_{x \in M} \overline{L}(x) \cup \bigcap_{x \in M} \overline{P}(x) \cup \bigcap_{x \in M} N(x) = V(\mathbf{D}) - M,$$

bereme-li graf $\mathbf{D} = (V, E)$ jako souvislý, pak z definice souvislosti máme $a \in M$ a $b \in V(\mathbf{D}) - M$ takové, že $\langle a, b \rangle \in E(\mathbf{D})$, nebo $\langle b, a \rangle \in E(\mathbf{D})$, jinak řečeno $b \in \overline{L}(x) \cup \overline{P}(x)$. Jelikož M je třídou nějaké netriviální kongruence $\varphi \in \mathrm{Con}\,\mathbf{D}$, pak pro ni platí

$$b \in \bigcap_{x \in M} \overline{L}(x) \cup \bigcap_{x \in M} \overline{P}(x).$$

Ovšem pak najdeme turnaj $\mathbf{T}' = (V, E)$, kde $V(\mathbf{T}) \cup \{b\} \subseteq V(\mathbf{T}')$, z definice turnajového indexu potom $\mathbf{T} \notin \mathbf{I}(x)$, protože $\mathbf{T}' \in \mathbf{I}(x)$. To je ale ve sporu s předpokladem. □

Lemma 3 Mějme graf $\mathbf{D} = (V, E)$, množinu $M \subseteq V(\mathbf{D})$ a kongruenci $\theta \in \mathrm{Con}\,\mathbf{D}$ takovou, že M je její třídou, pro kterou platí

$$\bigcap_{x \in M} \mathbf{I}(x) = \emptyset,$$

pak je $M_i = V(\mathbf{T}_i) \cap M$, kde

$$\mathbf{T}_i \in \bigcup_{x \in M} \mathbf{I}(x),$$

třídou nějaké kongruence $\theta \in \mathrm{Con}\,\mathbf{T}_i$.

Důkaz. Předpokládejme, že můžeme najít protipříklad. Existuje tedy nějaký $x \in M$ takový, že v určitém turnaji $\mathbf{T}_i \in \mathbf{I}(x)$ není $M_i = V(\mathbf{T}_i) \cap M$ třídou žádné kongruence. Musí tedy existovat nějaké $y \in M_i$ a $z \in V(\mathbf{T}_i) - M_i$ takové, že x a y nemají k z stejný vztah, což plyne z definice kongruence.

Platí $z \notin M$, tedy

$$\bigcap_{x \in M} \overline{L}(x) \cup \bigcap_{x \in M} \overline{P}(x) \cup \bigcap_{x \in M} N(x) \supseteq V(\mathbf{D}) - (M \cup \{z\}),$$

toto je ale v rozporu s **Větou 1**. Množina M tedy není třídou žádné kongruence, dostáváme se ale do sporu s přepokladem. □

Pro všechny turnaje

$$\mathbf{T}_i \in \bigcup_{x \in M} \mathbf{I}(x)$$

zároveň tedy musí za předpokladů tvrzení **II** platit, že $|M_i| = 1$. Vzhledem k **Lemma 3** pro každé $x \in M$ a každý turnaj $\mathbf{T}_i \in \mathbf{I}(x)$, platí buď $|M_i| = 1$, nebo $|M_i| = |V(\mathbf{T}_i)|$, jelikož je platná také **Lemma 2**, pak nemůže pro žádné $x \in M$ existovat turnaj $\mathbf{T} = (V, E)$, pro který by platilo $V(\mathbf{T}) \subseteq M$. Proto za předpokladů tvrzení **II** musí platit, že $|M_i| = 1$. Jelikož z každého turnaje

$$\mathbf{T}_i \in \bigcup_{x \in M} \mathbf{I}(x)$$

náleží do M jen jeden prvek, pak musí pro každé dva $x, y \in M$ platit, že $\mathbf{I}(x) \cap \mathbf{I}(y) = \emptyset$, tímto jsme dokázali i část **II**. □

Definice 8 Mějme množinu turnajů $\mathbf{M} = \{\mathbf{T}_i = (V, E) \mid i \in I\}$. *Přiřazením* pak nazveme zobrazení

$$\gamma : \bigcup_{\mathbf{T}_i \in \mathbf{M}} V(\mathbf{T}_i) \longrightarrow V(\mathbf{D}_\gamma),$$

kde $\langle a, b \rangle \in E(\mathbf{D}_\gamma)$ tehdy a jen tehdy, je-li $\langle x, y \rangle \in E(\mathbf{T}_i)$ pro každá $\gamma(x) = a$ a $\gamma(y) = b$. [2] Pro graf $\mathbf{D}_\gamma = (V, E)$ platí, že $\mathbf{\Theta}(\mathbf{D}_\gamma) = \mathbf{M}$.[3]

Věta 4 Mějme množinu turnajů $\mathbf{M} = \{\mathbf{T}_i = (V, E) \mid i \in I\}$, pak libovolný souvislý graf $\mathbf{D} = (V, E)$ takový, že $\mathbf{\Theta}(\mathbf{D}) = \mathbf{M}$ je jednoduchý tehdy a jen tehdy, obsahuje-li $\mathbf{M} = \{\mathbf{T}_i = (V, E) \mid i \in I\}$ pouze jednoduché a navzájem neizomorfní turnaje.

[2] Pro turnaje $\mathbf{T}'_{i,j} \subseteq \mathbf{T}_{i,j}$ může tedy platit $\gamma[V(\mathbf{T}'_i)] = \gamma[V(\mathbf{T}'_j)]$, jen existuje-li izomorfismus $f : \mathbf{T}'_i \longrightarrow \mathbf{T}'_j$ takový, že pro každé $x \in V(\mathbf{T}'_i)$ a každé $y \in V(\mathbf{T}'_j)$ platí $\gamma(x) = \gamma(y)$ tehdy a jen tehdy, platí-li $f(x) = f(y)$.

[3] Pro žádné dva turnaje neplatí, že $\gamma[V(\mathbf{T}_i)] \subseteq \gamma[V(\mathbf{T}'_j)]$ takové, že $i \neq j$.

Důkaz. Pro zjednodušení důkazu nejdříve dokážeme dvě pomocná tvrzení.

Lemma 4 Mějme množinu turnajů $\mathbf{M} = \{\mathbf{T}_i = (V, E) \mid i \in I\}$, kde nejsou všechny turnaje jednoduché, pak existuje souvislý graf $\mathbf{D} = (V, E)$ takový, že $\mathbf{\Theta}(\mathbf{D}) = \mathbf{M}$, který není jednoduchý.

Důkaz. Sestrojíme přiřazení γ z množiny turnajů $\mathbf{M}$ takové, že graf $\mathbf{D}_\gamma = (V, E)$ je souvislý a není jednoduchý. Nejdříve dokážeme, že požadovaná souvislost grafu $\mathbf{D}_\gamma = (V, E)$ vylučuje možnost injektivního zobrazení $V(\mathbf{T}_i)$, kde $\mathbf{T}_i \in \mathbf{M}$. Předpokládejme tedy opak, potom ale pro každé $x \in V(\mathbf{T}_i)$ platí, že $L[\gamma(x)] \cup P[\gamma(x)] = \gamma[V(\mathbf{T}_i)]$, neexistuje tedy žádné $y \in V(\mathbf{D}_\gamma)$ a zároveň $y \notin \gamma[V(\mathbf{T}_i)]$ takové, že by $y \in \overline{L}(x)$, nebo $y \in \overline{P}(x)$. Dostáváme se ale do sporu s definicí souvislosti.

Jelikož všechny turnaje $\mathbf{T}_i \in \mathbf{M}$ nejsou jednodnoduché, můžeme najít turnaj $\mathbf{T}_j = (V, E)$ s množinou $M \subset V(\mathbf{T}_j)$, která je třídou nějaké netriviální kongruence $\varphi \in \mathrm{Con}\ \mathbf{T}_j$. Existuje pak přiřazení γ zobrazí množinu M injektivně, protože definice přiřazení udává podmínky jen pro neijektivní zobrazení a podmínka souvislosti neumožňuje injektivně zobrazovat $V(\mathbf{T}_i)$, kde $\mathbf{T}_i \in \mathbf{M}$, což se ale M netýká. Jelikož ale pro každé $y \in \gamma[V(\mathbf{T}_j) - M]$ platí, že

$$y \in \bigcap_{x \in \gamma(M)} \overline{L}(x) \cup \bigcap_{x \in \gamma(M)} \overline{P}(x),$$

protože M je třídou nějaké netriviální kongruence $\varphi \in \mathrm{Con}\ \mathbf{T}_j$. Jelikož je M zobrazená injektivně pak pro každé $z \in V(\mathbf{D}_\gamma) - \gamma[V(\mathbf{T}_j)]$ platí, že

$$z \in \bigcap_{x \in \gamma(M)} N(x).$$

Množina $\gamma(M)$ tedy splňuje podmínku danou **Větou 1** a je tedy třídou nějaké netriviální kongruence $\zeta \in \mathrm{Con}\ \mathbf{D}_\gamma$. □

Důkaz. ($\Rightarrow$) Uvažujeme tedy množinu turnajů $\mathbf{M} = \{\mathbf{T}_i = (V, E) \mid i \in I\}$ takovou, že libovolný souvislý graf $\mathbf{D} = (V, E)$, který $\mathbf{\Theta}(\mathbf{D}) = \mathbf{D}$ je jednoduchý. Každý turnaj $\mathbf{T}_i \in \mathbf{M}$ musí být jednoduchý, jelikož existoval-li by nejednoduchý turnaj $\mathbf{T}_j \in \mathbf{M}$, pak by podle **Lemma 4** existoval nejdnoduchý graf $\mathbf{D}_\gamma = (V, E)$, kde γ je přiřazení z množiny turnajů $\mathbf{M}$. Dokážeme nyní ještě jedno tvrzení.

Lemma 5 Mějme množinu turnajů $\mathbf{M} = \{\mathbf{T}_i = (V, E) \mid i \in I\}$. Obsahuje-li tato množina dva různé izomorfní turnaje $\mathbf{T}_i, \mathbf{T}_j \in \mathbf{M}$, pak existuje přiřazení γ takové, že souvislý graf $\mathbf{D}_\gamma = (V, E)$ není jednoduchý.

Důkaz. Uvažujme přiřazení γ takové, že $|\gamma[V(\mathbf{T}_i)] \cap \gamma[V(\mathbf{T}_j)]| = |V(\mathbf{T}_i)| - 1$ a že $|\mathbf{I}(x)| = 1$ a $|\mathbf{I}(y)| = 1$, označíme-li $x \in \gamma[V(\mathbf{T}_i)] - \gamma[V(\mathbf{T}_j)]$ a $y \in \gamma[V(\mathbf{T}_j)] - \gamma[V(\mathbf{T}_i)]$, zobrazení takovýchto vlastností můžeme podle definice sestrojit, protože tyto dva turnaje $\mathbf{T}_i, \mathbf{T}_j \in \mathbf{M}$ jsou izomorfní. Potom ale $\overline{L}(x) = \overline{L}(y)$ a zároveň $\overline{P}(x) = \overline{P}(y)$, tedy $N(x) - \{y\} = V(\mathbf{D}_\gamma) - [\overline{L}(x) \cup \overline{P}(x) \cup \{x\} \cup \{y\}] = V(\mathbf{D}_\gamma) - [\overline{L}(y) \cup \overline{P}(y) \cup \{y\} \cup \{x\}] = N(y) - \{x\}$. Rovnosti okolí můžeme zapsat jako

$$\overline{L}(x) \cup \overline{P}(x) \cup [N(x) \cap N(y)] = V(\mathbf{D}_\gamma) - \{x, y\},$$

množina $\{x, y\}$ splňuje podmínky dané **Větou 1** a je tedy třídou nějaké netriviální kongruence $\varphi \in \mathrm{Con}\, \mathbf{D}_\gamma$. □

Množina turnajů $\mathbf{M}$ tedy nemůže obsahovat žádné dva izomorfní turnaje $\mathbf{T}_i, \mathbf{T}_j \in \mathbf{M}$. Tímto jsme dokázali implikaci zleva.

($\Leftarrow$) Předpokládejme množinu turnajů $\mathbf{M} = \{\mathbf{T}_i = (V, E) \mid i \in I\}$, která obsahuje pouze jednoduché a navzájem neizomorfní turnaje.

Uvažujeme nejednoduchý, souvislý graf $\mathbf{D} = (V, E)$ takový, že $\mathbf{\Theta}(\mathbf{D}) = \mathbf{M}$. Jelikož množina M neobsahuje ždáné dva izomorfní turnaje, pak pro libovolné dva turnaje $\mathbf{T}_i, \mathbf{T}_j \in \mathbf{M}$ platí, že $|V(\mathbf{T}_i) \cap V(\mathbf{T}_j)| \geq 2$. Podle **Věty 3** může graf $\mathbf{D} = (V, E)$ takový, že $\mathbf{\Theta}(\mathbf{D})$ obsahuje pouze jednoduché turnaje, mít pouze třídu kongruence M takovou, že pro libovolné dva vrcholy $x, y \in M$ platí, že $\mathbf{I}(x) \cap \mathbf{I}(y) = \emptyset$. Z tohoto pro libovolné dva vrcholy $x, y \in M$ vyplývá, že $y \in N(x)$, jinak by totiž existoval turnaj $\mathbf{T}_i \in \mathbf{\Theta}(\mathbf{D})$, pro který $\langle x, y\rangle \in E(\mathbf{T}_i)$, nebo $\langle y, x\rangle \in E(\mathbf{T}_i)$. Uvažujme nyní, že M je třídou nějaké netriviální kongruence $\varphi \in \mathrm{Con}\, \mathbf{D}$, podle **Věty 1**

$$\bigcap_{x \in M} \overline{L}(x) \cup \bigcap_{x \in M} \overline{P}(x) \cup \bigcap_{x \in M} N(x) = V(\mathbf{D}) - M.$$

Jelikož je graf $\mathbf{D} = (V, E)$ souvislý a pak musí být množina $\bigcap_{x \in M} \overline{L}(x) \cup \bigcap_{x \in M} \overline{P}(x)$ neprázdná. Protože pro každé dvě $x, y \in M$ platí, jak jsme ukázli výše, $y \in N(x)$, musí pro libovolné $z \in M$ platit

$$\overline{L}(z) = \bigcap_{x \in M} \overline{L}(x) \text{ a zároveň } \overline{P}(z) = \bigcap_{x \in M} \overline{P}(x).$$

Označme $\mathbf{T}_i = (V, E)$ nějaký turnaj takový, že $x \in M$ a zároveň $x \in V(\mathbf{T}_i)$, analogicky $\mathbf{T}_j = (V, E)$ nějaký turnaj takový, že $y \in M$ a zároveň $y \in V(\mathbf{T}_j)$. Protože ale $\overline{L}(x) = \overline{L}(y)$ a zároveň $\overline{P}(x) = \overline{P}(y)$ a $y \in N(x)$, pak musí platit, že $|V(\mathbf{T}_i) \cap V(\mathbf{T}_j)| = 1$. To je ale ve sporu s předpokladem, turnaje $\mathbf{T}_i, \mathbf{T}_j \in \mathbf{M}$ tedy musí být izomorfní.

Dokázali jsme tedy, že libovolný graf souvislý graf $\mathbf{D} = (V, E)$ takový, že $\mathbf{\Theta}(\mathbf{D}) = \mathbf{M}$, kde $\mathbf{M}$ je předpokládaných vlastností, musí být jednoduchý. $\square$

Kapitola 2

Jednoduché turnaje a grafy

Před dalšími větami přijměme další notační konvenci: graf $\mathbf{D} = (V, E)$, kde $V(\mathbf{D}) = M$, nebo $|V(\mathbf{D})| = n$, budeme značit $\mathbf{D}|_M = (V, E)$, respektive $\mathbf{D}|_n = (V, E)$.

Definice 9 Mějme graf $\mathbf{P}|_n = (V, E)$, platí-li pro něj, že $|V(\mathbf{P}|_n)| = n$ a zároveň $V(\mathbf{P}|_n) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ a pouze $\langle x_i, x_{i+1}\rangle \in E(\mathbf{P}|_n)$ pro $1 \leq i \leq n-1$, pak tento graf nazýváme *n-prvkovou cestou*. Mějme cestu $\mathbf{P}|_n = (V, E)$, kde $V(\mathbf{P}|_n) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, označíme pak $x_1 = \alpha(\mathbf{P}|_n)$ a $x_n = \omega(\mathbf{P}|_n)$. *Prodloužením* cesty $\mathbf{P}|_n = (V, E)$, kde $V(\mathbf{P}|_n) = \{x_1, \ldots, x_n\}$, vrcholem y rozumíme cestu $\mathbf{P}|_{n+1} = (V, E)$, kde $V(\mathbf{P}|_{n+1}) = \{\ldots x_{i-1}, y, x_i \ldots\}$, kde také samozřejmě $|V(\mathbf{P}|_{n+1})| = n + 1$ a kde $y \neq \alpha(\mathbf{P}|_{n+1})$ a $y \neq \omega(\mathbf{P}|_{n+1})$. *Kružnicí o n prvcích* $\overline{\mathbf{P}}|_n = (V, E)$ rozumíme cestu $\mathbf{P}|_n = (V, E)$, kde $V(\mathbf{P}|_n) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ a pro kterou platí $\langle x_n, x_1\rangle \in E(\overline{\mathbf{P}}|_n)$. *Uzavřením* cesty $\mathbf{P}|_n = (V, E)$, kde $V(\mathbf{P}|_n) = \{x_1, \ldots, x_n\}$, vrcholem y rozumíme kružnici $\overline{\mathbf{P}}|_{n+1} = (V, E)$, kde $V(\overline{\mathbf{P}}|_{n+1}) = \{\ldots x_n, y, x_1 \ldots\}$.

Věta 5 (*Základní věta o jednoduchých turnajích*) Turnaj $\mathbf{T} = (V, E)$, kde $|V(\mathbf{T})| \geq 3$, je jednoduchý tehdy a jen tehdy, je-li každá cesta $\mathbf{P}|_n = (V, E)$, kde $|V(\mathbf{T})| > n \geq 2$, prodloužitelná na cestu $\mathbf{P}|_{n+1} = (V, E)$ nebo uzavřitelná na kružnici $\overline{\mathbf{P}}|_{n+1} = (V, E)$.

Důkaz. Nejdříve formulujeme a dokážeme dvě pomocná tvrzení.

Lemma 6 Pro libovolný turnaj $\mathbf{T}|_n = (V, E)$ existuje cesta $\mathbf{P}|_n = (V, E)$.

Důkaz. Předokládejme, že lemma neplatí. Vezměme tedy, s ohledem na počet vrcholů, nejmenší protipříklad $\mathbf{T}|_n = (V, E)$. Potom pro každý turnaj $\mathbf{T}|_{n-1} \subset \mathbf{T}|_n$ musí lemma platit, existuje tedy určitě cesta $\mathbf{P}|_{n-1} = (V, E)$. Vyberme nějaký turnaj $\mathbf{T}|_{n-1} = (V, E)$ vzhledem k prvku $z \in V(\mathbf{T}|_n) - V(\mathbf{T}|_{n-1})$

1. $|\overline{L}(z)| = n - 1$, nebo $|\overline{P}(z)| = n - 1$,

2. jinak.

Ad 1. Předpokládejme, že platí $|\overline{L}(z)| = n - 1$, pro všechna $x \in V(\mathbf{T}|_{n-1})$ tedy musí $\langle x, z\rangle \in E(\mathbf{T}|_n)$. Označme $a = \alpha(\mathbf{P}|_{n-1})$ a $b = \omega[\mathbf{P}|_{n-1}]$, protože $a \in V(\mathbf{T}|_{n-1})$, pak musí platit, že $\langle b, z\rangle \in E(\mathbf{T}|_n)$. Můžeme tedy vytvořit cestu $\mathbf{P}|_n = (V, E)$, kde $V(\mathbf{P}|_n) = \{a, \ldots, b, z\}$, tímto se však dostáváme do sporu s předpokladem. Pro situaci $|\overline{P}(z)| = n - 1$, dokážeme analogicky připojením z před $\alpha(\mathbf{P}|_n)$.

Ad 2. Jelikož $|\overline{L}(z)| \neq n-1$ ani $|\overline{P}(z)| \neq n-1$ a turnaj $\mathbf{T}|_{n-1} = (V, E)$ má cestu $\mathbf{P}|_{n-1} = (V, E)$, kde $V(\mathbf{P}|_{n-1}) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, musí existovat vrchol x_i takový, že $x \in \overline{L}(z)$ a že i je maximální. Pro vrchol $x_{i+1} \in V(\mathbf{P}|_{n-1})$ tedy musí platit, že $y \in \overline{P}(z)$, proto $\langle x_i, z\rangle, \langle z, x_{i+1}\rangle \in E(\mathbf{T}|_n)$. Můžeme tedy vytvořit cestu $\mathbf{P}|_n = (V, E)$, kde $V(\mathbf{P}|_n) = \{a, \ldots, x_i, z, x_{i+1}, \ldots, b\}$, označíme-li prvky $a = \alpha(\mathbf{P}|_n)$ a také $b = \omega(\mathbf{P}|_n)$, tímto se ale dostáváme do sporu s přepokladem. □

Lemma 7 Turnaj $\mathbf{T} = (V, E)$ je jednoduchý tehdy a jen tehdy, existují-li pro každou množinu $M \subseteq V(\mathbf{T})$ vrcholy $x, y \in M$ a $z \in V(\mathbf{T}) - M$ takové, že $z \in \overline{L}(x)$ a zároveň $z \in \overline{P}(y)$.

Důkaz. ($\Rightarrow$) Jelikož je turnaj $\mathbf{T} = (V, E)$ jednoduchý, pak žádná množina $M \subseteq V(\mathbf{T})$ nemůže být třídou žádné netriviální kongruence $\varphi \in \mathrm{Con}\,\mathbf{T}$, pro žádnou množinu $M \subseteq V(\mathbf{T})$ nemůže tedy platit **Věta 1**, proto

$$\bigcap_{x \in M} \overline{L}(x) \cup \bigcap_{x \in M} \overline{P}(x) \subset V(\mathbf{D}) - M.$$

Musí tedy existovat alespoň jedno $z \in V(\mathbf{T}) - M$ takové, že

$$z \notin \bigcap_{x \in M} \overline{L}(x) \text{ a zároveň } z \notin \bigcap_{x \in M} \overline{P}(x),$$

tedy musí existovat $x \in M$ takové, že $z \in \overline{L}(x)$, a nějaké $y \in M$ takové, že $z \in \overline{P}(y)$.

($\Leftarrow$) Protože pro každou množinu $M \subseteq V(\mathbf{T})$ existují vrcholy $x, y \in M$ a $z \in V(\mathbf{T}) - M$ takové, že $z \in \overline{L}(x)$ a zároveň $z \in \overline{P}(y)$, pak ale

$$z \notin \bigcap_{x \in M} \overline{L}(x) \text{ a zároveň } z \notin \bigcap_{x \in M} \overline{P}(x),$$

tím pádem ale není splněna podmínka kladená **Větou 1**, protože

$$\bigcap_{x \in M} \overline{L}(x) \cup \bigcap_{x \in M} \overline{P}(x) \subset V(\mathbf{T}) - M.$$

Žádná množina $M \subseteq V(\mathbf{T})$ tedy nemůže být třídou žádné netriviální kongruence $\varphi \in \mathrm{Con}\,\mathbf{T}$, turnaj $\mathbf{T} = (V, E)$ je tedy jednoduchý. $\square$

($\Rightarrow$) Mějme tedy jednoduchý turnaj $\mathbf{T} = (V, E)$ a cestu $\mathbf{P}|_n = (V, E)$, kde $|V(\mathbf{T})| > n \geq 2$ Potom podle **Lemma 7** existuje pro prvky $x, y \in V(\mathbf{P}|_n)$ prvek $z \in V(\mathbf{T}) - V(\mathbf{P}|_n)$ takový, že $\langle x, z \rangle, \langle z, y \rangle \in E(\mathbf{T})$. Vezmeme-li $V(\mathbf{P}|_n) = \{x_1, \ldots, x_n\}$, pak pokud existuje $1 \leq i \leq n - 1$, pro které $\langle x_i, z \rangle, \langle z, x_{i+1} \rangle \in E(\mathbf{T})$, pak můžeme prodloužit cestu $\mathbf{P}|_n = (V, E)$ na cestu $\mathbf{P}|_{n+1} = (V, E)$, kde $V(\mathbf{P}|_{n+1}) = \{x_1, \ldots, x_i, z, x_{i+1}, \ldots, x_n\}$.

Přepokládejme nyní, že pro cestu $\mathbf{P}|_n = (V, E)$ neexistuje takové $1 \leq i \leq n - 1$, že $\langle x_i, z \rangle, \langle z, x_{i+1} \rangle \in E(\mathbf{T})$. Vezměmě, že $\langle x_1, z \rangle \in E(\mathbf{T})$ a uvažujme největší $1 \leq i \leq n - 1$ takové, že posloupnost $\{x_1, \ldots, x_i\}$ zachovává pro každé $1 \leq j \leq i$, že $\langle x_j, z \rangle \in E(\mathbf{T})$. Pokud by platilo, že $i = n$, pak se dostáváme do sporu s přepokladem, že existuje $y \in V(\mathbf{P}|_n)$, pro které $\langle z, y \rangle \in E(\mathbf{T})$. Protože $1 \leq i \leq n - 1$ je největší dané vlastnosti, existuje tedy $x_{i+1} \in V(\mathbf{P}|_n)$ a platí pro něj, že $\langle z, x_{i+1} \rangle \in E(\mathbf{T})$. Dostáváme se ale ke sporu s předpokladem, musí tedy platit, že $\langle z, x_1 \rangle \in E(\mathbf{T})$.

Předpokládejme tedy, že $\langle z, x_n \rangle \in E(\mathbf{T})$ a uvažujme nejmenší $2 \leq i \leq n$ takové, že posloupnost $\{x_i, \ldots, x_n\}$ zachovává pro každé $i \leq j \leq n$, že $\langle z, x_j \rangle \in E(\mathbf{T})$. Pokud by platilo, že $i = 1$, pak se dostáváme do sporu s přepokladem, že existuje $x \in V(\mathbf{P}|_n)$, pro které $\langle x, z \rangle \in E(\mathbf{T})$. Protože $2 \leq i \leq n$ je nejmenší dané vlastnosti, existuje tedy $x_{i-1} \in V(\mathbf{P}|_n)$ a platí pro něj, že $\langle x_{i-1}, z\rangle \in E(\mathbf{T})$. Dostáváme se ale ke sporu s předpokladem, musí tedy platit, že $\langle x_n, z\rangle \in E(\mathbf{T})$.

Jelikož pro cestu $\mathbf{P}|_n = (V, E)$ platí, že $\langle x_n, z\rangle, \langle z, x_1\rangle \in E(\mathbf{T})$, můžeme ji prodloužit na kružnici $\overline{\mathbf{P}}|_{n+1} = (V, E)$, kde $V(\overline{\mathbf{P}}|_{n+1}) = \{x_1, \ldots, x_n, z\}$.

Pro úplnost dokážeme.

Lemma 8 Mějme jednoduchý turnaj $\mathbf{T} = (V, E)$, pak každá kružnice $\overline{\mathbf{P}}|_n = (V, E)$, kde $V(\overline{\mathbf{P}}|_n) \subset V(\mathbf{T})$ je prodloužitelná na kružnici $\overline{\mathbf{P}}|_{n+1} = (V, E)$.

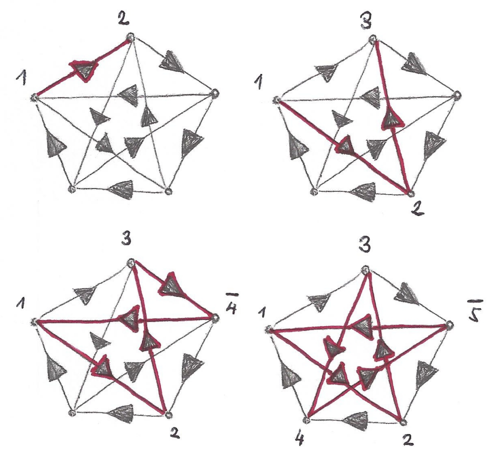
Důkaz. Mějme tedy jednoduchý turnaj $\mathbf{T} = (V, E)$ a kružnici $\overline{\mathbf{P}}|_n = (V, E)$, kde $n \geq 3$ a $V(\overline{\mathbf{P}}|_n) = \{x_1, \ldots, x_n\}$, pokud by bylo $|V(\mathbf{T})| < 4$, pak není prodloužitelná. Potom podle **Lemma 7** existuje pro prvky $x, y \in V(\overline{\mathbf{P}}|_n)$ prvek $z \in V(\mathbf{T}) - V(\overline{\mathbf{P}}|_n)$ takový, že $\langle x, z\rangle, \langle z, y\rangle \in E(\mathbf{T})$. Předpokládejme, že $\langle x_1, z\rangle \in E(\mathbf{T})$, uvažujme pak maximální $1 \leq i < j \leq n$ taková, že pro libovolné $1 \leq k \leq i$, nebo $j \leq k \leq n$ platí, že $\langle x_k, z\rangle \in E(\mathbf{T})$. Pokud by platilo, že $i = j$, pak se dostáváme do sporu s přepokladem, že existuje $y \in V(\overline{\mathbf{P}}|_n)$, pro které $\langle z, y\rangle \in E(\mathbf{T})$. Protože i je maximální dané vlastnosti a $i \neq j$, pak existuje $x_{i+1} \in V(\overline{\mathbf{P}}|_n)$, pro které $\langle z, x_{i+1}\rangle \in E(\mathbf{T})$. Jelikož pro kružnici $\overline{\mathbf{P}}|_n = (V, E)$ platí, že existuje $1 \leq i \leq n$ tak, že $\langle x_i, z\rangle, \langle z, x_{i+1}\rangle \in E(\mathbf{T})$, můžeme ji prodloužit na kružnici $\overline{\mathbf{P}}|_{n+1} = (V, E)$, kde $V(\overline{\mathbf{P}}|_{n+1}) = \{x_1, \ldots, x_i, z, x_{i+1}, \ldots, x_n\}$. □

($\Leftarrow$) Víme, že na turnaji $\mathbf{T} = (V, E)$, kde $|V(\mathbf{T})| \geq 3$, lze každou cestu $\mathbf{P}|_n = (V, E)$, kde $2 \leq n < |V(\mathbf{T})|$ prodloužit na cestu $\mathbf{P}|_{n+1} = (V, E)$ nebo na kružnici $\overline{\mathbf{P}}|_{n+1} = (V, E)$.

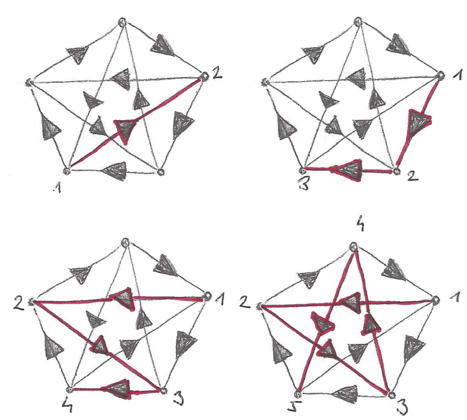
Protože platí, že $\alpha(\mathbf{P}|_n) = \alpha(\mathbf{P}|_{n+1})$ a $\omega(\mathbf{P}|_n) = \omega(\mathbf{P}|_{n+1})$, pak, ozačíme-li $z \in V(\mathbf{P}|_{n+1}) - V(\mathbf{P}|_n)$, $V(\mathbf{P}|_{n+1}) = \{x_1, \ldots, x_i, z, x_{i+1}, \ldots x_n\}$, přičemž jak víme $z \neq x_1$ ani $z \neq x_n$. Podle definice cesty platí, že $\langle x_i, z\rangle, \langle z, x_{i+1}\rangle \in E(\mathbf{T})$. Nebo platí prodloužitelnost na kružnici $\overline{\mathbf{P}}|_{n+1}$, označíme $z \in V(\mathbf{P}|_{n+1}) - V(\mathbf{P}|_n)$, pak ale podle definice kružnice musí $\langle x_n, z\rangle, \langle z, x_1\rangle \in E(\mathbf{T})$.

Podle **Lemma 6** existuje cesta přes všechny prvky pro každý turnaj, jelikož si cestu $\mathbf{P}|_M = (V, E)$, kde $M \subseteq V(\mathbf{T})$ nějakého turnaje $\mathbf{T} = (V, E)$, můžeme představit jako cestu přes všechny prvky na turnaji $\mathbf{T}|_M = (V, E)$. Určitě existuje cesta $\mathbf{P}|_M = (V, E)$, kde $M \subseteq V(\mathbf{T})$ nějakého turnaje $\mathbf{T} = (V, E)$. Z předpokladu plyne existence vrcholů $x, y \in M$ a $z \in V(\mathbf{T}) - M$ takových, že $z \in \overline{L}(x)$ a zároveň $z \in \overline{P}(y)$, pro každou $M \subseteq V(\mathbf{T})$, kde $2 \leq |M| < |V(\mathbf{T})|$, podle **Lemma 7** je tedy turnaj $\mathbf{T} = (V, E)$ jednoduchý. $\square$

Ilustrační příklad



Obrázek 4: Uzavření a proloužení cesty na jednoduchém turnaji.



Obrázek 5: Prodlužování cesty na jednoduchém turnaji.

Definice 10 Mějme graf $\mathbf{D} = (V, E)$. Množinu $R \subseteq V(\mathbf{D})$, pro kterou platí

$$\bigcap_{x \in R} \left[\overline{L}(x) \cup \overline{P}(x)\right] \cup \bigcap_{x \in R} N(x) = V(\mathbf{D}) - R,$$

nazveme *regulární.*

Věta 6 Mějme graf $\mathbf{D} = (V, E)$, kde $|V(\mathbf{D})| \geq 3$. Předpokládaný graf $\mathbf{D} = (V, E)$ je jednoduchý tehdy a jen tehdy souvislý a zároveň neobsahuje-li žádné dva prvky $x, y \in V(\mathbf{D})$ takové, že $\overline{L}(x) = \overline{L}(y)$ a zároveň $\overline{P}(x) = \overline{P}(y)$, a zároveň existuje-li pro každou souvislou regulární množinu $R \subseteq V(\mathbf{D})$ cesta $\mathbf{P}|_Q = (V, E)$, že $V(\mathbf{P}|_{|Q|+1}) \nsubseteq R$ a zároveň $V(\mathbf{P}|_Q) \subseteq V(\mathbf{P}|_{|Q|+1})$.

Důkaz. Nejdříve dokážeme dvě pomocné tvrzení.

Lemma 9 Mějme graf $\mathbf{D} = (V, E)$ a množinu $M \subseteq V(\mathbf{D})$, pokud je M třídou nějaké kongruence $\theta \in \mathrm{Con}\,\mathbf{D}$, pak musí být regulární.

Důkaz. Předpokládejme, že tvrzení neplatí. Máme tedy graf $\mathbf{D} = (V, E)$ a neregulární třídu $M \subseteq V(\mathbf{D})$ nějaké kongruence $\theta \in \mathrm{Con}\,\mathbf{D}$. Protože je množina M neregulární, musí pro ni platit

$$\bigcap_{x \in M} \left[\overline{L}(x) \cup \overline{P}(x)\right] \cup \bigcap_{x \in M} N(x) \subset V(\mathbf{D}) - M,$$

musí tedy existovat prvek $z \in V(\mathbf{D}) - M$ takový, že $z \notin \left[\overline{L}(x) \cup \overline{P}(x)\right]$ a zároveň $z \in N(y)$ pro nějaká $x, y \in M$, z tohoto ale vyplývá, že

$$z \notin \bigcap_{x \in M} \overline{L}(x) \text{ a zároveň } z \notin \bigcap_{x \in M} \overline{P}(x) \text{ a zároveň } z \notin \bigcap_{x \in M} N(x).$$

Tento ale fakt je v rozporu s **Větou 1**, podle které musí pro M jako třídu nějaké kongruence $\theta \in \mathrm{Con}\,\mathbf{D}$ platit

$$\bigcap_{x \in M} \overline{L}(x) \cup \bigcap_{x \in M} \overline{P}(x) \cup \bigcap_{x \in M} N(x) = V(\mathbf{D}) - M,$$

docházíme tedy ke sporu s předpokladem. □

Lemma 10 Mějme souvislý graf $\mathbf{D} = (V, E)$, kde $|V(\mathbf{D})| \geq 3$. Regulární množina $R \subseteq V(\mathbf{D})$ není třídou žádné netriviální kongruence tehdy a jen tehdy, existují-li vrcholy $x, y \in R$ a $z \in V(\mathbf{D}) - R$ takové, že $z \in \overline{L}(x)$ a zároveň $z \in \overline{P}(y)$.

Důkaz. ($\Rightarrow$) Dokážeme také, že nesouvislý graf $\mathbf{D} = (V, E)$, kde $|V(\mathbf{D}| \geq 3$ nemůže být jednoduchý. Protože graf $\mathbf{D} = (V, E)$ není souvislý, musí existovat množina $M \subseteq V(\mathbf{D})$ taková, že neexistuje $\langle x, y \rangle \in E(\mathbf{D})$, nebo $\langle y, x \rangle \in E(\mathbf{D})$ pro nějaká $x \in M$ a $y \in V(\mathbf{D}) - M$. Množina M nebo množina $V(\mathbf{D}) - M$ má zcela určitě mohutnost větší, rovnu 3, protože $|V(\mathbf{D}| \geq 3$. Přičemž obě množiny splňují definici třídy kongurence. Graf $\mathbf{D} = (V, E)$ tedy zcela jistě obsahuje třídu nějaké netriviální kongruence $\varphi \in \mathrm{Con}\ \mathbf{D}$, není tedy jednoduchý.

Dokážeme, že obsahuje-li alespoň dva prvky $x, y \in V(\mathbf{D})$ takové, že $\overline{L}(x) = \overline{L}(y)$ a zároveň $\overline{P}(x) = \overline{P}(y)$, není graf $\mathbf{D} = (V, E)$ jednoduchý. Potom ale $\overline{L}(x) = \overline{L}(y)$ a zároveň $\overline{P}(x) = \overline{P}(y)$, tedy $N(x) - \{y\} = V(\mathbf{D}) - [\overline{L}(x) \cup \overline{P}(x) \cup \{x\} \cup \{y\}] = V(\mathbf{D}) - [\overline{L}(y) \cup \overline{P}(y) \cup \{y\} \cup \{x\}] = N(y) - \{x\}$. Rovnosti okolí můžeme zapsat jako

$$\overline{L}(x) \cup \overline{P}(x) \cup [N(x) \cap N(y)] = V(\mathbf{D}) - \{x, y\},$$

množina $\{x, y\}$ splňuje podmínky dané **Větou 1** a je tedy třídou nějaké netriviální kongruence $\varphi \in \mathrm{Con}\ \mathbf{D}$. Víme, že pro množinu R musí podle **Věty 1** platit, že

$$\bigcap_{x \in R} \overline{L}(x) \cup \bigcap_{x \in R} \overline{P}(x) \cup \bigcap_{x \in R} N(x) \subset V(\mathbf{D}) - R.$$

Porovnáme-li přepoklad regularity množiny R

$$\bigcap_{x \in R} \left[\overline{L}(x) \cup \overline{P}(x)\right] = [V(\mathbf{D}) - R] - \bigcap_{x \in R} N(x)$$

a předpoklad, že R není třídou žádné netriviální kongruence

$$\bigcap_{x \in R} \overline{L}(x) \cup \bigcap_{x \in R} \overline{P}(x) \subset [V(\mathbf{D}) - R] - \bigcap_{x \in R} N(x),$$

získáme

$$\bigcap_{x \in R} \overline{L}(x) \cup \bigcap_{x \in R} \overline{P}(x) \subset \bigcap_{x \in R} \left[\overline{L}(x) \cup \overline{P}(x)\right].$$

Množina $\bigcap_{x \in R} \left[\overline{L}(x) \cup \overline{P}(x)\right]$ nemůže být prázdná, jelikož graf $\mathbf{D} = (V, E)$ je souvislý a zároveň $|V(\mathbf{D})| \geq 3$. Musí tedy určitě existovat vrcholy $x, y \in R$ a $z \in V(\mathbf{D}) - R$ takové, že $z \in \overline{L}(x)$ a zároveň $z \in \overline{P}(y)$, jinak by nastala rovnost a došli bychom ke sporu s předpokladem.

Dokážeme nyní, že každá souvislá regulární množina $R \subseteq V(\mathbf{D})$ musí obsahovat cestu $\mathbf{P}|_Q = (V, E)$, kde $Q \subseteq R$ a $|Q| > 1$. Víme, že $|R| > 1$, jelikož jinak by se jednalo o třídu triviální kongruence. V případě, že je množina R souvislá a $|R| > 1$, musí existovat prvky $x, y \in R$ takové, že $\langle x, y \rangle \in E(\mathbf{D})$.

Dokážeme, že existuje posloupnost prvků množiny $R = \{x_1, \ldots, x_n\}$ takových, že $\langle x_i, x_{i+1} \rangle \in E(\mathbf{D})$ nebo že $\langle x_{i+1}, x_i \rangle \in E(\mathbf{D})$. Nejdříve dokážeme, že v libovolném turnaji $\mathbf{T} = (V, E)$ existuje taková posloupnost, kde $x_1 = a$ a zároveň $x_n = b$, pro každé dva prvky $a, b \in V(\mathbf{T})$. Uvažujme nejmenší protipříklad tohoto tvrzení $\mathbf{T}|_n = (V, E)$. Potom pro každý turnaj $\mathbf{T}|_{n-1} = (V, E)$ toto tvrzení platí. Přičemž každou posloupnost, kde $x_1 = a$ a zároveň $x_n = b$ a kde $a, b \in V(\mathbf{T}|_{n-1})$, můžeme prodloužit zařazením prvku $z \in V(\mathbf{T}|_n) - V(\mathbf{T}|_{n-1})$ mezi libovolné dvě x_i a x_{i+1}. Každou posloupnost, kde $x_1 = a$ a zároveň $x_n = z$ a kde $a \in V(\mathbf{T}|_{n-1})$, můžeme prodloužit zařazením prvku $z \in V(\mathbf{T}|_n) - V(\mathbf{T}|_{n-1})$ za nějaké $x_{n-1} \in V(\mathbf{T}|_{n-1})$. Předpokládejme nyní, že tvrzení neplatí. Mezi prvky téhož turnaje tato posloupnost musí, jak jsme dokázali výše, existovat. Uvažujme nyní graf $\mathbf{D}|_R = (V, E)$ na množině R. Jelikož je tento graf souvislý, pak musí pro každý turnaj $\mathbf{T}_i \in \mathbf{\Theta}(\mathbf{D}|_R)$ existovat jiný turnaj $\mathbf{T}_j \in \mathbf{\Theta}(\mathbf{D}|_R)$ takový, že $V(\mathbf{T}_i) \cap V(\mathbf{T}_j) \neq \emptyset$, v opačném případě by bylo jednoduché dokázat nesouvislost. Existuje tedy posloupnost $\{x_1, \ldots, x_n = y_1, \ldots\, y_m\}$, kde $x_n = y_1 \in V(\mathbf{T}_i) \cap V(\mathbf{T}_j)$, protože posloupnosti $\{x_1, \ldots, x_n\}$ a $\{y_1, \ldots, y_m\}$. Na dalších turnajích můžeme prodlužovat analogicky.

Protože pro regulární množinu $R \subseteq V(\mathbf{D})$ existují vrcholy $x, y \in R$ a $z \in V(\mathbf{D}) - R$ takové, že $z \in \overline{L}(x)$ a zároveň $z \in \overline{P}(y)$ a každá souvislá regulární množina má posloupnost všech prvků $\{x_1, \ldots, x_n\}$, kde $\langle x_i, x_{i+1} \rangle \in E(\mathbf{D})$, můžeme najít dva prvky x_i a x_{i+1} takové, které jistě patří do nějaké cesty $\mathbf{P}|_Q = (V, E)$, minimálně platí, že $Q = \{x_i, x_{i+1}\}$ a které mají k z různý vztah. Tuto cestu můžeme tedy pomocí z prodloužit, na cestu $\mathbf{P}|_{|Q|+1} = (V, E)$, kde $V(P_Q) \subseteq V(\mathbf{P}|_{|Q|+1})$ a kde zároveň $V(\mathbf{P}|_{|Q|+1}) =$

$\{\dots, x_i, z, x_{i+1}, \dots\}$, nebo $V(\mathbf{P}|_{|Q|+1}) = \{\dots, x_{i+1}, z, x_i, \dots\}$.

($\Leftarrow$) Protože pro každou souvislou regulární množinu $R \subseteq V(\mathbf{D})$ existuje cesta $\mathbf{P}|_Q = (V, E)$, kde $Q \subseteq R$ a $|Q| > 1$, která je prodloužitelná na cestu $\mathbf{P}|_{|Q|+1} = (V, E)$, že $V(\mathbf{P}|_{|Q|+1}) \nsubseteq R$ a zároveň $V(P_Q) \subseteq V(\mathbf{P}|_{|Q|+1})$. Zároveň ale každá nesouvislá regulární množina $R \subseteq V(\mathbf{D})$ musí, z předpokladu, že žádné dva prvky $x, y \in V(\mathbf{D})$ takové, že $\overline{L}(x) = \overline{L}(y)$ a zároveň $\overline{P}(x) = \overline{P}(y)$, obsahovat regulární množinu $R' \subseteq R$, kde $|R'| > 1$. Existují vrcholy $x, y \in R$ a $z \in V(\mathbf{D}) - R$ takové, že pro nějaké $z \in V(\mathbf{D})$, které $z \in \overline{L}(x)$ a zároveň $z \in \overline{P}(y)$. Podle **Lemma 10** tedy neexistuje žádná regulární třída netriviální kongruence, podle **Lemma 9** musí ale být všechny třídy kongruencí regulární. Souvislý graf $\mathbf{D} = (V, E)$, kde $|V(\mathbf{D})| \geq 3$, je jednoduchý. $\square$

Důsledek Je-li graf $\mathbf{D} = (V, E)$ jednoduchý, pak je každá cesta $\mathbf{P}|_R = (V, E)$, kde $R \subseteq V(\mathbf{D})$ je regulární množina, prodloužitelná na cestu $\mathbf{P}|_{|R|+1} = (V, E)$ nebo uzavřitelná na kružnici $\overline{\mathbf{P}}|_{|R|+1} = (V, E)$ takové, že $V(\mathbf{P}|_R) \subseteq V(\mathbf{P}|_{|R|+1})$ respektive $V(\mathbf{P}|_R) \subseteq V(\overline{\mathbf{P}}|_{|R|+1})$.

Důkaz. Jelikož je graf $\mathbf{D} = (V, E)$ jednoduchý pak podle **Lemma 9** existují pro každou regulární množinu $R \subseteq V(\mathbf{D})$ vrcholy $x, y \in R$ a $z \in V(\mathbf{D}) - R$ takové, že $z \in \overline{L}(x)$ a zároveň $z \in \overline{P}(y)$, pro $z \in V(\mathbf{D})$ tedy z regularity musí platit

$$z \in \bigcap_{x \in R} \left[\overline{L}(x) \cup \overline{P}(x)\right].$$

Existuje-li tedy cesta $\mathbf{P}|_R = (V, E)$, pak podle **Lemma 9** existuje pro nějaké dva vrcholy $x, y \in R$ prvek $z \in V(\mathbf{D}) - R$ takový, že $z \in \overline{L}(x)$ a zároveň $z \in \overline{P}(y)$. Vezmeme-li $V(\mathbf{P}|_R) = \{x_1, \dots, x_n\}$, pak pokud existuje $1 \leq i \leq n-1$, pro které $\langle x_i, z\rangle, \langle z, x_{i+1}\rangle \in E(\mathbf{D})$, pak můžeme prodloužit cestu $\mathbf{P}|_R = (V, E)$ na cestu $\mathbf{P}|_{|R|+1} = (V, E)$, kde $V(\mathbf{P}|_{|R|+1}) = \{x_1, \dots, x_i, z, x_{i+1}, \dots, x_n\}$.

Přepokládejme nyní, že pro cestu $\mathbf{P}|_R = (V, E)$ neexistuje takové $1 \leq i \leq n-1$, že $\langle x_i, z\rangle, \langle z, x_{i+1}\rangle \in E(\mathbf{D})$. Vezměmě, že $\langle x_1, z\rangle \in E(\mathbf{D})$ a uvažujme největší $1 \leq i \leq n-1$ takové, že posloupnost $\{x_1, \dots, x_i\}$ zachovává pro každé $1 \leq j \leq i$, že $\langle x_j, z\rangle \in E(\mathbf{D})$. Pokud by platilo, že $i = n$, pak se dostáváme do sporu s přepokladem, že existuje $y \in V(\mathbf{P}|_R)$, pro které

$\langle z, y\rangle \in E(\mathbf{D})$. Protože $1 \leq i \leq n-1$ je největší dané vlastnosti, existuje tedy $x_{i+1} \in V(\mathbf{P}|_R)$ a platí pro něj, že $\langle z, x_{i+1}\rangle \in E(\mathbf{D})$. Dostáváme se ale ke sporu s předpokladem, musí tedy platit, že $\langle z, x_1\rangle \in E(\mathbf{D})$.

Předpokládejme tedy, že $\langle z, x_n\rangle \in E(\mathbf{D})$ a uvažujme nejmenší $2 \leq i \leq n$ takové, že posloupnost $\{x_i, \ldots, x_n\}$ zachovává pro každé $i \leq j \leq n$, že $\langle z, x_j\rangle \in E(\mathbf{D})$. Pokud by platilo, že $i = 1$, pak se dostáváme do sporu s přepokladem, že existuje $x \in V(\mathbf{P}|_R)$, pro které $\langle x, z\rangle \in E(\mathbf{D})$. Protože $2 \leq i \leq n$ je nejmenší dané vlastnosti, existuje tedy $x_{i-1} \in V(\mathbf{P}|_R)$ a platí pro něj, že $\langle x_{i-1}, z\rangle \in E(\mathbf{D})$. Dostáváme se ale ke sporu s předpokladem, musí tedy platit, že $\langle x_n, z\rangle \in E(\mathbf{D})$.

Jelikož pro cestu $\mathbf{P}|_R = (V, E)$ platí, že $\langle x_n, z\rangle, \langle z, x_1\rangle \in E(\mathbf{D})$, můžeme ji prodloužit na kružnici $\overline{\mathbf{P}}|_{|R|+1} = (V, E)$, kde $V(\overline{\mathbf{P}}|_{|R|+1}) = \{x_1, \ldots, x_n, z\}$.

$\square$

Závěr a diskuse

V obou kapitolách práce jsou představeny nové koncepty a myšlenky. Práce přináší nové výsledky, mimo **Věty 1**, kterou si autor zapůjčuje ze své loňské práce, a **Lemma 6**, kde se jedná o známý výsledek, oba výsledky autor uvádí s novým respektive vlastním důkazem. Za nejvýznamější výsledky práce autor považuje **Větu 4**, která popisuje množiny turnajů, ze kterých jsou všechny souvislé orientované grafy vytvořené přiřzením jednoduché, **Větu 5** a **Větu 6**, které dávají do souvislosti prodloužitelnost nebo uzavřitelnost cest a jednoduchost turnaje respektive grafu. Všechny tyto důležité výsledky jsou ve formě ekvivalencí.

Předložené myšlenky a výsledky jsou kvalitním základem pro případný další výzkum.

Zdroje

[1] HORT, Daniel; RACHŮNEK, Jiří. *Algebra I.* 1. vydání. Olomouc : Nakladatelství UP, 2003. Kapitola 2 Množiny, relace, zobrazení, s. 21 - 32. ISBN 80-244-0631-4.

[2] MATOUŠEK, Jiří a NEŠETŘIL, Jaroslav. *Kapitoly z diskrétní matematiky.* 4., upr. a dopl. vyd. V Praze: Karolinum, 2009. 442 s. ISBN 978-80-246-1740-4.

[3] TRUDEAU, Richard J. *Introduction to Graph Therory.* 2. vydání. New York: Dover Publications, 1993. ISBN 0-486-67870-9

[4] Weisstein, Eric W. *Directed Graph.* MathWorld - A Wolfram Web Resource. WWW: http://mathworld.wolfram.com/DirectedGraph.html [Citováno dne 13. dubna 2012].

[5] Weisstein, Eric W. *Königsberg Bridge Problem.* From MathWorld - A Wolfram Web Resource. WWW: http://mathworld.wolfram.com/Koenigsberg BridgeProblem.html [Citováno dne 13. dubna 2012]

[6] Weisstein, Eric W. *Tournament.* MathWorld- A Wolfram Web Resource. WWW: http://mathworld.wolfram.com/Tournament.html [Citováno dne 13. dubna 2012]

[7] *Leonhard Euler.* Wikipedia, The Free Encyclopedia. WWW: http://en.wi kipedia.org/wiki/Leonhard_Euler [Citováno dne 13. dubna 2012]

Všechny obrázky v této práci vytvořil autor.