STŘEDOŠKOLSKÁ ODBORNÁ ČINNOST

ŘEZY TĚLES

Lenka Janišová

UPRAVENÁ VERZE

Pardubice 2012

STŘEDOŠKOLSKÁ ODBORNÁ ČINNOST

Obor SOČ: 12. Tvorba učebních pomůcek, didaktická technologie

Řezy těles

Slices of solids

Autor: Lenka Janišová

Škola: Střední odborná škola elektrotechnická a Vyšší odborná škola, Pardubice, Karla IV. 13

Konzultant: RNDr. Lenka Juklová, Ph.D.

Pardubice 2012

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou práci vypracovala samostatně, použila jsem pouze podklady (literaturu, SW atd.) uvedené v přiloženém seznamu a postup při zpracování a dalším nakládání s prací je v souladu se zákonem č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon) v platném znění.

V ……….. dne ………………… podpis: ……………………………

Poděkování

Děkuji RNDr. Lence Juklové, Ph.D. za obětavou pomoc a podnětné připomínky, které mi během práce poskytovala.

ANOTACE

Práce se zabývá problémem s představivostí v deskriptivní geometrii. Jejím cílem je vytvořit učební pomůcku a její pomocí představivost zlepšit. Dynamické modely umožňují uživateli aktivně měnit parametry zadání. Po změně se ihned vykreslí nové řešení. Práce s modely je intuitivní, je dodržena jednota barev bodů určených k pohybu (parametrů zadání). Modely jsou vloženy do HTML stránek ve formě Java appletů. Uživatel k jejich shlédnutí potřebuje internetový prohlížeč a program Java. Ke každému modelu patří dva dokumenty. Jeden z nich vysvětluje, co model zobrazuje a jak s ním lze pracovat, druhý shrnuje, popř. rozšiřuje konstrukci podobných příkladů. Oba dokumenty jsou napsané pokud možno laicky tak, aby jim rozuměl každý uživatel.

Klíčová slova: volné rovnoběžné promítání, deskriptivní geometrie, zobrazení těles, krychle, hranol, jehlan, válec, kužel

ANNOTATION

This work deals with completation of didactical product. The work should improve imagination in descriptive geometry. This task is very important for understanding the problem. Dynamical models are very special, enables user to change task of the painting (move points), so that the answer is automaticaly repainted. Moving points are in the same colour, so using models is very easy. User can show models in HTML page like Java applets. For using models are needed internet wiever and Java programme. Two documents are involved in each model. The first document explains the model and work with it. The second concludes or expands construction of similar excercises. Both documents are written in basic language, so everybody could understand them.

Key words: parallel projection, descriptive geometry, views of solids, cube, prism, pyramid, cylinder, cone

Obsah

Úvod

Práce slouží jako učební pomůcka k předmětu deskriptivní geometrie na středních školách. Je zaměřena na rozvoj představivosti – názorně ukazuje vztahy těles a rovin. Je určena k individuálnímu použití, s její pomocí ale mohou obohacovat výuku i učitelé.

Představivost v deskriptivní geometrii je nezbytná pro řešení její problematiky. Učebnice obsahují dostatek informací potřebných ke konstrukcím, nejsou ale bohaté na obrázky zobrazující problémy v prostoru. Na internetu není o podobné obrázky nouze. Většinou se ale jedná o obrázky statické.

Nespornou výhodou dynamických obrázků je možnost aktivně zapojit uživatele do problematiky, což podnítí jeho zvědavost a následně i představivost.

Modely jsou vytvořeny v programu Cabri Geometrie II (*.fig), který není příliš známý ani volně stažitelný. Proto jsem je vložila do HTML stránek ve formě Java appletů. Uživatel k jejich shlédnutí potřebuje pouze HTML prohlížeč a program Javy.

Předpokládám, že většina uživatelů nebude znát práci v programu Cabri Geometrie II. Proto bylo nezbytné popsat užívání appletů. Danému účelu slouží jeden z dokumentů přiložených k modelu. Je zde popsán i daný model a práce s ním (návod). Každý model má svůj návod. Dokument je vytvořen v programu Microsoft Office Word 2003 a zkonvertován v programu Adobe Acrobat 9 Standard (*.pdf).

V dalším dokumentu (*.pdf) jsem popsala konstrukci úloh probíraných na středních školách. Cílem není vysvětlit látku, ale objasnit ji (tzn. doplnit, popř. rozšířit znalosti). Podstatnou roli zde hrají výkresy vytvořené převážně v programu GeoGebra WebStart (*.ggb), částečně v programu Cabri Geometrie II. Jejich cílem je zpřehlednit problém.

Pro lepší orientaci v práci jsem vytvořila HTML stránku s odkazy na všechny modely. Doplnila jsem je o zkušební model z planimetrie. Uživateli má pomoci porozumět práci s modely. Pokud modely nejdou spustit, uživateli pravděpodobně chybí Java. Odkaz na její stažení nalezne na úvodní stránce.

Metodika

Postup práce

Nejprve jsem vytvořila modely v programu Cabri Geometrie II, vložila jsem je do HTML stránek ve formě Java appletů.

Napsala jsem návody k appletům (*.pdf) tak, aby uživatel věděl, co ve výkresu vidí, a jak lze měnit parametry zadání výkresu.

Pro lepší porozumění středoškolské látce jsem shrnula poznatky potřebné k řešení konstrukčních úloh (*.pdf). Vysvětlivky jsem doplnila výkresy vytvořenými v programu GeoGebra WebStart.

Do HTML stránek jsem vložila odkazy na výše uvedené textové dokumenty.

Upravila jsem HTML stránky: přidala jsem odkazy k jednotlivým appletům, zkušební applet (planimetrie – trojúhelník) a odkaz na internetové stránky umožňující stažení Javy – programu nezbytného pro shlédnutí appletů.

Použité symboly

V práci používám symboly určené ke zjednodušení popisů:

Útvary:

Útvar	Znak	Příklad
Bod	velké písmeno latinské abecedy	A
Přímka	malé písmeno latinské abecedy	a
Úsečka	dva body, které spojuje	AB
Rovina	malé písmeno řecké abecedy	α
Úhel	malé písmeno řecké abecedy	α

Tabulka 1: geometrické útvary

Vzájemná poloha útvarů:

Vztah	Znak	Příklad	Čteno
Rovnoběžnost	$\parallel$	$a \parallel b$	přímka *a* je rovnoběžná s přímkou *b*

Tabulka 2: vzájemná poloha geometrických útvarů

Další vztahy

Vztah	Znak	Příklad	Čteno
Patří do intervalu	$\in$	$\alpha \in (0°,90°)$	Úhel α patří do intervalu (0°,90°)

Tabulka 3: další vztahy geometrických útvarů

1 Teoretická část

1.1 Polohové vlastnosti prostorových útvarů

Pracujeme ve trojrozměrném prostoru. Prvky prostoru nazýváme body, dále pracujeme s těmito útvary prostoru (množiny jistých bodů): přímky a roviny. Body označujeme písmeny velké latinské abecedy, přímky písmeny malé latinské abecedy a roviny písmeny malé řecké abecedy. Pro základní útvary platí následující axiomy (základní věty již nedokazované) [2]:

A1. *Dva různé body A, B určují právě jednu přímku.*

A2. *Přímka a bod, který na ní neleží, určují jedinou rovinu.*

A3. *V každé rovině existují čtyři různé body, z nichž žádné tři neleží v přímce.*

A4. *Jestliže dvě roviny mají společný bod, pak existuje právě jedna přímka, která leží v obou rovinách (průsečnice).*

A5. *Ke každé přímce a lze vést bodem A, který na ní neleží, právě jednu přímku b, která s přímkou a tvoří rovinu, přímky a, b nemají žádný společný bod. Přímka b se nazývá rovnoběžka k přímce a vedená bodem A.*

Ze základních axiomů lze odvodit další věty (uvádím takové, které využiji v práci):

V1. *Dvě různé přímky v rovině mají společný právě jeden bod (různoběžky), nebo nemají žádný společný bod (rovnoběžky). Společný bod se nazývá průsečík.*

Důkaz: Kdyby měly přímky společné dva různé body, pak by dvěma různými body procházely dvě různé přímky, což je spor s axiomem A1. c.b.d.

V2. *Tři různé body neležící v přímce určují právě jednu rovinu.*

Důkaz: Označíme A, B, C dané tři různé body. Pak podle axiomu A1 např. body A, B určují právě jednu přímku, označíme ji a. Podle předpokladu věty bod C neleží na přímce a. Podle axiomu A2 přímka a a bod C určují právě jednu rovinu ρ.

V3. *Dvě různoběžné, resp. rovnoběžné různé přímky určují právě jednu rovinu.*

Důkaz: Podle axiomu A5 dvě rovnoběžné různé přímky určují právě jednu rovinu. Různoběžné přímky označme a, b. R je jejich průsečík. Nechť B je bod přímky b neležící na přímce a. Podle axiomu A2 bod B a přímka a určují právě jednu rovinu ρ. Podle axiomu A1 je body B, R určena právě jedna přímka b. Protože body B, R leží v rovině ρ, leží i přímka b v rovině ρ.

V4. *Dvě roviny se buď protínají v přímce (různoběžné roviny), nebo nemají společné body (rovnoběžné různé roviny).*

Důkaz plyne přímo z axiomu A4.

V5. *Rovina a přímka, která v rovině neleží, mají společný buď právě jeden bod (nazýváme je různoběžné), nebo nemají žádný společný bod (nazýváme je rovnoběžné).*

Důkaz: Kdyby měla přímka s rovinou společné dva body, pak by celá ležela v rovině.

Pro vzájemnou polohu útvarů platí následující věty:

V6. *Tranzitivita rovnoběžnosti: Jestliže $a \parallel b$ a současně $b \parallel c$, pak $a \parallel c$ (pro roviny: $\alpha \parallel \beta$ a současně $\beta \parallel \gamma$, pak $\alpha \parallel \gamma$.*

Důkaz: Pokud by pro tři navzájem různé přímky a, b, c platilo $a \parallel b$ a současně $b \parallel c$ a současně přímky a, c měly společný bod C, pak by bodem C, který neleží na přímce b procházely dvě různé rovnoběžky k přímce b, což je spor s axiomem A5.

V7. *Jestliže je přímka a rovnoběžná s některou přímkou b roviny ρ, pak je přímka a rovnoběžná s rovinou ρ. Obráceně jestliže je přímka a rovnoběžná s rovinou ρ, existuje v rovině ρ přímka b rovnoběžná s přímkou a.*

Důkaz: Přímky a, b tvoří rovinu σ (věta V3). Podle axiomu A4 jsou jediné společné body rovin σ a ρ jejich průsečnice, což je přímka b. Přímky a, b jsou rovnoběžné, tj. nemají žádný společný bod. Podle věty V5 je přímka a rovnoběžná s rovinou ρ. Obráceně stačí proložit přímkou a libovolnou rovinu σ, která není rovnoběžná s rovinou ρ, podle axiomu A4 se protínají v přímce b. Přímky a, b leží v rovině σ a nemají žádný společný bod. Podle axiomu A5 jsou rovnoběžné.

V8. *Je-li přímka a rovnoběžná s přímkou b a přímka b rovnoběžná s rovinou ρ, pak je i přímka a rovnoběžná s rovinou ρ.*

Důkaz přímo plyne z vět V6 a V7.

Z vět V1 až V7 lze odvodit následující věty:

V9. *Jestliže je přímka rovnoběžná s dvěma různými rovinami, je rovnoběžná s jejich průsečnicí a obráceně.*

V10. *Jestliže je rovina rovnoběžná s dvěma různoběžkami, je rovnoběžná i s rovinou obou různoběžek a obráceně.*

V11. *Jestliže rovina ρ obsahuje dvě různoběžky rovnoběžné s rovinou σ, je ρ rovnoběžná se σ a obráceně.*

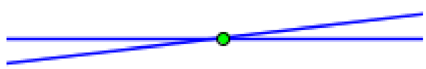
V12. *Rovnoběžné roviny ρ, σ jsou proťaty rovinou α, která s nimi není rovnoběžná, ve dvou navzájem rovnoběžných přímkách.*

Vzájemné polohy útvarů v prostoru:

1. dvě různé přímky:
   a. rovnoběžné

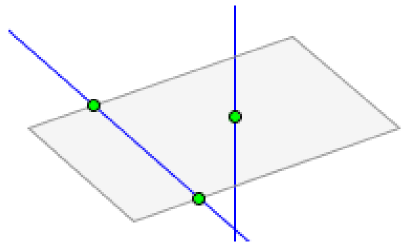
obr. 1: Rovnoběžné přímky

   b. různoběžné



obr. 2: Různoběžné přímky

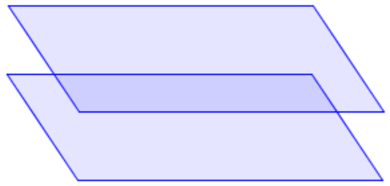
c. mimoběžné



obr. 3: Mimoběžné přímky

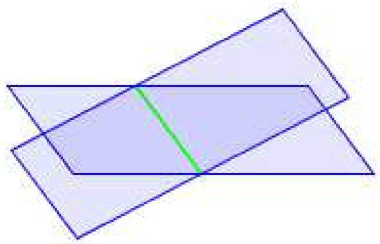
2. dvě různé roviny:

a. rovnoběžné



obr. 4: 2 rovnoběžné roviny

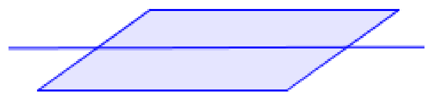
b. různoběžné



obr. 5: 2 různoběžné roviny

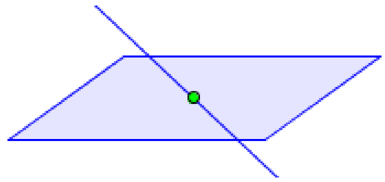
3. rovina a přímka, která v ní neleží:

a. rovnoběžné



obr. 6: Přímka rovnoběžná s rovinou

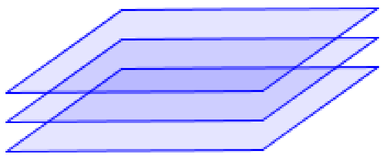
b. různoběžné



obr. 7: Přímka různoběžná s rovinou

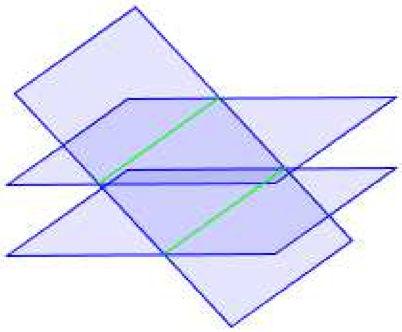
4. tři různé roviny:

a. všechny rovnoběžné



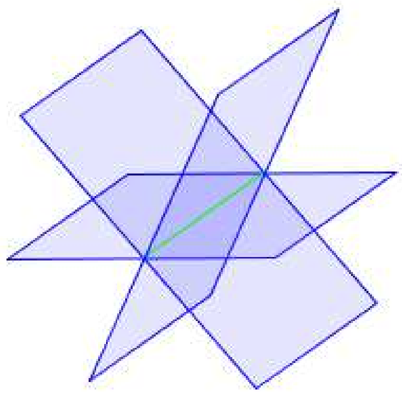
obr. 8: 3 rovnoběžné roviny

b. dvě rovnoběžné proťaté různoběžnou



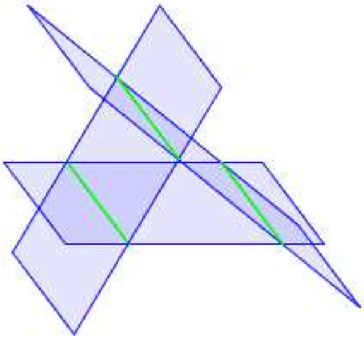
obr. 9: 2 rovnoběžné roviny proťaté různoběžnou

c. svazek rovin



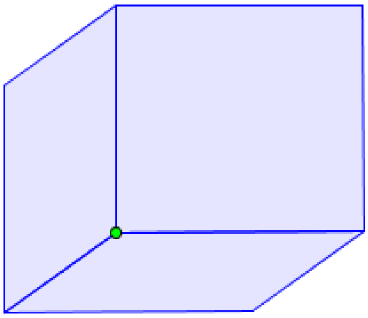
obr. 10: Svazek rovin

d. různoběžné po dvou se protínající v navzájem rovnoběžných přímkách



obr. 11: 3 různoběžné roviny po dvou se protínající

e. protínající se v jednom bodě



obr. 12: Roviny protínající se v jednom bodě

1.2 Metrické vlastnosti prostorových útvarů

Definice

D1. *Nechť a, b jsou dvě různoběžné přímky. Velikost úhlu α, který spolu svírají ($\alpha \in (0°,90°\rangle$), se nazývá* ***odchylka přímek*** *a, b.*

D2. *Přímky, jejichž odchylka je 90°, se nazývají* ***kolmé přímky****.*

Odchylku určujeme i u mimoběžných přímek *a*, *b*: libovolným bodem *M* v prostoru vedeme přímky *a´*, *b´* rovnoběžné po řadě s přímkami *a*, *b*. Odchylka přímek *a´*, *b´* je odchylkou přímek *a*, *b*.

D3. ***Přímka*** *je* ***kolmá k rovině****, jestliže je kolmá ke všem přímkám roviny.*

Platí věta:

V13. *Přímka je kolmá k rovině právě tehdy, když je kolmá ke dvěma různoběžným přímkám roviny.*

Důkaz: Předpokládejme, že v rovině ρ známe dvě různoběžky a, b takové, že daná přímka p je ke každé z nich kolmá. Máme dokázat, že potom přímka p je kolmá k libovolné přímce směru **c**. Za takovou přímku zvolíme přímku x, která prochází průsečíkem P přímky p s rovinou ρ. Protože je $x \parallel c$, $c \parallel \rho$, je podle věty V6 $x \parallel \rho$; přímka x tedy leží v rovině ρ.

Věta V13 se využívá pro konstrukci přímky kolmé k rovině. Z důkazu vyplývá i věta obrácená:

V14. *Rovina je kolmá k přímce právě když obsahuje dvě různoběžky kolmé k přímce.*

D4. *Přímka kolmá k rovině se nazývá* ***normála roviny****. Její průsečík s rovinou se nazývá* ***pata normály (pata kolmice)****.*

D5. *Dvě roviny ρ a σ jsou k sobě kolmé, jestliže rovina σ prochází normálou n roviny ρ.*

Platí i obráceně – rovina ρ prochází normálou m roviny σ.

Další věty, které využívám v práci:

V15. *V bodě roviny lze vztyčit právě jednu kolmici k rovině. Z bodu neležícího v rovině lze vést právě jednu normálu k rovině.*

Důkaz: Mějme dán bod A roviny ρ. Uvažujme svazek přímek ležících v rovině ρ procházejících bodem A (označíme ho $[A]$). Dále uvažujme přímku a svazku $[A]$. Sestrojíme rovinu σ procházející bodem A a kolmou k přímce a. Podobně sestrojíme rovinu γ procházející bodem A a kolmou k přímce b svazku $[A]$ (b je různá od a). Roviny ρ a γ se protínají v přímce, která prochází bodem A a podle věty V14 je kolmá k rovině ρ. Vezmeme-li libovolnou další přímku c svazku $[A]$ a sestrojíme rovinu α kolmou k přímce c, je zřejmé, že prochází průsečnicí rovin σ a γ (vyplývá ze vzájemné polohy 3 rovin – svazek rovin).

V16. *Všechny normály roviny jsou rovnoběžné. Obráceně všechny roviny kolmé k téže přímce jsou rovnoběžné.*

Důkaz plyne přímo z věty V15 a definice D5.

D6. *Nechť A je bod neležící v rovině ρ. Označíme-li C patu normály roviny ρ procházející bodem A, pak velikost úsečky AC nazýváme vzdálenost bodu A od roviny ρ.*

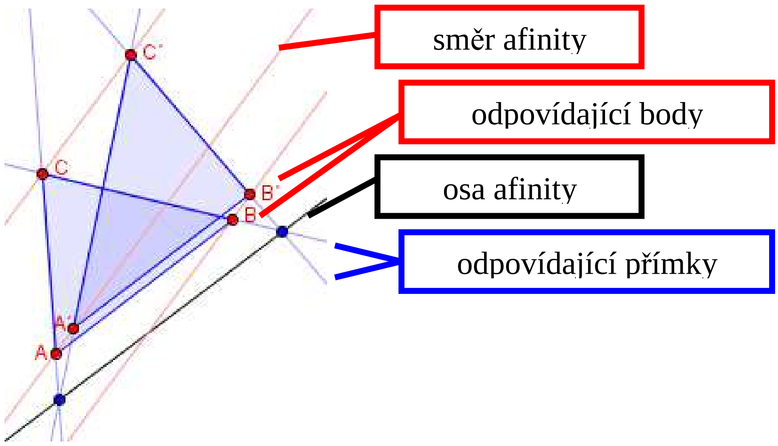
D7. *Vzdálenost dvou rovnoběžných rovin je vzdálenost libovolného bodu jedné roviny od druhé roviny.*

V17. *Rovina α je kolmá ke dvěma různoběžným rovinám ρ, σ právě tehdy, když je kolmá k jejich průsečnici.*

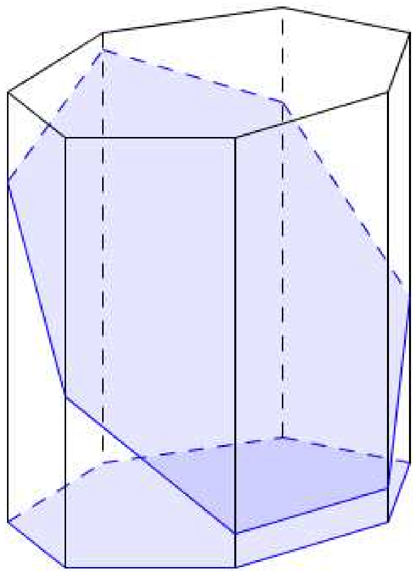
Důkaz plyne přímo z věty V15.

1.3 Osová afinita

Uvažujme dvě různoběžné roviny α, β a směr *s*, který není rovnoběžný s žádnou z nich. Průsečnici rovin α, β označme *o*. Existuje vzájemně jednoznačné zobrazení roviny α na rovinu β, které bodům *A* roviny α přiřadí body *A´* roviny β tak, že přímka *AA´* patří směru *s*. Je zřejmé, že každá přímka *p* roviny α se takto zobrazí na přímku *p´* roviny β a přímky *p*, *p´* se protínají na přímce *o*. Tomuto zobrazení dvou rovin v prostoru říkáme prostorová afinita. Promítneme-li celou situaci ve volném rovnoběžném promítání do průmětny π, obdržíme zobrazení v rovině, kterému říkáme **osová afinita** s osou *o*. Je zřejmé, že známe-li osu *o* a dvojici odpovídajících si bodů *A*, *A´*, známe tím směr promítání, kterému říkáme směr afinity, a jsme schopni určit obraz kteréhokoliv dalšího bodu. Osové afinity využíváme při konstrukci řezů hranolů a válců. Rovinami odpovídajícími si v afinitě jsou většinou rovina řezu a rovina podstavy. Směr afinity je rovnoběžný s povrchovými přímkami hranolů a válců.

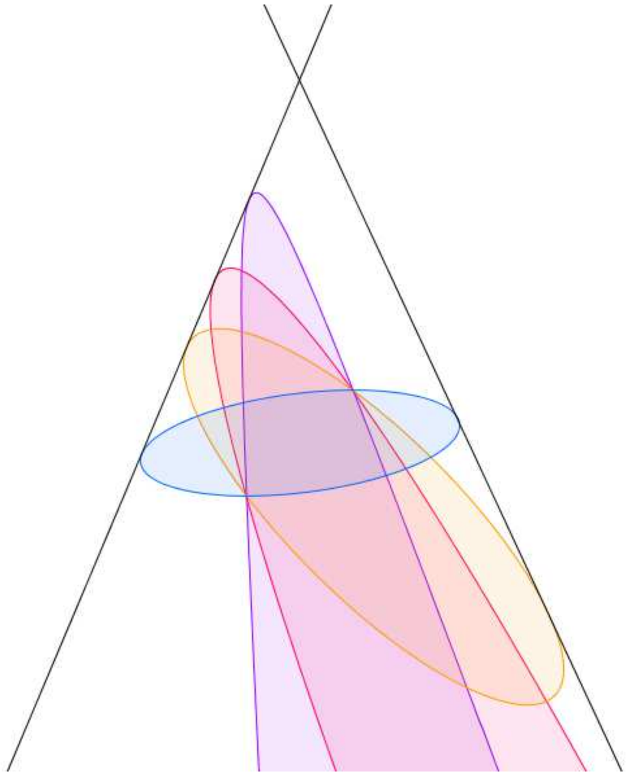


obr. 13: Trojúhelníky v osové afinitě

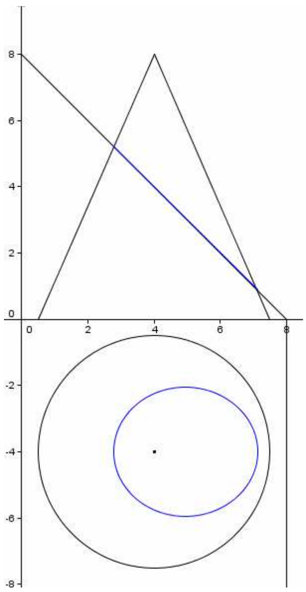


obr. 14: Řez hranolu – šestiúhelník v afinitě

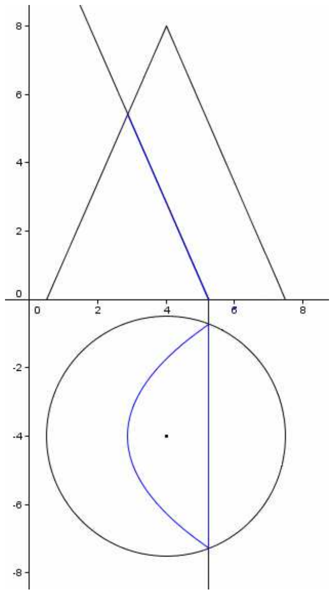
1.4 Kolineace



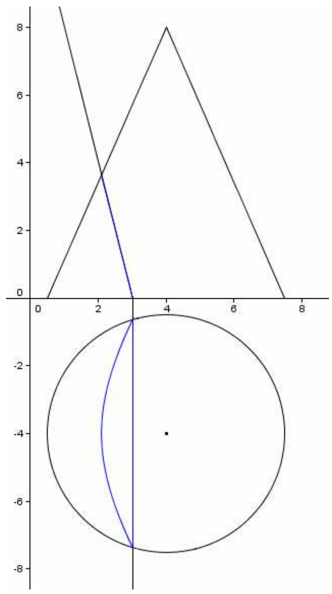
obr. 15: Průniky rovin s kuželovou plochou



obr. 16: Eliptický řez kužele



obr. 17: Parabolický řez kužele



obr. 18: Hyperbolický řez kužele

Afinitu nelze použít na jehlanech a kuželech, protože povrchové přímky se protínají ve vrcholu (nejsou vzájemně rovnoběžné, tzn. nemohou tvořit směr afinity). Jednoznačné zobrazení mezi dvěma rovinami v prostoru nyní nebude dáno směrem promítání. Uvažujme stejně jako v případě afinity dvě různoběžné roviny α, β a bod *S*, který neleží v žádné z nich. Bodům *A* roviny α chceme jednoznačně přiřadit body *A´* roviny β tak, že přímka *AA´* prochází bodem *S*. Může nastat situace, že přímka *SA* je rovnoběžná s rovinou β a bod *A´* neexistuje. Zavádíme proto další útvary, tzv. **projektivní rozšíření**.

Protože u kolineace celou situaci v prostoru rovnoběžně promítáme do roviny, budeme zavádět pouze **projektivní rozšíření roviny**. Rovinu doplníme o **nevlastní body**. Všechny navzájem rovnoběžné přímky určují právě jeden nevlastní bod, tzn. nevlastní bod je určen směrem přímky. Všechny nevlastní body roviny leží na **nevlastní přímce**. Ta je právě jedna a je množinou všech nevlastních bodů v rovině. Přímku zadanou vlastním a nevlastním bodem sestrojíme tak, že vlastním bodem vedeme rovnoběžku se směrem, který určuje nevlastní bod. Spojnice dvou nevlastních bodů je nevlastní přímka. Dvě rovnoběžné přímky se protínají v nevlastním bodě, který je dán jejich směrem. Průsečík vlastní a nevlastní přímky je nevlastní bod daný směrem vlastní přímky. V takto rozšířené rovině mají každé dvě různé přímky (rovnoběžné i různoběžné) právě jeden průsečík.

Nyní můžeme jednoznačně definovat zobrazení roviny α na rovinu β výše uvedeným způsobem. Zobrazení nazýváme **kolineace**. Odpovídající si body prochází bodem *S* (střed kolineace), odpovídající si přímky se protínají na průsečnici rovin α, β (osa kolineace). Nevlastní přímce jedné roviny odpovídá vlastní přímka druhé roviny, kterou nazýváme úběžnice. Promítneme-li celou situaci ve volném rovnoběžném promítání do průmětny, dostáváme středovou kolineaci v rovině. Známe-li osu kolineace, střed kolineace a dvojici odpovídajících si bodů, můžeme určit obrazy dalších bodů. Při řezech na jehlanech a kuželích je kolineace mezi rovinou řezu a rovinou podstavy, osa kolineace je průsečnice těchto rovin, vrchol těles je střed kolineace. Povrchové přímky spojují odpovídající si body a prochází středem kolineace.

1.4.1 Obraz bodů v kolineaci

Kolineace je zadána osou, středem a párem odpovídajících si bodů AA´. Určíme body odpovídající nevlastním bodům.

1. libovolná přímka *p* procházející bodem A $\rightarrow$ *p´*

2. směr p určuje bod U^{∞}, určíme $U´$.

3. $U´$ je vlastní bod, říkáme mu **úběžník**.

4. sestrojíme-li úběžníky všech přímek p v rovině, dostaneme přímku $u´$ rovnoběžnou s osou o (**úběžnici**).

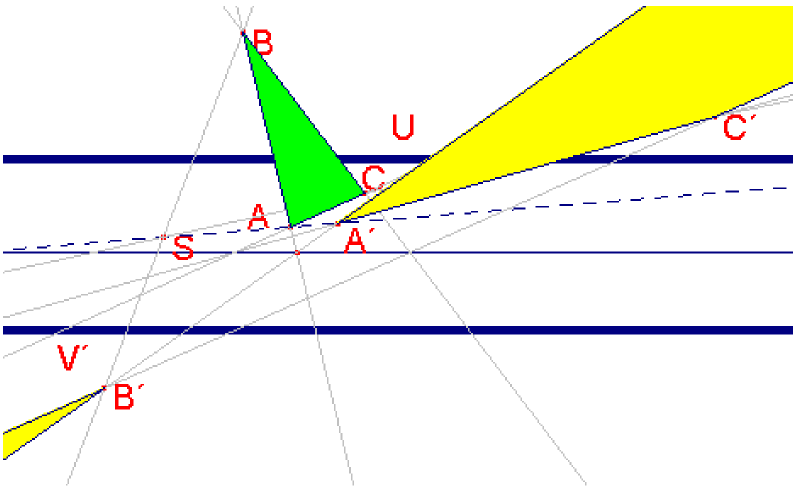
    a. U^{∞} leží na p

    b. $V^{\infty}´$ leží na $p´$

5. podobně nevlastní bod přímky $p´$ ($V^{\infty}´$) se zobrazí na vlastní bod V (neleží na $u´$)

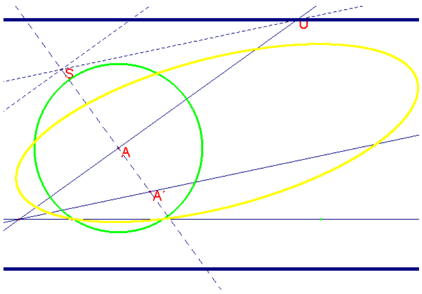
6. všechny takovéto body V vyplní úběžnici v rovnoběžnou s osou o různou od $u´$.

Kolineace nezachovává dělící poměr, střed úsečky se nezobrazí na střed úsečky, obrazem úsečky nemusí být úsečka – může to být polopřímka či dvojice polopřímek.

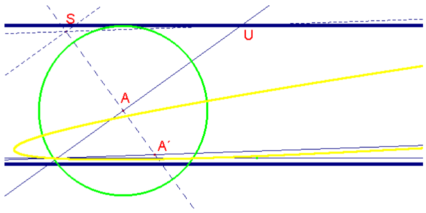


obr. 19: Obraz trojúhelníka v kolineaci

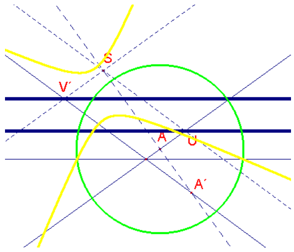
1.4.2 Obraz kružnice v kolineaci



obr. 20: Kružnice neprotne úběžnici



obr. 21: Kružnice se dotkne úběžnice



obr. 22: Kružnice protne úběžnici ve 2 bodech

1. kružnice neprotne úběžnici: obrazem kružnice je elipsa.
2. kružnice se dotkne úběžnice: obrazem parabola
3. k protne úběžnici ve 2 bodech: hyperbola

Elipsa:

Zvolíme kružnici *k* tak, aby neprotla úběžnici *v*. Zvolíme průměr *PQ* kružnice *k*, který je kolmý na osu *o*. Sestrojíme obrazy *P´Q´* bodů *PQ* a určíme střed *O´* úsečky *P´Q´*. Sestrojíme obraz bodu *O´* v kolineaci, *O* není středem *PQ*. Bodem *O* vedeme tětivu *MN*, která je kolmá na *PQ* (*MN* je rovnoběžná s *o*). *M´N´* prochází bodem *O´*, který je středem *M´N´*. *P´Q´* a *M´N´* jsou obrazy navzájem kolmých tětiv kružnice *k* a jejich průsečík *O´* je středem obou úseček. *P´Q´* a *M´N´* jsou sdružené průměry elipsy *k´*, a ta je jimi určena.

Parabola:

Kružnice *k* se dotýká úběžnice *v* v bodě *O*. *O8´* určuje směr osy paraboly *k´*. Směr kolmý na *O8´* určuje směr vrcholové tečny (označíme ho *W8´*). V kolineaci sestrojíme obraz *W* bodu *W8´*. Tečna ke *k* z bodu *W* (různá od úběžnice) se zobrazí na vrcholovou tečnu a její bod dotyku *V* na kružnici *k* se zobrazí na bod *V´* (vrchol paraboly *k´*). Můžeme sestrojit osu, bod, tečnu. Parabola bude určena.

Hyperbola:

Kružnice *k* protne úběžnici *v* ve dvou bodech *U*, *V*. *U8´* a *V8´* určují směry asymptot hyperboly *k´*. Tečny *a*, *b* ke kružnici *k* v bodech *U*, *V* se zobrazí na přímky *a´*, *b´* procházející po řadě body *U8´*, *V8´*, a jsou to tedy asymptoty hyperboly *k´*. Víme, že osy hyperboly c', d', jsou osami úhlu asymptot. Sestrojíme tu z přímek c, d, která protíná kružnici k v bodech A, B. Tyto body se zobrazí na vrcholy hyperboly. Hyperbola je tak určena.

Typ řezu na kuželi určujeme ze vzájemné polohy kužele a vrcholové roviny σ rovnoběžné s rovinou ρ řezu. Rovina σ protne rovinu podstavy v úběžnici, jejímž bodům odpovídají v kolineaci nevlastní body řezu. Pokud rovina σ neprotne podstavnou kružnici kužele, řezem je elipsa (kružnice). Pokud se dotkne kružnice (v 1 bodě), řezem je parabola, pokud protne kružnici ve 2 různých bodech, řezem je hyperbola.

1.5 Volné rovnoběžné promítání

Nejčastěji užívané zobrazení prostoru na rovinu je rovnoběžné promítání, které je potom pro potřeby středoškolské stereometrie omezeno některými podmínkami. Rovnoběžné promítání je určeno rovinou π, kterou nazýváme průmětna a směrem s promítání, který není rovnoběžný s průmětnou. Průmětem bodu A v prostoru je bod A' v rovině π, průsečík promítací přímky procházející bodem A s průmětnou π.

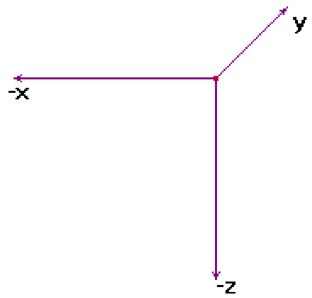
D8. *Rovnoběžný průmět prostorového útvaru do roviny π je množina rovnoběžných průmětů všech bodů útvaru.*

D9. *Přímka rovnoběžná se směrem promítání se nazývá **promítací přímka**.*

Pro každý bod A v prostoru umíme sestrojit rovnoběžný průmět A' do roviny π. Pokud neznáme žádné další podmínky, neumíme z bodu A' v rovině π určit polohu bodu A v prostoru. Proto rovnoběžné promítání vymezíme několika dalšími podmínkami tak, aby bylo dáno jednoznačně, tj. z bodu A' jsme byli schopni jednoznačně určit polohu bodu A v prostoru. Podmínky volíme tak, jak je to obvyklé ve stereometrii na středních školách, a užívanému promítání pak říkáme volné rovnoběžné promítání.

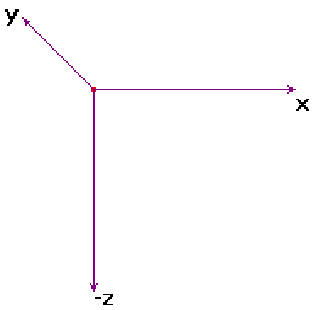
V prostoru zvolíme tzv. kartézskou soustavu souřadnic (je určena třemi různými navzájem kolmými osami, na všech osách jsou jednotky stejné délky). Útvar umístíme pevně do této soustavy souřadnic. Soustava souřadnic se do průmětny zobrazí následujícím způsobem: Vodorovná osa x a svislá osa z leží v průmětně π (rozměry na těchto osách se zobrazují ve skutečné velikosti). Pravoúhlý průmět osy *y* svírá s osou *x* úhel 45° a rozměry na ní se zkracují na polovinu. Směr promítaní vymodelujeme tak, že v prostoru spojíme jednotku skutečné osy *y* a odpovídající jednotku na průměty osy *y*. Dostáváme tak čtyři různá zobrazení podle velikosti orientovaného úhlu, který svírají průměty kladné poloosy *x* a kladné poloosy *y*. Podle směru promítání rozlišujeme tato zobrazení následovně:

1. podhled zleva



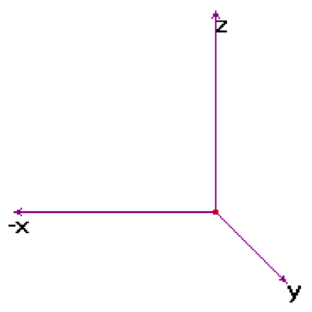
obr. 23: Podhled zleva

2. podhled zprava



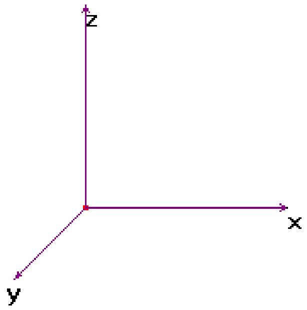
obr. 24: Podhled zprava

3. nadhled zleva



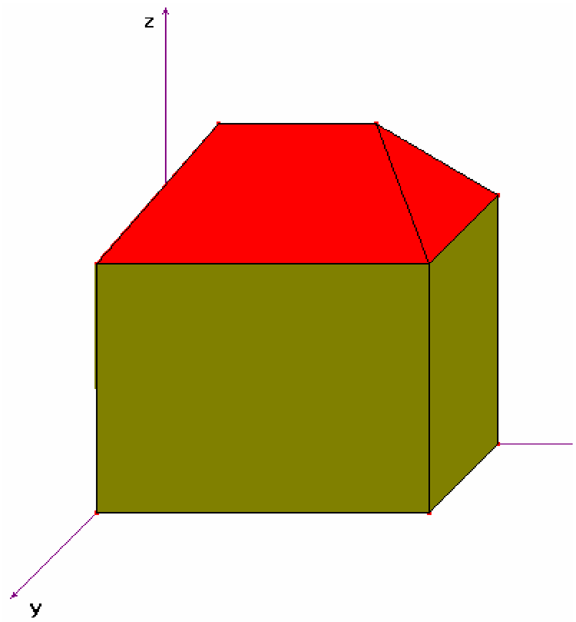
obr. 25: Nadhled zleva

4. nadhled zprava

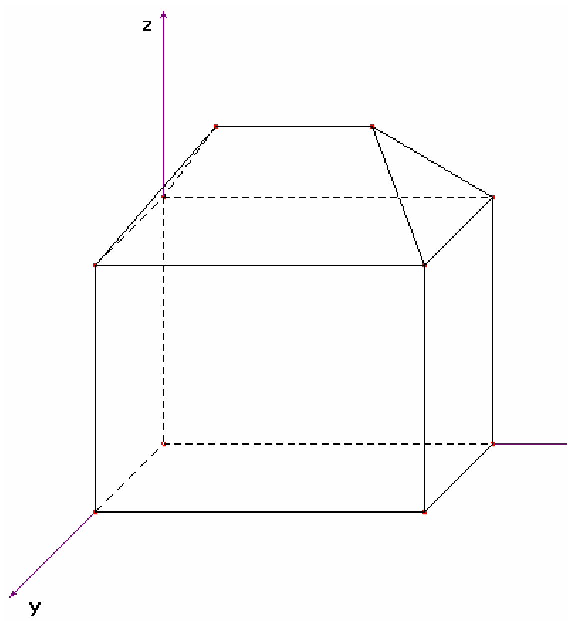


obr. 26: Nadhled zprava

Teď jsme schopni jednoznačně vymodelovat polohu objektů v prostoru, proto v části 4 jsou útvary v průmětně značeny stejně jako útvary v prostoru, aniž by to narušilo srozumitelnost.



obr. 27: Plastické zobrazení tělesa



obr. 28: Drátové zobrazení tělesa

Některé vlastnosti volného rovnoběžného promítání uvádíme bez důkazů, důkazy přímo plynou z předchozích kapitol.

V13. *Průmětem bodu je bod, průmětem přímky je přímka nebo bod.*

V14. *Zachovává se incidentnost bodů a přímek (leží-li bod na přímce, leží průmět bodu na průmětu přímky, atd.)*

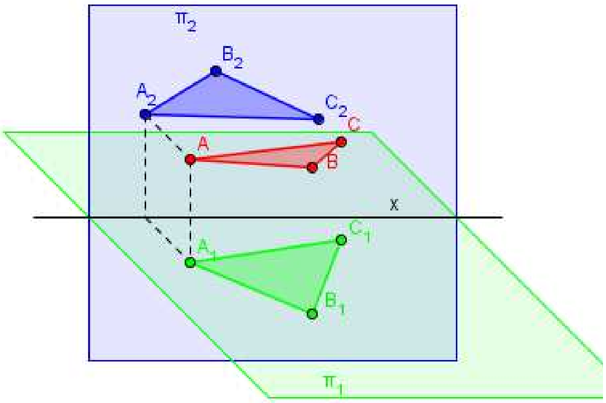
V18. *Volné rovnoběžné promítání zachovává rovnoběžnost přímek.*

V19. Poměr velikostí rovnoběžných úseček, které neleží na promítacích přímkách, se ve volném rovnoběžném promítání zachovává.

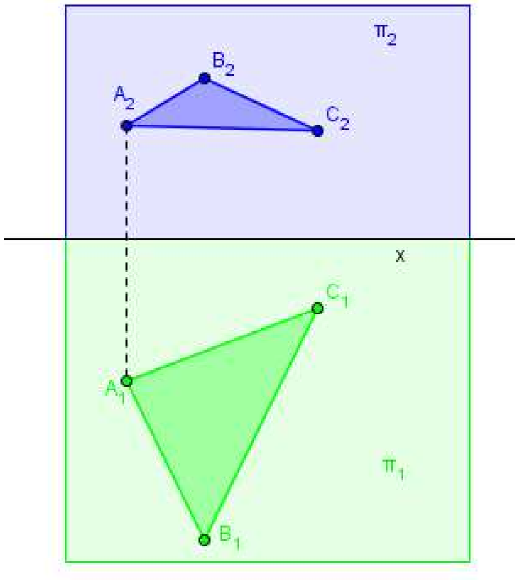
1.6 Mongeovo promítání

Promítání, kterému říkáme také pravoúhlé, spočívá v tom, že zvolíme obvykle dvě roviny zvané **průmětny** a všechny body zobrazíme do těchto průměten. **První průmětna** označujeme π_1. Obvykle se jedná o vodorovnou rovinu – **půdorysnu**. **Druhá průmětna** (π_2) bývá svislá rovina – **nárysna**.

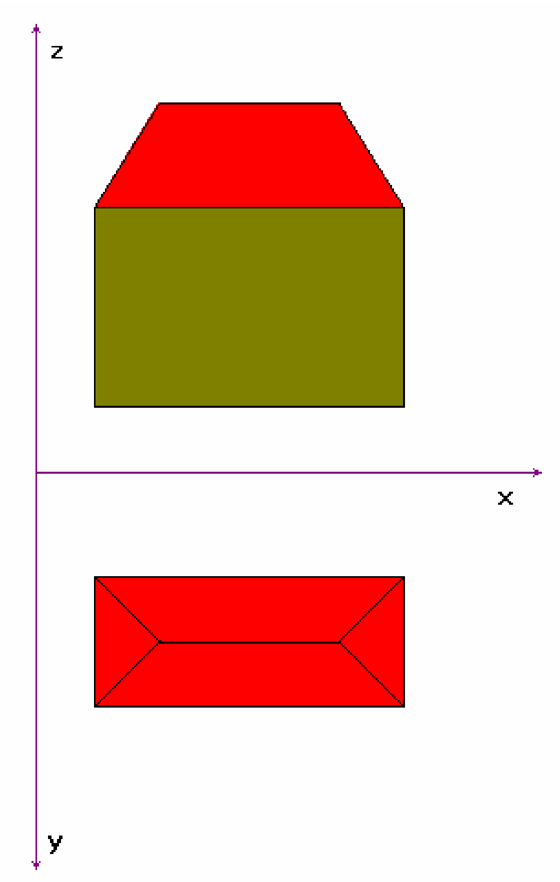
Libovolný bod A zobrazíme do průmětny π_1 tak, že sestrojíme kolmici k na průmětnu π_1 procházející bodem A. Patou kolmice je průmět A_1 bodu A. Stejným způsobem zobrazíme i průmět A_2.



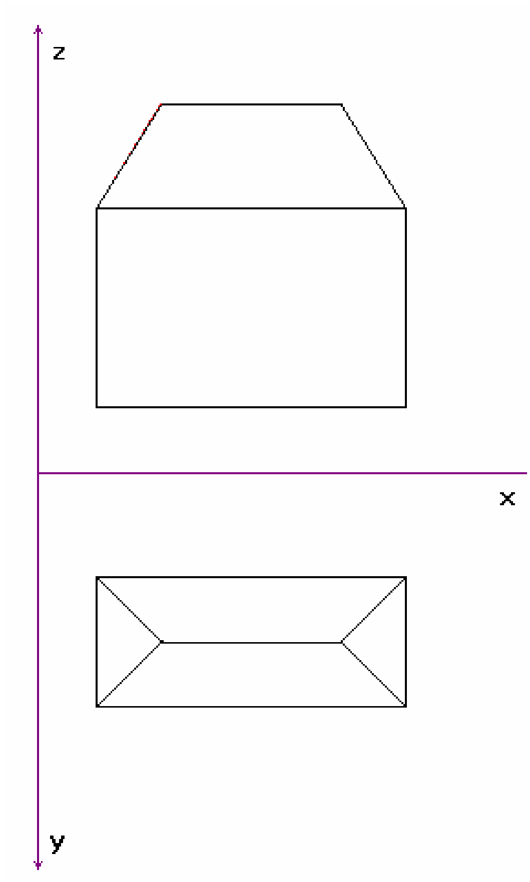
obr. 29: Promítnutí souřadnic objektu do průměten



obr. 30: Obrazy objektu v Mongeově promítání



obr. 31: Plastické zobrazení tělesa



obr. 32: Drátové zobrazení tělesa

2 Praktická část

2.1 Práce v programech

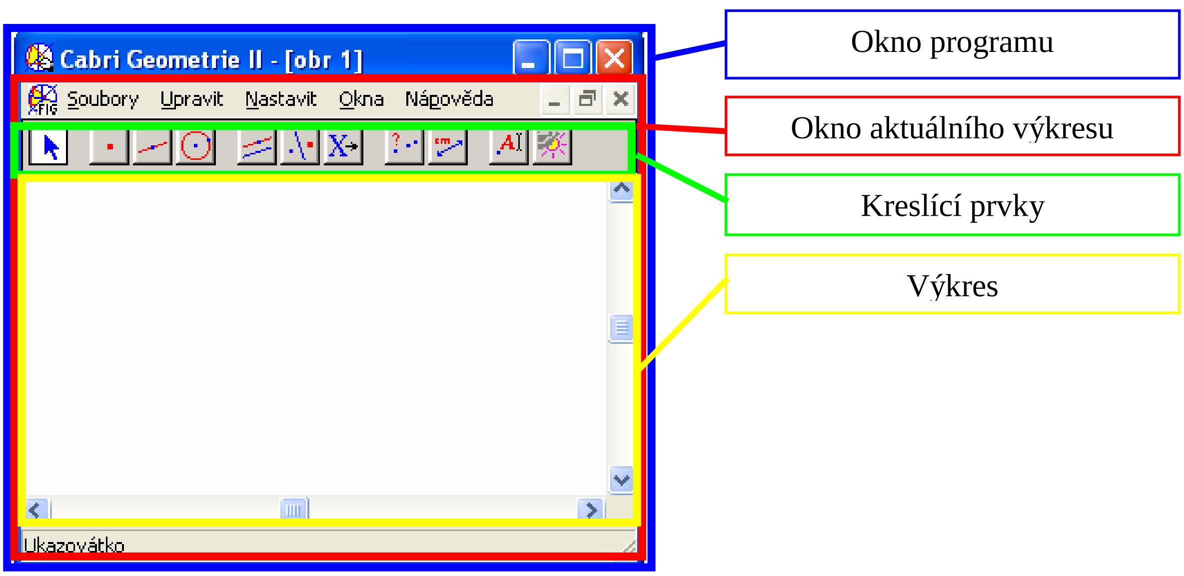
Modely jsem tvořila v programu Cabri Geometrie II, obrázky k výkladům převážně v programu GeoGebra. Práce v obou programech je velmi podobná, každý program má ale jiné výhody (viz 2.1.3 Srovnání obou programů).

V obou programech lze nakreslit zákl. geometrické útvary (uvádím pouze útvary, které jsem v práci použila):

2.1.1 Cabri Geometrie II

Výhodou programu Cabri Geometrie II je možnost automatického pohybu prvků. Můžeme i krokovat konstrukci – tuto možnost jsem nevyužila. Dále lze vytvořit makro (vysvětlím níže), které po uložení můžeme použít i v ostatních výkresech. V této části se seznámíme s prací v programu a dynamičností výkresu.

2.1.1.1 Prostředí



obr. 33: Prostředí programu Cabri Geometrie II

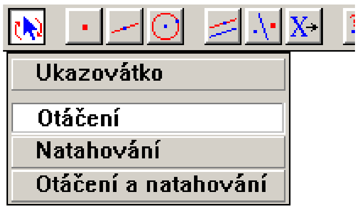
Okno programu ovládáme stejně jako okna ostatních programů v operačním systému. Pokud pracujeme s více výkresy najednou, zůstane otevřené pouze jedno okno programu, ve kterém můžeme operovat s **okny výkresů**. Práce s těmito okny rovněž není ničím specifická. Pro kreslení je důležitý **panel kreslících prvků**. Tyto prvky jsou nezbytné pro vytvoření **výkresu**.

2.1.1.2 Volba kreslícího prvku

Na prvek, který chceme vybrat, klikneme levým tlačítkem myši. Tlačítko prvku se po kliknutí propadne. Každé tlačítko obsahuje více než jeden prvek. Pokud nechceme použít aktuálně nastavený prvek, podržíme na tlačítku levé tlačítko myši:

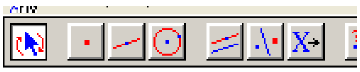
obr. 34: Výběr prvku

Stále držíme levé tlačítko myši a posuneme kursor na prvek, který chceme vybrat.



obr. 35: Volba prvku

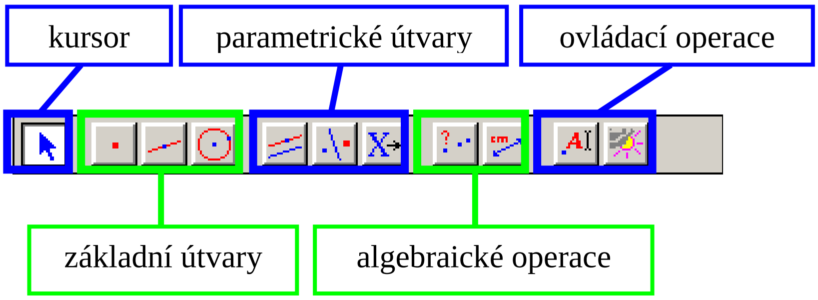
Pustíme levé tlačítko myši. Ikonka prvku se změní.



obr. 36: Změna ikony prvku

2.1.1.3 Kreslící prvky

Z názvů prvků pod kursorem je zřejmé, jak lze s výkresem manipulovat. Teď zjistíme, co nám umožňují ostatní prvky:



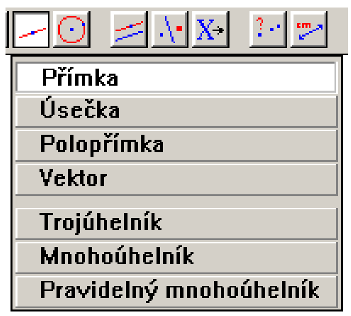
obr. 37: Orientace v prvcích

Základní útvary mohou být nezávislé prvky. Patří tam např. bod, přímka, kružnice apod. **Parametrické útvary** jsou závislé prvky. Chceme-li nakreslit např. kolmici *k* na přímku *p*, musíme mít přímku *p*, ke které bude přímka *k* kolmá. Přímka *k* potom bude závislá na přímce *p* a bodu *A*, kterým prochází. **Algebraické operace** lze využít k přepočítávání vzdáleností a ověření úsudků o výkresu. Můžeme zjistit jak vzdálenost úsečky, tak i jestli jsou dvě přímky na sebe kolmé. **Ovládací operace** pomáhají uživateli orientovat se ve výkresu. Můžeme s nimi např. popisovat objekty, měnit jejich vzhled, nebo zobrazit osy.

Pro rychlé seznámení s prvky uvádím následující obrázky:

1. základní útvary

obr. 38: Body



obr. 39: Spojnice bodů

obr. 40: Křivky

Zde je příklad, kdy lze nakreslit bod třemi způsoby:

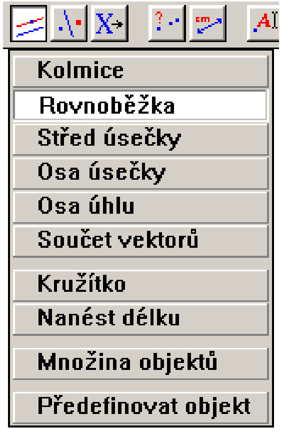
a. Bod – jednoduše nakreslí bod kdekoliv ve výkresu, kam klikneme;

b. Bod na objektu – nakreslí bod např. na přímce, na kružnici, apod.;

c. Průsečíky – po označení dvou objektů (např. 2 přímek) vznikne bod v jejich průsečíku.

Pro nakreslení přímky nám stačí určit 2 body, kterými má přímka procházet.

2. parametrické útvary



obr. 41: Nové objekty

obr. 42: Operace s objekty

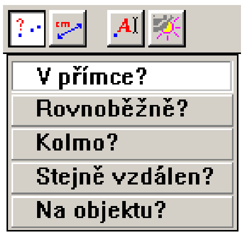
obr. 43: Makra

Na obrázku vlevo je prvek Předefinovat objekt. Tento prvek je velmi užitečný. Pokud budeme mít např. bod nadefinovaný na objektu (např. na přímce), a zjistíme, že má být v průsečíku s jiným objektem, lze jej pomocí tohoto prvku předefinovat.

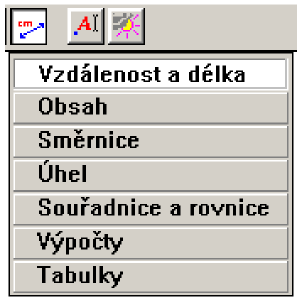
Dalším důležitým prvkem je množina objektů (viz níže).

Obrázek vpravo se týká makra (viz níže).

3. algebraické operace



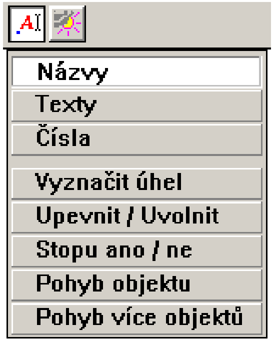
obr. 44: Ověření závěru



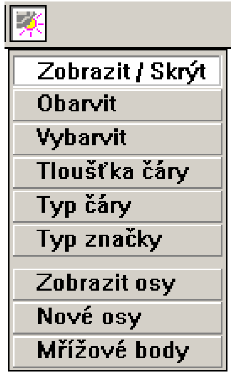
obr. 45: Algebraické operace

Výstupem těchto operací je vždy číslo nebo text. Pokud se zeptáme např. „Kolmo?“, výstupem bude text „Jsou kolmé.“ nebo „Nejsou kolmé.“.

4. ovládací operace



obr. 46: Přizpůsobení pro potřeby uživatele



obr. 47: Grafické úpravy výkresu

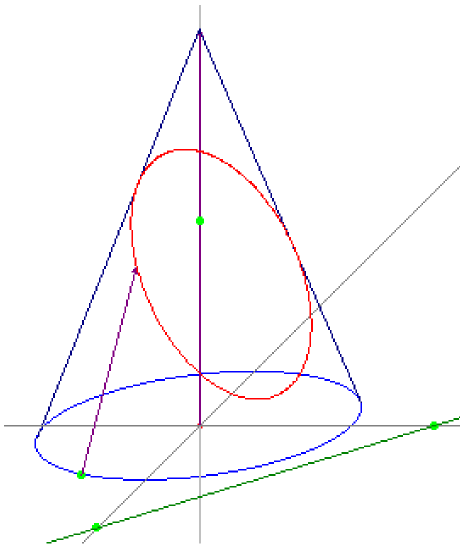
O pohybu objektů si řekneme v souvislosti s dynamičností výkresu. Další důležitý prvek je Zobrazit / Skrýt. Díky tomuto prvku můžeme skrýt útvary, které nemají být vidět.

Většina těchto prvků je snadná a intuitivní. Teď si blíže představíme nejdůležitější z obtížnějších prvků.

2.1.1.3.1 Množina objektů

Prvek množina objektů vykreslí množinu všech objektů závislých na daném objektu.

Tento prvek jsem využila u řezů rotačních těles.[1]



obr. 48: Vykreslení řezu pomocí množiny objektů

Pro konstrukci řezů rotačních těles ve volném rovnoběžném promítání musíme zavést projektivní rozšíření roviny (viz 1.4 Kolineace).To ale není zapotřebí, pokud známe prvek Množina objektů. Stačí nám určit dva odpovídající body v kolineaci.

Nejprve určíme libovolný bod na podstavě, potom kolineací zjistíme polohu odpovídajícího bodu. Bod na podstavě leží na elipse. Můžeme s ním po této elipse pohybovat. V závislosti na jeho poloze se mění i poloha odpovídajícího bodu.

Zvolíme prvek množina bodů a označíme odpovídající si body. Prvek nám vykreslí celou množinu (červená elipsa).

2.1.1.3.2 Makro

Díky makru lze zjednodušit práci s kreslením běžných útvarů. Útvar stačí nakreslit pouze jednou a uložit jej jako makro. Pro opakované vykreslení se tím velmi zjednoduší práce. Např. nakreslíme model krychle a víme, že jej nekreslíme naposledy. Potom uložíme jednu hranu krychle jako vstupní objekt a ostatní hrany jako výstupní objekty. Vytvoříme makro, které musíme někam uložit. Příště nám postačí, když

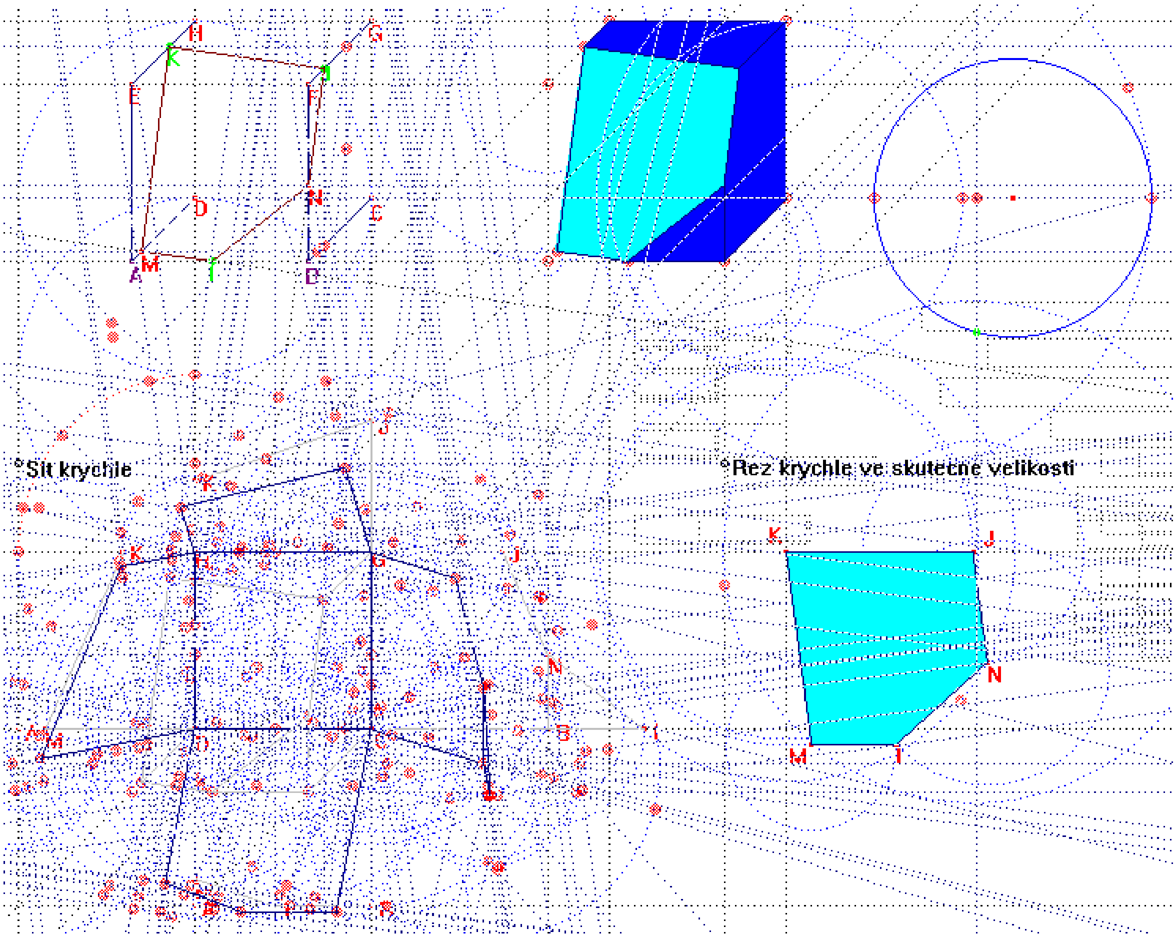
[1] Dalším řešením je určit 5 libovolných odpovídajících bodů a příkazem kuželosečka vznikne stejný útvar. V případě, že rovina řezu prochází podstavou tělesa, nelze křivku nijak zkrátit. Výsledkem je nekonečně velká křivka, což je nežádoucí.

nakreslíme jednu úsečku (hranu krychle), najdeme makro a použijeme jej. Po kliknutí na úsečku se krychle sama vykreslí.

Makro jsem využila pro kreslení kružnice ve volném rovnoběžném promítání. Rytzova konstrukce je pracná a přidá do výkresu mnoho dalších objektů potřebných pro její konstrukci. Díky makru mi k vykreslení stačila pouze jedna úsečka.

2.1.1.3.3 Zobrazit / Skrýt

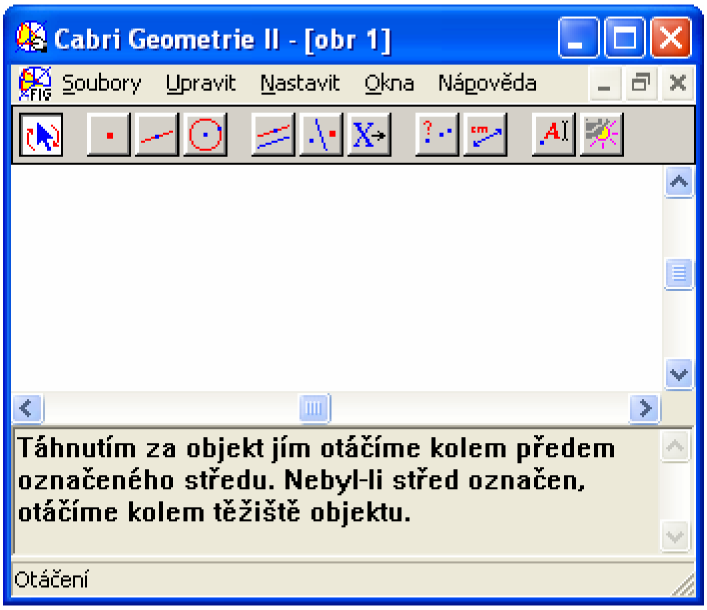
Tento prvek nám umožňuje skrýt prvky, které nemají být vidět. K vysvětlení by mohla stačit ukázka mého výkresu včetně skrytých objektů:



obr. 49: Výkres se skrytými konstrukcemi

2.1.1.4 Nápověda

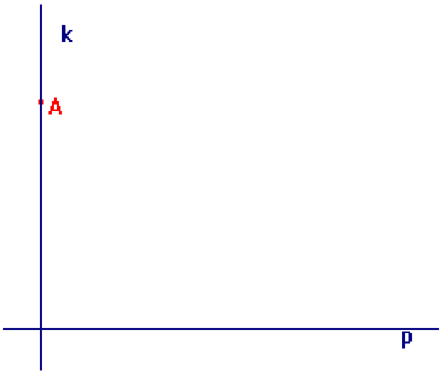
Funkce prvků jsou jasně vystiženy svým názvem. Práce s nimi je intuitivní. Navíc má každý prvek svou nápovědu, kterou zobrazíme stisknutím klávesy F1:



obr. 50: Nápověda

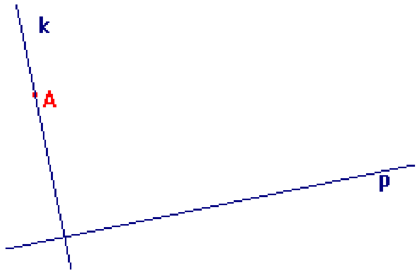
2.1.1.5 Dynamičnost prvků

Ne každý program dokáže zachovat parametry závislých objektů. Vraťme se k příkladu s kreslením kolmice: Pomocí prvku Kolmice nakreslíme kolmici *k* na přímku *p* procházející bodem *A*.



obr. 51: Kolmice

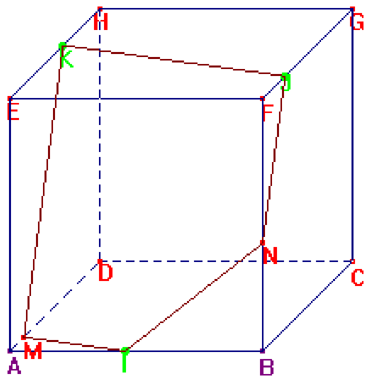
Pokud nyní posuneme bod *A*, posune se i přímka *k* tak, aby bodem *A* stále procházela. Změníme-li sklon přímky *p*, i přímka *k* změní svůj sklon tak, aby stále byla kolmá na přímku *p*.



obr. 52: Zachování kolmosti

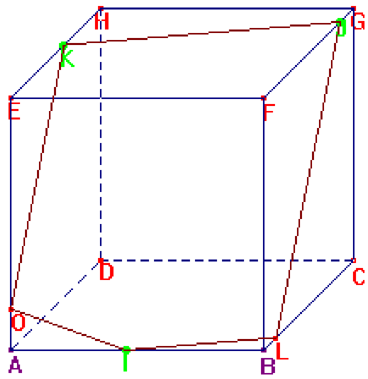
Smažeme-li přímku *p* nebo bod *A*, zmizí i přímka *k*.

Díky dynamičnosti prvků lze měnit výkres pouhým upravením zadání. Příklad uvedu na řezu krychle:



obr. 53: Řez krychle

Rovina řezu je dána body *I*, *J*, *K*. Tyto body jsou definované jako body na úsečce (na hraně krychle). Řez je vytvořen parametricky v závislosti na bodech *I*, *J*, *K*. Pokud jakýmkoliv bodem posuneme po hraně krychle, tvar řezu se změní:



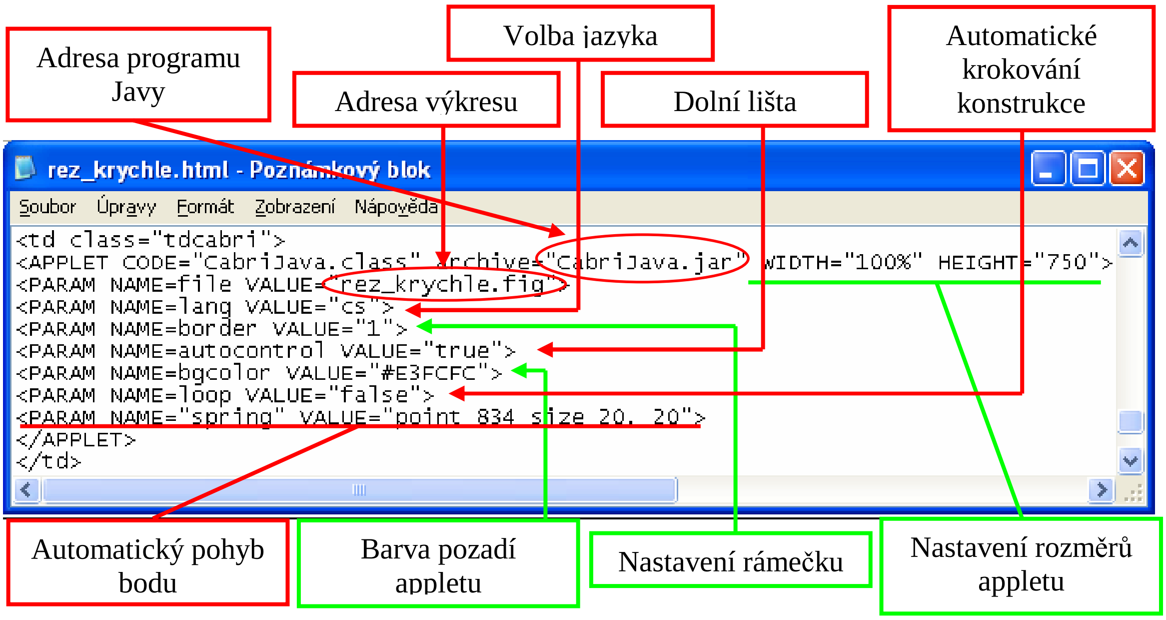
obr. 54: Nové vykreslení řezu krychle

Posun bodu *J* je pro tvar krychle zásadní. Změní totiž hrany krychle, které rovina řezu protíná. To komplikuje kreslení příkladu – je třeba nakreslit řez znovu.

Je možné zadat také pohyb objektu. Místo abychom bodem pohybovali sami, zadáme příkaz pro samostatný pohyb (viz 2.1.1.3 Kreslící prvky). Podmínkou je, že bod musí být na objektu (např. na úsečce). Po zadání příkazu se bod začne sám pohybovat po objektu, na kterém leží.

2.1.1.6 Tvorba appletu

Program Cabri Geometrie II bohužel není volně stažitelný, takže jsem jej vložila do HTML stránky ve formě Java appletu. Tímto by měl být přístupný široké veřejnosti. Pro vykreslení je zapotřebí program Javy. Vložení je snadné:



obr. 55: Vložení appletu do HTML kódu

Dolní lišta umožňuje uživateli více operovat s výkresem. Díky ní může uživatel krokovat konstrukci výkresu, posouvat výkres, vykreslovat stopy objektů, zadávat pohyb objektů, nebo dokonce stáhnout výkres do svého počítače.

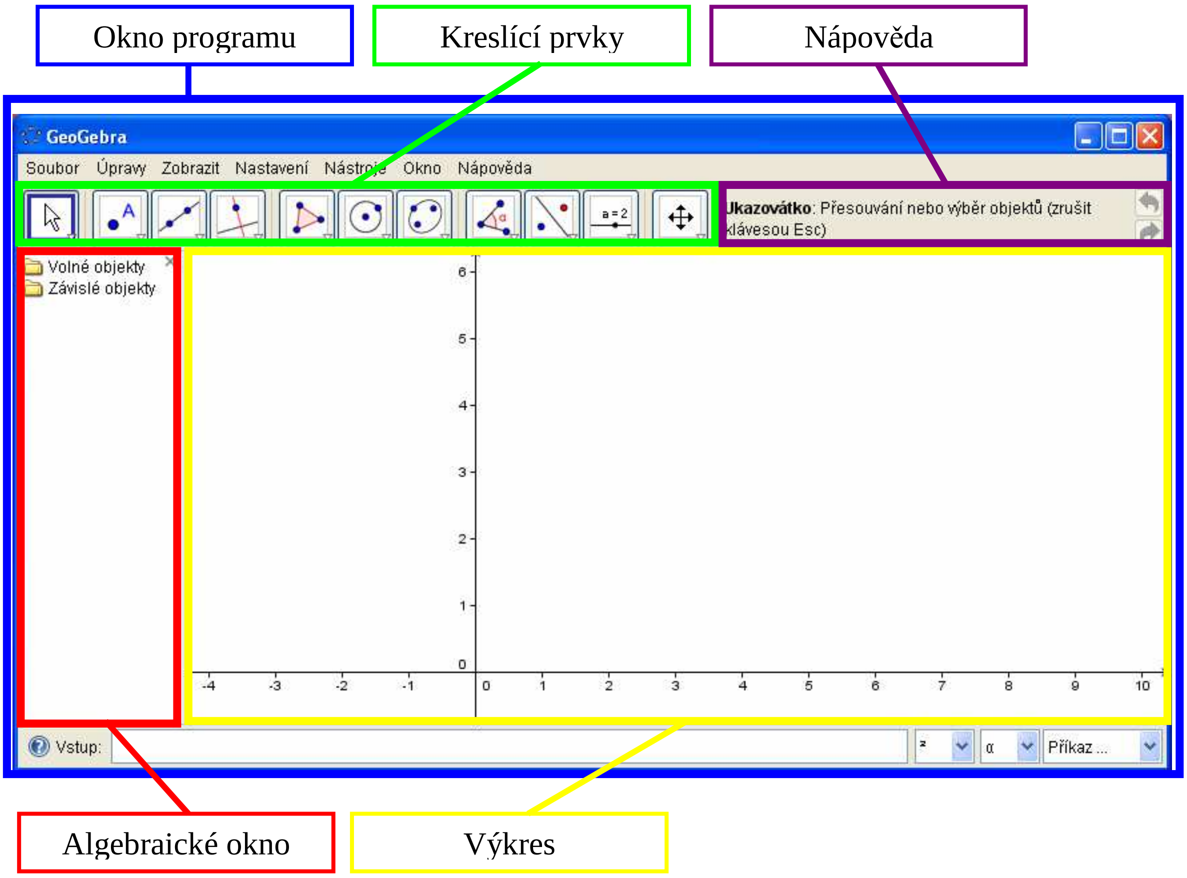
Úžasnou vlastností je **automatický pohyb bodů**. Funguje stejně jako příkaz **pohyb objektu** v programu Cabri Geometrie II s tím rozdílem, že je zadaný přímo v kódu, takže se bod začne pohybovat automaticky ihned po spuštění programu. Potom stačí když bude výkres obsahovat prvky závislé na daném bodu, a i tyto prvky se budou pohybovat.

Bohužel applet není schopen přebrat z výkresu typy čar, takže všechny modely jsou drátové.

2.1.2 GeoGebra WebStart

Nespornou výhodou programu GeoGebra je možnost stažení zdarma z internetu. Práce v něm je stejně intuitivní jako v programu Cabri Geometrie II. Proto se s programem seznámíme už jenom ve stručnosti.

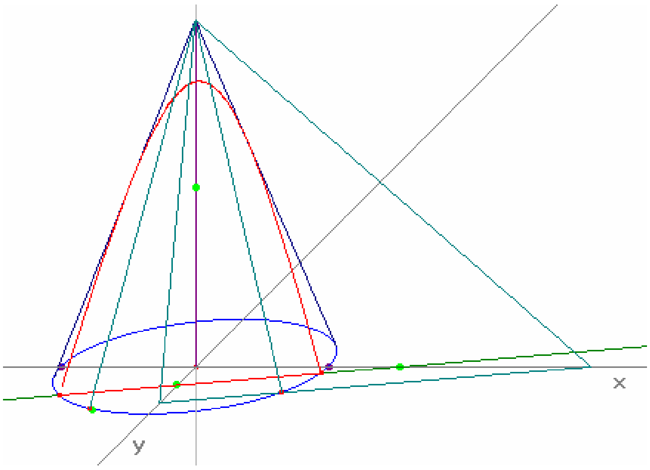
2.1.2.1 Prostředí



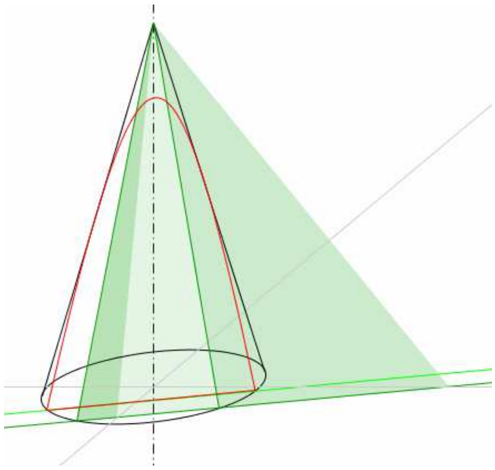
obr. 56: Prostředí programu GeoGebra WebStart

Prostředí GeoGebry je obohaceno o algebraické okno. Zde se automaticky vypisují analytické rovnice všech nakreslených objektů. Práce s tímto oknem usnadňuje orientaci ve výkresu.

2.1.3 Srovnání obou programů



obr. 57: Kužel – Cabri Geometrie II



obr. 58: Kužel – GeoGebra WebStart

2.1.3.1 GeoGebra

1. Převádí typy čar

   V Cabri lze nakreslit čáry různých druhů (plná nebo čárkovaná). Pokud ale výkres vložíme do Java appletu, typy čar se nepřenáší – všechny čáry zůstanou plné. Důsledkem jsou pouze drátové modely těles.

   GeoGebra převádí typy čar bez problémů.

2. Spolehlivě vykresluje množiny bodů

   Cabri je schopno vykreslit množinu konkrétního počtu bodů (max. 5000 bodů; s rostoucím počtem bodů klesá rychlost appletů). Tato množina slouží pouze k zobrazení – nelze s ní dále operovat.

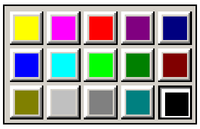
   GeoGebra se na počet bodů neptá. Vykreslí spojitou množinu, s kterou lze dokonce pracovat jako s objektem.

3. Kreslí průhledné mnohoúhelníky

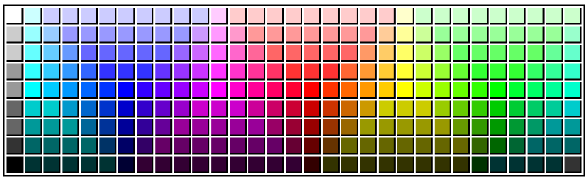
   Vybarvíme-li v Cabri mnohoúhelník, vznikne barevná nepropustná plocha.

   GeoGebra je v tomto ohledu pokročilejší – mnohoúhelníky mají nastavitelnou průhlednost. Díky tomu můžeme vidět objetky pod nimi.

4. Má výrazně větší barevnou paletu:



obr. 59: Barevná paleta – Cabri Geometrie II



obr. 60: Barevná paleta – GeoGebra WebStart

2.1.3.2 Cabri Geometrie II

- Pohyb bodu

  Zatímco v GeoGebře lze zadat pohyb bodu pouze po úsečce, Cabri umí pohyb bodu po libovolném objektu (úsečka, přímka, kružnice, …). Další výhodou Cabri je možnost automatického pohybu bodu při spuštění výkresu ve formě Java appletu.

2.2 Vysvětlivky k modelům

Ke každému modelu jsem přidala vysvětlivky, které uživateli vysvětlí, co lze z modelu vyčíst, a jak může s modelem pracovat.

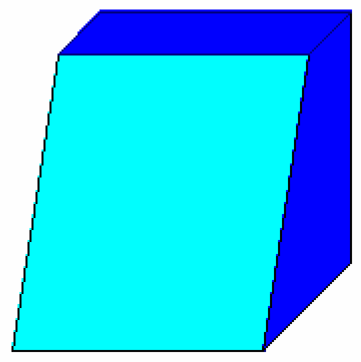
Vysvětlivky jsou napsané v programu Microsoft Office Word ve formátu *.pdf, uživatel je otevře kliknutím na odkaz nacházející se nad appletem. Uživatel klikne na následující odkaz:

obr. 61: Odkaz na vysvětlivky k appletu

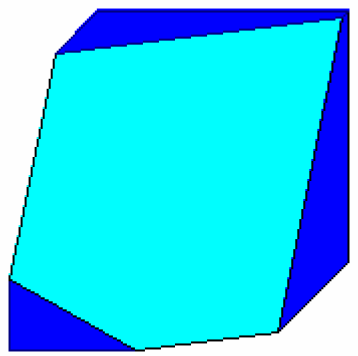
Poté se uživateli otevře okno, které bude obsahovat vysvětlivky.

Např. po kliknutí na odkaz nad modelem krychle se otevře dokument s následujícím textem:

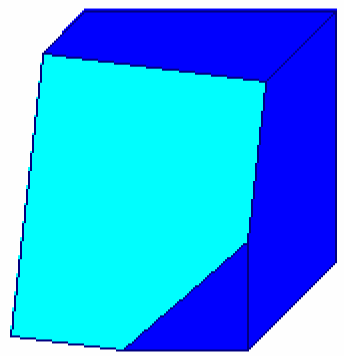
2.2.1 Řez krychle[2]



obr. 62



obr. 63



obr. 64

Na první pohled je to jednoduché: stačí hrací kostka, pilka a šikovné ruce, abychom získali těleso podobné těm nahoře. Ale proč riskovat úraz a ničit kostky, když si můžeme nakreslit tak pěkný obrázek? V tomto dokumentu se pokusím vysvětlit postup konstrukce takové krychle a řeknu něco i k ovládání appletu.

2.2.1.1 Trocha teorie[3]

2.2.1.1.1 Řez

<u>Rovina je určena třemi body, které neleží v přímce</u>. Dá se určit také přímkou a bodem neležícím na přímce (přímka je určena dvěma body), nebo dvěma přímkami rovnoběžnými nebo různoběžnými. Např. kdybychom opravdu řezali krychli pilkou, nejprve přiložíme pilku ke krychli. Plocha řezu bude záviset na dvou faktorech:

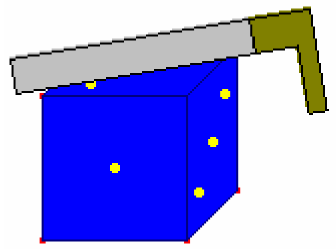
1. na **přímce**, na které se pilka dotýká krychle (to jsou dva body);
2. na **úhlu sklonu** pilky. Tento úhel je určen třetím bodem.

Zmíněné tři body určují rovinu řezu.

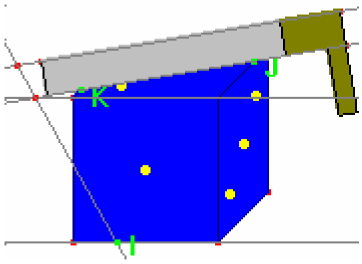
---

[2] Stručné seznámení s problematikou

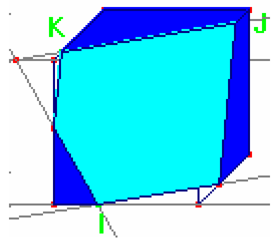
[3] Stručné opakování teorie potřebné pro konstrukci řezu krychle



obr. 65



obr. 66



obr. 67

V appletu leží body určující rovinu na hranách krychle. Jsou označeny zeleně a můžeme jimi pohybovat.

Pro konstrukci je nutné vědět, že protíná-li rovina (v našem případě rovina řezu) dvě rovnoběžné roviny (tj. horní a dolní podstava, levá a pravá stěna, přední a zadní stěna), jejich průsečnice jsou navzájem rovnoběžné. Podívejme se na řez vytvořený „pilkou a kostkou“. Všimněme si, že jisté dvojice hran jsou rovnoběžné. O které dvojice jde?

Týká se to právě hran, které leží v rovnoběžných rovinách, v tomto případě je pravidlo znázorněno u podstav a bočních stěn krychle a využívá se ke konstrukci řezu:

Přímka, na které se pilka dotýká krychle, určuje první stranu řezu.

1. Sestrojíme úsečku JK.

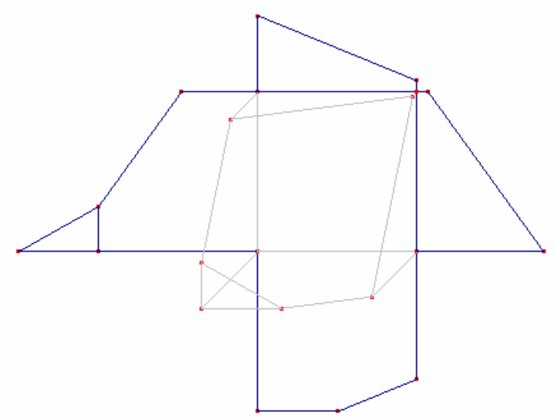
Průsečnice roviny řezu a horní podstavy krychle je rovnoběžná s průsečnicí zmíněné roviny řezu s dolní podstavou.

2. Přímka rovnoběžná s úsečkou JK procházející bodem I.

Vznikly dva průsečíky přímky a hrany krychle. **Jenom dva!! Sice to vypadá, že přímka protíná další hrany, ale musíme si uvědomit, že jde o názorné promítání a přímka leží v podstavě krychle.** Tyto body spojíme, získáme další hranu plochy řezu. Potom stačí už jenom pospojovat body na hranách bočních stěn a řez je hotový.

2.2.1.1.2 Síť

Tohle už není úloha pro kutily, ale mohlo by to zajímat fanoušky papírových modelů.



obr. 68

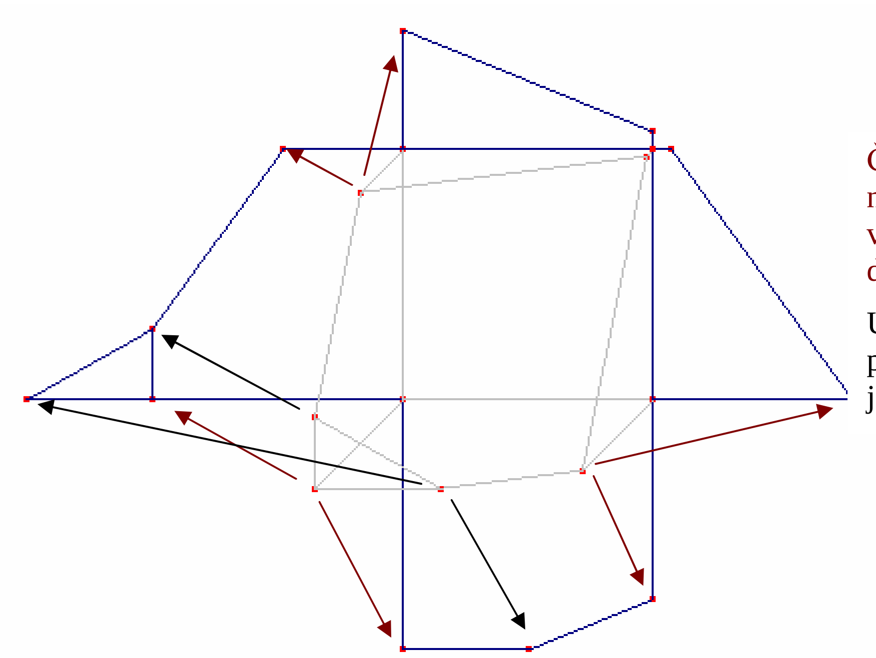
V pravoúhlém promítání jsme schopni zjistit délky jednotlivých stran tělesa. Souřadnice **x** a **z** jsou ve skutečné velikosti, **y** v poloviční. Samozřejmě můžeme rozměry vynásobit dvěma a získáme skutečnou velikost. U konstrukční úlohy to ale znamená, že pomocí měřítka zjistíme nepřesný rozměr, ten vynásobíme dvěma a získáme ještě nepřesnější skutečnou velikost. Tato metoda se jistě dá aplikovat u větších výkresů, ale proč plýtvat papírem? Není jiná možnost?

Je. Dokonce jednodušší než počítání. Vyřešme to konstrukčně:

1. Narýsujeme libovolnou přímku
2. Naneseme na kružítko vzdálenost úsečky v promítání
3. Sestrojíme kružnici se středem na přímce a naneseným poloměrem.

Skutečná velikost je dvojnásobkem poloměru, tedy průměr kružnice. Úsečka vzniklá spojením obou průsečíků přímky a kružnice je tedy v hledané skutečné velikosti.

K sestrojení sítě stěn původní krychle stačí tyto „počty“. Získáme skutečné velikosti zbylých hran krychle, strany řezu vyplynou z výkresu.



Červené šipky znamenají nutnost převedení velikosti úsečky do skutečné velikosti.

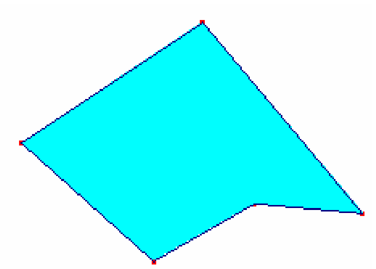
U černých šipek stačí přenést vzdálenost – už jsou ve skutečné velikosti.

obr. 69

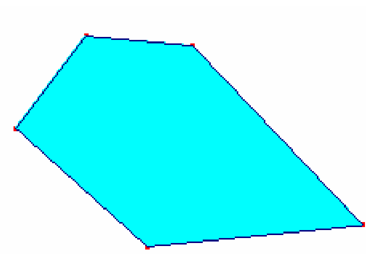
Kdo si chce krychli opravdu složit, měl by si pročíst ještě následující kapitolu.

2.2.1.1.3 Skutečná velikost řezu

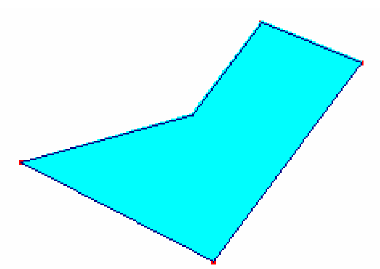
Aby byla síť kompletní, nesmí v ní chybět řez. Skutečné velikosti úseček známe, ale co s nimi?



obr. 70



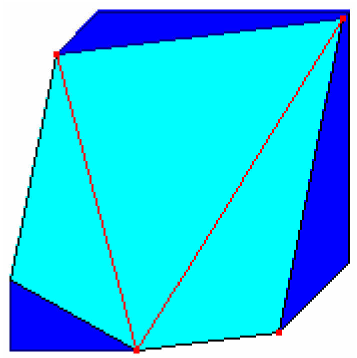
obr. 71



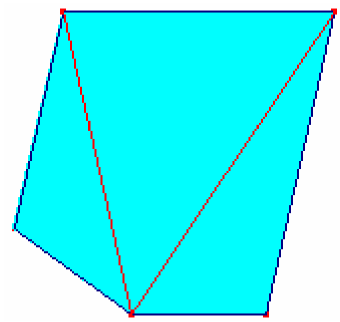
obr. 72

Všechny tyto mnohoúhelníky mají úsečky o stejných délkách jako plocha řezu. Mohla bych pokračovat mnoha dalšími možnostmi, ale myslím, že tohle pro ukázku stačí. Jak ale „najdeme“ ten správný mnohoúhelník?

Jediná možná varianta je přes trojúhelníky. Trojúhelník má dané zákonitosti mezi poměrem stran a úhlů. Známe-li tedy všechny strany trojúhelníka, je velmi jednoduché ho sestrojit. Plochu řezu rozdělíme na trojúhelníky, které jsme schopni narýsovat. Pomocí pythagorovy věty vypočteme potřebné délky (stačí ty červeně znázorněné – ostatní jsme získali konstrukcí zbylých stěn sítě v předešlé kapitole). Postupně nakreslíme všechny trojúhelníky, až získáme skutečnou velikost plochy řezu.



obr. 73



obr. 74

!!! Síť v appletu není kompletní. Chybí tam právě plocha řezu. Její konstrukce je sice jednoduchá, ale zatím se mi nepovedla sestrojit.

2.2.1.2 Applet[4]

… znázorňuje řez krychlí, pohyblivou síť seříznuté krychle (bez plochy řezu) a skutečnou velikost řezu

… byl vytvořen ve spolupráci s RNDr. Lenkou Juklovou podle návodu v teorii v programu Cabri Geometrie II

2.2.1.2.1 Ovládání[5]

Pohybujte zelenými body

- na levé horní krychli – změna roviny řezu.
- na kružnici – pohyb sítě krychle.

Lze nastavit i automatický pohyb:

---

4 Popisuje to, co vidíme na obrazovce

5 Návod k obsluze modelu

- Dolní panel, druhé tlačítko zprava. To je pružina. Klikněte na ni – tlačítko zmodrá.
- Podržte libovolný zelený bod a tahem myši napněte pružinu. Lze natáhnout i více bodů najednou.
- Znovu klikněte na pružinku na panelu. Tlačítko zešedne.
- Body se budou pohybovat pouze bude-li myš ve výkresu.

2.2.1.3 Závěrem[6]

Úloha je těžká na představivost, ale kdo se bude snažit, měl by to zvládnout. Chce to jenom trochu času, hodně papírů a ořezávátko v pohotovosti. Ve chvíli, kdy si uvědomíme jak na to, to člověka začne bavit o poznání víc. Jako nevýhodu bych uvedla snad jenom fakt, že si nevzpomeneme na revizi lékárny. Ale to už jsem možná právě vyřešila.

2.3 Výklad látky

Další dokument s příponou *.pdf obsahuje vysvětlivky k problematice probírané na středních školách.

Uživatel klikne na následující odkaz:

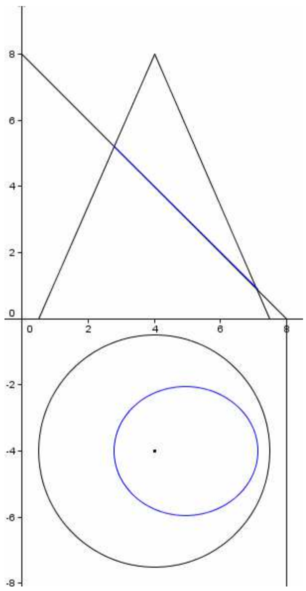
obr. 75: Odkaz na shrnutí konstrukčních úloh

Poté se uživateli otevře okno, které bude obsahovat postup konstrukce.

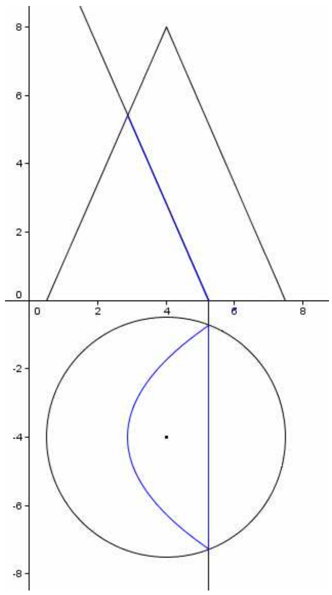
Pro příklad uvádím řešení řezů kužele:

[6] Shrnutí celé problematiky

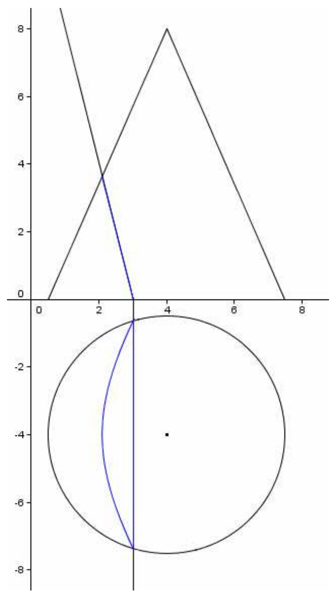
2.3.1 Řez kužele[7]



obr. 76



obr. 77



obr. 78

Povedeme-li řez hranolem nebo jehlanem, plochou řezu bude vždy mnohoúhelník. Jakou plochu získáme, pokud řez povedeme kuželem? Právě o tomto problému a jeho konstrukci si něco řekneme.

2.3.1.1 Jak bude vypadat řez?[8]

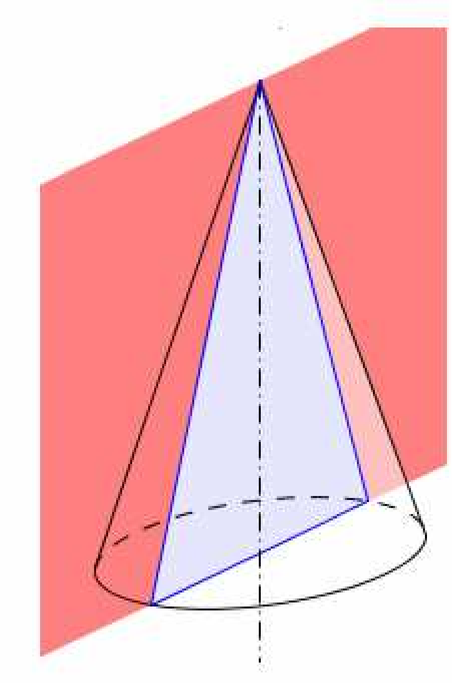
Řezem kužele může být trojúhelník, kružnice, elipsa, parabola, nebo hyperbola. Tvar řezu závisí na poloze roviny řezu:

---

7 Úvod do problematiky

8 Teorie potřebná k řešení středoškolských úloh

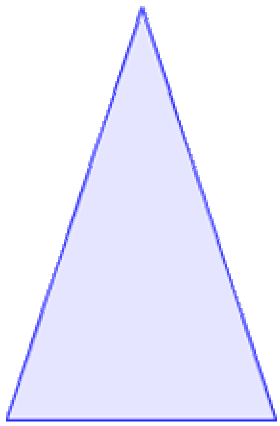
2.3.1.1.1 řez vrcholovou rovinou



obr. 79

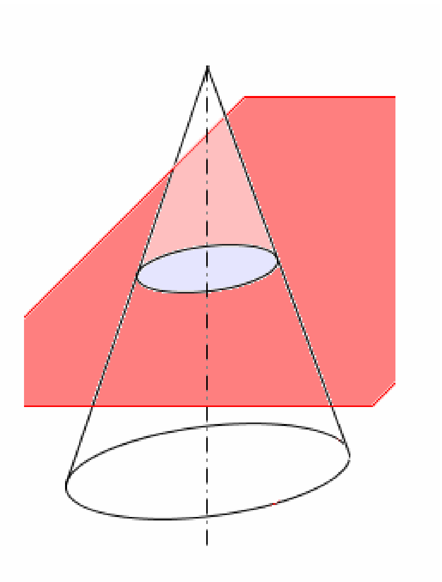
<u>Bude-li rovina řezu procházet vrcholem kužele, řeznou plochou bude trojúhelník.</u>

Pokud rovina řezu prochází osou kužele, mluvíme o **osovém řezu**.



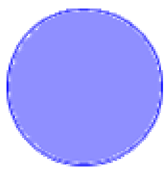
obr. 80

2.3.1.1.2 řez rovinou rovnoběžnou s podstavou kužele



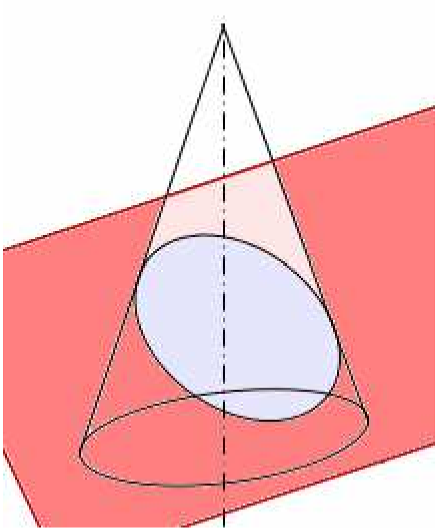
obr. 81

<u>Pokud bude rovina řezu rovnoběžná s podstavou kužele, řezem bude kružnice.</u>



obr. 82

2.3.1.1.3 ostatní řezy

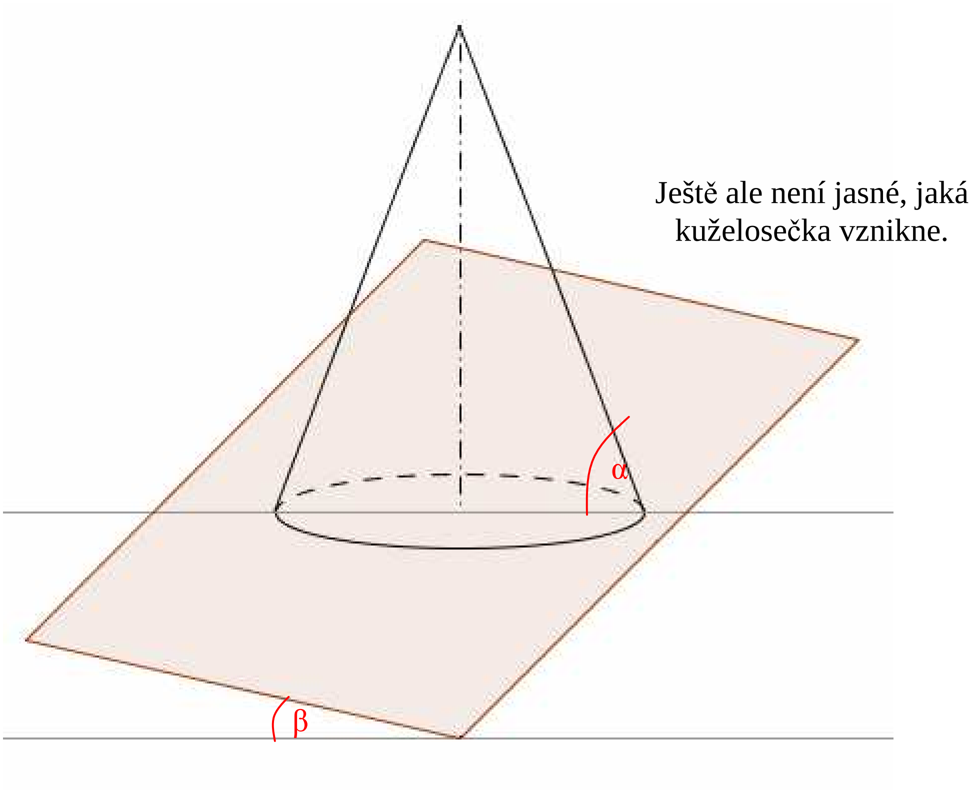


obr. 83

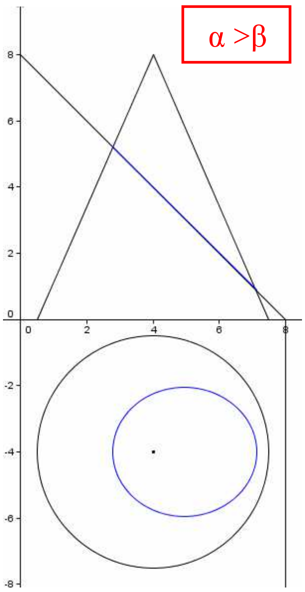
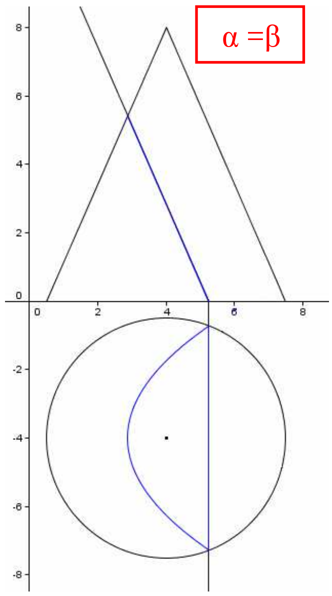
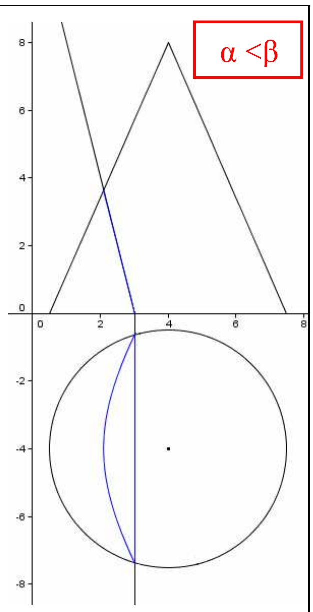
V ostatních případech vznikne kuželosečka.

obr. 84

Druh kuželosečky zjistíme srovnáním úhlu α, který svírá povrchová přímka válce s půdorysnou, a úhlu β, který svírá řezná rovina s půdorysnou.



obr. 85

Pokud	 obr. 86	 obr. 87	 obr. 88
Potom je plochou řezu	elipsa	parabola	Hyperbola

2.3.1.2 Konstrukce řezu[9]

Ukážeme si konstrukce řezu eliptického, parabolického i hyperbolického. U všech příkladů provedeme řez rovinou kolmou k nárysně.

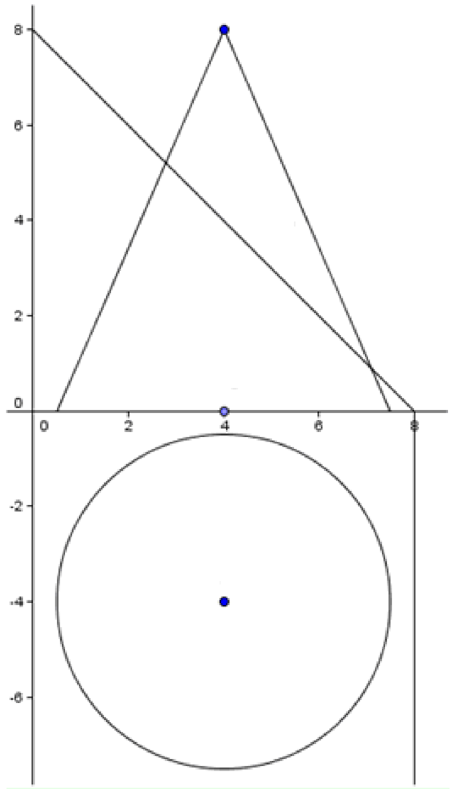
2.3.1.2.1 Eliptický řez

kužel: S (4; 4; 0)

r = 1,75

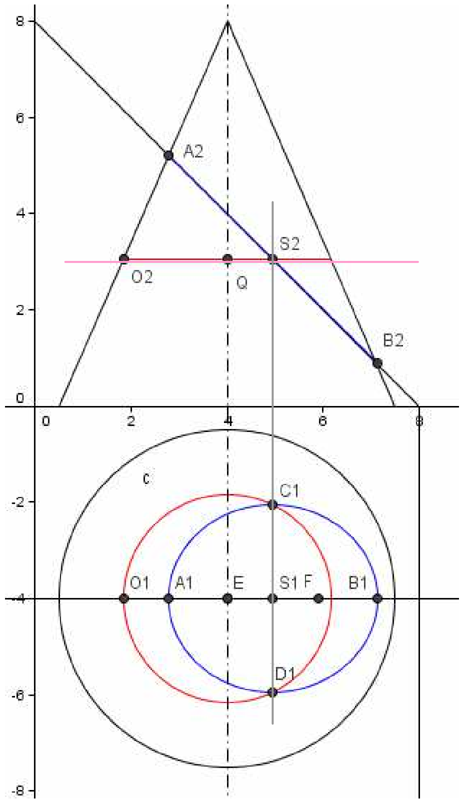
rovina řezu: δ (8; ∞; 8)

[9] Řešení konkrétních příkladů



obr. 89

V nárysně se řez bude jevit jako úsečka (viz. modrá úsečka na obrázku). V půdorysně vznikne elipsa.



obr. 90

Hlavní osu elipsy zjistíme snadno – stačí přenést body *A2*, *B2* do půdorysny (→ *A1*, *B1*).

Vyneseme body *A1*, *B1*.

Pro vedlejší osu musíme zavést pomocnou rovinu ε, která je rovnoběžná s půdorysnou a prochází středem elipsy *S* (*S2* je střed úsečky *A2B2*).

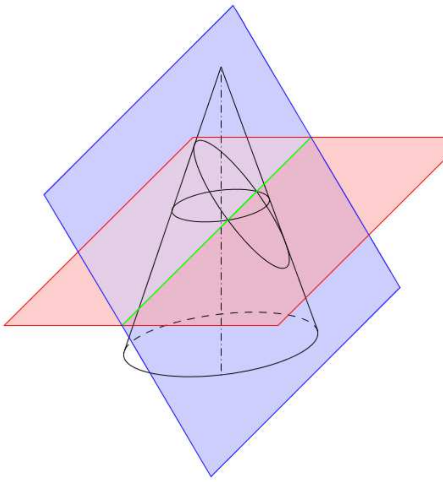
Zkonstruujeme řez kužele rovinou ε.

V nárysně je to úsečka, v půdorysně kružnice. Body *C1*, *D1* jsou průsečíky kružnice pomocného řezu a kolmice na hlavní osu elipsy *A1B1* procházející středem elipsy *S1* (viz. obrázky dole).

Body C_1, D_1.

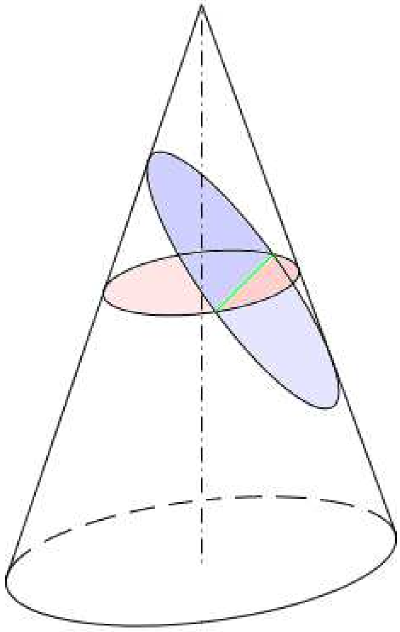
Nyní stačí jenom dokreslit elipsu a řez je hotový.

Narýsujeme elipsu.



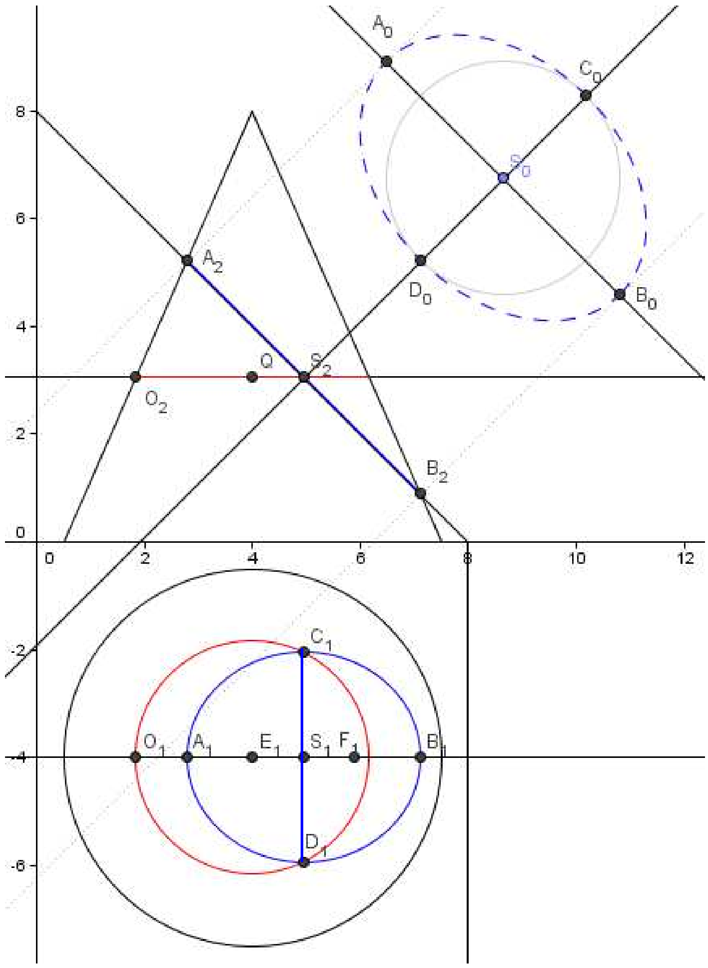
obr. 91

Tyto dva obrázky znázorňují vztah roviny řezu a pomocné roviny.



obr. 92

2.3.1.2.1.1 Skutečná velikost řezu



obr. 93

Vynesení elipsy ve skutečné velikosti není složité, musíme si ale uvědomit, kde jsou osy ve skutečné velikosti.

Hlavní osu vidíme ve skutečné velikosti v nárysně. Pro jednoduché vynesení velikosti nakreslíme elipsu nad druhý průmět kužele.

Vykreslíme body S_0, A_0, B_0.

Přímky A_2A_0, S_2S_0, B_2B_0 *jsou kolmé na přímku* A_2B_2.

Nyní se podívejme do půdorysny. Pomocná rovina ε je rovnoběžná s půdorysnou, takže je znázorněna ve skutečné velikosti. Proto vedlejší osa C_1D_1 je ve skutečné velikosti.

Vykreslíme body C_0, D_0.

Narýsujeme elipsu.

2.3.1.2.2 *Parabolický řez*

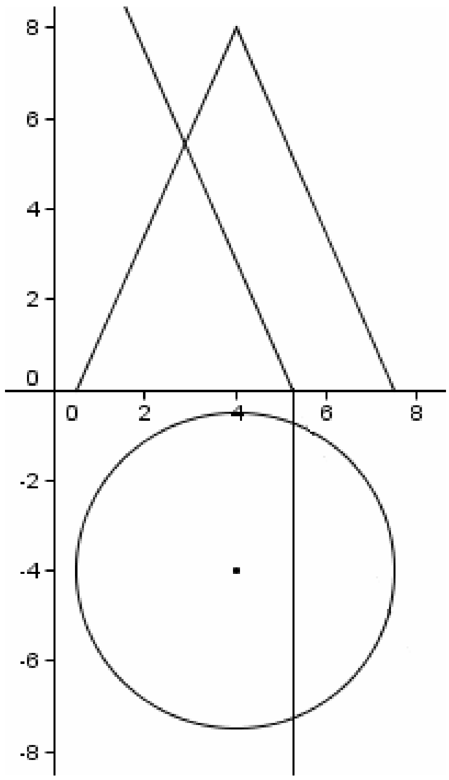
kužel: S (4; 4; 0)

r = 1,75

rovina řezu: $\delta \parallel s$

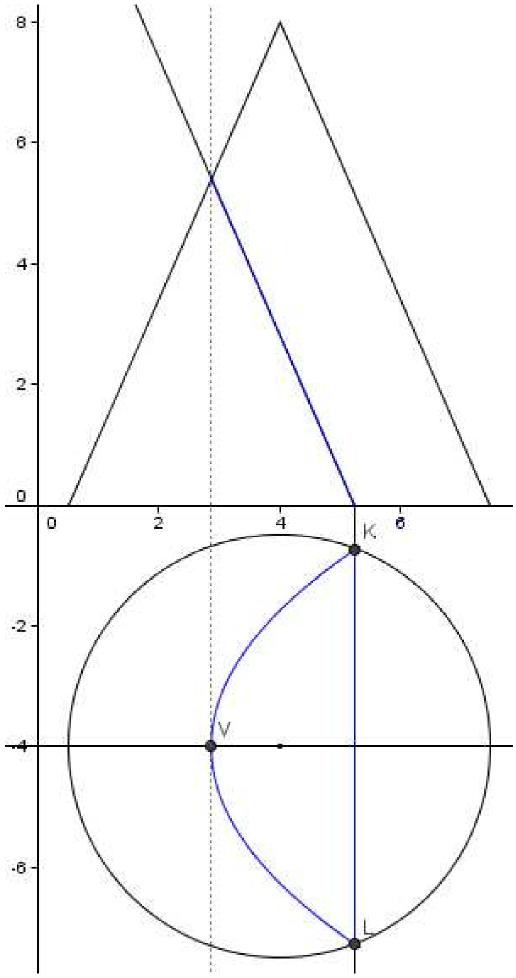
$\delta \perp \pi_2$ π_2…nárysna

$P(1; 0; 10) \in \delta$



obr. 94

Tento příklad spočívá pouze ve vynesení 3 bodů do půdorysny. V nárysně se řez jeví jako úsečka. Do půdorysny vyneseme body *K*, *L* a *V*.



obr. 95

Body *K*, *L*, *V*.

V je vrchol paraboly, K a L jsou body, které leží na parabole.

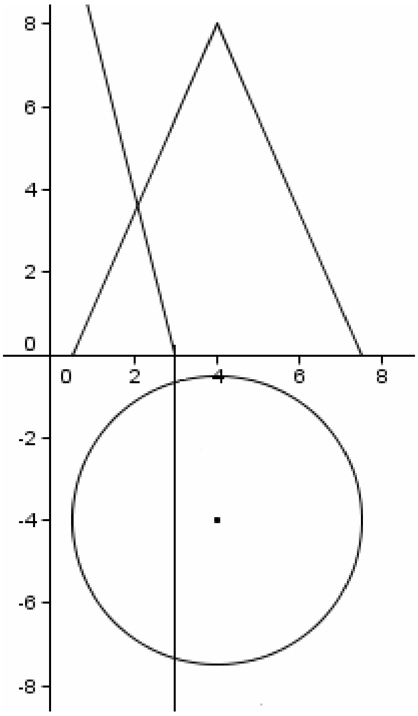
Pomocí subtangenty a subnormály narýsujeme parabolu zadanou osou (rovnoběžka s osou *x* bodem *V*), vrcholem *V* a bodem *K* (popř. *L*).

2.3.1.2.3 Hyperbolický řez

kužel: S (4; 4; 0)

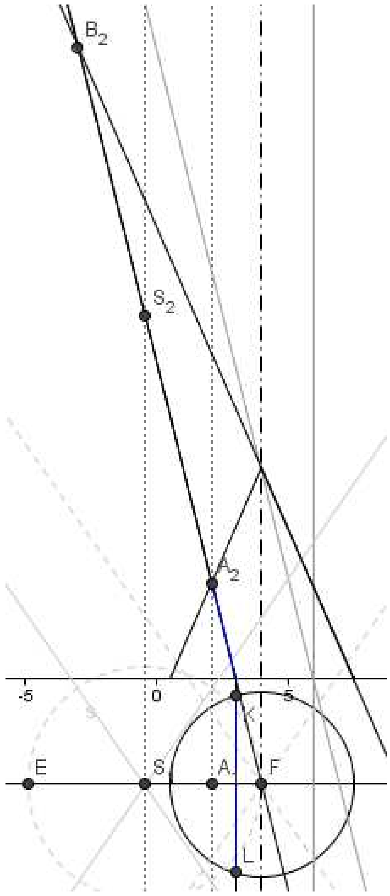
r = 1,75

rovina řezu: δ (3; ∞; 12)



obr. 96

Vrcholy hyperboly A_2, B_2 jsou v nárysu průsečíky stopy roviny a povrchové přímky kužele. Bod S_2 je středem A_2B_2. Jejich prvé průměty leží na vodorovné ose podstavy kužele.



obr. 97

Body *A*, *B*, *S*.

Pro získání asymptot hyperboly musíme zavést vrcholovou rovinu, tj. rovina rovnoběžná s rovinou řezu, která prochází vrcholem kužele (červeně).

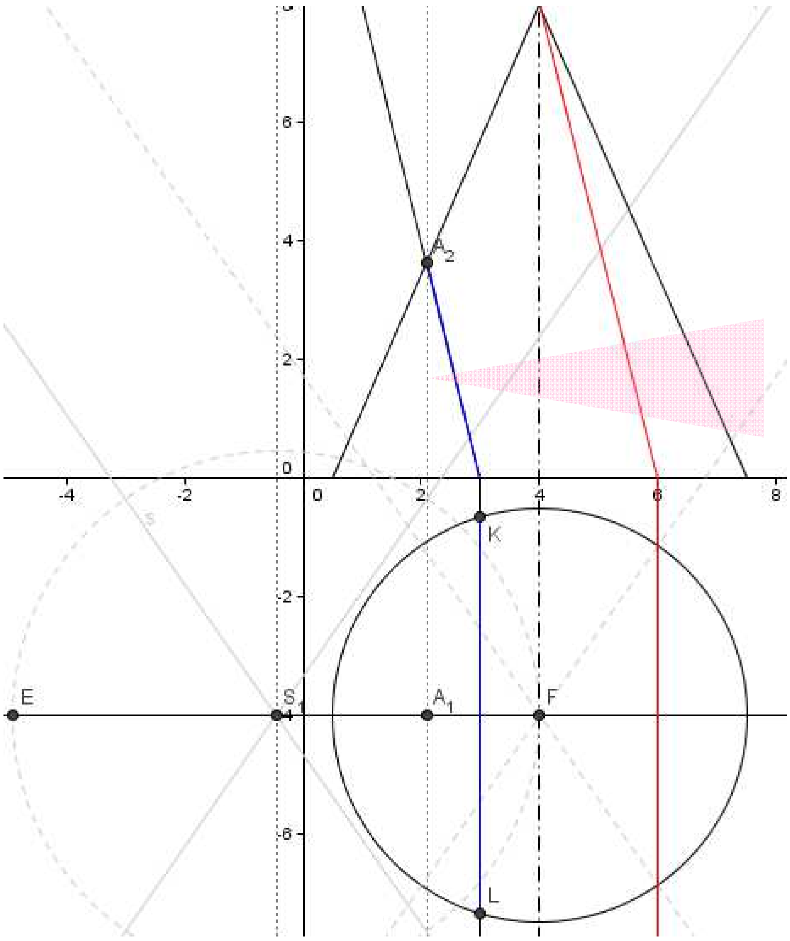
Vrcholová rovina.

Řezem touto rovinou je trojúhelník (růžový). Asymptoty hyperboly jsou rovnoběžné s rameny trojúhelníka a procházejí středem hyperboly *S*.

Asymptoty.

Vzdálenost středu hyperboly S a průsečíku asymptoty a kolmice na vodorovnou osu kužele je excentricita. Můžeme tedy nakreslit ohniska hyperboly.

Ohniska hyperboly *E*, *F*.



obr. 98

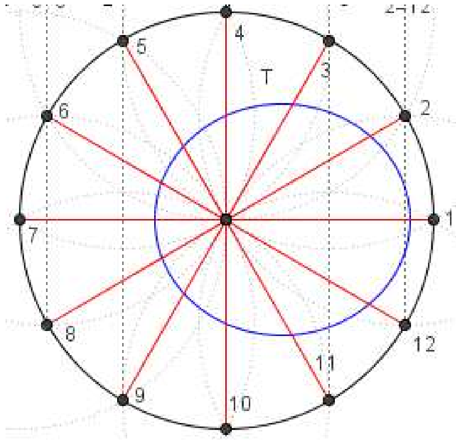
Známe střed S_1, vrcholy A_1, B_1, a ohniska E, F hyperboly. Pro řez k tomuto příkladu potřebujeme pouze pravou větev elipsy (vrchol A_1, ohnisko F).

Hyperbola.

2.3.1.3 Plášť seříznutého kužele

Plášť kužele nakreslíme u eliptického, parabolického i hyperbolického řezu stejně. Postup si ukážeme na eliptickém řezu. Zadání řezu je stejné jako zadání příkladu pro eliptický řez.

Konstrukce pláště spočívá ve vynesení povrchových přímek válce ve skutečné velikosti.

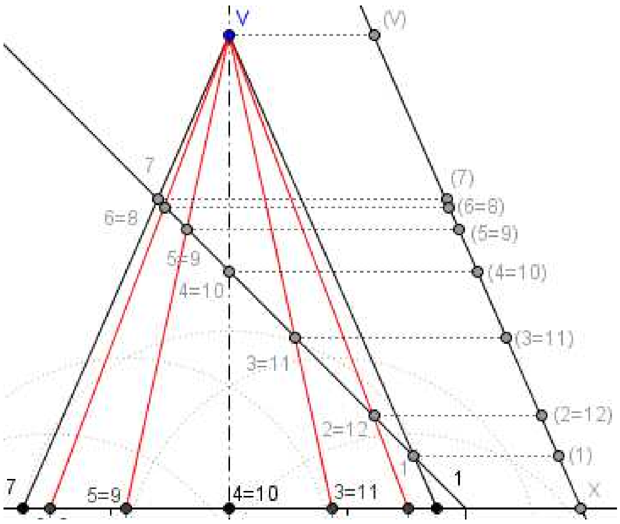


obr. 99

Nejprve rozdělíme podstavu kužele na 12 stejných dílů. Na obvodu kružnice vznikne 12 bodů, očíslujeme je za sebou.

V půdorysně narýsujeme body *1-12*.

Tyto body můžeme převést do nárysny.



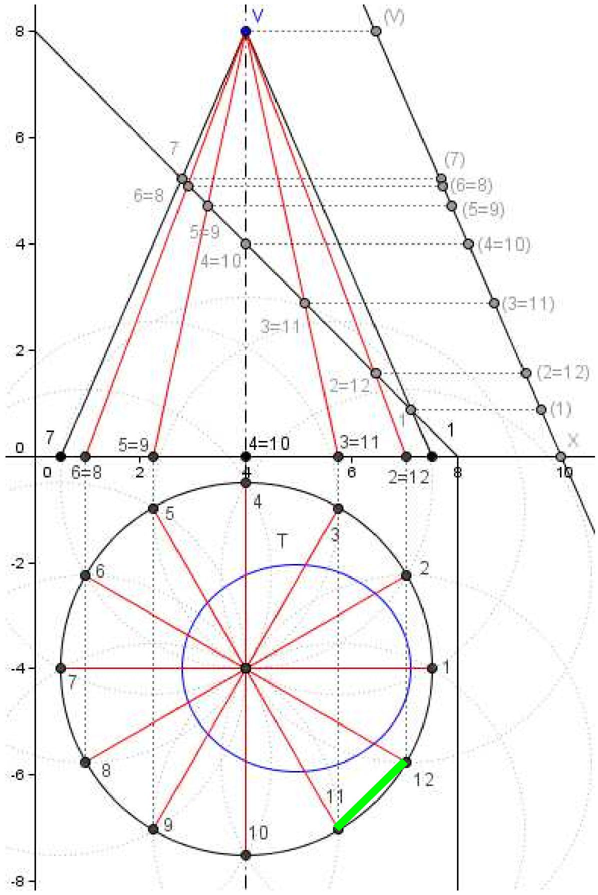
obr. 100

Převedeme body *1-12* do nárysny.

Nyní sestrojíme 12 povrchových přímek kužele, každá přímka spojí jeden z bodů *1-12* s vrcholem V_2 (na obrázku červené úsečky + úsečky $1V_2$, $7V_2$ a osa kužele).

Sestrojíme povrchové přímky.

Získáme průsečíky povrchových přímek s řezem v nárysně. Tyto body vyneseme na přímku ve skutečné velikosti *(V)X*. Tato přímka je rovnoběžná s povrchovou přímkou $1V_2$, která je ve skutečné velikosti.



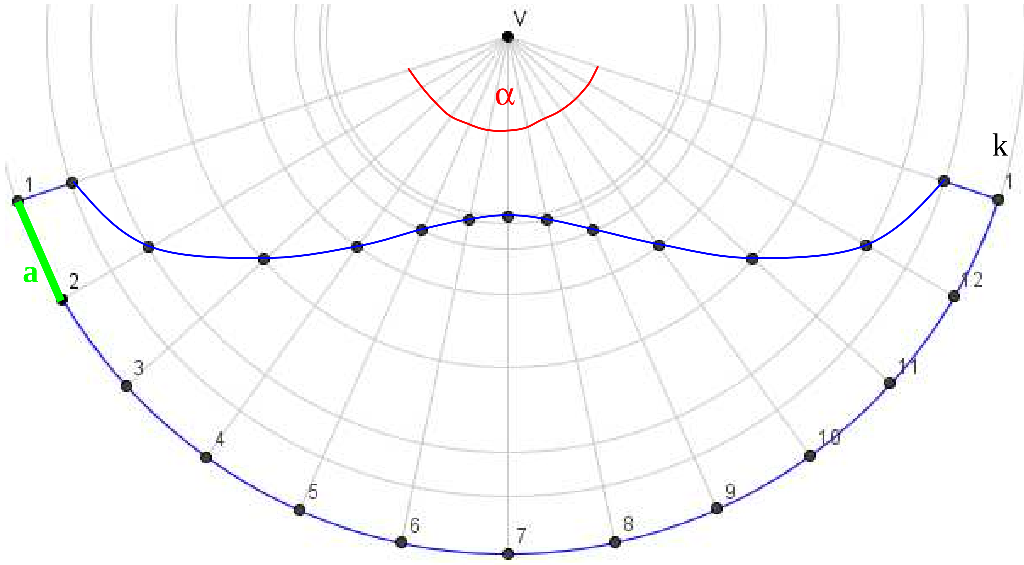
obr. 101

Průsečíky povrchových přímek s řeznou rovinou ve skutečné velikosti.

Už můžeme začít s konstrukcí pláště. Nejprve narýsujeme povrch pláště, který není seříznutý. K tomu potřebujeme znát vzdálenost vrcholu kužele *V* od kružnice v půdorysně. Tuto velikost mají povrchové přímky. Přímky $1V_2$ a $7V_2$ vidíme ve skutečné velikosti, stačí tedy vynést vzdálenost jedné z nich.

Kružnice k(V;7V$_2$). *(střed v bodě V, poloměr $7V_2$)*

Pláštěm bude kruhová úseč. Tu zjistíme vynesením bodů *1-12* na kružnici *k*. Jednoduše vyneseme velikost *a* (úsečka → plášť bude nepřesný, přesto je tato metoda nejpoužívanější). Bod *1* je libovolný na kružnici. Bod *2* je na kružnici a jeho vzdálenost od bodu *1* je *a*, bod *3* je na kružnici a jeho vzdálenost od bodu *2* je *a*… takto pokračujeme dokud se nedostaneme zpět k bodu *1*. ***!!! Celkem získáme 13 bodů v pořadí* 1-2-3-4-5-6-7-8-9-10-11-12-1.**



obr. 102

Vyneseme body *1-12* na kružnici *k*.

Úhel kruhové výseče je α. Takže plášť kužele bez řezu je hotový. Teď do něj vyneseme body pláště s řezem.

Sestrojíme úsečky *1V*, *2V*, *3V*, ..., *12V*, *1V*.

Tyto úsečky jsou povrchové přímky kužele z bodů 1-12 (na obrázcích na předchozí stránce nakresleny červeně). V nárysně máme tyto úsečky přenesené do skutečné velikosti (skutečná vzdálenost průsečíků povrchových přímek kužele a řezné roviny od vrcholu V_1. Přenesením těchto vzdáleností získáme body, kterými proložíme křivku, a plášť je hotový.

Vyneseme průsečíky povrchových přímek s řeznou rovinou a těmito průsečíky proložíme křivku.

2.4 Tvorba WWW stránek

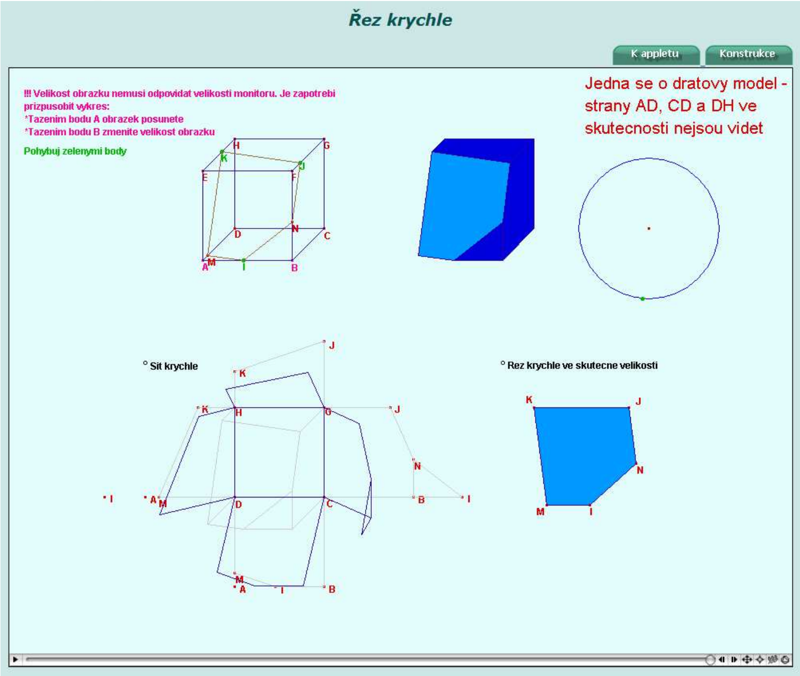
Všechny modely jsem vložila do WWW stránek z následujících důvodů:

1. přehlednější hledání konkrétních appletů,
2. model lze vložit do HTML kódu ve formě Java appletu, pro jehož spuštění není zapotřebí žádných nadstandardních programů.

3 Výsledky

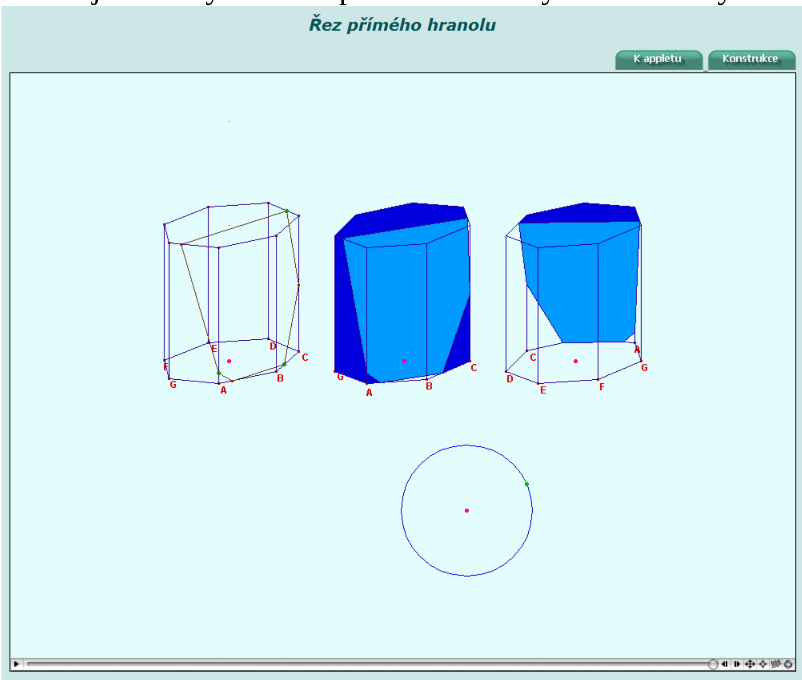
Výstupem práce je CD obsahující následující modely:

1. řez krychle
   obsahuje drátový model, plastický model, síť seříznuté části krychle bez plochy řezu, a plochu řezu



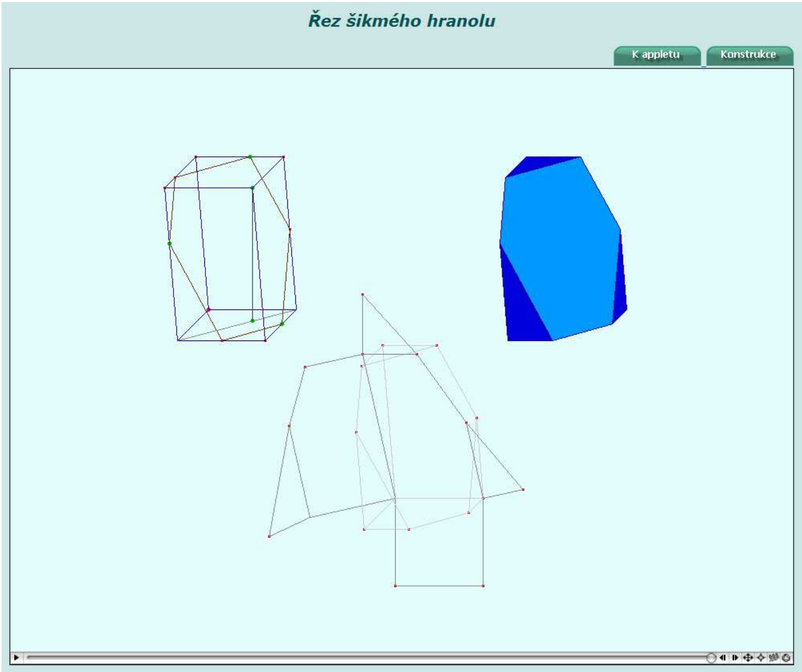
obr. 103: Model řezu krychle

2. řez přímého hranolu
obsahuje drátový model a plastické modely obou vzniklých těles



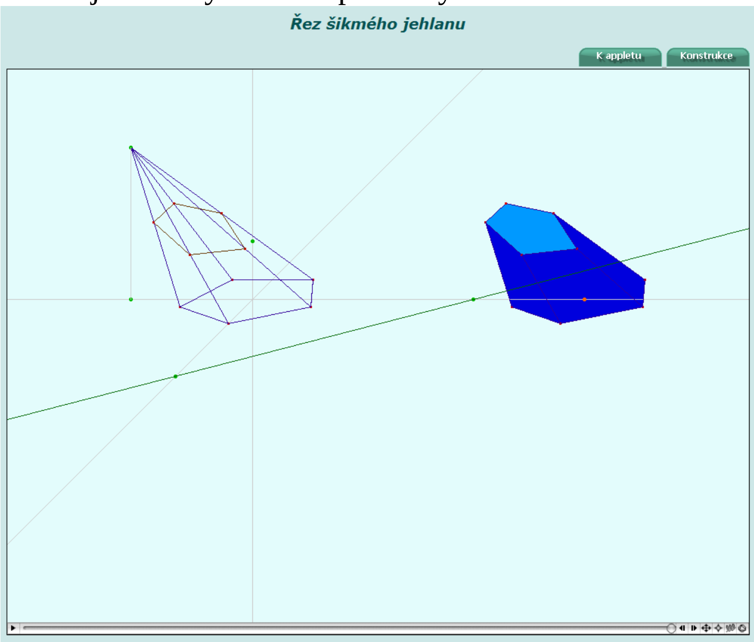
obr. 104: Model řezu přímého hranolu

3. řez šikmého hranolu
obsahuje drátový model, plastický model a síť seříznuté části hranolu bez plochy řezu



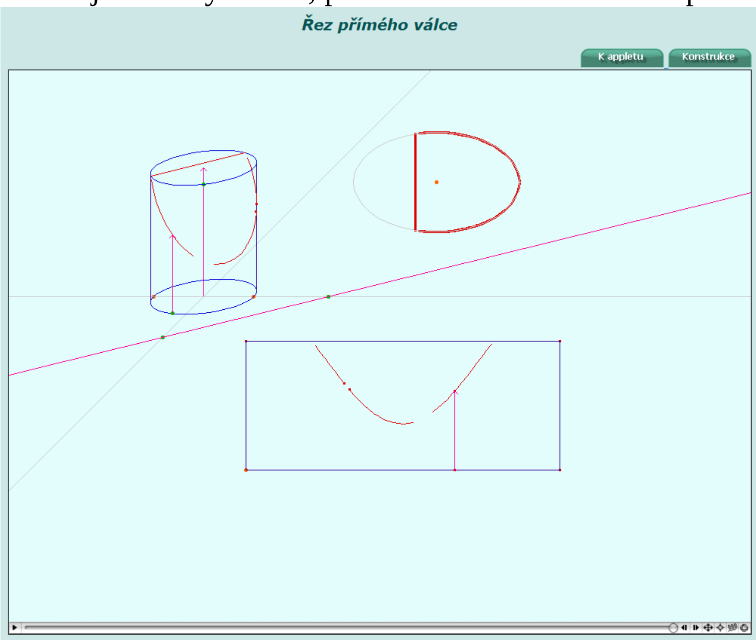
obr. 105: Model řezu šikmého hranolu

4. řez jehlanu
   obsahuje drátový model a plastický model



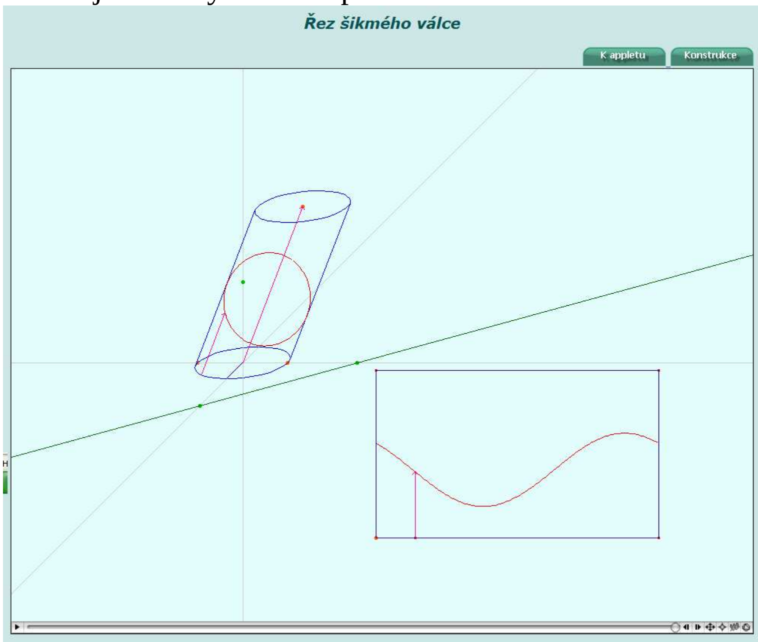
obr. 106: Model řezu jehlanu

5. řez přímého válce
   obsahuje drátový model, plášť seříznuté části válce a plochu řezu



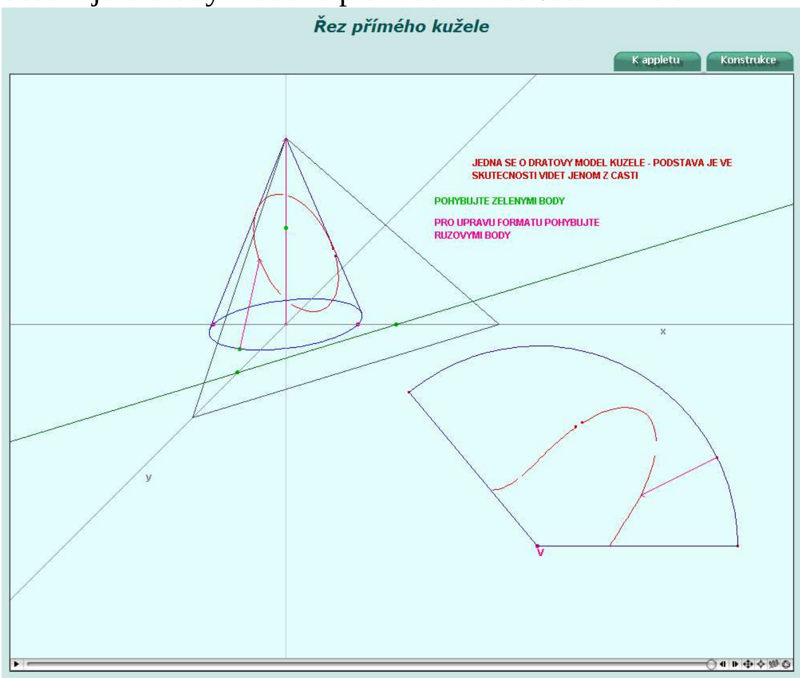
obr. 107: Model řezu přímého válce

6. řez šikmého válce
   obsahuje drátový model a plášť seříznuté části válce



obr. 108: Model řezu šikmého válce

7. řez kužele
   obsahuje drátový model a plášť seříznuté části kužele



obr. 109: Model řezu kužele

Závěr

Díky možnosti aktivně uživatele zapojit do problematiky (dynamičnost modelů) je práce velmi přínosná pro její porozumění. Uživatel může sám měnit parametry zadání a sledovat jejich vztahy v důsledku nově vykreslených řešení.

Ukázkou modelů lze i obohatit výuku ze strany učitele. Všechny jsou nakreslené ve volném rovnoběžném promítání, které je velmi názorné.

Popisy konstrukcí neslouží přímo jako učebnice. Uživatel musí znát základní vztahy a konstrukce křivek, aby byl schopen příklady nakreslit. Jedná se tedy o učební pomůcku, jejímž cílem je doplnit, popř. rozšířit znalosti deskriptivní geometrie.

U spolužáků se modely setkávají s velkým úspěchem. Většina lidí pracující s modely se k nim vyjádřila pozitivně. Model řezu krychle jsem ukázala i několika spolužákům, kteří se deskriptivní geometrii ještě neučí. Zároveň jsem s nimi ihned vyřešila dvě konstrukční úlohy. Se znázorněním do roviny (nakreslením na papír) měli minimální problémy.

Modely bych rovněž doporučila lidem, kteří se k deskriptivní geometrii vracejí po dlouhé době. S jejich pomocí se rychle zadaptují, přidané vysvětlivky jim připomenou důležité vztahy.

Práce s modely velmi obohatila mé znalosti deskriptivní geometrie. Jsem odhodlaná ve vytváření modelů pokračovat a udělat maximum pro zlepšení představivosti.

Než začnu s vytvářením nových modelů, vložím své www stránky na internet, kde budou přístupné všem zájemcům.

Seznam použité literatury a zdrojů informací

[1] HOHENWARTER, Markus. GeoGebra [online]. c2009, [cit. 2011-04-07]. <http://www.geogebra.org/cms/cs>.

[2] KOUNOVSKÝ, Josef, VYČICHLO, František. Deskriptivní geometrie. 5. vyd. Nakladatelství ČSAV, Praha, 1999. 547 s.

[3] MOLNÁR, Josef. Rozvíjení prostorové představivosti (nejen) ve stereometrii. 2., rozšířené vyd. Univerzita Palackého v Olomouci, přírodovědecká fakulta, Katedra algebry a geometrie, 2009. 142 s. ISBN 987-80-244-2254-1

[4] VANÍČEK, Jiří . Cabri Geometrie – český portál [online]. c1999, [cit. 2011-04-07]. <http://www.pf.jcu.cz/cabri/>.

[5] VANÍČEK, Jiří. Počítačové kognitivní technologie ve výuce geometrie. 1. vyd. Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2009. 212 s. ISBN 978-80-7290-394-8

[6] RESLOVÁ, Jana. Web o webu [online]. c2010, [cit. 2012-2-19]. <http://webowebu.phorum.cz/>.