STŘEDOŠKOLSKÁ ODBORNÁ ČINNOST

Obor 01: Matematika a statistika

Geometrie hmotného bodu

Mass point geometry

Autor: **Martin Bucháček**
Gymnázium Luďka Pika
Opavská 21, 312 00 Plzeň

Konzultant: **RNDr. Petr Tomiczek, CSc.**
Katedra matematiky ZČU

Plzeň 2011
Plzeňský kraj

Prohlašuji, že jsem práci vypracoval samostatně a uvedl všechny použité zdroje literatury a internetové zdroje.

Martin Bucháček

V Plzni dne 10.3.2011

Poděkování

Na tomto místě bych chtěl poděkovat panu RNDr. Petru Tomiczkovi, CSc. za podporu při zpracování práce. Velice si vážím jeho trpělivé pomoci při odstraňování nepřesností a formálních chyb, která umožnila zlepšit přehlednost a srozumitelnost práce.

Abstrakt

Práce seznamuje čtenáře s geometrií hmotného bodu. Tato teorie, která slouží k popisu vzájemného vztahu geometrických objektů, je zde prezentována axiomaticky a odůvodněna fyzikální motivací. Práce ukazuje aplikace teorie především při dokazování kolinearity bodů a konkurentnosti přímek a dokazuje Deasarguovu a Pappovu větu v Eukleidovské rovině. V poslední části rozšiřuje práce poznatky teorie na případ hmotných souvislých útvarů a i v tomto případě ilustruje možné aplikace na několika geometrických problémech.

Klíčová slova: geometrie hmotného bodu, těžiště, Cevova věta, Menealova věta, Pappova věta, Desarguova věta, planimetrické problémy, souvislé útvary

The topic of this work is the mass point geometry. This theory, which can be used to the description of relations between geometric objects, is introduced as an axiomatic theory based on a physical motivation. The aim of this work is to show several applications of this theory in planimetrics as the proof of the collinearity of points or the concurrency of lines. In addition, the Desargues' and the Pappus's theorems are proved by this method. A usage of the theory in the case of the mass connected spaces was also developed and its applications in geometric problems were revealed.

Keywords: mass point geometry, centre of mass, Ceva's theorem, Menelaus' theorem, Desargues' and Pappus's theorems, planimetric problems, connected objects

Přehled použité symboliky

AB	přímka AB
$\|AB\|$	vzdálenost bodů A, B
$\boldsymbol{r}_A$	polohový vektor bodu A vztažený k počátku souřadné soustavy
$aA, (A, a)$	hmotný bod určený bodem A a hmotností a
a, m_A	hmotnost bodu A
$S = \{aA, bB, ...\}$	soustava hmotných bodů $aA, bB, ...$
m_S	hmotnost soustavy S
$\overrightarrow{AB}$	vektor s počátečním bodem A a koncovým bodem B
T_S	těžiště soustavy S
$A \setminus B$	rozdíl množin A, B
(AB)	orientovaná vzdálenost bodů A, B
(ABC)	dělicí poměr bodů A, B, C
$(ABCD)$	dvojpoměr bodů A, B, C, D
$\|\sphericalangle ABC\|$	velikost konvexního úhlu ABC
(Ω, ρ)	hmotný útvar určený množinou Ω a funkcí hustoty ρ
ω	hmotnost hmotného útvaru (Ω, ρ)
T_Ω	těžiště hmotného útvaru (Ω, ρ)

Obsah

Úvod

„Dejte mi pevný bod ve vesmíru a já pohnu zeměkoulí.“

Archimédes

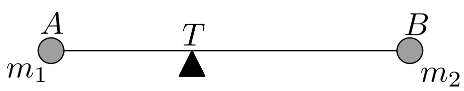
Geometrie hmotných bodů popisuje vztahy mezi body a přímkami na základě poznatků statiky tuhého tělesa. Základy této geometrické teorie, která dnes slouží převážně jako jeden ze způsobů dokazování geometrických tvrzení, položil již *Archimédes* ve 3. století př.n.l. V 19. století použil podobný princip *August Ferdinand Möbius* ve své práci o homogenních souřadnicích. Matematicky korektní geometrie hmotných bodů, ze které vychází i tato práce, byla vypracována až v 60. letech 20. století na New York University [2].

Historická poznámka

Je třeba zdůraznit, že principy geometrie hmotných bodů, které jsou používány dnes, se výrazně neliší od Archimédových myšlenek, pouze mají propracovanější matematické pozadí vyhovující fundamentálním požadavkům na matematické teorie. Vraťme se proto úvodem do antického Řecka a vysvětleme některé základní Archimédovy myšlenky. Archimédes se zabýval hmotnými body, které chápal jako tělesa s hmotností, avšak zanedbatelnými rozměry, a jejich soustavami. Položil základy statiky tuhých těles tím, že dosud známé intuitivní poznatky o rovnováze soustav hmotných bodů systematizoval do tří axiomů:

Axiom I. Každá soustava hmotných bodů má právě jedno těžiště.

Axiom II. Těžiště dvou hmotných bodů A, B o hmotnostech m_1, m_2, je bod T, který se nachází na úsečce AB a pro který platí $m_1|AT| = m_2|BT|$ (tzv. princip páky).

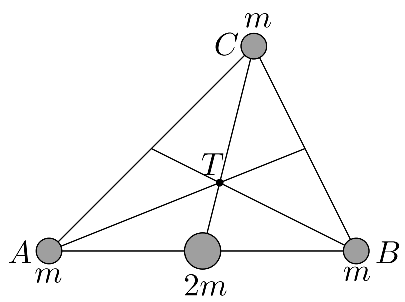


obr. 1

Axiom III. Těžiště soustavy hmotných bodů se nezmění, nahradíme-li libovolný počet hmotných bodů (tzv. podsoustavu) jedním bodem, který leží v těžišti této podsoustavy a jehož hmotnost odpovídá součtu hmotností všech bodů podsoustavy.

Archimédes pravděpodobně rozuměl pojmu těžiště čistě intuitivně ve smyslu axiomu II jako místu, kde můžeme soustavu podepřít, aby byla v rovnováze. Definice těžiště, tak jak ji používáme v matematice dnes, umožňuje všechny tři Archimédovy axiomy dokázat. Dalším nedostatkem Archimédovy teorie bylo uvažování pouze kladných hmotností bodů. V případě, kdy uvažujeme i záporné hmotnosti bodů a libovolnou vzájemnou polohu bodů A, B, T, je třeba vztah v tomto axiomu zobecnit (viz věta 1.7).

Tento přístup se však ukázal v mnoha případech zcela dostačující, což ilustrujeme na jednoduchém tvrzení. Uvažujme body se stejnou kladnou hmotností umístěné ve vrcholech trojúhelníku. Hmotné body A, B nahradíme podle axiomů II a III hmotným bodem C_1 ležícím ve středu strany trojúhelníka s dvojnásobnou hmotností. Těžiště celé soustavy tak musí ležet na spojnici vrcholu C a středu protější strany, tzv. těžnici. Stejná úvaha však platí i pro zbývající dva vrcholy A, B trojúhelníku. Tím Archimédes dokázal, že všechny tři těžnice se protínají v jednom bodě T, těžišti trojúhelníku. Navíc z axiomu II plyne, že těžiště dělí těžnici ve stejném poměru, v jakém jsou hmotnosti bodů C, C_1, tedy $2:1$.



obr. 2

Jak ukáži v dalších částech práce, úvahy spojené s hmotnými body mohou být mnohem složitější. Opakovaně lze aplikovat principy axiomů II a III a tím získávat komplikovanější geometrická tvrzení. Stejně dobře se dá geometrie hmotných bodů použít k důkazu již známých tvrzení.

Cíle

Tato práce volně navazuje na práci Matematické metody ve statice tuhého tělesa, [1], kde bylo mým cílem zkoumat statické vlastnosti tuhého tělesa z hlediska matematických metod. Nyní je mým cílem představit řešení čistě matematických problémů pomocí metod statiky tuhého tělesa.

Cílem práce je seznámit čtenáře se základními poznatky a aplikacemi geometrie hmotného bodu (těžiště trojúhelníku, Cévova a Menealova věta, geometrické úlohy). Ukazuje se, že geometrie hmotných bodů je vhodným nástrojem zejména pro dokazování geometrických tvrzení týkajících se kolineárních bodů a přímek procházejících jedním bodem (dále také *konkurentních* přímek). Z tohoto důvodu se zaměřím i na důkaz komplikovanějších geometrických tvrzení, Desarguovy a Pappovy věty.

Ve většině případů se dosavadní publikace o geometrii hmotných bodů soustředily na popis soustav konečného množství izolovaných hmotných bodů. V další části práce je proto mým cílem aplikovat metody této teorie i pro případ souvislých množin, na které můžeme pohlížet jako na soustavy nekonečného množství bodů s nekonečně malou hmotností. Na základě znalostí postupů v první části práce se pokusím položit axiomatické základy pro případ souvislých množin a najít aplikace.

Kapitola 1

Hmotné body a jejich soustavy

1.1 Fyzikální motivace

Ve fyzice je definováno těžiště soustavy n hmotných bodů s polohovými vektory $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, ..., \boldsymbol{r}_n$ a hmotnostmi $m_1, m_2, ..., m_n$ jako bod, ve kterém se nachází působiště výslednice tíhových sil. V homogenním gravitačním poli lze pro jeho polohový vektor $\boldsymbol{r}_T$ (viz např. [1]) odvodit

$$\boldsymbol{r}_T = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i m_i, \tag{1.1}$$

kde $m = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$. V případě útvaru se souvisle rozloženou hmotou je suma nahrazena integrálem

$$\boldsymbol{r}_T = \frac{1}{m} \int \boldsymbol{r} \, \mathrm{d}m. \tag{1.2}$$

1.2 Základní pojmy

Nyní zaveďme klíčové pojmy této práce, *hmotný bod* a *soustavu* hmotných bodů.

Definice 1.1. *Hmotným bodem* budeme nazývat dvojici (a, A), kde A je bod v rovině (příp. prostoru) a $a \in \mathbb{R}$. Číslo a budeme nazývat *hmotností* bodu A, kterou někdy budeme značit také m_A. Pro přehlednost budeme hmotný bod zkráceně značit jako aA. Dva hmotné body aA, bB jsou si rovny právě tehdy, když $a = b$ a zároveň $A = B$.

Definice 1.2. Množině hmotných bodů, např. $S = \{4A, 2B, \sqrt{2}C\}$, budeme říkat soustava hmotných bodů. Hmotností m_S soustavy S myslíme součet hmotností všech bodů soustavy, v našem případě $m_S = 6 + \sqrt{2}$. Podmnožině $P \subset S$ budeme říkat podsoustava soustavy S, např. $P = \{4A, 2B\}$.

1.3 Těžiště

Definice 1.3. Bod T_S nazveme těžištěm soustavy $S = \{a_1A_1, a_2A_2, ..., a_nA_n\}$ právě tehdy, když platí

$$\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{T_SA_i}\, a_i = \mathbf{0}. \tag{1.3}$$

1.3.1 Existence a jednoznačnost těžiště

Věta 1.1. Pokud pro hmotnost soustavy S platí $m_S \neq 0$, potom má soustava S právě jedno těžiště.

Důkaz. Dosazením $\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_{T_S} + \overrightarrow{T_SA_i}$, kde $\boldsymbol{r}_i$ je polohový vektor bodu A_i a $\boldsymbol{r}_{T_S}$ polohový vektor těžiště, do definice 1.3 dostáváme

$$\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{T_SA_i}\, a_i = \sum_{i=1}^{n} (-\boldsymbol{r}_{T_S} + \boldsymbol{r}_i)\, a_i = \sum_{i=1}^{n} -\boldsymbol{r}_{T_S}\, a_i + \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i\, a_i = -m_S \boldsymbol{r}_{T_S} + \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i\, a_i = \mathbf{0},$$

$$\boldsymbol{r}_{T_S} = \frac{1}{m_S} \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i\, a_i, \tag{1.4}$$

takže pro $m_S \neq 0$ těžiště soustavy S podle (1.4) existuje a je určeno jednoznačně. Tím byl zároveň dokázán první Archimédův axiom. Navíc výpočet ukázal, že fyzikální definice těžiště (1.1) je ekvivalentní s definicí 1.3. □

1.3.2 Nahrazení soustavy jejím těžištěm

Věta 1.2. Jestliže $m_S \neq 0$, potom pro libovolnou podmnožinu $P \subset S$ platí $T_S = T_{S'}$, kde $S' = S \setminus P + \{m_P T_P\}$. (Těžiště soustavy se nezmění, pokud nějakou její podmnožinu nahradíme jedním hmotným bodem o hmotnosti této podmnožiny, který umístíme do těžiště této podmnožiny.)

Důkaz. Pro těžiště soustavy S platí

$$\sum_{A \in S} \overrightarrow{T_SA}\, m_A = \mathbf{0}. \tag{1.5}$$

Pro těžiště soustavy S' podle definice potom platí

$$\mathbf{0} = \left(\sum_{A \in S \setminus P} \overrightarrow{T_{S'}A}\, m_A \right) + \overrightarrow{T_{S'}T_P}\, m_P = \sum_{A \in S \setminus P} \overrightarrow{T_{S'}A}\, m_A + \sum_{A \in P} \overrightarrow{T_{S'}T_P}\, m_A =$$
$$= \sum_{A \in S \setminus P} \overrightarrow{T_{S'}A}\, m_A + \sum_{A \in P} (\overrightarrow{T_{S'}A} - \overrightarrow{T_PA})\, m_A.$$

Dále víme, že platí

$$\sum_{A \in P} \overrightarrow{T_P A}\, m_A = \mathbf{0}. \tag{1.6}$$

Po dosazení do předchozího výrazu získáme

$$\mathbf{0} = \sum_{A \in S \setminus P} \overrightarrow{T_{S'} A}\, m_A + \sum_{A \in P} \overrightarrow{T_{S'} A}\, m_A = \sum_{A \in S} \overrightarrow{T_{S'} A}\, m_A$$

Porovnáním (1.5) a (1.6) dostáváme (za předpokladu $m_S \neq 0$) podle věty 1.1 $T_S = T_{S'}$. Tím jsme dokázali třetí Archimédův axiom. □

Věta 1.3. Pro libovolný hmotný bod $aA \in S$ platí $T_S = T_{S'}$, kde $S' = (S - \{aA\}) \cup P$, kde P je množina hmotných bodů, pro kterou platí $T_P = A$ a $m_P = a$.

Důkaz. Zřejmý na základě předchozí věty, kde pouze zaměníme S a S'. □

1.4 Algebraické operace s hmotnými body

Definice 1.4. Součtem dvou hmotných bodů $aA+bB$, $a+b \neq 0$ nazveme hmotný bod $(a+b)C$, právě tehdy, je-li bod C těžištěm soustavy $\{aA, bB\}$. Tento vztah budeme zapisovat $aA + bB = cC$.

Vždy budeme předpokládat, že sčítáme pouze hmotné body aA, bB, které splňují podmínku $a + b \neq 0$.

Věta 1.4. Jestliže pro hmotné body $aA, bB, (a + b)C$ platí $aA + bB = (a + b)C$, potom $C \in AB$.

Důkaz. Protože bod C je těžištěm soustavy $\{aA, bB\}$, musí platit $a\overrightarrow{CA} + b\overrightarrow{CB} = \mathbf{0}$. Dosazením $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}$ dostáváme $(a + b)\overrightarrow{CA} + b\,\overrightarrow{AB} = \mathbf{0}$. Vektory $\overrightarrow{CA}$ a $\overrightarrow{AB}$ jsou tedy kolineární, z čehož plyne $C \in AB$. □

Při dokazování geometrických tvrzení jsou důležité zejména důsledky této věty:

- Jsou dány tři body A, B, C. Pokud existují čísla a, b taková, že $aA + bB = (a + b)C$, potom leží body A, B, C v jedné přímce.
- Jsou dány body A, A_1, B, B_1, C, C_1. Pokud existují čísla a, a_1, b, b_1, c, c_1 taková, že $aA + a_1A_1 = bB + b_1B_1 = cC + c_1C_1$, potom přímky AA_1, BB_1, CC_1 procházejí jedním bodem T.

Definice 1.5. Součinem hmotného bodu aA a reálného čísla b nazvěme hmotný bod $(ab)A$, který budeme zapisovat také jako abA. Nyní můžeme definovat i rozdíl dvou hmotných bodů: $aA - bB = aA + (-1)bB$.

1.4.1 Vlastnosti součtu hmotných bodů

Uzavřenost Podle věty 1.1 existuje právě jedno těžiště soustavy $\{aA, bB\}$, tedy součet $aA + bB$ je jednoznačně definován.

Komutativnost Těžiště soustavy nezáleží na pořadí jednotlivých hmotných bodů soustavy, proto platí $aA + bB = bB + aA$.

Asociativnost Platí $(xX + yY) + zZ = (x + y)U + zZ = (x + y + z)T$, kde U je těžiště soustavy $\{xX, yY\}$ a T těžiště soustavy $\{(x+y)U, zZ\}$. Podle věty 1.3 je bod T také těžištěm soustavy $\{xX, yY, zZ\}$, potom však podle věty 1.2 je bod T i těžištěm soustavy $\{xX, (y + z)V\}$, kde $(y + z)V = yY + zZ$. Platí tedy $(xX + yY) + zZ = (x + y + z)T = xX + (z + y)V = xX + (yY + zZ)$. Tímto jsme dokázali, že sčítání hmotných bodů je asociativní.

Z asociativnosti sčítání hmotných bodů plyne, že součet n hmotných bodů můžeme uskutečnit tak, že nejprve sečteme libovolných $n - 1$ hmotných bodů takových, že součet jejich hmotností je různý od nuly a poté k výsledku přičteme n-tý hmotný bod.

Věta 1.5. Označme obecně S_n soustavu n hmotných bodů $S_n = \{a_1A_1, a_2A_2, ..., a_nA_n\}$, $m_{S_n} \neq 0$. Potom platí

$$\sum_{i=1}^{n} a_iA_i = m_{S_n}T_{S_n}, \tag{1.7}$$

kde T_{S_n} je těžiště soustavy S_n a m_{S_n} hmotnost této soustavy.

Důkaz. Pro $n = 2$ plyne tento vztah z definice 1.4. Předpokládejme, že vztah platí pro nějaké $n = k$. Pro $n = k + 1$ potom dostáváme

$$\sum_{i=1}^{k+1} a_iA_i = \sum_{i=1}^{k} a_iA_i + a_{k+1}A_{k+1} = m_{S_k}T_{S_k} + a_{k+1}A_{k+1} = (m_{S_k} + a_{k+1})T_{S'} = m_{S_{k+1}}T_{S'},$$

kde $T_{S'}$ je těžiště soustavy $S' = \{m_{S_k}T_{S_k}, a_{k+1}A_{k+1}\}$, které podle věty 1.3 odpovídá těžišti soustavy S_{k+1}. Podle principu matematické indukce tedy vztah (1.7) platí pro libovolné n. □

Idempotence Pro součet dvou hmotných bodů, které se nachází ve stejném místě, platí $aA + bA = (a + b)A$.

Distributivnost Platí $k(aA+bB) = k(a+b)C, k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, kde C je těžiště soustavy $\{aA, bB\}$. Bod C je zároveň těžištěm soustavy $\{kaA, kbB\}$, protože $a\overrightarrow{CA} + b\overrightarrow{CB} = \mathbf{0} \Leftrightarrow ka\overrightarrow{CA} + kb\overrightarrow{AB} = \mathbf{0}$. Odtud plyne $kaA + kbB = (ka + kb)C = k(a + b)C$ neboli

$$k(aA + bB) = kaA + kbB.$$

Věta 1.6. Jsou dány hmotné body aA, bB, mM. Potom platí

$$aA + bB = (a+m)A_1 + (b-m)B_1,$$

kde $(a+m)A_1 = aA + mM$, $(b-m)B_1 = bB - mM$.

Důkaz. Intuitivně se zdá platnost tohoto tvrzení zřejmá, neboť vliv hmotných bodů mM, $-mM$ by se měl navzájem vyrušit. Z důvodu, že součet $mM - mM$ není definován, je třeba tvrzení dokázat jiným způsobem. Označme $cC = aA + bB$. Z uvedených rovností plyne

$$a(CA) + b(CB) = 0, \tag{1.8}$$
$$a(A_1A) + m(A_1M) = 0, \tag{1.9}$$
$$b(B_1B) - m(B_1M) = 0. \tag{1.10}$$

Odečtením 1.9 a 1.10 od 1.8 získáme

$$\begin{aligned} a[(CA) - (A_1A)] + b[(CB) - (B_1B)] &= m[(A_1M) - (B_1M)],\\ a(CA_1) + b(CB_1) = m(A_1B_1) &= m(A_1C) + m(CB_1) = -m(CA_1) + m(CB_1),\\ (a+m)(CA_1) + (b-m)(CB_1) &= 0. \end{aligned}$$

Poslední rovnost ovšem vyjadřuje, že těžištěm soustavy $\{(a+m)A_1, (b-m)B_1\}$ je bod C. Pro jeho hmotnost platí $c = (a+m) + (b-m) = a + b$. Tím je věta dokázána. □

1.4.2 Dělicí poměr a dvojpoměr

V případě operací s dělicími poměry a dvojpoměry budou všechny body, se kterými budeme pracovat, ležet na jedné přímce, označme ji e. Zvolme libovolně orientovaný jednotkový vektor $\boldsymbol{e}$ ve směru rovnoběžném s přímkou e. Při úpravách výrazů s dělicími poměry myslíme zápisem (AB) reálné číslo $(AB) = \overrightarrow{AB} \cdot \boldsymbol{e}$. Platí tedy $|(AB)| = |AB|$ a $(AB) > 0$, pokud vektor $\overrightarrow{AB}$ má stejný směr jako vektor $\boldsymbol{e}$ a $(AB) < 0$, pokud má vektor $\overrightarrow{AB}$ opačný směr než vektor $\boldsymbol{e}$. Na číslo (AB) tak můžeme pohlížet jako na orientovanou vzdálenost bodů A, B.

Definice 1.6. Pro $B \neq C$ nazvěme *dělicím poměrem* (ABC) podíl

$$(ABC) = \frac{(AC)}{(BC)}.$$

Zřejmě tedy platí $|(ABC)| = \frac{|AC|}{|BC|}$ a $(ABC) > 0$, jestliže bod C leží vně úsečky AB ,$(ABC) < 0$, jestliže bod C leží uvnitř úsečky AB a $(ABC) = 0$, jestliže $A = C$.

Definice 1.7. *Dvojpoměrem* $(ABCD)$ myslíme číslo

$$(ABCD) = \frac{(ABC)}{(ABD)} = \frac{(AC)(BD)}{(BC)(AD)}$$

Takto formulované definice umožňují snadno upravovat výrazy s dělicími poměry. To nám dovoluje například rozdíl dvou dělicích poměrů nahradit součinem dělicích poměrů, se kterým se v dalších úpravách lépe pracuje.

$$(ABC)-(ADC)=\frac{(AC)}{(BC)}-\frac{(AC)}{(DC)}=(AC)\cdot\frac{(DC)-(BC)}{(BC)\cdot(DC)}=\frac{(AC)\cdot(DB)}{(BC)\cdot(DC)}=(ABC)(BCD).$$

Nyní ukážeme, jak souvisí sčítání hmotných bodů s dělicím poměrem.

Věta 1.7. Pro navzájem různé kolineární body A, B, C a reálná čísla $a, b \neq 0$ platí

$$aA+bB=(a+b)C \Leftrightarrow \frac{a}{b}=-(BAC).$$

Důkaz. Dokážeme, že bod C je těžištěm soustavy $\{aA, bB\}$ právě tehdy, když je splněna podmínka $\frac{a}{b}=-(BAC)$. Platí

$$\frac{a}{b}=-(BAC) \Leftrightarrow \frac{a}{b}=-\frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{AC}} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}a=-\overrightarrow{BC}b \Leftrightarrow \overrightarrow{CA}a+\overrightarrow{CB}b=0.$$

Podle definice těžiště (1.3) a podle věty 1.1 o jednoznačnosti těžiště je poslední rovnost ekvivalentní s tvrzením, že bod C je těžištěm soustavy $\{aA, bB\}$. □

Věta 1.4 spolu s větou 1.7 jsou zobecněním druhého Archimédova axiomu. Uvažujeme-li kladné hmotnosti m_1, m_2, potom těžiště T soustavy $\{m_1A, m_2B\}$ podle věty 1.4 leží na úsečce AB a podle věty 1.7 platí

$$\frac{m_1}{m_2}=-(BAT)=-\frac{(BT)}{(AT)}=\frac{|BT|}{|AT|},$$
$$m_1|AT|=m_2|BT|.$$

Kapitola 2

Geometrie hmotného bodu v planimetrii

Pomocí definice těžiště a jeho vlastností se dá dokázat velké množství geometrických tvrzení, stejně tak mohou být použity k řešení některých geometrických úloh.

2.1 Geometrické věty

2.1.1 Těžnice trojúhelníku

Věta. V libovolném trojúhelníku ABC se spojnice vrcholů a středů protějších stran (těžnice trojúhelníku) protínají v jednom bodě, který každou z nich dělí v poměru $2:1$.

Důkaz. Myšlenka důkazu spočívá v tom, že najdeme takové hmotnosti bodů A, B, C, aby všechny všechny spojnice vrcholů a středů protějších stran procházely těžištěm T soustavy $\{aA, bB, cC\}$. To by znamenalo, že se tyto úsečky protínají v jednom bodě.

Dokážeme, že tomuto požadavku odpovídá soustava $S = \{1A, 1B, 1C\}$. Podsoustavu $P = \{1B, 1C\} \subset S$ můžeme podle věty (1.2) nahradit hmotným bodem $2A_1$, kde A_1 je střed strany BC a zároveň těžiště soustavy P. Těžiště T soustavy S tedy nutně musí ležet na úsečce AA_1 (těžnici na stranu a). Zcela analogicky bychom dokázali, že bodem T prochází i těžnice na stranu b a c, tedy všechny tři těžnice procházejí jedním bodem.

Dále snadno zjistíme, v jakém poměru dělí bod T libovolnou těžnici. Protože bod T je těžištěm soustavy $\{1A, 2A_1\}$, podle věty 1.7 platí např. $(AA_1T) = -2$, neboli $\frac{|AT|}{|A_1T|} = 2$.

Uvedený postup důkazu můžeme formálně zapsat i pomocí sčítání hmotných bodů, čehož budeme pro větší přehlednost využívat v dalších částech práce. Označme postupně středy stran a, b, c jako A_1, B_1, C_1. Potom platí

$$\begin{aligned} 3T = 1A + 1B + 1C &= 1A + 2A_1 \Rightarrow T \in AA_1, (AA_1T) = -2, \\ &= 1B + 2B_1 \Rightarrow T \in BB_1, \\ &= 1C + 2C_1 \Rightarrow T \in CC_1. \end{aligned}$$

□

2.1.2 Cevova věta

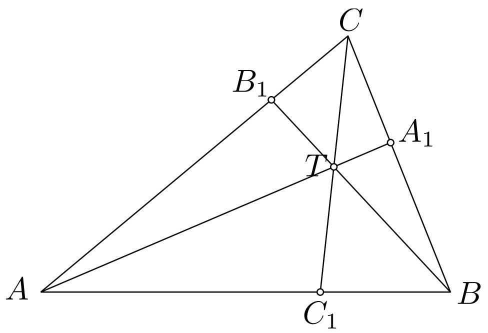
Věta 2.1. Uvažujme trojúhelník ABC a body $A_1 \in BC, B_1 \in CA, C_1 \in AB$ různé od bodů A, B, C. Přímky AA_1, BB_1, CC_1 se protínají v jednom bodě právě tehdy, když platí

$$(ABC_1)(BCA_1)(CAB_1) = -1. \tag{2.1}$$

Poznámka. Známější tvar Cevovy věty nevyužívá dělicích poměrů:

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = 1.$$

Tento tvar však lze aplikovat pouze na případ, kdy body A_1, B_1, C_1 leží uvnitř úseček BC, CA, AB.



obr. 2.3

Důkaz. Uvažujme soustavu $S = \{aA, bB, cC\}$. Jestliže se přímky AA_1, BB_1, CC_1 protínají ve společném bodě T, můžeme zvolit hmotnosti a, b, c tak, aby těžištěm soustavy S byl bod T, neboli

$$aA + bB + cC = (a + b + c)T.$$

Protože $T \in AA_1$, můžeme nahradit soustavu $\{bB, cC\} \subset S$ jediným bodem A_1. Tuto úpravu formálně zapíšeme jako $bB + cC = (b + c)A_1$. Odtud podle věty 1.7 vyplývá

$$\frac{c}{b} = -(BCA_1).$$

Analogicky dostaneme i další dvě rovnosti

$$\frac{a}{c} = -(CAB_1),$$
$$\frac{b}{a} = -(ABC_1).$$

Součinem uvedených rovností získáme $(ABC_1)(BCA_1)(CAB_1) = -1$, což jsme měli dokázat.

Naopak předpokládejme, že platí vztah (2.1). Naším úkolem je najít takové hmotnosti a, b, c, aby těžiště soustavy S leželo zároveň na přímkách AA_1, BB_1, CC_1. To by nutně znamenalo, že tyto přímky prochází společným bodem T. Bez újmy na obecnosti položme $a = 1$ a z předchozích rovností vyjádřeme hmotnosti bodů $b = -(ABC_1), c = (ABC_1)(BCA_1)$.

Potom platí

$$\frac{a}{c} = \frac{1}{(ABC_1)(BCA_1)} = -(CAB_1) \Rightarrow aA + cC = (a + c)B_1,$$

kde jsme využili vztah (2.1). Dále

$$\begin{aligned} \frac{b}{a} &= -(ABC_1) \Rightarrow bB + aA = (a + b)C_1, \\ \frac{c}{b} &= -(BCA_1) \Rightarrow bB + cC = (b + c)A_1 \end{aligned}$$

Z předchozích úvah vyplývá

$$(a + b + c)T = aA + bB + cC = aA + (b + c)A_1 = bB + (c + a)B_1 = cC + (a + b)C_1,$$

což znamená, že bod T leží zároveň na přímkách AA_1, BB_1, CC_1. Tyto přímky se tedy protínají v jednom bodě. $\square$

Využitím geometrie hmotných bodů můžeme snadno zjistit i dělicí poměr (AA_1T). Protože $aA + (b + c)A_1 = (a + b + c)T$, platí

$$\begin{aligned} (AA_1T) &= -\frac{b + c}{a} = (ABC_1) - (ABC_1)(BCA_1) = (ABC_1)(1 - (BCA_1)) = \\ &= (ABC_1)\left(1 - \frac{(BA_1)}{(CA_1)}\right) = (ABC_1)\frac{(CA_1) - (BA_1)}{(CA_1)} = (ABC_1)\frac{(CB)}{(CA_1)} = (ABC_1)(BA_1C). \end{aligned}$$

Zřejmě $(AA_1T) = \frac{1}{(A_1AT)}$, potom dostáváme z předchozího vztahu $(ABC_1)(BA_1C)(A_1AT) = 1$, což odpovídá *Menealově* větě pro trojúhelník ABA_1 a body C, T, C_1 (viz dále).

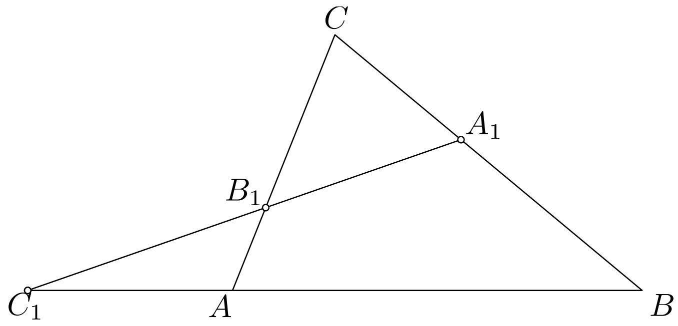
2.1.3 Menealova věta

Věta 2.2. Uvažujme trojúhelník ABC a body $A_1 \in BC, B_1 \in CA, C_1 \in AB$. Body A_1, B_1, C_1 jsou kolineární právě tehdy, když platí

$$(ABC_1)(BCA_1)(CAB_1) = 1. \tag{2.2}$$

Poznámka. Známější tvar Menealovy věty uvádí nutnou podmínku kolinearity bez použití dělicích poměrů:

$$\frac{|AC_1|}{|BC_1|} \cdot \frac{|BA_1|}{|CA_1|} \cdot \frac{|CB_1|}{|AB_1|} = 1.$$



obr. 2.4

Důkaz. Uvažujme soustavu $S = \{aA, cC\}$. Hmotnosti a, c zvolíme tak, aby existovala čísla a_1, c_1, pro která by platilo $aA + cC = a_1A_1 + c_1C_1$. Těžiště T soustavy S se nezmění, pokud k ní přidáme hmotné body $1B$ a $-1B$, jejichž součet hmotností je nulový. Formálně tento fakt můžeme zapsat následujícím způsobem:

$$(a + c)T = aA + cC = aA - 1B + cC + 1B.$$

Požadujeme, aby těžištěm soustavy $\{aA, -1B\}$ byl bod C_1 a soustavy $\{cC, 1B\}$ bod A_1. Potom musí platit

$$\frac{-1}{a} = -(ABC_1), \tag{2.3}$$

$$\frac{c}{1} = -(BCA_1) \tag{2.4}$$

Odtud dostáváme hmotnosti bodů $a = \frac{1}{ABC_1}, c = -(BCA_1)$. Pro takové hmotnosti bodů tedy platí

$$aA - 1B = (a - 1)C_1,$$
$$cC + 1B = (c + 1)A_1.$$

Sečtením uvedených vztahů dostáváme

$$aA + cC = (a - 1)C_1 + (c + 1)A_1 = (a + c)T, \tag{2.5}$$

kde T je těžiště soustavy S. Vztah (2.5) vyjadřuje, že bod T je zároveň těžištěm soustavy $\{(a - 1)C_1, (c + 1)A_1\}$. To ovšem znamená, že $T \in AC \cap A_1C_1$, neboli $T \in AC$ a zároveň body A_1, T, C_1 jsou kolineární. Dále ze vztahu (2.5) po dosazení (2.3 a 2.4) plyne

$$\frac{a}{c} = -\frac{1}{(ABC_1)(BCA_1)} = -(CAT).$$

Poslední vztah je ekvivalentní s

$$(ABC_1)(BCA_1)(CAT) = 1.$$

Body A_1, B_1, C_1 jsou kolineární právě tehdy, když $B_1 = T$, což je splněno právě tehdy, když

$$(ABC_1)(BCA_1)(CAB_1) = 1.$$

Tím je věta dokázána. $\square$

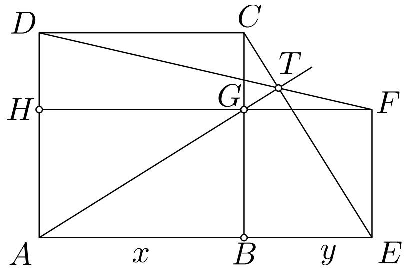
2.2 Geometrické úlohy

Obecně můžeme geometrické úlohy, které lze snadno řešit pomocí teorie hmotných bodů, rozdělit na dvě skupiny. Do první skupiny patří úlohy, kde máme dokázat, že několik přímek se protíná v jednom bodě (srov. těžnice trojúhelníku a Cévova věta v předchozí části). Zde zvoleným bodům přiřadíme hmotnosti takové, aby těžištěm výsledné soustavy byl právě bod, kde se mají přímky protínat. Potom soustavu hmotných bodů upravujeme, abychom postupně dokázali, že všechny uvažované přímky procházejí jejím těžištěm.

Do druhé skupiny patří úlohy, kde máme dokázat kolinearitu tří bodů. Hmotnosti zvoleným bodům přiřadíme tak, aby těžiště soustavy bylo jedním z těchto tří bodů. Dalšími úpravami se snažíme soustavu nahradit dvěma soustavami, jejichž těžiště odpovídají dvěma ostatním bodům.

Tyto obecné poznatky při řešení geometrických úloh pomocí teorie hmotných bodů ilustruji na několika příkladech.

Příklad 1. Je dán čtverec $ABCD$, ke kterému je z jedné strany připsán čtverec $BEFG$.
a) dokažte, že přímky AG, CE a DF se protínají v jednom bodě T
b) vyjádřete vzdálenost $|GT|$ jako funkci $|AB|$ a $|BE|$.



obr. 2.5

Řešení. Označme $|AB| = x, |BE| = y$. Stačí dokázat, že existují hmotné body aA, gG, cC eE, dD, fF takové, že $aA + gG = cC + eE = dD + fF$, tedy soustavy $\{aA, gG\}, \{cC, eE\}$, $\{dD, fF\}$ mají společné těžiště T, ve kterém se uvažované přímky protínají.

K soustavě $\{aA, gG\}$ přidáme body $1B$ a $-1B$, tím se její těžiště nezmění. Platí

$$aA + 1B = (a + 1)E \Leftrightarrow a = -(BAE) = -\frac{y}{x + y},$$
$$gG - 1B = (g - 1)C \Leftrightarrow g = (BGC) = \frac{x}{x - y}.$$

Nyní k soustavě $\{-\frac{y}{x+y}A, \frac{x}{x-y}G\}$ přidejme body $hH, -hH$. Platí

$$gG - hH = (g - h)F \Leftrightarrow (GHF) = \frac{y}{x + y} = \frac{h}{g},$$
$$h = \frac{gy}{x + y} = \frac{xy}{x^2 - y^2}.$$

Potom platí i

$$aA + hH = (a+h)D, \text{ protože } (HAD) = \frac{x-y}{x} = \frac{\frac{y}{x+y}}{\frac{xy}{x^2-y^2}} = -\frac{a}{h}.$$

Z uvedených výpočtů plyne

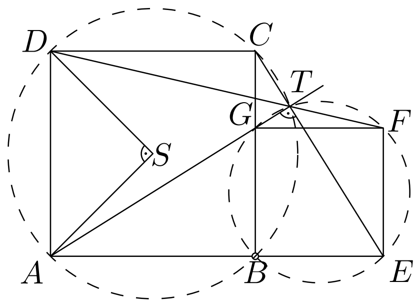
$$-\frac{y}{x+y}A + \frac{x}{x-y}G = \frac{x}{x+y}E + \frac{y}{x-y}C = \frac{y^2}{x^2-y^2}D + \frac{x^2}{x^2-y^2}F,$$

což jsme chtěli dokázat. Protože bod T je těžištěm soustavy $\{aA, gG\}$, platí

$$\frac{|AG| + |GT|}{|GT|} = (AGT) = -\frac{g}{a} = \frac{x(x+y)}{y(x-y)},$$
$$|GT| = \frac{|AG|}{\frac{x(x+y)}{y(x-y)} - 1} = |AG|\frac{y(x-y)}{x^2+y^2}.$$

Dosazením $|AG| = \sqrt{x^2+y^2}$ dostáváme

$$|GT| = \frac{y(x-y)}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

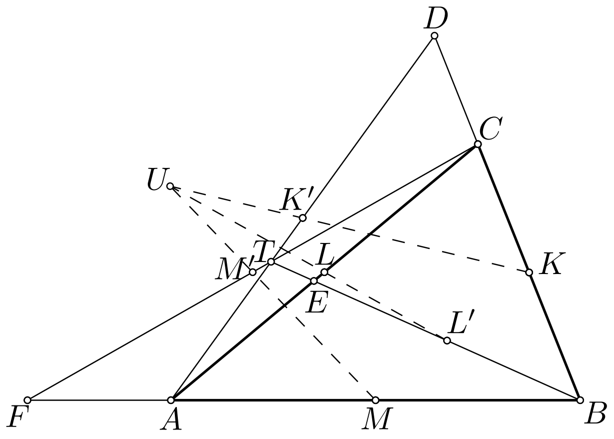


obr. 2.6

Pro srovnání uvádím i řešení části a) této úlohy, které nepoužívá teorie hmotných bodů.

Řešení. Trojúhelník ABG vznikl rotací trojúhelníku CBE kolem bodu B o $90°$, tedy přímky AG a EC svírají pravý úhel. Průnik těchto přímek bod T potom leží na kružnicích opsaných čtvercům $ABCD$ a $BEFG$. Dále platí $|\sphericalangle ATD| = 45°$, neboť se jedná o vrcholový úhel ke středovému úhlu $|\sphericalangle ASD| = 90°$, kde S je střed kružnice opsané čtverci $ABCD$. Analogicky $|\sphericalangle ETF| = 45°$. Odtud vyplývá $|\sphericalangle DTF| = 180°$, neboli $T \in DF$. Přímky AG, CE, DF se tedy protínají v bodě T.

Příklad 2. (převzato z [5], upraveno) Je dán trojúhelník ABC. Označme K, L, M středy stran BC, CA, AB a D, E, F libovolné body přímek BC, CA, AB různé od bodů A, B, C. Dále označme K', L', M' středy úseček AD, BE, CF. Dokažte, že jestliže se přímky AD, BE, CF protínají v jednom bodě, potom se v jednom bodě protínají i přímky KK', LL' a MM'.



obr. 2.7

Řešení. Přímka LM je střední příčkou trojúhelníku ABC a je rovnoběžná se stranou BC. Tato přímka představuje množinu středů úseček AY, kde Y je libovolný bod přímky BC. Z tohoto důvodu $K' \in LM$. Analogicky $L' \in MK$, $M' \in KL$. Protože jsou body B, C, D obrazem bodů M, L, K' ve stejnolehlosti se středem A a koeficientem $\lambda = 2$, platí $(LMK') = (CBD)$. Analogicky platí i $(MKL') = (ACE), (KLM') = (BAF)$.

Jestliže se přímky AD, BE, CF protínají ve společném bodě T, existují hmotnosti a, b, c takové, že těžištěm soustavy $\{aA, bB, cC\}$ je bod T. Ze stejných důvodů jako při dokazování *Cevovy* věty platí $aA + bB = (a+b)F$. Odtud dostáváme $\frac{b}{a} = -(ABF)$. Analogicky platí i $\frac{c}{b} = -(BCD)$ a $\frac{a}{c} = -(CAE)$.

Dokážeme, že existují čísla k, l, m taková, že těžištěm soustavy $\{kK, lL, mM\}$ je bod U a zároveň platí

$$\begin{gathered} kK + lL = (k+l)M', \\ lL + mM = (l+m)K', \\ mM + kK = (m+k)L', \\ (k+l+m)U = kK + (l+m)K' = lL + (m+k)L' = mM + (k+l)M', \end{gathered}$$

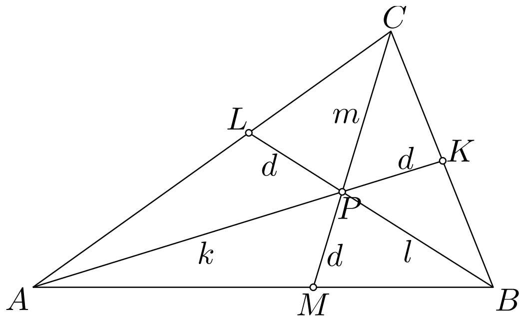
tedy přímky KK', LL', MM' se protínají v bodě U. Čísla k, l, m musí splňovat následující rovnosti:

$$\begin{aligned} \frac{l}{k} &= -(KLM') = -(BAF) = -\frac{1}{(ABF)} = \frac{a}{b}, \\ \frac{m}{l} &= -(LMK') = -(CBD) = -\frac{1}{(BCD)} = \frac{b}{c}, \\ \frac{k}{m} &= -(MKL') = -(ACE) = -\frac{1}{(CAE)} = \frac{c}{a}. \end{aligned}$$

Řešením této soustavy jsou čísla $k = \frac{1}{a}, l = \frac{1}{b}, m = \frac{1}{c}$.

Příklad 3. (**AIME 1988, problém 12**) Nechť P je vnitřní bod trojúhelníku ABC. Označme $k = |PA|, l = |PB|, m = |PC|$. Dále označme K, L, M průnik přímek AP, BP, CP

se stranami trojúhelníku. Předpokládejme, že $|PK| = |PL| = |PM| = d$. Jestliže $k + l + m = 43$ a $d = 3$, určete hodnotu klm.



obr. 2.8

Řešení. Hmotnosti a, b, c bodů A, B, C zvolíme tak, aby bod P byl těžištěm soustavy bodů $\{aA, bB, cC\}$. Protože $P \in AK$, platí $aA + bB + cC = aA + (b+c)K = (a+b+c)P$, neboli $(AKP) = -\frac{b+c}{a}$. Bod P leží uvnitř úsečky AK, poslední vztah tedy můžeme přepsat jako

$$a|PA| = (b + c)|PK|,$$
$$ak = (b + c)d$$

Analogicky získáme i další rovnosti

$$bl = (c + a)d$$
$$cm = (a + b)d.$$

Další postup v řešení úlohy je již otázkou algebraických úprav. Z uvedených rovností vyjádříme

$$k + l + m = d\left(\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c}\right) = \frac{d}{abc}(bc(b + c) + ca(c + a) + ab(a + b)),$$

$$\begin{aligned} klm &= \frac{d^3}{abc}(b + c)(c + a)(a + b) = \frac{d^3}{abc}(bc(a + c) + ca(c + a) + ab(a + b) + 2abc) = \\ &= \frac{d^3}{abc}\left(\frac{k+l+m}{d}abc + 2abc\right) = d^2(k + l + m) + 2d^3 = 441. \end{aligned}$$

Poznámka. Řešení této úlohy bez užití metody hmotných bodů lze nalézt například v [6].

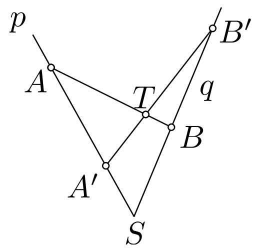
2.3 Projektivní geometrie

V této kapitole dokážu dvě známá tvrzení týkající se kolinearity bodů. Tato tvrzení jsou součástí širší matematické disciplíny *projektivní geometrie*, kde vyplývají z přirozených vlastností prostoru. V rovinné geometrii se však jedná o poměrně komplikované problémy, které je možno metodou hmotných bodů snadno a intuitivně dokázat.

Předtím, než přistoupím k důkazu jednotlivých vět, dokážu důležité pomocné tvrzení.

Lemma 1. V rovině jsou dány dvě různoběžné přímky p, q a jejich průsečík S. Dále jsou dány navzájem různé body $A, A' \in p$ a $B, B' \in q$ odlišné od S takové, že $AB \nparallel A'B'$. Průsečík T přímek AB a $A'B'$ je těžištěm soustavy $\{aA, bB\}$ právě tehdy, když

$$\frac{a}{b} = -\frac{(SAA')}{(SBB')}.$$



obr. 2.9

Důkaz. Jestliže bod T je těžištěm soustavy $\{aA, bB\}$, potom platí $\frac{a}{b} = -(BAT)$. Podle Menealovy věty pro trojúhelník ABS a kolineární body A', T, B' platí

$$(ABT)(BSB')(SAA') = 1.$$

Odtud po dosazení $(ABT) = \frac{1}{(BAT)}$ dostáváme

$$\frac{a}{b} = -(BSB')(SAA') = -\frac{(SAA')}{(SBB')}.$$

Naopak předpokládejme, že platí

$$\frac{a}{b} = -\frac{(SAA')}{(SBB')},$$
$$b = -a\frac{(SBB')}{(SAA')}.$$

Dokážeme, že potom existují taková $a', b' \in \mathbb{R}$, že $aA + bB = aA' + bB'$, tedy bod T je těžištěm soustavy $\{aA, bB\}$. Skutečně, položíme-li $s = \frac{a}{(SAA')}$, potom platí

$$aA - sS = (a - s)A', \text{ protože } \frac{a}{-s} = -(SAA'),$$

$$bB + sS = (b + s)B', \text{ protože } \frac{b}{s} = \frac{-a\frac{(SBB')}{(SAA')}}{\frac{a}{(SAA')}} = -(SBB').$$

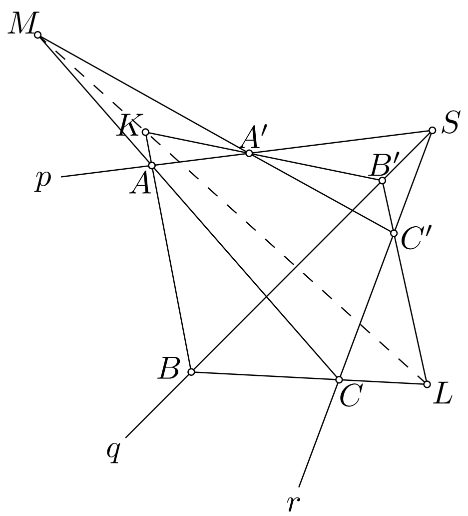
Sečtením těchto dvou rovnic dostaneme požadovanou rovnost. □

Dále zde uveďme užitečnou úpravu výrazu s dělicím poměrem, kterou budeme využívat v dalších důkazech. Platí

$$1-(XYZ)=1-\frac{(XZ)}{(YZ)}=\frac{(YZ)-(XZ)}{(YZ)}=\frac{(YX)}{(YZ)}=\frac{(XY)}{(ZY)}=(XZY).$$

2.3.1 Desarguova věta

Věta 2.3. Jsou dány různoběžné přímky p,q,r, které se protínají v bodě S, a navzájem různé body $A,A'\in p$, $B,B'\in q$, $C,C'\in r$ odlišné od bodu S takové, že existují body $K=AB\cap A'B'$, $L=BC\cap B'C'$, $M=CA\cap C'A'$. Potom body K,L,M leží na jedné přímce.



obr. 2.10

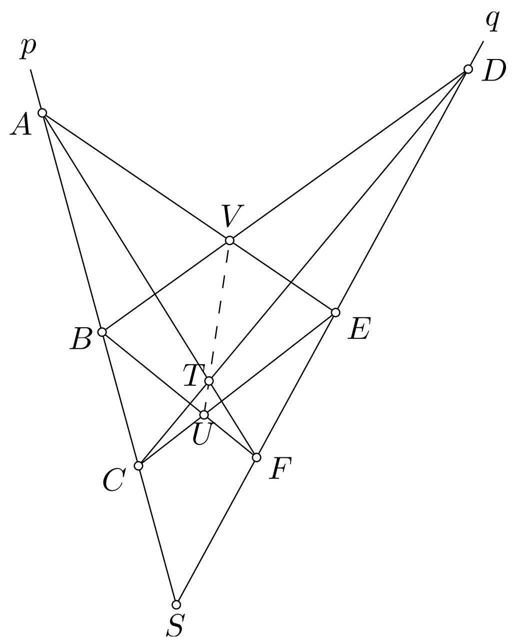
Důkaz. Uvažujme soustavu $\{aA,bB\}$. Hmotnosti a,b zvolme tak, aby těžištěm této soustavy byl bod K. Podle lemmatu 1 musí platit $\frac{a}{b}=-\frac{(SAA')}{(SBB')}$. Bez újmy na obecnosti tedy můžeme zvolit $a=(SAA'),b=-(SBB')$. Dále zvolme hmotnost bodu C tak, aby těžištěm soustavy $\{aA,cC\}$ byl bod M. Musí platit $\frac{a}{c}=-\frac{(SAA')}{(SCC')}$, odtud dostáváme $c=-(SCC')$. Těžištěm soustavy $\{bB,-cC\}$ je potom bod L, protože $-\frac{b}{c}=-\frac{(SBB')}{(SCC')}$. Platí tedy

$$(a+b)K=aA+bB=aA+cC+bB-cC=(a+c)M+(b-c)L,$$

odkud je zřejmé, že body K,L,M leží na jedné přímce. □

2.3.2 Pappova věta

Věta 2.4. Jsou dány dvě různoběžné přímky p,q a jejich průsečík S. Zvolme navzájem různé body $A,B,C\in p$, $D,E,F\in q$ odlišné od bodu S tak, že existují průsečíky $T=AF\cap CD$, $U=BF\cap CE$, $V=AE\cap BD$. Potom body T,U,V leží na jedné přímce (tzv. *Pappově* přímce).



obr. 2.11

Důkaz. Uvažujme soustavu $\{aA, fF\}$. Hmotnosti a, f zvolme tak, aby bod T byl těžištěm této soustavy. Podle lemmatu 1 můžeme bez újmy na obecnosti zvolit $a = (SAC)$, $f = -(SFD)$. Dále platí

$$\begin{aligned} aA + fF &= a_1A + (a - a_1)A + f_1F + (f - f_1)F = \\ &= a_1A + sS + (a - a_1)A + f_1F - sS + (f - f_1)F, \end{aligned}$$

kde $a_1, f_1, s \in \mathbb{R}$ zvolíme tak, aby platilo

$$a_1A + sS = (a_1 + s)B, \tag{2.6}$$
$$f_1F - sS = (f_1 - s)E \tag{2.7}$$

a aby těžištěm soustavy $\{(a_1+s)B, (f-f_1)F\}$ byl bod U. Z (2.6), (2.7) a poslední podmínky postupně vyplývá

$$\frac{a_1}{s} = -(SAB), \quad \frac{f_1}{s} = (SFE)$$
$$\frac{a_1 + s}{f - f_1} = -\frac{(SBC)}{(SFE)}. \tag{2.8}$$

Odtud vyjádříme $a_1 = -s(SAB)$, $f_1 = s(SFE)$ a dosadíme do (2.8). Dostaneme tak rovnici s neznámou s:

$$\begin{aligned} \frac{-s(SAB) + s}{-(SFD) - s(SFE)} &= -\frac{(SBC)}{(SFE)}, \\ -s(SAB)(SFE) + s(SFE) &= (SBC)(SFD) + (SBC)(SFE)s, \\ s(SFE)(1 - (SAB) - (SBC)) &= (SBC)(SFD). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Platí $1-(SAB)-(SBC) = -(SAB)+(SCB) = -\frac{(SB)}{(AB)}+\frac{(SB)}{(CB)} = (SB)\frac{(AB)-(CB)}{(CB)(AB)} = \frac{(SB)(AC)}{(CB)(AB)}$, po dosazení do předchozí rovnice dostáváme

$$s = (SFDE)\frac{(SC)(CB)(AB)}{(BC)(SB)(AC)} = -(SFDE)(SACB).$$

Nyní dokážeme, že těžištěm soustavy $\{(f_1 - s)E, (a - a_1)A\}$ je bod V. Platí totiž

$$\begin{aligned}\frac{f_1 - s}{a - a_1} &= \frac{s(SFE) - s}{(SAC) + s(SAB)} = -(SACB)(SFDE)\frac{-(SEF)}{(SAC) - (SAC)(SFDE)} = \\ &= \frac{(SACB)(SFDE)(SEF)}{(SAC)(1 - (SFDE))}.\end{aligned}$$

Dále platí

$$\begin{aligned}1 - (SFDE) &= 1 - \frac{(SFD)}{(SFE)} = \frac{(SFE) - (SFD)}{(SFE)} = \frac{1 - (SEF) - (SFD)}{(SFE)} = \\ &= \frac{-(SEF) + (SDF)}{(SFE)} = \frac{(SF)\frac{(EF)-(DF)}{(EF)(DF)}}{(SFE)} = \frac{(SF)(ED)(FE)}{(EF)(DF)(SE)} = (SDFE).\end{aligned}$$

Po dosazení získáváme

$$\frac{f_1 - s}{a - a_1} = \frac{1}{(SAB)} \cdot \frac{(SFDE)(SEF)}{(SDFE)} = -\frac{(SED)}{(SAB)}.$$

Z těchto úvah plyne závěr

$$\begin{gathered}aA + fF = (a_1 + s)B + (f - f_1)F + (f_1 - s)E + (a - a_1)A, \\ (a + f)T = (a_1 + s + f - f_1)U + (f_1 - s + a - a_1)V.\end{gathered}$$

Body T, U, V tedy leží v jedné přímce. $\square$

Kapitola 3

Hmotné útvary

V této kapitole budeme poznatky předchozích kapitol aplikovat na množiny, které jsou, na rozdíl od množin izolovaných hmotných bodů, které jsme zkoumali v předchozí kapitole, souvislé. Nejprve je třeba pozměnit zavedený formalismus pro potřeby těchto množin tak, aby jejich hmotnost byla konečná, a definovat polohu jejich těžiště na základě fyzikální motivace. Dále se budeme zabývat podobnými statickými vlastnostmi těchto množin stejně jako v předchozí kapitole.

3.1 Základní pojmy

Definice 3.1. *Souvislou množinou* budeme nazývat množinu $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ takovou, že kdykoliv $\Phi \subset \Omega, \Psi \subset \Omega$ jsou otevřené množiny, pro které platí

$$\begin{aligned} \Phi \cup \Psi &= \Omega, \\ \Phi \cap \Psi &= \emptyset, \end{aligned}$$

pak buď $\Phi = \emptyset$, nebo $\Psi = \emptyset$.

Definice 3.2. *Hmotným útvarem* (dále také útvarem) budeme nazývat uspořádanou dvojici (Ω, ρ), kde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je množina, která vznikla sjednocením konečného množství souvislých množin, a ρ je *funkce hustoty*,

$$\begin{aligned} \rho : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}, \\ X \notin \Omega &\Rightarrow \rho(X) = 0. \end{aligned}$$

Pokud je Ω souvislou množinou, budeme hmotný útvar (Ω, ρ) nazývat *souvislým hmotným útvarem* (dále také souvislým útvarem). Hmotností ω útvaru (Ω, ρ) myslíme číslo

$$\omega = \int_\Omega \rho(X) \mathrm{d}X.$$

Poznámka. Pokud nebude řečeno jinak, vždy budeme předpokládat, že pro funkci hustoty ρ platí $X \notin \Omega \Rightarrow \rho(X) = 0$, a tuto funkci budeme definovat jen pro $X \in \Omega$. Pokud pro funkci hustoty platí $\forall X \in \Omega : \rho = k$, kde k je konstanta, potom budeme útvar (Ω, ρ) nazývat *homogenním.*

Dále v této práci budeme označovat hmotný souvislý útvar velkým řeckým písmenem a hmotnost takového útvaru stejným malým řeckým písmenem. V případě, kdy budeme pracovat s více hmotnými útvary najednou, budeme jejich funkce hustoty odlišovat pomocí indexů. Stejně budeme rozlišovat i jednotlivá těžiště hmotných útvarů např. $\varphi = \int_\Phi \rho_\Phi(X)\mathrm{d}X$ je hmotnost útvaru (Φ, ρ_Φ) a T_Φ jeho těžiště.

3.2 Těžiště hmotných útvarů

Definice 3.3. Bod T_Ω nazveme těžištěm útvaru (Ω, ρ) právě tehdy, platí-li

$$\int_\Omega \overrightarrow{T_\Omega X}\rho(X)\,\mathrm{d}X = \mathbf{0}. \tag{3.1}$$

Je-li $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, potom $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ a $\mathrm{d}X = \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$.

Protože výpočet polohy těžiště v soustavě souřadnic není podle definice 3.1 příliš výhodný, vztah upravíme a získáme tak předpis podobný (1.2). Pro bod X s polohovým vektorem $\boldsymbol{r} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ platí $\overrightarrow{T_\Omega X} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_{T_\Omega}$, kde $\boldsymbol{r}_{T_\Omega}$ je polohový vektor těžiště. Dosazením do (3.1) dostáváme

$$\int_\Omega \boldsymbol{r}_{T_\Omega}\rho(X)\,\mathrm{d}X = \int_\Omega \boldsymbol{r}\rho(X)\,\mathrm{d}X$$

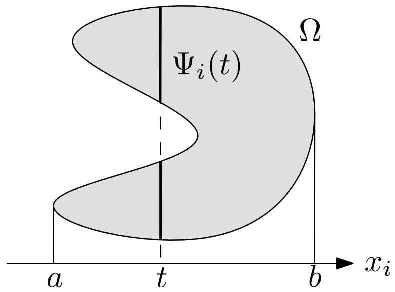
$$\boldsymbol{r}_{T_\Omega} = \frac{\int_\Omega \boldsymbol{r}\rho(X)\,\mathrm{d}X}{\int_\Omega \rho(X)\,\mathrm{d}X} = \frac{1}{\omega}\int_\Omega \boldsymbol{r}\rho(X)\,\mathrm{d}X, \tag{3.2}$$

Dosazením $\mathrm{d}m = \rho(X)\mathrm{d}X$ do (3.2) dostáváme vztah (1.2). Vztah (3.2) dále zaručuje pro $\omega \neq 0$ existenci těžiště a jeho jednoznačnost.

Ze vztahu (3.2) odvodíme, jak určit jednotlivé souřadnice těžiště. Nechť

$$\Psi_i(t) = \{X \in \Omega \,|\, x_i = t\}.$$

Integraci přes množinu Ω potom můžeme provést tak, že nejprve provedeme integraci přes



obr. 3.1

množinu $\Psi_i(t)$ a poté přes všechna t, která odpovídají souřadnici x_i v mezích od a do b, kde a, b jsme zvolili tak, abychom pokryli celou množinu Ω.

$$\boldsymbol{r}_{T_\Omega} = \frac{1}{\omega}\int_a^b \left(\int_{\Psi_i(t)} \boldsymbol{r}\rho(X)\,\mathrm{d}X_i\right)\mathrm{d}t,$$

kde $\mathrm{d}X_i = \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x_i} = \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_{i-1}\mathrm{d}x_{i+1} \cdots \mathrm{d}x_n$. Pro i-tou souřadnici těžiště potom platí

$$x_{T_\Omega i} = \frac{1}{\omega}\int_a^b \left(\int_{\Psi_i(t)} t\rho(X)\,\mathrm{d}X_i\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{\omega}\int_a^b tP_i(t)\,\mathrm{d}t, \tag{3.3}$$

kde

$$P_i(t) = \int_{\Psi_i(t)} \rho(X)\,\mathrm{d}X_i.$$

Stejným způsobem integrace můžeme vypočítat i j-tou souřadnici těžiště ($j \neq i$).

$$x_{T_\Omega j} = \frac{1}{\omega}\int_a^b \left(\int_{\Psi_i(t)} x_j\rho(X)\,\mathrm{d}X_i\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{\omega}\int_a^b M_{ij}(t)\,\mathrm{d}t, \tag{3.4}$$

$$M_{ij}(t) = \int_{\Psi_i(t)} x_j\rho(X)\,\mathrm{d}X_i.$$

Uvedené vztahy mají další důležitý důsledek:

Lemma 2. Uvažujme hmotný útvar (Ω, ρ_Ω). Označme (Γ, ρ_Γ) hmotný útvar, který je definován následujícím způsobem: $\Gamma = \{X' \in \mathbb{R}^n | \exists t \in \mathbb{R} : X' = T_{\Psi_i(t)}\}$, $\rho_\Gamma(X') = \psi_i(t)$, kde t je souřadnice bodu X na ose x_i a $\psi_i(t) = \int_{\Psi_i(t)} \rho_\Omega(X)\mathrm{d}X_i$ je hmotnost množiny $\Psi_i(t)$. Potom platí $\omega T_\Omega = \gamma T_\Gamma$, kde ω, γ jsou hmotnosti útvarů $(\Omega, \rho_\Omega), (\Gamma, \rho_\Gamma)$.

Důkaz. Nejprve dokážeme $\gamma = \omega$. Platí

$$\gamma = \int_\Gamma \rho_\Gamma(X)\,\mathrm{d}X = \int_a^b \psi_i(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \left(\int_{\Psi_i(t)} \rho_\Omega(X)\,\mathrm{d}X_i\right)\mathrm{d}t = \int_\Omega \rho_\Omega(X)\,\mathrm{d}X = \omega.$$

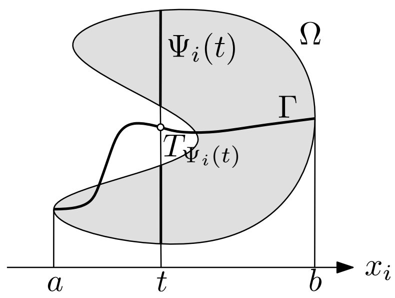
Dále porovnáme polohové vektory bodů T_Ω, T_Γ:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}_{T_\Gamma} &= \frac{1}{\gamma}\int_\Gamma \boldsymbol{r}\rho_\Gamma(X)\,\mathrm{d}X = \frac{1}{\omega}\int_a^b \boldsymbol{r}\psi_i(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\omega}\int_a^b \boldsymbol{r}\left(\int_{\Psi_i(t)} \rho_\Omega(X)\,\mathrm{d}X_i\right)\mathrm{d}t = \\ &= \frac{1}{\omega}\int_\Omega \boldsymbol{r}\rho_\Omega(X)\mathrm{d}X = \boldsymbol{r}_{T_\Omega}.\end{aligned}$$

□

Množinu Γ si můžeme ve dvou nebo třírozměrném prostoru představit jako množinu těžišť všech možných průniků množiny Ω např. s přímkou nebo rovinou. Každému bodu přiřadíme hustotu odpovídající hmotnosti útvaru $\Psi_i(t)$, který vznikl průnikem množiny Ω s konkrétní přímkou nebo rovinou. Těžiště celého útvaru Ω potom odpovídá těžišti křivky Γ.

Často nás bude zajímat případ, kdy množinou Γ je úsečka. Potom platí takřka zřejmé tvrzení:



obr. 3.2

Věta 3.1. Je dán útvar (Ω, ρ), kde množina Ω odpovídá úsečce a pro hmotnost tohoto útvaru platí $\omega \neq 0$. Potom $T_\Omega \in \Omega$.

Důkaz. Bez újmy na obecnosti umístěme úsečku do souřadného systému tak, že splývá s osou x, její počáteční bod leží v počátku a koncový bod má souřadnice $[a, 0]$. Pokud má bod T_Ω souřadnice $[x_T, y_T]$, potom platí $\overrightarrow{T_\Omega X} = (x - x_T, -y_T)$. Pro těžiště útvaru Ω musí platit

$$\int_\Omega \overrightarrow{T_\Omega X}\rho(X)\mathrm{d}X = 0,$$
$$\int_0^a \overrightarrow{T_\Omega X}\rho(x)\mathrm{d}x = 0.$$

Pro y-ovou souřadnici těžiště platí

$$\int_0^a (-y_T)\rho(x)\mathrm{d}x = 0,$$
$$-y_T\omega = 0.$$

Protože $\omega \neq 0$, dostáváme $y_T = 0$.

3.3 Sčítání hmotných útvarů

Definice 3.4. Jsou dány hmotné útvary (Ω, ρ_Ω) a (Ψ, ρ_Ψ). Potom součtem $(\Omega, \rho_\Omega) + (\Psi, \rho_\Psi)$ myslíme útvar (Γ, ρ_Γ) takový, že $\rho_\Gamma(X) = \rho_\Omega(X) + \rho_\Psi(X)$ a $\Gamma = \Omega \cup \Psi$.

Věta 3.2. Jestliže platí $(\Omega, \rho_\Omega) + (\Psi, \rho_\Psi) = (\Gamma, \rho_\Gamma)$, potom platí $(\omega + \psi)T_\Gamma = \omega T_\Omega + \psi T_\Psi$.

Důkaz. Nejprve dokážeme, že pro hmotnost γ skutečně platí $\gamma = \omega + \psi$. Podle definice je

$$\begin{aligned}\gamma &= \int_\Gamma \rho_\Gamma(X)\mathrm{d}X = \int_\Gamma (\rho_\Omega(X) + \rho_\Psi(X))\,\mathrm{d}X = \int_\Gamma \rho_\Omega(X)\mathrm{d}X + \int_\Gamma \rho_\Psi(X)\mathrm{d}X = \\ &= \int_\Omega \rho_\Omega(X)\mathrm{d}X + \int_{\Gamma\setminus\Omega} \rho_\Omega(X)\mathrm{d}X + \int_\Psi \rho_\Psi(X)\mathrm{d}X + \int_{\Gamma\setminus\Psi} \rho_\Psi(X)\mathrm{d}X = \\ &= \int_\Omega \rho_\Omega(X)\mathrm{d}X + \int_\Psi \rho_\Psi(X)\mathrm{d}X = \omega + \psi.\end{aligned}$$

Dále dokážeme, že bod T_Γ je těžištěm soustavy $\{\omega T_\Omega, \psi T_\Psi\}$. Platí

$$
\begin{aligned}
\gamma \boldsymbol{r}_{T_\Gamma} &= \int_\Gamma \boldsymbol{r}\rho_\Gamma(X)\mathrm{d}X = \int_\Gamma \boldsymbol{r}\left(\rho_\Omega(X) + \rho_\Psi(X)\right)\mathrm{d}X = \int_\Gamma \boldsymbol{r}\rho_\Omega(X)\mathrm{d}X + \int_\Gamma \boldsymbol{r}\rho_\Psi(X)\mathrm{d}X = \\
&= \int_\Omega \boldsymbol{r}\rho_\Omega(X)\mathrm{d}X + \int_\Psi \boldsymbol{r}\rho_\Psi(X)\mathrm{d}X = \omega \boldsymbol{r}_{T_\Omega} + \psi \boldsymbol{r}_{T_\Psi}, \\
\boldsymbol{r}_{T_\Gamma} &= \frac{1}{\omega + \psi}(\omega \boldsymbol{r}_{T_\Omega} + \psi \boldsymbol{r}_{T_\Psi}),
\end{aligned}
$$

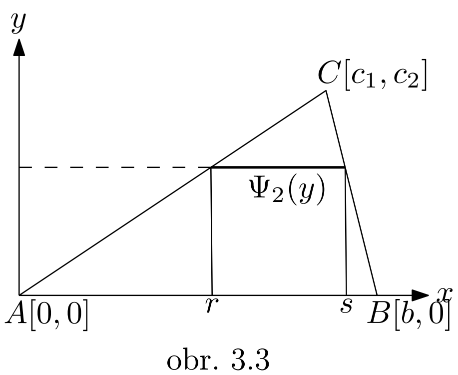
což odpovídá definici těžiště podle (1.4). □

3.4 Těžiště vybraných souvislých útvarů

3.4.1 Trojúhelník

V kapitole 2.1.1 jsme dokázali, že těžiště trojúhelníku definované jako společný bod těžnic odpovídá těžišti soustavy $S = \{1A, 1B, 1C\}$. Při výkladu o těžišti trojúhelníka se již na základní škole dozvíme, že pokud zavěsíme trojúhelník vystřižený z papíru za některý z jeho vrcholů, prodloužení nitě bude vždy procházet těžištěm. Znamenalo by to, že těžiště trojúhelníku zavedené jako průsečík tří těžnic má také význam těžiště množiny v $\mathbb{R}_2$ ohraničené trojúhelníkem, kde každému bodu této množiny přiřadíme stejnou hustotu. Tuto domněnku dokážeme a využijeme ji i při řešení úlohy.

Věta 3.3. Uvažujme hmotný útvar (Ω, ρ), kde Ω je množina určená trojúhelníkem ABC a pro funkci ρ platí $\forall X \in \Omega : \rho(X) = k$ (útvar (Ω, ρ) je homogenní) Potom platí $T_\Omega = T_S$, kde $S = \{1A, 1B, 1C\}$.



obr. 3.3

Důkaz. Bez újmy na obecnosti umístěme trojúhelník ABC do kartézské soustavy souřadnic tak, že souřadnice jeho vrcholů jsou $A[0,0], B[b,0], C[c_1, c_2]$. Dále můžeme předpokládat $\rho(X) = k = 1$. Podle (1.1) pro polohový vektor těžiště soustavy S platí

$$\boldsymbol{r}_{T_S} = \left(\frac{b + c_1}{3}, \frac{c_2}{3}\right).$$

Při výpočtu těžiště soustavy Ω budeme pokračovat podle postupu popsaného v odst. 3.2. Položme $x = x_1, y = x_2$. Pro meze r, s množiny $\Psi_2(y)$ platí $r = y\frac{c_1}{c_2}, s = b - y\frac{b-c_1}{c_2}$. Hmotnost množiny Ω odpovídá obsahu trojúhelníku ABC, $m = \frac{bc_2}{2}$. Potom

$$P_2(y) = \int_r^s 1\,\mathrm{d}x = s - r = b\left(1 - \frac{y}{c_2}\right),$$

$$M_{2,1}(y) = \int_r^s x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(s^2 - r^2) = \frac{1}{2}(s+r)(s-r) = \frac{1}{2}\left(b - \frac{yb}{c_2} + \frac{2yc_1}{c_2}\right) b\left(1 - \frac{y}{c_2}\right).$$

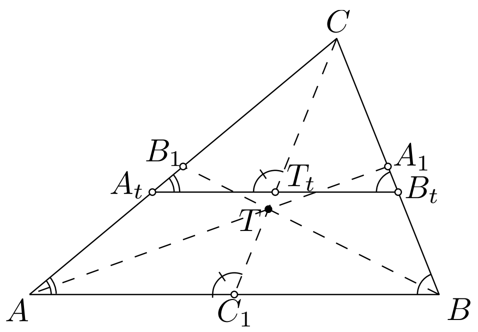
Odtud již určíme souřadnice těžiště

$$y_{T_\Omega} = \frac{1}{\omega}\int_0^{c_2} P_2(y)\mathrm{d}y = \frac{2}{bc_2}\int_0^{c_2} yb\left(1 - \frac{y}{c_2}\right)\,\mathrm{d}y = \frac{2}{c_2}\left(\frac{c_2^2}{2} - \frac{c_2^2}{3}\right) = \frac{c_2}{3},$$

$$\begin{aligned} x_{T_\Omega} &= \frac{1}{\omega}\int_0^{c_2} M_{2,1}(y)\mathrm{d}y = \frac{2}{bc_2}\int_0^{c_2} \frac{1}{2}\left(b - \frac{yb}{c_2} + \frac{2yc_1}{c_2}\right) b\left(1 - \frac{y}{c_2}\right)\,\mathrm{d}y = \\ &= \frac{1}{c_2}\int_0^{c_2}\left(b - \frac{yb}{c_2} + \frac{2yc_1}{c_2} - \frac{by}{c_2} + \frac{by^2}{c_2^2} - \frac{2c_1y^2}{c_2^2}\right)\,\mathrm{d}y = \\ &= \frac{1}{c_2}\left(bc_2 - \frac{bc_2}{2c_2} + c_1c_2 - \frac{bc_2}{2} + \frac{b+c_2}{3} - \frac{2c_1c_2}{3}\right) = \frac{b+c_1}{3}. \end{aligned}$$

Tím je věta dokázána.

Platnost věty můžeme dokázat i užitím lemmatu 2. Průnikem přímky rovnoběžné se stranou AB a trojúhelníku ABC je úsečka A_tB_t. Protože je trojúhelník homogenní, leží těžiště T_t této úsečky v jejím středu. Platí $\triangle ABC \sim \triangle A_tB_tC$ (trojúhelníky ABC a A_tB_tC jsou podobné), protože $|\sphericalangle CA_tB_t| = |\sphericalangle CAB|, |\sphericalangle CB_tA_t| = |\sphericalangle CBA|$. Potom také $\triangle CA_tT_t \sim \triangle CAC_1$, kde C_1 je střed strany AB, protože $\frac{|CA_t|}{|CA|} = \frac{|A_tB_t|}{|AB|} = \frac{|A_tT_t|}{|AC_1|}$. Odtud



obr. 3.4

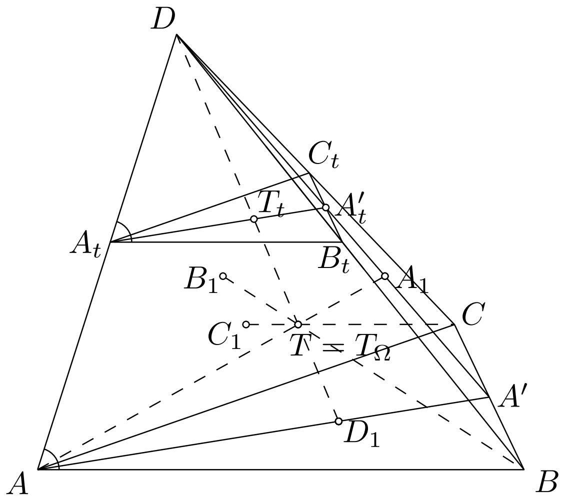
vyplývá $|\sphericalangle CT_tA_t| = |\sphericalangle CC_1A|$ neboli $T_t \in CC_1$. Množinou Γ pro trojúhelník ABC je tedy úsečka CC_1. Podle věty 3.1 platí $T \in CC_1$, kde T je těžiště celého trojúhelníku ABC. Zcela analogicky bychom získali i $T \in AA_1, T \in BB_1$, kde A_1, B_1 jsou středy úseček BC, CA. Bod T tedy leží v místě průniku úseček AA_1, BB_1, CC_1 a je totožný s těžištěm soustavy $\{1A, 1B, 1C\}$. $\square$

3.4.2 Čtyřstěn

Uvažujme soustavu $S = \{1A, 1B, 1C, 1D\}$, kde body A, B, C, D jsou vrcholy čtyřstěnu. Pro těžiště T soustavy S platí

$$4T = 1A + 1B + 1C + 1D = 3D_1 + 1D,$$

tedy bod T leží na úsečce spojující vrchol D a bod D_1, těžiště soustavy $\{1A, 1B, 1C\}$ a zároveň trojúhelníku ABC. Analogicky leží bod T i na úsečkách AA_1, BB_1, CC_1, kde body A_1, B_1, C_1 jsou těžiště trojúhelníků BCD, ACD, ABD. Touto úvahou jsme navíc dokázali, že se zmíněné úsečky protínají v jednom bodě T. Tyto úsečky budeme nazývat těžnicemi čtyřstěnu, např. úsečka AA_1 je těžnicí čtyřstěnu $ABCD$ na stěnu BCD. Z rovnosti $4T = 3D_1 + 1D$ dostáváme, v jakém poměru dělí bod T těžnici čtyřstěnu, $3 : 1 = -(DD_1T) = -\frac{(DT)}{(D_1T)} = |DT| : |D_1T|$.



obr. 3.5

Nyní uvažujme hmotný útvar (Ω, ρ) odpovídající homogennímu čtyřstěnu. Dokážeme, že podobně jako v případě trojúhelníku se těžiště takového útvaru shoduje s těžištěm izolovaných vrcholů čtyřstěnu.

Věta 3.4. Je dána množina Ω určená čtyřstěnem $ABCD$ a funkce hustoty ρ, pro kterou platí $X \in \Omega \Rightarrow \rho(X) = k_1$, a soustava $S = \{k_2A, k_2B, k_2C, k_2D\}, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$. Potom pro útvar (Ω, ρ) platí $T_\Omega = T_S$.

Důkaz. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat $k_1 = k_2 = 1$ (protože je čtyřstěn homogenní, poloha těžiště nezáleží na jeho hmotnosti). Dále využijeme lemma 2. Průnikem roviny rovnoběžné s rovinou ABC a čtyřstěnu je trojúhelník $A_tB_tC_t$. Označme A'_t, A' středy stran B_tC_t, BC. Ze stejného důvodu jako v části 3.4.1 leží body D, A'_t, A' na jedné přímce. To znamená, že $AA' \parallel A_tA'_t$. Těžiště T_t trojúhelníku $A_tB_tC_t$ leží na úsečce $A_tA'_t$ a dělí ji v poměru $2 : 1$. Ve stejném poměru dělí i bod D_1 úsečku AA'.

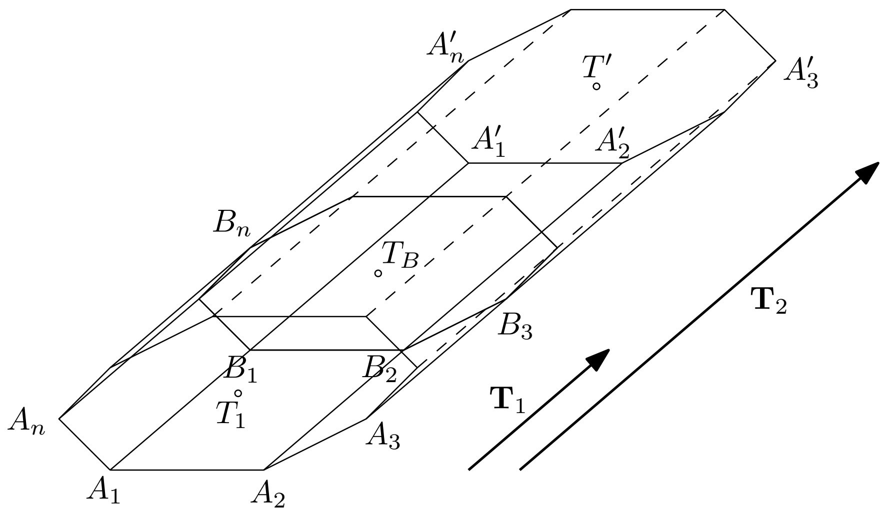
Z podobnosti trojúhelníků $\triangle A_tA'_tD \sim \triangle AA'D$ vyplývá i podobnost trojúhelníků $\triangle A_tT_tD \sim \triangle AD_1D$, protože $\frac{|DA_t|}{|DA|} = \frac{|A_tA'_t|}{|AA'|} = \frac{|A_tT_t|}{|AD_1|}$ a $|\sphericalangle DA_tT_t| = |\sphericalangle DAD_1|$. Odtud dostáváme $|\sphericalangle DT_tA_t| = |\sphericalangle DD_1A|$, což znamená, že $T_t \in DD_1$. Podle lemmatu 2 musí těžiště T_Ω celého útvaru (Ω, ρ) ležet na přímce DD_1. Analogickou úvahou bychom dokázali, že bod T_Ω leží i na přímkách AA_1, BB_1, CC_1 a odpovídá tak bodu T, těžišti soustavy S. $\square$

3.4.3 Hranol

Uvažujme homogenní útvar (Ω, ρ_Ω), kde Ω je množina určená n-bokým hranolem

$$A_1A_2\cdots A_nA_1'A_2'\cdots A_n'.$$

Průnikem roviny rovnoběžné s podstavou hranolu a útvaru (Ω, ρ_Ω) je mnohoúhelník



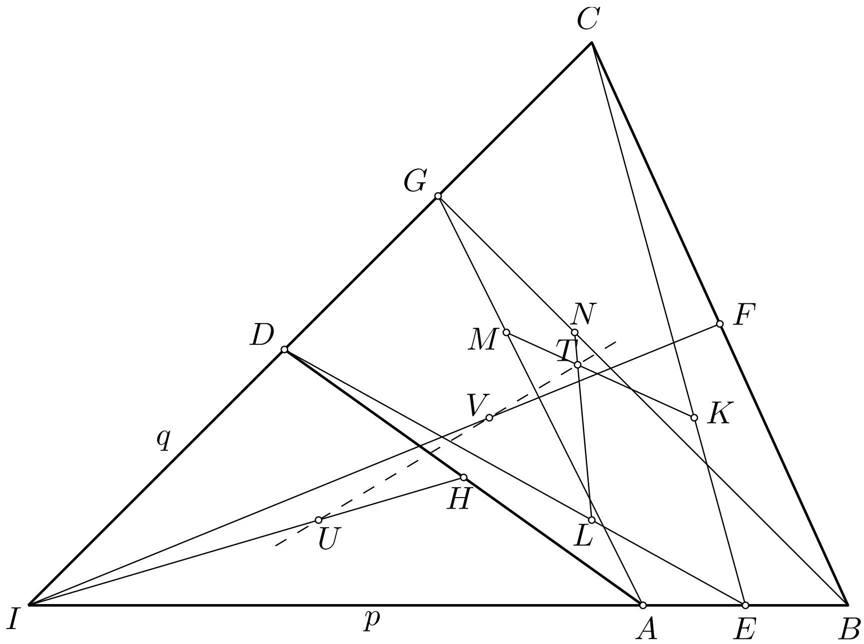
obr. 3.6

$B_1B_2\cdots B_n$ shodný s podstavou hranolu, který můžeme považovat za obraz dolní podstavy Ψ_1 v posunutí $\mathbf{T}_1$ určeném vektorem $\overrightarrow{A_1B_1}$. V tomto odstavci dále budeme rozumět libovolným mnohoúhelníkem hmotný útvar určený tímto mnohoúhelníkem. Horní podstava Ψ_2 je obrazem dolní podstavy v posunutí $\mathbf{T}_2$ určené vektorem $\overrightarrow{A_1A_1'} \parallel \overrightarrow{A_1B_1}$. Proto je i těžiště T_B mnohoúhelníku $B_1B_2\cdots B_n$ obrazem těžiště T_1 dolní podstavy v posunutí $\mathbf{T_1}$ a těžiště T' horní podstavy obrazem bodu T_1 v posunutí $\mathbf{T}_2$. Odtud plyne, že $T_B \in T_1T'$. Množinou Γ pro takový hranol je potom úsečka spojující body T_1 a T'. Z homogenity útvaru (Ω, ρ_Ω) plyne, že i útvar (Γ, ρ_Γ) je homogenní a jeho těžiště, tedy i těžiště celého hranolu, leží ve středu úsečky T_1T'.

3.5 Hmotné útvary v geometrických úlohách

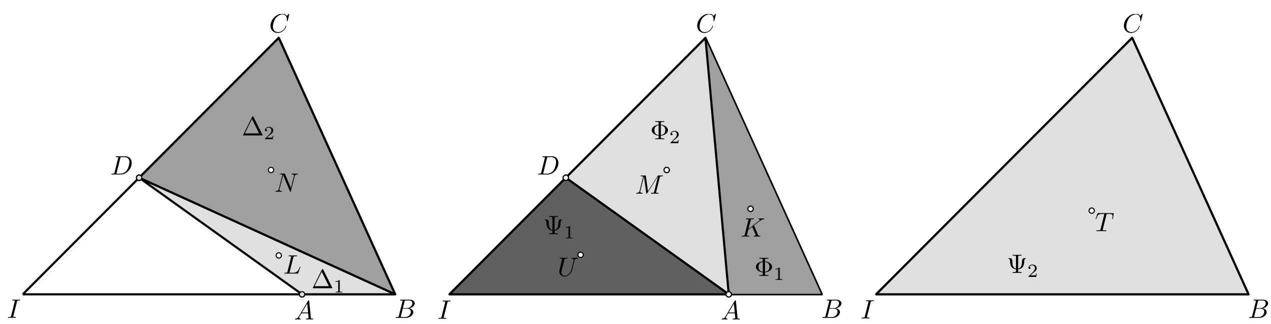
Podobným způsobem jako v kapitole 2 lze využít hmotných souvislých útvarů k dokazování geometrických tvrzení nebo řešení geometrických úloh. Úvaha vždy spočívá v tom, že hmotný útvar, jehož polohu těžiště známe, můžeme rozložit na součet dvou hmotných útvarů. Těžiště těchto dvou útvarů potom musí ležet na jedné přímce spolu s těžištěm původního hmotného útvaru.

Příklad 4. Jsou dány různoběžné přímky p, q. Na přímce p zvolme body A, B a na přímce q body C, D. Označme postupně E, F, G, H středy stran AB, BC, CD, DA a I průsečík přímek p, q. Na úsečkách CE, DE, AG, BG, IF, IH postupně zvolme body K, L, M, N, U, V takové, že $\frac{|CK|}{|EK|} = \frac{|DL|}{|EL|} = \frac{|AM|}{|GM|} = \frac{|BN|}{|GN|} = \frac{|IU|}{|HU|} = \frac{|IV|}{|FV|} = 2$. Označme T průsečík přímek KM a NL. Dokažte, že body T, U, V leží na jedné přímce



obr. 3.7

Řešení. V tomto řešení budeme uvažovat pouze homogenní souvislé množiny, tedy množiny pro jejichž hustotu platí $X \in \Gamma \Rightarrow \rho_\Gamma(X) = 1$. Nejprve označme Ω množinu určenou čtyřúhelníkem $ABCD$, Δ_1 množinu určenou trojúhelníkem ABD, Δ_2 množinu určenou trojúhelníkem BCD, Φ_1 množinu určenou trojúhelníkem ABC, Φ_2 množinu určenou trojúhelníkem ACD a konečně Ψ_1 množinu určenou trojúhelníkem IAD a Ψ_2 množinu určenou trojúhelníkem IBC.



obr. 3.8

Platí:

$$(\Omega, \rho_\Omega) = (\Delta_1, \rho_{\Delta_1}) + (\Delta_2, \rho_{\Delta_2}) = (\Phi_1, \rho_{\Phi_1}) + (\Phi_2, \rho_{\Phi_2}) = -(\Psi_1, \rho_{\Psi_1}) + (\Psi_2, \rho_{\Psi_2}).$$

Uvědomme si, že podle věty 3.3 jsou těžišti množin $\Delta_1, \Delta_2, \Phi_1, \Phi_2, \Psi_1, \Psi_2$ postupně body L, N, K, M, U, V. Podle věty 3.2 potom platí

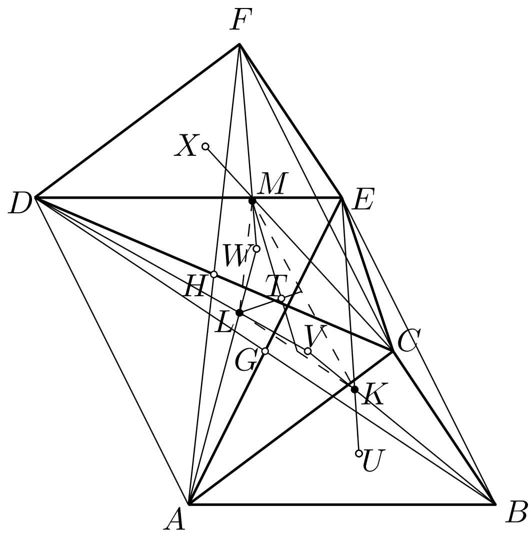
$$\omega T_\Omega = \delta_1 L + \delta_2 N = \phi_1 K + \phi_2 M = -\psi_1 U + \psi_2 V.$$

Odtud vyplývá, že $T_\Omega = LN \cap KM \Rightarrow T_\Omega = T$. Po dosazení dostáváme

$$\omega T = -\psi_1 U + \psi_2 V,$$

tedy body T, U, V leží na jedné přímce.

Příklad 5. Jsou dány trojúhelníky ABC a DEF takové, že jsou vzorem a obrazem posunutí v rovině. Označme U, V, W, X postupně těžiště trojúhelníků ABC, ACE, CDE, DEF. Dále označíme body $K = BV \cap EU, L = AW \cap DV, M = CX \cap FW$.
a) Dokažte, že body U, V, W, X leží v jedné přímce a platí $|UV| = |VW| = |WX|$.
b) Dokažte, že těžiště trojúhelníku KLM leží ve středu úsečky UX.



obr. 3.9

Řešení. Část a) budeme řešit pomocí soustav hmotných bodů. Platí $1A + 1B + 1C = 3U$ a $1C + 1D + 1E = 3W$. Sečtením uvedených vztahů dostáváme

$$1A + 1B + 2C + 1D + 1E = 3U + 3W. \tag{3.5}$$

Úsečky BD, AE jsou úhlopříčkami rovnoběžníku $ABED$ a navzájem se půlí. Označme jejich průsečík G. Potom platí $1B + 1D = 2G = 1A + 1E$. Dosazením do (3.5) získáváme

$$\begin{aligned} 2A + 2C + 2E &= 3U + 3W, \\ 6V &= 3U + 3W, \end{aligned}$$

což znamená, že bod V je těžištěm soustavy $\{3U, 3W\}$, body U, V, W leží na jedné přímce a pro poměr jejich vzdáleností platí

$$\frac{|UV|}{|WV|} = -(UWV) = \frac{3}{3} = 1.$$

Podobně pro bod X platí $1D + 1E + 1F = 3X$, $1A + 1C + 1E = 3V$. Sečtením rovnic a dosazením $1A + 1F = 2H = 1C + 1D$, kde $H = AF \cap CD$, získáme $2D + 2C + 2E = 6W = 3X + 3V$ neboli $W \in VX$ a $\frac{|VW|}{|XW|} = 1$.

V řešení části b) úlohy využijeme poznatků o poloze těžiště čtyřstěnu a hranolu. Na dvojici trojúhelníků ABC, DEF totiž můžeme nahlížet jako na podstavy kosého hranolu promítnuté do roviny jedné z nich. Kosý hranol $ABCDEF$ si můžeme rozdělit na několik částí.

Podobně jako v předchozím příkladě zde budeme pro libovolnou souvislou množinu $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ rozumět předpisem $\rho_\Gamma(X)$ funkci hustoty, pro kterou platí $X \in \Gamma \Rightarrow \rho_\Gamma(X) = 1$. Označme nejprve Γ množinu určenou celým hranolem, Ω množinu určenou čtyřstěnem $ABCE$, Ψ množinu určenou čtyřstěnem $ACDE$ a Φ množinu určenou čtyřstěnem $CDEF$. Hmotnosti jednotlivých hmotných útvarů odpovídají objemu množin, kterými jsou určeny. Označme S obsah podstavy hranolu a v jeho výšku. Potom platí

$$\gamma = Sv,\ \ \omega = \frac{1}{3}Sv,\ \ \psi = \frac{1}{3}Sv,\ \ \phi = \gamma - \omega - \psi = \frac{1}{3}Sv.$$

Dále platí

$$(\Gamma, \rho_\Gamma) = (\Omega, \rho_\Omega) + (\Psi, \rho_\Psi) + (\Phi, \rho_\Phi).$$

Podle věty 3.2 dostáváme $\gamma T_\Gamma = \omega T_\Omega + \psi T_\Psi + \phi T_\Phi$ Uvědomme si, že těžištěm čtyřstěnu $ABCE$ a tedy i útvaru (Ω, ρ_Ω) je bod K, který leží na průsečíku spojnic vrcholů B, E s těžišti protějších stěn čtyřstěnu. Analogicky dostaneme $T_\Psi = L$ a $T_\Phi = M$. Po dosazení obdržíme

$$\gamma T_\Gamma = \omega K + \psi L + \phi M = (\omega + \gamma + \psi)T,$$

kde T je těžiště soustavy $\{\omega K, \psi L, \phi M\}$. Protože $\omega = \gamma = \psi$, je bod T těžiště trojúhelníku KLM. Podle předchozí rovnosti se ovšem shoduje s těžištěm útvaru (Ω, ρ_Ω), tedy s těžištěm hranolu $ACBDEF$. Podle kapitoly 3.4.3 leží těžiště tohoto hranolu na spojnici UX těžišť podstav a dělí ji v poměru 1:1. Tím je úloha vyřešena.

Závěr

Poznatky týkající se statiky hmotného bodu byly v geometrii používány již v antickém Řecku. *Archimédes* nejprve spatřoval význam své teorie především v objevování nových geometrických zákonů, brzy si uvědomil, že může být užitečná i při důkazu těchto vět. Až s matematickou definicí pojmu těžiště se teorie hmotných bodů mohla stát korektní důkazovou technikou.

Tato práce představuje moderní geometrii hmotného bodu. Nejprve je definováno těžiště a jsou dokázány jeho vlastnosti. Postupně jsou pomocí této definice těžiště dokázány tři Archimédovy axiomy, které jsou důležité pro další aplikaci teorie. Klíčovým pojmem práce je zavedení součtu hmotných bodů a jeho souvislosti s dělicím poměrem, který snadno umožňuje popsat nejen vzájemné vzdálenosti bodů na přímce, ale i jejich vzájemnou polohu. Na základě vlastností těžiště jsou potom dokázány algebraické vlastnosti součtu hmotných bodů.

V další části práce jsou ukázány některé aplikace teorie, které využívají součtu hmotných bodů a jeho vlastností. Řešení většiny geometrických problémů je založeno na tom, že hmotné body můžeme sčítat v různém pořadí a k těžišti celé soustavy se tak můžeme dostat více způsoby. Obzvláště vhodná je geometrie hmotných bodů k důkazu kolinearity bodů (body se nacházejí v jedné přímce) a konkurentnosti přímek (přímky procházejí jedním bodem). Přínosem práce je důkaz komplikovanějších planimetrických tvrzení o kolinearitě určitých bodů, Desarguovy a Pappovy věty, pomocí geometrie hmotných bodů.

Dalším přínosem práce je rozšíření geometrie hmotných bodů na souvislé hmotné útvary, které dosud nebylo v literatuře zpracováno. Archimédes sice kombinoval ve svých pracích prvky infinitezimální a diskrétní povahy, avšak abychom určili polohu těžiště souvislého útvaru, je nutné již použít diferenciálního a integrálního počtu, jehož aparát v Archimédově době ještě nebyl k dispozici.

Geometrie hmotných bodů umožňuje nejen dokazovat geometrická tvrzení, ale i objevovat nová. Z tohoto důvodu může sloužit i jako inspirace např. autorům úloh matematických soutěží. Jako ilustraci jsem uvedl příklad 5, jehož řešení po nalezení analogie v prostoru a použití souvislých hmotných útvarů je velice intuitivní, ovšem podle prvotního zadání se jeví jako poměrně složitá planimetrická úloha. Obecně můžeme říci, že na řešení úlohy pomocí geometrie hmotných bodů můžeme snadno přijít, není třeba objevovat žádné skryté souvislosti jako v čistém syntetickém řešení. Na druhou stranu je řešení touto metodou mnohdy technicky náročnější na konkrétní výpočty.

Možností rozšíření práce je nalezení dalších aplikací teorie v podobě dalších geometrických problémů či nových důkazů existujících tvrzení. Nabízí se posoudit možné využití situace, kdy v případě hmotných souvislých útvarů není funkce hustoty konstantní.

Literatura

[1] BUCHÁČEK, M. *Matematické metody ve statice tuhého tělesa.* Středoškolská odborná činnost 2009/2010.

[2] RIKE, T. *Mass Point Geometry (Barycentric Coordinates)* Berkeley Math Circle, January 2000.

[3] REKTORYS, K. *Přehled užité matematiky 1.* 7. vyd. Praha: Prométheus, 2003. ISBN 80-7196-180-9

[4] ŠIMŠA, J. *Archimédova statika v geometrii.* Dostupné na URL `http://www.math.muni.cz/~simsa/Archim.pdf`.

[5] ŠVRČEK, J., CALÁBEK, P. *Sbírka netradičních matematických úloh.* 1. vyd. Praha: Prométheus, 2007. ISBN 978-80-7196-341-7

[6] 1988 AIME Problems/Problem 12 - AoPSWiki. c2008. Dostupné na URL `http://www.artofproblemsolving.com/Wiki/index.php/1988_AIME_Problems/Problem_12`