STŘEDOŠKOLSKÁ ODBORNÁ ČINNOST

Obor 01 - Matematika a statistika

O vlastnostech turnajů
On Properties of Tournaments

Autor: **Jakub Kopřiva**
2. ročník, všeobecné gymnázium

Škola: **Slovanské gymnázium Olomouc**
tř. Jiřího z Poděbrad 13
771 11 Olomouc

Konzultant: **Mgr. Michal Botur, Ph.D.**
Katedra algebry a geometrie
Přírodovědecká fakulta
Univerzita Palackého Olomouc

Olomouc 2011

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou práci vypracoval samostatně pod vedením Mgr. Michala Botura, Ph.D. Použil jsem pouze podklady uvedené v přiloženém seznamu a postup při zpracování a dalším nakládání s prací je v souladu se zákonem č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon) v platném znění.

V Olomouci dne 13. května 2011

Jakub Kopřiva

Poděkování

Děkuji Mgr. Michalu Boturovi, Ph.D. za obětavou pomoc a důležité, podnětné a věcné připomínky, které mi během práce poskytoval, a v neposlední řadě za trpělivost s vysvětlováním matematické formalizace. Děkuji Mgr. Janě Fojtíkové a RNDr. Karlu Hronovi, Ph.D. za cenné podněty a připomínky k formálním aspektům práce. Děkuji PhDr. Nadě Hronové za neocenitelnou pomoc po stránce jazykové.

Obsah

Abstrakt

Turnaje a jejich vlastnosti byly uspokojivě zkoumány a popsány pouze z hlediska teorie grafů. Výsledky tohoto výzkumu mají zajímavé aplikace v oblasti sociálních věd v teorii volby a teorii sociálního výběru. Tato práce si ovšem klade za cíl popsat turnaje z hlediska algebry, k důkazu některých vět jsou však mimo algebraických metod použity také metody kombinatorické.

Turnaje jsou definovány jako relační struktury, tedy jako množiny s reflexivní, antisymetrickou a úplnou binární relací na nich. V práci jsou zavedeny pojmy: cyklický turnaj, tranzitivní turnaj, kongruence na turnajích a simple turnaje a jsou dány spolu do souvislostí. Práce ukazuje přímou souvislost mezi tranzitivními turnaji a lineárními svazy. Jednou z nejdůležitějších částí práce je jasná definice cyklických turnajů, pomocí které jsou odvozeny jejich důležité vlastnosti. Práce se také zabývá možnostmi definování a konstrukcí kongruencí na turnajích, je zaveden pojem simple turnaje. Simple turnaje jsou dány do souvislostí s cyklickými a tranzitivními turnaji a jsou popsány některé jejich vlastnosti. Stručně jsou nastíněny možné aplikace získaných poznatků.

Klíčová slova
Relační struktura; kongruence; turnaj; simple turnaj; cyklický turnaj; kombinatorika a teorie grafů.

Abstract

Tournaments and their properties were described yet only in terms of graph theory. There are interesting applications of those research results in social sciences for example in vote theory and social choice theory. This work is aimed to describe tournaments in terms of algebra. Instead of usual algebraic methods there are combinatorial methods used to prove some theorems.

Tournaments are defined as relational structures which means a set with reflexive, antisymetric and complete binary relation on it. Cyclic tournaments, transitive tournaments, tournament congruences and simple tournaments are defined in this work and there are also shown relations among them. The work shows relation between transitive tournaments and linear lattices. One of the most important parts of the work is a clear definition of a cyclic tournament which is used to illustrate properties of cyclic tournaments. The work also contains definition of tournament congruences, way of their construction and description of their properties. Simple tournaments are defined and their properties are described with knowledge of properties of tournament congruences. Relations among simple tournaments and cyclic and transitive tournaments are shown in this work too. The work also contains an outline of the possible usage of the acquired knowledge.

Key words

Relational structure; congruence; tournament; simple tournament; cyclic tournament; combinatorics and graph theory.

Úvod

Turnaje a jejich vlastnosti [$Wol2$] byly podrobněji zkoumány a popsány pouze z hlediska teorie grafů [Tru] například byl vyčíslen počet neizomorfních turnajů, pro různá n, pomocí aplikace Pólyovy vyčíslovací metody [$Wik1$] a [$Wik2$], na těchto stránkách se nacházejí i odkazy na další články, které se spíše zabývají různými aplikacemi turnajů. Prozatím se pravděpodobně nikdo hlouběji nevěnoval výzkumu turnajů z hlediska algebry, proto je tato práce v mnohém nová a prakticky nenavazuje na žádnou předchozí práci.

Kapitoly 1 a 2 se věnují výkladu části teoretického základu, na kterém práce stojí, zejména teorie množin a základních pojmů binárních relací v Kapitole 1 a základy problematiky relačních struktur a kongruencí na nich v Kapitole 2, svazy [*Rach*] jsou axiomatizovány v Příloze #2, ovšem v práci nejsou popsány základy kombinatoriky [Cal].

Kapitola 3 se věnuje představení nejdůležitějších částí výsledků v oblasti obecných vlastností turnajů, cyklických turnajů a tranzitivních turnajů. V Kapitole 4 jsou zavedeny kongruence na turnajích a jsou představeny nejdůležitější výsledky o jejich vlastnostech a simple turnajích a jejich vlastnostech. Kapitola 5 se věnuje nástinu aplikací některých výsledků práce jak v oblasti sociálních věd, tak matematiky.

Tato práce vznikala v období mezi říjnem 2010 a únorem 2011 v rámci projektu *Badatel*, WWW: `http://badatel.upol.cz`, který je organizován Přírodovědeckou fakultou Univerzity Palackého v Olomouci, pod vedením Mgr. Michala Botura Ph.D.

Cílem práce je dobře definovat cyklické turnaje, popsat jejich vlastnosti a souvislosti s tranzitivními turnaji. Definovat kongruence na turnajích, jejich konstrukci a v souvislosti s nimi definovat simple turnaje. V neposlední řadě také dát do souvislostí simple turnaje s cyklickými a tranzitivními turnaji.

Matematika je hra hraná podle jistých jednoduchých pravidel s nesmyslnými znaky na papíře.

David Hilbert[1]

[1]**David Hilbert** (1862 – 1943), významný německý matematik, který se mimořádně zasloužil o axiomatizaci geometrie a také formuloval slavné Hilbertovy problémy, které významě ovlivňovaly směry matematického výzkumu ve 20. století.

Kapitola 1
Základy algebry

Tato kapitola slouží jako naprostý úvod do problematiky, velice stručně se zabývá pojmy *množina*, *množinová operace*, *binární relace*, *zobrazení* a *relace ekvivalence*, které jsou nezbytně nutné k pochopení obsahu dalších kapitol.

1.1 Množiny

Množinou rozumíme konečný, nebo nekonečný soubor objektů - *prvků množiny*, u kterých nezáleží na pořadí a mnohočetnosti.$[Wol1]$ Množiny značíme velkými písmeny, prvky povětšinou malými písmeny. Skutečnost, že prvek a náleží do množiny A, značíme $a \in A$, skutečnost, že prvek b nenáleží do množiny A, se značí $b \notin A$.

Obecně existují dva způsoby zápisu množin:

1. Množinu můžeme zapsat výčtem prvků.

   Příklad

   - Množina prvních 4 přirozených čísel

$$A = \{1; 2; 3; 4\}$$

- Množina všech reálných kořenů rovnice $x^2 - x - 1 = 0$

$$B = \left\{ \frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right\}$$

2. Množinu můžeme zapsat pomocí charakteristické vlastnosti.[2]

Příklad

- Množina prvních 4 přirozených čísel [3]

$$A = \{a \in \mathbb{N} \mid a \leq 4\}$$

- Množina všech reálných kořenů rovnice $x^2 - x - 1 = 0$

$$B = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - x - 1 = 0\right\}$$

Definice 1.1
Mohutnost množiny je u konečných množin rovna počtu prvků dané množiny. Mohutnost množiny A se značí $|A|$.

Příklad

- Mějme množinu prvních 4 přirozených čísel

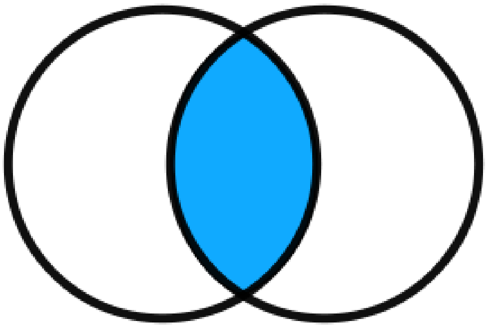
$$A = \{1; 2; 3; 4\},$$

pak $|A| = 4$.

[2] Prázdná množina se značí $\emptyset$.
[3] Zápis $A = \{a \in \mathbb{N} \mid a \leq 4\}$ se čte: "Množiny přirozených čísel a takových, že $a \leq 4$ ".

1.2 Množinové operace

Definice 1.2
Průnik množin A a B se značí $A \cap B$. Průnikem množin A a B je množina taková, že $A \cap B = \{c \mid c \in A \wedge c \in B\}$. Je-li průnikem množin A a B množina C, pak tuto skutečnost značíme $A \cap B = C$.



Obrázek 1: Průnik množin

Příklad

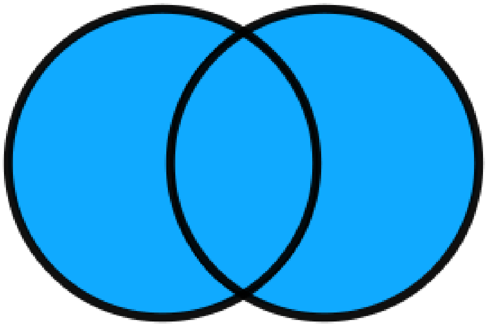
- Mějme množiny A a B takové, že

  $$A = \{a \in \mathbb{N} \mid a \leq 4\} = \{1; 2; 3; 4\} \quad B = \{b \in \mathbb{R} \mid b^2 - 7b + 10 = 0\} = \{2; 5\},$$

  pak průnikem množin A a B je množina taková, že

  $$A \cap B = \{c \in \mathbb{N} \mid c^2 - 7c + 10 = 0 \wedge c \leq 4\} = \{2\}.$$

Definice 1.3
Sjednocení množin A a B se značí $A \cup B$. Sjednocením množin A a B je množina taková, že $A \cup B = \{c \mid c \in A \vee c \in B\}$. Je-li sjednocením množin A a B množina C, pak tuto skutečnost značíme $A \cup B = C$.



Obrázek 2: Sjednocení množin

Příklad

- Mějme množiny A a B takové, že

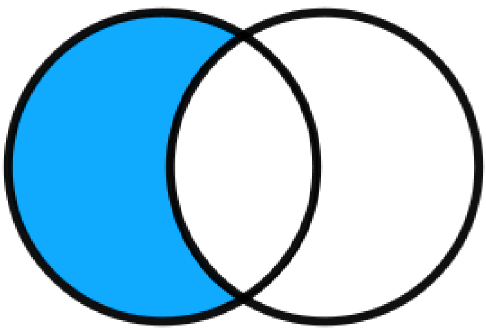
  $$A = \{a \in \mathbb{N} \mid a \leq 4\} = \{1; 2; 3; 4\} \quad B = \{b \in \mathbb{R} \mid b^2 - 7b + 10 = 0\} = \{2; 5\},$$

  pak sjednocením množin A a B je množina taková, že

  $$A \cup B = \{c \in \mathbb{N} \mid c^2 - 7c + 10 = 0 \vee c \leq 4\} = \{1; 2; 3; 4; 5\}.$$

Definice 1.4

Rozdíl množin A a B se značí $A \backslash B$. Rozdílem množin A a B (v tomto pořadí) je množina taková, že $A \backslash B = \{c \mid c \in A \wedge c \notin B\}$. Je-li rozdílem množin A a B množina C, pak tuto skutečnost značíme $A \backslash B = C$.



Obrázek 3: Rozdíl množin

Příklad

- Mějme množiny A a B takové, že

  $$A = \{a \in \mathbb{N} \mid a \leq 4\} = \{1; 2; 3; 4\} \quad B = \{b \in \mathbb{R} \mid b^2 - 7b + 10 = 0\} = \{2; 5\},$$

  pak rozdílem množin A a B je množina taková, že

  $$A \backslash B = \{c \in \mathbb{N} \mid c \leq 4 \wedge c^2 - 7c + 10 \neq 0\} = \{1; 3; 4\}.$$

Definice 1.5
Kartézský součin množin A a B v tomto pořadí se značí $A \times B$. Kartézským součinem množin A a B je množina taková, že $A \times B = \{(a; b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$, kde $(a; b)$ je uspořádaná dvojice prvků a a b. Je-li kartézským součinem množin A a B množina C, pak tuto skutečnost značíme $A \times B = C$.

Příklad

- Mějme množiny A a B takové, že

  $$A = \{a \in \mathbb{N} \mid a \leq 4\} = \{1; 2; 3; 4\} \quad B = \{b \in \mathbb{R} \mid b^2 - 7b + 10 = 0\} = \{2; 5\},$$

  pak kartézským součinem množin A a B je množina taková, že

  $$A \times B = \{(1; 2); (1; 5); (2; 2); (2; 5); (3; 2); (3; 5); (4; 2); (4; 5)\}.$$

V kontextu výše definovaných množinových operací můžeme zavést pojem *podmnožina*, jehož znalost je nutná k definování dalších důležitých pojmů.

Definice 1.6
Mějme množiny A a B, pokud platí, že $A \cap B = B$ nebo $A \cup B = A$ [4], pak množina B je *podmnožinou* množiny A, tato skutečnost se značí $B \subset A$, pokud $B \neq A$, v opačném případě $B \subseteq A$, tedy pokud může platit $B = A$.

[4] Tyto výroky jsou ekvivalentní, protože $A \cap B = B$, pak $A \cup B = A \cup (A \cap B) = A$.

Příklad

- Mějme množiny přirozených čísel $\mathbb{N}$, celých čísel $\mathbb{Z}$, racionálních čísel $\mathbb{Q}$, reálných čísel $\mathbb{R}$, a komplexních čísel $\mathbb{C}$, pak pro tyto množiny platí

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

1.3 Binární relace

Definice 1.7
Binární relací R mezi množinami A a B v tomto pořadí nazýváme libovolnou podmnožinu R kartézského součinu $A \times B$.

Jestliže $R \subseteq A^2$, pak R je binární relací na A.

Příklad

- Mějme množiny A a B takové, že

  $$A = \{a \in \mathbb{N} \mid a \leq 4\} = \{1; 2; 3; 4\} \quad B = \{b \in \mathbb{R} \mid b^2 - 7b + 10 = 0\} = \{2; 5\}.$$

  Proto kartézským součinem množin A a B je množina taková, že

  $$A \times B = \{(1; 2); (1; 5); (2; 2); (2; 5); (3; 2); (3; 5); (4; 2); (4; 5)\}.$$

  Definujeme relaci R. Řekněme, že platí $(a; b) \in R$, pokud tyto prvky splňují podmínku $a + b < ab$, tedy

  $$R = \{(a; b) \mid a \in A \wedge b \in B; a + b < ab\} = \{(2; 5); (3; 2); (3; 5); (4; 2); (4; 5)\}.$$

Definice 1.8
Inverzní relací k binární relaci $R \subseteq A \times B$, je taková množina uspořádaných dvojic $(b; a)$, které náleží R^{-1} tehdy a jen tehdy, jestliže $(a; b) \in R$.

Příklad

- Mějme množiny A a B takové, že

  $$A = \{a \in \mathbb{N} \mid a \leq 4\} = \{1; 2; 3; 4\} \quad B = \{b \in \mathbb{R} \mid b^2 - 7b + 10 = 0\} = \{2; 5\},$$

  a relaci R takovou, že

  $$R = \{(a; b) \mid a \in A \wedge b \in B; a+b < ab\} = \{(2; 5); (3; 2); (3; 5); (4; 2); (4; 5)\},$$

  pak relací R^{-1} je relace taková, že

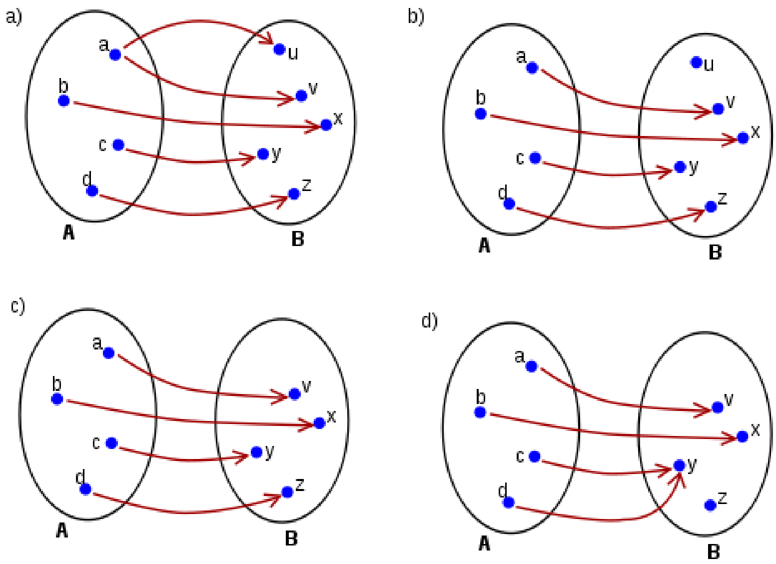
  $$R^{-1} = \{(5; 2); (2; 3); (5; 3); (2; 4); (5; 4)\}.$$

Definice 1.9
Binární relace f mezi množinami A a B se nazývá *zobrazením množiny A* do B, značí se $f: A \to B$, platí-li, že pro každé $a \in A$ existuje jediný obraz $b \in B$ takový, že $(a; b) \in f$. Takovýto obraz obvykle značíme $b = f(a)$. [5]

Definice 1.10
Zobrazení $f: A \to B$ se nazývá:

1. *injektivní*, tj. prosté, platí-li, $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$,
2. *surjektivní*, platí-li, že ke každému $b \in B$ existuje nějaké $a \in A$ takové, že $f(a) = b$,
3. *bijektivní*, platí-li, že je zároveň injektivní a surjektivní.

[5] Nejlepším příkladem zobrazení je funkce. Skutečnost, že že pro každé $a \in A$ existuje jen jedno $f(a) \in B$, tedy že existuje jen jedna funkční hodnota každého prvku, je možno ilustrovat na grafu funkce v souřadnicové soustavě O_{xy}, kde každá rovnoběžka s osou y protne graf funkce nejvýše jednou.



Obrázek 4: Příklady relací a zobrazení

Popis obrázku

- Relace na obrázku a) není zobrazení.
- Relace na obrázku b) je injektivní zobrazení, ale není surjektivní, protože neexistuje žádné $x \in A$ takové, že $f(x) = u$.
- Relace na obrázku c) je bijektivní zobrazení.
- Relace na obrázku d) je zobrazení, ale není injektivní ani surjektivní, protože neexistuje žádné $x \in A$ takové, že $f(x) = z$ a jelikož $f(c) = f(d)$, ale $c \neq d$.

Příklad

- Zobrazení $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ takové, že $f_1 : y = |x|$, je zjevně surjektivní, ale není injektivní, protože platí, že $|x| = |-x|$, ale obecně neplatí, že $-x = x$.
- Zobrazení $f_2 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ takové, že $f_2 : y = \log x$, je zjevně bijektivní.

- Zobrazení $f_3 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takové, že $f_3 : y = x^2$ je injektivní, ale není surjektivní, protože neexistuje například žádné $n \in \mathbb{N}$ takové, že by platilo $n^2 = 2$.

Definice 1.11
Binární relace $R \subseteq A^2$ se nazývá [6]

1. *reflexivní*, platí-li
$$\forall x \in A : (x; x) \in R,$$
2. *symetrická*, platí-li
$$\forall x, y \in A : (x; y) \in R \Rightarrow (y; x) \in R,$$
3. *antisymetrická*, platí-li
$$\forall x, y \in A : (x; y) \in R \wedge (y; x) \in R \Rightarrow x = y,$$
4. *tranzitivní*, platí-li
$$\forall x, y, z \in A : (x; y) \in R \wedge (y; z) \in R \Rightarrow (x; z), \in R$$
5. *úplná*, platí-li
$$\forall x, y \in A : (x; y) \in R \vee (y; x) \in R.$$

Definice 1.12
Relace ekvivalence je reflexivní, symetrická a tranzitivní binární relace. Značí se $x\mathcal{E}y$.

Mějme množinu A a ekvivalenci $\mathcal{E} \subseteq A^2$, pak se množina $x/\mathcal{E} = \{y \in A \mid y\mathcal{E}x\}$ nazývá třídou ekvivalence $\mathcal{E}$ s reprezentantem x, přičemž $\forall y \in$

[6] Některé tyto vlastnosti jsou navzájem disjunktní. Libovolná binární relace nemusí splňovat ani jednu z těchto vlastností. Zápis $(x; y) \in R$ je ekvivalentní se zápisem xRy, který se používá dále.

$x/\mathcal{E} : x/\mathcal{E} = y/\mathcal{E}$. Třídy ekvivalence jsou disjunktní. Množinu všech tříd ekvivalence, tedy $\{x/\mathcal{E} \mid x \in A\}$ nazváme *faktormnožinou* podle ekvivalence $\mathcal{E}$ a značíme $A/\mathcal{E}$.

Kapitola 2
Relační struktury

V této kapitole budou pomocí poznatků z minulé kapitoly definovány pojmy *relační struktura*, *pravé a levé okolí prvku* a *kongruence na relačních strukturách.*

2.1 Obecné vlastnosti

Definice 2.1
Mějme libovolnou množinu A a libovolnou n-ární relaci R takovou, že platí $R \subseteq A^n$ a $R \neq \emptyset$, pak struktura $\mathcal{S} = (A; R)$ je *relační struktura.*

Definice 2.2
Je dána relační struktura $\mathcal{S} = (A; R)$, kde $R \subseteq A^2$.

1. Množina $P_R(x)$ se nazývá *pravým okolím prvku* x. $P_R(x)$ je množina obsahující prvky, s nimiž je x v relaci na pravém místě, formálně

$$P_R(x) = \{y \in A \mid xRy\}.$$

2. Množina $L_R(x)$ se nazývá *levým okolím prvku* x. $L_R(x)$ je množina

obsahující prvky, s nimiž je x v relaci na levém místě, formálně

$$L_R(x) = \{y \in M \mid yRx\}.$$

Tímto způsobem můžeme okolí definovat pouze díky binárnosti relace R.

2.2 Kongruence na relačních strukturách

Definice 2.3
Kongrunce na relační struktuře s libovolnou binární relací, obvykle značená θ, je ekvivalence. Pro třídy této ekvivalence platí, že všechny prvky y libolné třídy x/θ mají ke všech ostatním prvkům stejný vztah jako reprezentant třídy, tedy formálně

$$\forall y \in x/\theta : (xRz \Rightarrow yRz) \wedge (zRx \Rightarrow zRy) \wedge ((x;z),(z;x) \notin R \Rightarrow (y;z),(z;y) \notin R).$$

Relační struktura $\mathcal{S} = (A;R)$ faktorizovaná kongruencí θ se značí $\mathcal{S}/\theta = (A/\theta; R/\theta)$. A/θ je množina všech tříd kongruence a relace R/θ ukazuje vztahy mezi jednotlivými třídami. Platí pro ni

$$\forall x, y \in A : xRy \Rightarrow x/\theta(R/\theta)y/\theta,$$

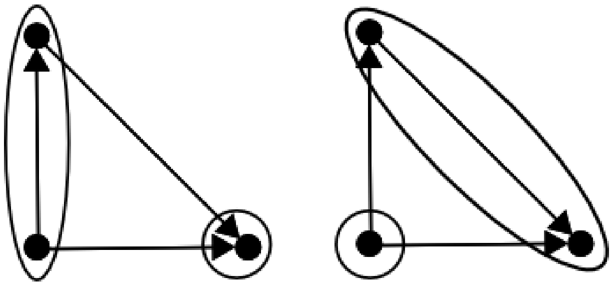
třídy kongruence mají tedy mezi sebou stejný vztah jako jejich prvky, což odpovídá první části definice.

Ekvivalence θ je tedy kongruencí na relační struktuře $\mathcal{S}$ tehdy a jen tehdy, je-li $\mathcal{S}/\theta$ relační struktura.

Definice 2.4
Mějme relační strukturu $\mathcal{S} = (A;R)$, kde $R \subseteq A^2$. Kongruence, kde je třídou kongruence celá množina A, anebo jsou třídami kongruence jen samotné prvky z A, se nazývají *triviální kongruence*.

Příklad

- Mějme relační strukturu $\mathcal{J} = (A; J)$, kde $|A| = 3$ a J je reflexivní, tranzitivní a úplná.



Obrázek 5: Faktorizace $\mathcal{J}$ netriviálními kongruencemi

Kapitola 3
Turnaje a jejich vlastnosti

V této kapitole jsou definovány *turnaje* a jsou zavedeny *cyklické* a *tranzitivní turnaje* a jsou popsány jejich vlastnosti.

3.1 Obecné vlastnosti turnajů

Definice 3.1
Je dána relační struktura $\mathcal{T} = (A; T)$. Je-li T reflexivní, antisymetrická a úplná (Definice 1.11), pak relační struktura $\mathcal{T} = (A; T)$ je *turnaj*.

Věta 3.1
Mějme turnaj $\mathcal{T} = (A; T)$, kde $|A| = n$. Rozdělíme-li relaci T na podmnožinu $T_1 \subseteq T$ takovou, že platí $T_1 = \{(x; x) \mid x \in A\}$ (existence této množiny plyne z reflexivity T), a podmnožinu $T_2 \subseteq T$ takovou, že $T_2 = T \backslash T_1$, která tedy obsahuje všechny ostatní uspořádané dvojice. Pak $|T_2| = \frac{n^2-n}{2}$. Také můžeme říct, že jakýkoliv turnaj lze korektně definovat pomocí T_2.

Důkaz. Existují nejméně tři vysvětlení: algebraické, geometrické a kombinatorické. Uvedeme je v tomto pořadí.

Pro každou n-prvkovou množinu existuje právě n^2 uspořádaných dvojic.

Víme, že relace T je reflexivní, nemusíme tedy uvádět uspořádané dvojice tvaru xTx ($\forall x \in A$) (tyto uspořádané dvojice náleží do T_1), tím se počet uspořádaných dvojic sníží na $n^2 - n$. Víme, že relace je antisymetrická, tedy, že platí $\forall x, y \in A, x \neq y : xTy \vee yTx$, tím pádem se počet uspořádaných dvojic sníží o polovinu na $\frac{n^2-n}{2}$.

Představíme-li si, turnaj definovaný relací T na n-prvkové množině jako n-úhelník pro $n \geq 3$ (bod pro $n = 1$, nebo úsečku pro $n = 2$). Víme, že podle úplnosti relace T musí dojít ke spojení všech bodů. Pak počet uspořádaných dvojic je roven součtu úhlopříček a stran, tedy $n + \frac{n(n-3)}{2} = \frac{n^2-n}{2}$.

Uspořádanou dvojici je možno si představit jako dvouprvkovou podmnožinu n-prvkové množiny A, kterých je právě $\binom{n}{2}$.[7]

■

Věta 3.2
Mějme turnaj $\mathcal{T} = (A; T)$, pak pro všechna $x \in A$ platí

$$P_T(x) \cap L_T(x) = \{x\}$$

$$P_T(x) \cup L_T(x) = A.$$

Důkaz. Z reflexivity relace T vyplývá, že platí $\forall x \in A : xTx$, důsledkem toho je, že platí $\forall x \in A : x \in P_T(x) \wedge L_T(x)$. Z antisymetričnosti plyne, že neexistuje takové $y \neq x$, že platí $xTy \wedge yTx$. Tvrzení $P_T(x) \cap L_T(x) = \{x\}$ je tedy pravdivé.

V předchozí části jsme dokázali, že $\forall x \in A : x \in P_T(x) \wedge L_T(x)$. Relace T je antisymetrická a úplná, musí tedy platit $\forall x, y \in A, y \neq x : xTy$ nebo

[7] Ověření rovnosti:
$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{2!(n-2)!} = \frac{n^2-n}{2}$$

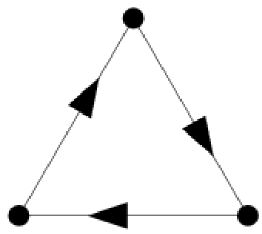
yTx, z toho plyne, že platí $\forall x, y \in A, y \neq x : y \in P_T(x)$, nebo $y \in L_T(x)$. Z toho plyne platnost $P_T(x) \cup L_T(x) = A$.

$\blacksquare$

3.2 Struktura turnajů

Definice 3.2
Cyklický turnaj je takový turnaj $\mathcal{C} = (A; T)$, kde platí

$$\forall x \in A\ \exists y \in A : L_T(x) \backslash \{x\} = P_T(y) \backslash \{y\}.$$



Obrázek 6: Cyklická trojice

Před tím, než vyslovíme další věty, zejdnodušme značení tak, že $L_T(x) \backslash \{x\}$ a $P_T(x) \backslash \{x\}$ označíme $\overline{L}_T(x)$ a $\overline{P}_T(x)$.

Věta 3.3
Máme-li cyklický turnaj $\mathcal{C} = (A; T)$, kde A je konečná, pak A má lichý počet prvků.

Důkaz. Víme, že máme-li cyklický turnaj $\mathcal{C} = (A; T)$ pak musí být splněno, že $\forall x \in A\ \exists y \in A : \overline{L}_T(x) = \overline{P}_T(y)$ (Definice 3.3). Dokážeme, že existuje jen jedno takové y. Uvažujme, že $\overline{L}_T(x) = \overline{P}_T(y) = \overline{P}_T(z)$. Ovšem podle antisymetričnosti a úplnosti relace T musí platit, že $yTz \vee zTy$, proto musí platit, že $y \in \overline{P}_T(z) \vee z \in \overline{P}_T(y)$, předpokládali jsme ale, že $y \notin \overline{P}_T(y)$ a také $z \in \overline{P}_T(z)$, docházíme tedy ke sporu.

Definujme tedy jednoznačné zobrazení $s : A \longrightarrow A$ takové, že $\forall x, y \in A :$ $s(x) = y \Leftrightarrow \overline{L}_T(x) = \overline{P}_T(y)$. Z výše dokázaného faktu můžeme vyvodit další vlastnost tohoto zobrazení $s(x) = s(y) \Rightarrow x = y$.

Pomocí zobrazení s můžeme tedy definovat množinu

$$\{s^0(x), s^1(x), \ldots, s^n(x)\},$$

kde $s^0 = x,\ s^1(x) = s(x),\ s^2(x) = s(s(x)) \ldots s^n(x)$, také platí, že

$$\forall i, j \in \{0, 1, \ldots, n\} : s^i(x) = s^j(x) \Leftrightarrow i = j.$$

Protože A je konečná množina, musí tedy takové $n \in \mathbb{N}$ existovat. Dokážeme, že výše definovaná množina je cyklus, proto musí platit, že $s(x)^{n+1} = s^0(x)$. Předpokládejme, že $s(x)^{n+1} = s^i(x)$, kde $i \in \{1, \ldots, n\}$. Potom ale z výše dokázaných skutečností plyne, že $s(x)^n = s^{i-1}(x)$, což je ale spor s tím, že

$$s(x)^n, s^{i-1}(x) \in \{s^0(x), s^1(x), \ldots, s^n(x)\}.$$

Proto $i \notin \{1, \ldots, n\}$, ale $i = 0$.

Dokážeme, že máme-li množinu $\{s^0(x), s^1(x), \ldots, s^n(x)\}$, pak n je sudé. Z definice zobrazení s plyne, že $x \notin \overline{L}_T(x) = \overline{P}_T(s(x))$, proto musí platit, že $x \in \overline{L}_T(s(x)) = \overline{P}_T(s^2(x))$ (Věta 3.2). Důsledkem toho je, že $x \notin \overline{L}_T(s^2(x)) = \overline{P}_T(s^3(x))$, a tedy $x \in \overline{L}_T(s^3(x)) = \overline{P}_T(s^4(x))$ atd. Toto můžeme zobecnit

- pro i liché platí, že

$$x \in \overline{L}_T(s^i(x)) = \overline{P}_T(s^{i+1}(x)),$$

- pro i sudé platí, že

$$x \notin \overline{L}_T(s^i(x)) = \overline{P}_T(s^{i+1}(x)).$$

Musí tedy platit, že předpokládané n musí být sudé, protože pokud by n bylo liché, pak by platilo, že $x \in \overline{L}_T(s^n(x)) = \overline{P}_T$, toto je spor s $x \notin \overline{P}_T(x)$.

Je nutné dokázat, že neexistuje žádné y takové, že $y \in A$, ale $y \notin \{s^0(x), s^1(x), \ldots, s^n(x)\}$, tedy takové které by bylo v množině A, ale bylo by mimo cyklus. Předpokládejme, že $y \in \overline{L}_T(x) = \overline{P}_T(s(x))$, můžeme použít zobecnění výše

- pro i sudé platí, že

$$y \in \overline{L}_T(s^i(x)) = \overline{P}_T(s^{i+1}(x)),$$

- pro i liché platí, že

$$y \notin \overline{L}_T(s^i(x)) = \overline{P}_T(s^{i+1}(x)).$$

Protože n je sudé, pak musí platit, že $y \in \overline{P}_T(x)$, toto je ale spor s předpokladem (Věta 3.2).

■

Věta 3.4
Pro každý cyklický turnaj $\mathcal{C} = (A; T)$, kde $|A| = n$, platí, že pravá i levá okolí všech prvků mají stejný počet prvků, kterých je právě $\frac{n-1}{2}$.

Důkaz. Uvažujme zobrazení $s : A \longrightarrow A$ takové, že $\forall x, y \in A : s(x) = y \Leftrightarrow \overline{L}_T(x) = \overline{P}_T(y)$, kde, pro každé $i \in \{0, 1, \ldots, m\}$ je $\overline{L}_T(s^i(x)) = \overline{P}_T(s^{i+1}(x))$ (Věta 3.3). Z toho však plyne, že $|\overline{P}_T(s^i(x))| = |\overline{L}_T(s^{i+1}(x))|$, protože platí, že $\forall x \in A : \overline{L}_T(x) = (A \backslash \{x\}) \backslash (\overline{P}_T(x))$ (Věta 3.2). Můžeme říct, že pro každé i platí, že

$$\ldots |\overline{L}_T(s^i(x))| = |\overline{P}_T(s^{i+1}(x))| = |\overline{L}_T(s^{i+2}(x))| \ldots$$

$$\ldots |\overline{P}_T(s^i(x))| = |\overline{L}_T(s^{i+1}(x))| = |\overline{P}_T(s^{i+2}(x))| \ldots$$

Uvažujme, že $i = 0$, potom pro n, které je sudé (Věta 3.3), musí platit, že $|\overline{L}_T(s^i(x))| = \cdots = |\overline{L}_T(s^n(x))|$, pro které ale platí, že $\overline{L}_T(s^n(x)) = \overline{P}_T(x)$

(Definice 3.3; Věta 3.3). Ovšem $\overline{P}_T(x)$ náleží do druhé řady okolí se stejným počtem prvků, musí tedy platit, že všechna okolí mají stejný počet prvků.

Protože je turnaj $\mathcal{C} = (A; T)$ cyklický, pak $|A| = n$ je liché (Věta 3.3). Pravá i levá okolí všech prkvů v A mají stejný počet prvků. Víme, že $\overline{L}_T(x) \cup \overline{P}_T(y) = A \backslash \{x\}$, kde $|A \backslash \{x\}| = n - 1$ (Věta 3.2). Platí tedy, že počet prvků pravých i levých okolí v A je roven $\frac{n-1}{2}$.

■

Věta 3.5
Pro každou množinu A, kde $|A| = n$ existuje právě

$$\left(\prod_{i=0}^{n-4} \left(\frac{n-2i-1}{2}\right)^2\right) \binom{n-1}{\frac{n-1}{2}}$$

cyklických turnajů $\mathcal{C} = (A; T)$.

Důkaz. Každý cyklický turnaj $\mathcal{C} = (A; T)$ musí splňovat $\forall x \in A\ \exists y \in A$: $\overline{L}_T(x) = \overline{P}_T(y)$ (Definice 3.2). Všechna okolí musí mít stejný počet prvků, kterých je právě $\frac{n-1}{2}$ (Věta 3.4). Z čehož plyne, že pravé okolí tvoří libovolná kombinace $\binom{n-1}{\frac{n-1}{2}}$ prvků. Platí, že ke každé kombinaci z $\binom{n-1}{\frac{n-1}{2}}$ existuje právě jedna další kombinace, které dohromady dávají $n - 1$, z čehož plyne, že polovina takovéto dvojice tvoří levé, nebo pravé okolí tedy existuje právě $\binom{n-1}{\frac{n-1}{2}}$ možností vytvoření pravého a levého okolí, tím pádem je jich je právě polovina. Nezávisí ale na pořadí tedy existuje dvojnásobek této poloviny, což je právě $\binom{n-1}{\frac{n-1}{2}}$ možností uspořádání okolí prvku v cyklickém turnaji.

Víme, že $\forall x \in A\ \exists y \in A : \overline{L}_T(x) = \overline{P}_T(y)$ (Definice 3.2). Uvažujme tedy, že máme prvek $x \in A$, protože $|\overline{L}_T(x)| = \frac{n-1}{2}$, pak musí existovat právě $\frac{n-1}{2}$ možností pro $s^1(x)$. Předpokládejme, že jsme $\overline{L}_T(x)$ přiřadi jako pravé okolí k $s^1(x)$, platí, že $|\overline{L}_T(s^1(x))| = \frac{n-1}{2}$ a že neexistuje žádné zaplněné pravé okolí kromě $s^1(x)$, musí tedy existovat právě $\frac{n-1}{2}$ možností pro $s^2(x)$. Předpokládejme, že jsme $\overline{L}_T(s^1(x))$ přiřadi jako pravé okolí k $s^2(x)$, platí, že $|\overline{L}_T(s^2(x))| = \frac{n-1}{2}$, ale už existuje jedno zaplněné pravé okolí $s^1(x)$, musí tedy existovat právě $\frac{n-1}{2} - 1$ možností pro $s^3(x)$. Můžeme tedy říct, že možností je

$$\left(\frac{n-1}{2}\right)^2 \left(\frac{n-3}{2}\right)^2 \left(\frac{n-5}{2}\right)^2 \dots\ 1^2,$$

což můžeme zobecnit na $\left(\prod_{i=0}^{n-4} \left(\frac{n-2i-1}{2}\right)^2\right)$.

Tato uspořádání jsou, pro stjené mohutnosti, izomorfní, protože je můžeme navzájem na sebe bijektivně zobrazit přes cyklus $\{s^0(x), s^1(x), \dots, s^n(x)\}$, libovolnou volbou $s^0(x)$ a pro odpovídající n.

■

Věta 3.6
Mějme cyklický turnaj $\mathcal{C} = (A;T)$, kde $|A| = n$, existuje-li podmnožina $M \subseteq \overline{L}_T(x)$, nebo $M \subseteq \overline{P}_T(x)$, kde $|M| = m$, pak existuje právě

$$\frac{n-2m+1}{2}$$

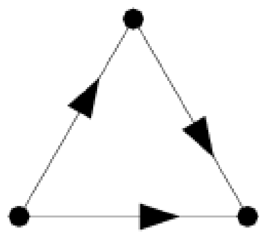
prvků, v jejichž stejném okolí se nachází podmnožina M.

Důkaz. Turnaj $\mathcal{C} = (A;T)$, kde $|A| = n$, má $2n$ okolí. Podmnožina M se nemůže nacházet v žádném okolí nějakého prvku z M, protože z okolí vylučujeme samotné prvky, tedy okolí je $2n - 2m$, podmnožina M se nemůže nacházet v obou okolích jednoho prvku zároveň, tedy $\frac{2n-2m}{2} = n - m$. Protože ve sjednocení okolí prvků z M se podmnožina M nachází právě $m - 1$ krát (Věta 3.2). Podle definice cyklického turnaje bude existovat právě $m - 1$ prvků, pro které bude pouze platit, že $M \subseteq \overline{L}_T(x) \cup \overline{P}_T(x)$, ne však jen v jednom z okolí. Platí tedy, že počet okolí, ve kterých je M podmnožinou, je $n - (m-1) - m = n - 2m + 1$. Jelikož počítáme jen pravá, nebo levá okolí, proto z definice cyklického turnaje plyne, že počet takovýchto okolí je právě $\frac{n-2m+1}{2}$ (Věta 3.4).

■

Definice 3.2
Tranzitivní turnaj je takový turnaj $\mathcal{T} = (A; T)$, kde platí

$$\forall x, y, z \in A : xTy \wedge yTz \Rightarrow xTz.$$



Obrázek 7: Tranzitivní trojice

Definice 3.4
Mějme turnaj $\mathcal{T} = (A; T)$.

1. Prvek x se nazývá *největší prvek* turnaje, jestliže

$$\exists x \in A, \forall y \in A : xTy.$$

2. Prvek z se nazývá *nejmenší prvek*[8]turnaje, jestliže

$$\exists z \in A \; \forall y \in A, y \neq z : yTz.$$

Věta 3.7
Konečný turnaj, do kterého nelze vnořit cyklický turnaj, obsahuje největší a nejmenší prvek a je tranzitivní. [9]

Důkaz. Pokud by existoval turnaj, kde by neexistoval největší a nejmenší prvek a nebylo by možné do něj vnořit cyklický turnaj, pak by muselo platit, že existují skupiny/a nesrovnatelných prvků, což by ale znamenalo, že

[8]Z úplnosti relace T vyplývá možnost existence pouze jednoho největšího nebo nejmenšího prvku.

prvky těchto skupin/y tvoří cyklické/ý turnaj/e, což ale vede ke sporu, jelikož předpokládáme, že nelze do turnaje vnořit cyklycký turnaj.

Pokud do nějakého turnaje nelze vnořit cyklický turnaj $\mathcal{C}$, pak musí platit, že všechny trojice jsou tranzitivní, a tedy je celý turnaj tranzitivní.

∎

Věta 3.8
Tranzitivní turnaje jsou lineárními svazy.

Důkaz. Nelze-li do turnaje vnořit cylický turnaj, pak obsahuje pouze tranzitivní trojice, tím pádem je relace T tranzitivní. Z definice relace T vyplývá, že je reflexivní a antisymetrická. Relace T je tedy relací uspořádání. Protože je relace T úplná, uspořádání je lineární. Z předchozí věty plyne, že takový turnaj má největší a nejmenší prvek, je tedy svazem.

∎

[9] Existují ovšem i turnaje s největším a nejmenším prvkem, do kterých lze vnořit cyklický turnaj, a proto tato věta neplatí opačně.

Kapitola 4
Kongruence na turnajích

Tato kapitola se věnuje zavedení kongruencí na turnajích, jejich vlastnostem a simple turnajům a jejich vlastnostem. V této kapitole jsou využity výsledky vět z předchozí kapitoly k důkazu vět týkajících se kongruencí, jejich konstrukce a simple turnajů.

4.1 Vlastnosti kongruencí

Definice 4.1
Mějme turnaj $\mathcal{T} = (A; T)$, pak $\theta \in EqA$ je kongruence, jestliže $\mathcal{T}/\theta = (A/\theta; T/\theta)$ je turnaj (Definice 2.3).

Věta 4.1
θ je kongruence jen tehdy, když pro všechna $x/\theta \neq y/\theta$, taková, že xTy, platí

$$\forall a \in x/\theta \; \forall b \in y/\theta : aTb.$$

Důkaz. Předpokládejme, že θ je kongruence, pak $\mathcal{T}/\theta$ je turnaj a zároveň xTy, musí tedy platit, že $x/\theta \ (T/\theta) \ y/\theta$, a nemůže platit $y/\theta \ (T/\theta) \ x/\theta$, protože $\mathcal{T}/\theta$ je turnaj a zároveň $x/\theta \neq y/\theta$ (Definice 2.3). Tedy pro žádné $a \in x/\theta, b \in y/\theta$ neplatí, že bTa, protože potom $b/\theta = y/\theta \ (T/\theta) \ a/\theta = x/\theta$, pak tedy nutně aTb.

Dokážeme, že T/θ je reflexivní. Jelikož xTx, pak musí platit, že $\forall x/\theta \in \mathcal{T}/\theta : x/\theta(T/\theta)x/\theta$, protože $\mathcal{T}/\theta$ je turnaj.

Dokážeme, že T/θ je antisymetrická. Pokud by platilo, že $x/\theta\ (T/\theta)\ y/\theta \wedge y/\theta\ (T/\theta)\ x/\theta$, pak by $\exists a_1 \in x/\theta\ \exists b_1 \in y/\theta : a_1Tb_1$, ale také $\exists a_2 \in x/\theta\ \exists b_2 \in y/\theta : b_2Ta_2$. Předpokládáme-li ale, že $x/\theta \neq y/\theta$ a že xTy, pak platí pouze $\exists a_1 \in x/\theta\ \exists b_1 \in y/\theta : a_1Tb_1$, což vede ke sporu.

Dokážeme, že T/θ je úplná. Mějme $x/\theta, y/\theta \in \mathcal{T}/\theta$, protože $\mathcal{T}$ je turnaj, pak musí platit, že xTy, nebo yTx, a protože $\mathcal{T}/\theta$ je turnaj pak, $x/\theta\ (T/\theta)\ y/\theta$, nebo $y/\theta\ (T/\theta)\ x/\theta$.

■

Věta 4.2
Množina všech kongruencí na $\mathcal{T}$, obvykle značená $Con\mathcal{T}$, při uspořádání množinovou inkluzí tvoří svaz $(Con\mathcal{T}; \subseteq)$ (Definice P2.5).

Důkaz. Z definice kongruence vyplývá, že je to taková ekvivalence na relační struktuře, že $\mathcal{T}/\theta = (A/\theta; T/\theta)$ je turnaj. Pokud je kongruence ekvivalence, pak platí, že prvky jsou ekvivalentní, náleží-li do stejné třídy (Definice 1.12). Kongruence je tedy množina uspořádaných dvojic. Můžeme tedy předpokládat, že kongruence jsou uspořádány množinovou inkluzí, která je relací uspořádání.

Z definice ekvivalence plyne, že mezi počtem tříd a počtem uspořádaných dvojic v ekvivalenci je nepřímá úměra. Tedy, můžeme říct, že největším a nejmenším prvkem svazu kongruencí jsou triviální kongruence (Definice 2.4).

■

Věta 4.3
Mějme turnaj $\mathcal{T} = (A; T)$ a množinu M takovou, že $M \subseteq A$, pak platí

$$\overline{L}_T(M) \cup \overline{P}_T(M) = A \backslash M \Leftrightarrow \exists \theta_i \in Con\mathcal{T}\ \forall x \in M : M = x/\theta_i,$$

kde $\overline{L}_T(M) = \bigcap_{x \in M}(\overline{L}_T(x))$ a $\overline{P}_T(M) = \bigcap_{x \in M}(\overline{P}_T(x))$.

Důkaz. Pokud existuje $M \subseteq A$ taková, že $\exists \theta_i \in Con\mathcal{T}\ \forall x \in M : M = x/\theta_i$, pak platí (Věta 4.1), že

$$\forall x \in M\ \forall a \in A \backslash M : xTa \vee aTx,$$

tedy platí, že

$$\forall x \in M\ \forall a \in A \backslash M : a \in P_T(x) \vee a \in L_T(x),$$

z toho plyne, že

$$\forall x \in M\ \forall a \in A \backslash M : a \in \bigcap_{x \in M} P_T(x) \vee a \in \bigcap_{x \in M} L_T(x).$$

Platí, že $x \in M \Rightarrow x \notin A \backslash M$, proto platí, že

$$\forall x \in M\ \forall a \in A \backslash M : a \in \bigcap_{x \in M} (\overline{P}_T(x)) \vee a \in \bigcap_{x \in M} (\overline{L}_T(x)),$$

proto platí, že

$$\bigcap_{x \in M} (\overline{P}_T(x)) \cup \bigcap_{x \in M} (\overline{L}_T(x)) = A \backslash M.$$

Musíme dokázat i druhou stranu ekvivalence. Protože platí

$$\bigcap_{x \in M} (\overline{P}_T(x)) \cup \bigcap_{x \in M} (\overline{L}_T(x)) = A \backslash M,$$

pak platí, že

$$\forall x \in M\ \forall a \in A \backslash M : a \in \bigcap_{x \in M} (\overline{P}_T(x)) \cup \bigcap_{x \in M} (\overline{L}_T(x)).$$

Z čehož plyne, že

$$\forall x \in M\ \forall a \in A \backslash M : a \in P_T(x) \vee a \in L_T(x),$$

tedy, že $\forall x \in M\ \forall a \in A \backslash M : xTa \vee aTx$. Můžeme tedy předpokládat, že

$$\exists \theta_i \in Con\mathcal{T}\ \forall x \in M : M = x/\theta_i,$$

ovšem je nutné dokázat, že θ_i je kongruence (podle Definice 4.1). Pokud je θ_i kongruence, pak $\mathcal{T}/\theta$ je turnaj, což je splněno jen tehdy, platí-li

$$\forall a \in x/\theta_i\ \forall b \in A \backslash x/\theta_i : aTb \vee bTa$$

(Věta 4.1). Protože $\forall x \in M\ \forall a \in A \backslash M : xTa \vee aTx$, pak platí, že $\exists \theta_i \in Con\mathcal{T}\ \forall x \in M : M = x/\theta_i$.

■

4.2 Simple turnaje

Definice 4.2
Turnaj $\mathcal{S} = (A; T)$ se nazývá *simple*, obsahuje-li $Con\mathcal{T}$ jen triviální kongruence (Definice 2.4).

Věta 4.4
Každý cyklický turnaj $\mathcal{C} = (A; T)$ je simple.

Důkaz. Platí, že máme-li cyklický turnaj $\mathcal{C} = (A; T)$, kde $|A| = n$, existuje-li m-prvková podmnožina $M \subseteq \overline{L}_T(x)$, nebo $M \subseteq \overline{P}_T(x)$, pak existuje právě

$$\frac{n - 2m + 1}{2}$$

prvků v jejichž pravých, nebo levých okolí je množina M (Věta 3.6). Mějme turnaj $\mathcal{T} = (A;T)$ a množinu M takovou, že $M \subseteq A$, pak platí

$$\overline{L}_T(M) \cup \overline{P}_T(M) = A \backslash M \Leftrightarrow \exists \theta_i \in Con\mathcal{T}\ \forall x \in M : M = x/\theta_i,$$

kde $\overline{L}_T(M) = \bigcap_{x \in M}(\overline{L}_T(x))$ a $\overline{P}_T(M) = \bigcap_{x \in M}(\overline{P}_T(x))$ (Věta 4.3).

Musí tedy, platit, že existuje-li kongruence na cyklickém turnaji, pak musí

$$\frac{n-2m+1}{2} + \frac{n-2m+1}{2} = n - m$$

Platí, že $\frac{n-2m+1}{2}$ prvků má podmnožinu M o mohutnosti m ve stejných okolích (Věta 3.6), podle věty o konstrukci kongruencí (Věta 4.3) by tedy muselo platit, že by tato mohutnost musela být rovna $n - m$, aby existovala kongruence, kde M je třída kongruence. Úpravou rovnice získáme

$$n - 2m + 1 = n - m,$$

což vede k výsledku

$$m = 1$$

Má-li ovšem třída takovéto kongruence mohutnost rovnu 1, pak se také jedná o triviální kongruenci.

Z tohoto plyne, že na libovolném cyklickém turnaji nelze zkonstruovat jinou než triviální kongruenci, přičemž tento fakt odpovídá definici simple turnaje (Definice 4.2). Každý cyklický turnaj $\mathcal{C} = (A;T)$ je tedy simple.

■

Věta 4.5
Mějme turnaj $\mathcal{T} = (A;T)$, kde $A = |n|$, pokud do něj nelze vnořit cyklický turnaj, pak platí, že nemůže být simple pro $n > 2$.

Důkaz. Podle výše dokázané věty platí, že každý turnaj $\mathcal{T} = (A;T)$, do kterého nelze vnořit cyklický turnaj, obsahuje největší prvek, nazvěme ho a, a nejmenší prvek, nazvěme ho z (Věta 3.7). Podle jejich definice (Definice 3.4) a věty o konstrukci kongruencí (Věta 4.3) platí, že existují kongruence $\theta_i, \theta_j \in Con\mathcal{T}$ takové, že $A\backslash(z/\theta_i)$ a $A\backslash(a/\theta_j)$, protože platí $\forall x \in A\backslash\{a\}$: $a \in \overline{L}_T(x)$ a také $\forall y \in A\backslash\{z\} : z \in \overline{P}_T(y)$. Tyto kongruence jsou netriviální pro množinu A s mohutností $n > 2$.[10]

■

Z této věty také plyne, že největší možná mohutnost pravého, nebo levého okolí každého prvku v simple turnaji je právě $n-2$, pokud by to tak nebylo, pak by nebyl simple, což vyplývá z vět výše (Věta 4.3, Věta 4.5). V kontextu tohoto můžeme tedy definovat podmínku pro simple turnaje.

Věta 4.6
Pro každý simple turnaj $\mathcal{S} = (A; T)$, kde $|A| = n$, a libovolnou netriviální (toto označení vychází z definice triviálních kongruencí - Definice 2.4) podmnožinu $M \subset A$, kde $|M| = m$, pak musí platit, že

$$m + m_P + m_L \leq n - 1,$$

označíme-li $|\overline{P}_T(M)| = m_P$ a analogicky $|\overline{L}_T(M)| = m_L$ (Věta 4.3).

Důkaz. Platilo-li by, že $m + m_P + m_L > n - 1$, pak by existovala jediná možnost, tedy $m + m_P + m_L = n$, což by ale znamenalo, že M podle věty o konstrukci kongruencí (Věta 4.3) by existovala netriviální kongruence, kde by byla podmnožina M třídou kongruence, a turnaj by tedy nebyl simple (Definice 4.2), což je spor.

■

[10]Tato věta platí, i pro turnaje s největším a nejmenším prvkem, i když do nich lze vnořit cyklický turnaj, protože se v důkazu nepředpokládá tranzitivita, kterou mají jen turnaje, do kterých nelze vnožit cyklický turnaj (Věta 3.8), ale pouze existence největšího a nejmenšího prvku.

Kapitola 5
Aplikace výsledků

Z definice relační struktury plyne, že k její konstrukci je nutná množina a neprázdná relace na ní, pro turnaje platí, že tato relace musí být reflexivní, antisymetrická a úplná. Pomocí matematického aparátu popsaného v předcházejících kapitolách je možné tyto systémy analyzovat. Výpočtová část prezentovaných výsledků asi není účiněji aplikovatelná, proto se nejslibněji jeví aplikace vlastností kongruencí na turnajích. Turnaje mohou sloužit k modelování struktur s nekvantifikovatelnými vlastnostmi, kvantifikovatelné vlastnosti se kvůli tranzitivnosti lépe vyjadřují uspořádanými množinami.

Jednou z nejslibnějších aplikací turnajů je modelování hierarchických vztahů v sociálních skupinách a z nich vycházejících sociálních kongruencí tzn. rozdělení sociální skupiny na různé skupiny podle různých kongruencí, nebo i jiných vlastností. Pomocí turnajů lze také vyjadřovat vztahy ve zvířecích sociálních skupinách, tímto se zabývá [*Lan*]. Kromě jiných existují i aplikace cyklických turnajů v teorii volby a teorii výběru. Jako příklad může sloužit [*Lit*].

5.1 Sítě a jejich vlastnosti

Abychom mohli modelovat složitější struktury musíme zavést pojem sítě, tedy relační struktury, u které se nepředpokládá úplnost relace a která je logickým zobecněním turnaje.

Definice 5.1
Je dána relační struktura $\mathcal{N} = (A; R)$. Je-li R reflexivní a antisymetrická (Definice 1.11) a splňuje podmínky

1. neexistence nesrovnatelného prvku
$$\forall x \in A\ \exists y \in A : xRy \vee yRx,$$
2. kompaktnosti
Pro libovolné disjunktní podmnožiny $X \subset A$ a $Y \subset A$ takové, že $X \cup Y = A$, platí
$$\exists x \in X\ \exists y \in Y : xRy \vee yRx$$

pak relační struktura $\mathcal{N} = (A; R)$ je *síť*.

Přímou souvislost sítí a turnajů můžeme ukázat následující větou.

Věta 5.1
Pro každou síť $\mathcal{N} = (A; R)$, kde $|A| > 1$, existuje množina $\mathbb{T}$ taková, že je množinou indexovaných turnajů $\mathbb{T} = \{\mathcal{T}_i = (A_i, T_i) \mid i \in I\}$ (Definice 3.1), kde I je libovolná indexová množina, takových, že $\bigcup_{\mathcal{T}_i \in \mathbb{T}} \mathcal{T}_i = \mathcal{N}$ a $\forall i, j \in I, i \neq j : |A_i \cap A_j| \leq 1$.

Důkaz. Uvažujeme-li rozdělení sítě $\mathcal{N} = (A; R)$ na dvouprvkové turnaje. Uvažujme tedy množiny $|A_i| = 2$ a $|A_j| = 2$, pokud by jejich průnikem byla dvouprvková množina, pak by nutně muselo platit, že $i = j$, protože v opačném případě bychom došli ke sporu. Dokázali jsme první podmínku.

Musíme ještě dokázat, že každou síť $\mathcal{N} = (A; R)$ je možné rozdělit na dvouprvkové turnaje. Platí $\forall x \in A\ \exists y \in A : xRy \vee yRx$ (Definice 5.1), každý prvek je tedy alespoň v jednom dvouprvkovém turnaji. Můžeme tedy říct, že každou síť lze rozdělit na dvouprvkové turnaje, proto existuje alespoň jedno každé sítě na turnaje, věta tedy platí. [11]

■

Abychom mohli zavést kongruence na sítích, musíme zavedním neutrálních okolí zohlednit možnou neúplnost relace.

Definice 5.2
Je dána síť $\mathcal{N} = (A; R)$. Množina $N_R(x)$ se nazývá *neutrálním okolím prvku* x. $N_R(x)$ je množina obsahující prvky, s nimiž není x v relaci, formálně

$$N_R(x) = \{y \in A \mid (x; y) \notin R \wedge (y; x) \notin R\}.$$

Můžeme tedy podobně jako u turnajů (Věta 4.3) ukázat konstrukci kongruencí na sítích.

Věta 5.2
Mějme síť $\mathcal{N} = (A; R)$ a množinu M takovou, že $M \subseteq A$, pak platí

$$\overline{L}_R(M) \cup \overline{P}_R(M) \cup N_R(M) = A \backslash M \Leftrightarrow \exists \theta_i \in Con\mathcal{N}\ \forall x \in M : M = x/\theta_i,$$

kde $\overline{L}_R(M) = \bigcap_{x \in M}(\overline{L}_R(x))$ a $\overline{P}_R(M) = \bigcap_{x \in M}(\overline{P}_R(x))$, důvodem přítomnosti $N_R(M) = \bigcap_{x \in M}(N_R(x))$ je výše zmíněná možná neúplnost relace R.

Důkaz. Je analogický důkazu věty o konstrukci kongruencí na turnajích (Věta 4.3), pouze se v tomto důkazu musí uvažovat jedna možnost navíc tedy možná neexistence relace mezi dvěma prvky.

■

[11] Z podmínky kompaktnosti sítě (Definice 5.1) plyne existence alespoň jedné dvojice $i, j \in I, i \neq j$ takové, že $|A_i \cap A_j| = 1$.

Neexistuje jediná oblast matematiky, a to jakkoli abstraktní, která by se jednou nedala aplikovat na jevy reálného světa.

Nikolaj Ivanovič Lobačevskij[12]

[12]**Nikolaj Ivanovič Lobačevskij** (1792 – 1856), významný ruský matematik, který dokázal nedokazetelnost pátého Euklidova postulátu z předchozích čtyř a objevil hyperbolickou neeuklidovskou geometrii.

Závěr a diskuse

Jak bylo již nazančeno v úvodu práce, literatura zkoumající turnaje z hlediska algebry téměř neexistuje, není tedy prakticky s čím výsledky práce porovnávat. Pokusím se tedy alespoň dosažené výsledky objektivně zhodnotit, jelikož se jedná o dokázané věty, není tedy nutné mluvit o jejich pravdivosti jako spíše o jejich významu.

Kapitoly 1 a 2 poskytují obecný úvod do problematiky. Kapitola 1 je úvodem do algebry, vysvětluje pojmy jako množina, relace a relace ekvivalence. Kapitola 2 potom stručně představuje relační systémy a koncept kongruencí na nich.

Kapitola 3 se turnajům věnuje obecně. Věta 3.2 ukazuje obecné vlatsnosti relace T, později je využita v důkazech několika dalších vět. Je možno říct, že nejvýznamnějším výsledkem Kapitoly 3, není ani tak věta, ale zavedení cyklických turanjů, a ze kterého jsou postupně vyvozeny věty 3.3 - 3.6 popisující vlastnosti cyklických turnajů. Věty 3.3 a 3.4 jsou použity k důkazu vět 3.5 a 3.6. Nejdůležitějším z nich je asi věta 3.6 aplikovaná v důkazu věty 4.4 v Kapitole 4. Tranzitivní turnaje byly v Kapitole 3 definovány a byla dokázána jejich souvislost s cyklickými turnaji. Věta 3.8 ukazuje rovnost tranzitivních turnajů a lineárních svazů.

Kapitola 4 se zabývá kongruencemi na turnajích a simple turnaji. Věta 4.1 definuje kongruence na turnajích a ukazuje, že vlastnosti kongruencí na turnajích odpovídají vlastnostem kongruencí na relačních strukturách z definice 2.3. Věta 4.2 definuje svaz kongruencí na turnaji. Věta 4.3 je asi nejdůležitějším výsledkem celé práce, ukazuje souvislost okolí s kongruencemi a konstrukci kongruencí na turnaji, je nezbytná pro důkaz všech dalších vět. Věta 4.4 je významným výsledkem celé práce, důkazem, že všechny cyklické turnaje jsou simple, završuje významnou část práce, která se věnuje cyklickým turnajům. Věta 4.5 ukazuje předvídatelnou skutečnost, že tranzitivní turnaje nejsou simple za určitých podmínek. Výsledek věty 4.6 vyplývá z definice simple turnajů a ukazuje základní podmnínku simple turnajů pomocí věty 4.3.

Kapitola 5 se stručně zabývá aplikacemi turnajů a výsledků této práce. Důležité v této kaplitole je tvrzení, že turnaje mohou nejlépe sloužit k modelování struktur s nekvantifikovatelnými vlastnostmi. Dále se v této kapitole nachází úvod od problematiky sítí, je uveden jejich vztah s turnaji, dále se tomuto tématu věnuje prostor v příloze práce.

Práce přináší nové výsledky a konstrukce v tématu. Nejdůležitějšími mezi nimi jsou definice 3.3 a věty 3.6, 3.8, 4.3 a 4.4 popřípadě ještě 5.1, 5.2 o vlastnostech sítí a kongruencích na nich, většina ostatních vět je uvedena jako podklad pro důkazy těchto vět nebo jejich důsledky.

O množině cílových výsledků práce $\mathcal{C}$ a množině všech výsledků práce $\mathcal{V}$ můžeme říct, že $\mathcal{C} \subset \mathcal{V}$.

Seznam použitého značení

$\wedge$	a zároveň (konjunkce)
$\vee$	a nebo (disjunkce)
$\Rightarrow$	a proto (implikace)
$\Leftrightarrow$	tehdy a jen tehdy (ekvivalece)
$\forall$	pro všechna (obecný kvantifikátor)
$\exists$	pro alespoň jedno (existenční kvantifikátor)
A	množina A
$a \in A$	prvek a náleží do množiny A
$b \notin A$	prvek b nenáleží do množiny A
$\emptyset$	prázdná množina
$\|A\|$	mohutnost množiny A
$A \cap B$	průnik množin A a B
$A \cup B$	sjednocení množin A a B
$A \backslash B$	rozdíl množin A a B (v tomto pořadí)
$A \times B$	kartézský součin množin A a B (v tomto pořadí)
$A \subset B$	množina A je vlastní podmnožinou B
$A \subseteq B$	množina A je podmnožinou B
$R \subseteq A^2$	binární relace R na množině A
R^{-1}	inverzní relace k binární relaci R
$f(a)$	obraz prvku a v zobrazení f
$\mathcal{E}$	relace ekvivalence
$x/\mathcal{E}$	třída ekvivalece $\mathcal{E}$ s reprezentantem x
$P_R(x)$	pravé okolí prvku x v relaci R
$L_R(x)$	levé okolí prvku x v relaci R
$\mathcal{S}/\theta$	relační struktura $\mathcal{S}$ faktorizovaná kongruencí θ
x/θ	třída kongruence θ s reprezentantem x
$ConA$	množina všech kongruencí na A
$\overline{P}_T(x)$	totéž jako $P_T(x)\backslash\{x\}$
$\overline{L}_T(x)$	totéž jako $L_T(x)\backslash\{x\}$
$\overline{P}_T(M)$	totéž jako $\bigcap_{x \in M} \overline{P}_T(x)$
$\overline{L}_T(M)$	totéž jako $\bigcap_{x \in M} \overline{L}_T(x)$
$N_R(x)$	neutrální okolí prvku x v relaci R
$N_R(M)$	totéž jako $\bigcap_{x \in M} N_R(x)$

Zdroje

Použitá literatura

[*Cal*] CALDA, E.; DUPAČ, V.: *Matematika pro gymnázia – Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika.* 5. vydání. Praha: Prometheus, 2008. ISBN 978-80-7196-365-3

[*Hor*] HORT, Daniel; RACHŮNEK, Jiří. *Algebra I.* 1. vydání. Olomouc : Nakladatelství UP, 2003. Kapitola 2 Množiny, relace, zobrazení, s. 21 - 32. ISBN 80-244-0631-4.

[*Rach*] RACHŮNEK, Jiří. *Svazy.* 1. vydání. Olomouc : Nakladatelství UP, 2003. Kapitola 1 Základy teorie uspořádaných množin a svazů, s. 7 - 26. ISBN 80-244-0650-0.

[*Tru*] TRUDEAU, Richard J. *Introduction to Graph Therory.* 2. vydání. New York: Dover Publications, 1993. ISBN 0-486-67870-9

[*Wol*1] Wolfram MathWorld : *Set* [online]. [citováno: 1. ledna 2011].
Dostupné z WWW: `http://mathworld.wolfram.com/Set.html`

Doporučená literatura

[*Lan*] Landau, H.G. (1953), "On dominance relations and the structure of animal societies. III. The condition for a score structure", Bulletin of Mathematical Biophysics 15 (2): 143–148, doi:10.1007/BF02476378.

[*Lit*] Litvakov, Boris M.; Vol'skiy, Vladimir I., 1985. "Tournament Methods in Choice Theory,"Working Papers 558, California Institute of Technology, Division of the Humanities and Social Sciences.
Dostupné z WWW: `http://ideas.repec.org/p/clt/sswopa/558.html`

[$Wik1$] Wikipedia, the Free Encyclopedia: *Pólya enumeration theorem* [online]. [citováno: 1. ledna 2011].
Dostupné z WWW: `http://en.wikipedia.org/w/index.php?oldid=403769882`

[$Wik2$] Wikipedia, the Free Encyclopedia: *Tournament (mathematics)* [online]. [citováno: 1. ledna 2011].
Dostupné z WWW: `http://en.wikipedia.org/w/index.php?oldid=394551339`

[$Wol2$] Wolfram MathWorld : *Tournament* [online]. [citováno: 1. ledna 2011].
Dostupné z WWW: `http://mathworld.wolfram.com/Tournament.html`

Použité obrázky

Obrázek 1: *Průnik množin*
Wikimedia Commons: [převzato: 1. ledna 2011].
Dostupné z WWW: `http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Venn-and.svg`

Obrázek 2: *Sjednocení množin*
Wikimedia Commons: [převzato: 1. ledna 2011].
Dostupné z WWW: `http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Venn-or.svg`

Obrázek 3: *Rozdíl množin*
Wikimedia Commons: [převzato: 1. ledna 2011].
Dostupné z WWW: `http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Venn-not.svg`

Obrázek 4: *Příklady relací a zobrazení*
Wikimedia Commons: [převzato: 1. ledna 2011].
Dostupné z WWW: `http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Zobrazeni_druhy.svg`

Obrázek 5: *Faktorizace $\mathcal{J}$ bez triviálních kongruencí*
Vlastní tvorba. Vytovořeno dne 31. ledna 2011.

Obrázek 6: *Cyklická trojice*

Wolfram MathWorld : Cyclic Triple [online]. [převzato: 1. ledna 2011].
Dostupné z WWW: `http://mathworld.wolfram.com/CyclicTriple.html`

Obrázek 7: *Tranzitivní trojice*
Wolfram MathWorld : Transitive Triple [online]. [převzato: 1. ledna 2011].
Dostupné z WWW: `http://mathworld.wolfram.com/TransitiveTriple.html`

Obrázek 8: *Síť* $\mathcal{D}_4$ *tzv. diamant schématicky*
Vlastní tvorba. Vytovořeno dne 7. února 2011.

Použitý software

TeXShop
Version 2.40; LaTeX Editor for Mac OS X.
Dostupné z WWW: `http://pages.uoregon.edu/koch/texshop/`

Kile
Version 2.0.85; KDE Integrated LaTeX Environment.
Dostupné z WWW: `http://kile.sourceforge.net/`

Inkscape
Verze 0.48.0 r9654; Editor vektorové grafiky.
Dostupné z WWW: `http://www.inkscape.org/`

GIMP
Version 2.6.10; GNU Image Manipulation Program.
Dostupné z WWW: `http://www.gimp.org/`

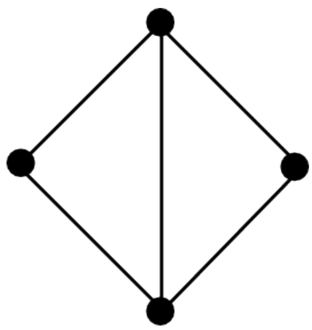
Ostatní

Citáty jsou převzaty z WWW: `http://mathes.cz/citaty.aspx` a biografické informace z WWW: `http://cs.wikipedia.org/wiki/`.

Příloha #1

Algoritmus pro rozdělování jednoduchých sítí na největší turnaje

Definice P.1
Mějme síť $\mathcal{N} = (A; R)$, lze-li do ní vnořit síť $\mathcal{D}_4 = (B; D)$, kde $|B| = 4 \wedge |D| = 9$ tzv. diamant a přitom neexistuje žádný turnaj $\mathcal{T}_i = (A_i, T_i)$ takový, že je možné $\mathcal{D}_4 = (B; J)$ do něj vnořit, pak tato síť není *jednoduchá*.



Obrázek 8: Síť $\mathcal{D}_4$ tzv. diamant schématicky

Po definici *jednoduché* sítě můžeme přejít k samotnému vytvoření a zdůvodnění algoritmu.

Algoritmus

Uvažujme síť $\mathcal{N} = (A; R)$, rozdělme relaci R na dvě disjunktní podmnožiny $R_1 \cup R_2$, kde $R_1 = \{(x; x) \in R \mid x \in A\}$, tedy reflexivní část relace R a část $R_2 = R \backslash R_1$ (podobně Věta 3.1). Tento algoritmus má dva kroky.

1. Předpokládejme, že z množiny R_2 vznikne n použitími tohoto kroku množina R_2^n. Množinu R_2^n vytvoříme jako $R_2^n = R_2^{n-1} \backslash P$, kde $P = \{(x; y) \in R_2^{n-1} \mid \nexists z \in A : [(x; z) \in R_2^{n-1} \vee (z; x) \in R_2^{n-1}] \vee [(y; z) \in R_2^{n-1} \vee (z; y) \in R_2^{n-1}]\}$, tedy že z množiny R_2^{n-1} odstraníme uspořádané dvojice takové, že obsahují prvek, který už se nevyskytuje v žádné jiné uspořádané dvojici. Tento krok pokračuje až do okamžiku, kdy $R_2^{n-1} = R_2^n$. Všechny takto odstraněné dvojice pak tvoří dvouprvkové turnaje. [13]

[13] Tento krok vychází z předpokladu, že pro jednouché turnaje existují jen tři druhy

2. Předpokládejme, že z množiny $R_2^{n-1} = R_2^n$, která vznikne n použitími prvního kroku na množinu R_2, množina $\mathcal{R}_2^n$. Množinu $\mathcal{R}_2^n$ vytvoříme jako $\mathcal{R}_2^n = R_2^n \backslash Q$, kde $Q = \{(x;y) \in R_2^n \mid \nexists z \in A : [(x;z) \in R_2^n \vee (z;x) \in R_2^n] \wedge [(y;z) \in R_2^n \vee (z;y) \in R_2^n]\}$, tedy že z množiny R_2^{n-1} odstraníme uspořádané dvojice takové, které netvoří trojprvkové turnaje (ty lze vnořit do víceprvkových turnajů). Tento krok je vykonán jednou, poté je znovu vykonán n-krát první krok. Všechny takto odstraněné dvojice pak tvoří dvouprvkové turnaje. [14]

Algoritumus končí v případě, že $\mathcal{R}_2^n = \mathcal{R}_2^{n+1}$, pak už jsou v $\mathcal{R}_2^{n+1}$ jen uspořádané dvojice prvků, které tvoří turnaje $\mathcal{T}_i = (A_i, T_i)$, kde $|A_i| > 2$. [15]

jejich základních struktur - turnaje $\mathcal{T}_i = (A_i, T_i)$, kde $|A_i| > 2$, větve, složené ze za sebou poskládaných dvouprvkových turnajů, a spoje mezi nimi, také z dvouprvkových turnajů. Tento krok algoritmu odstraňuje větve.

[14] Pomocí tohoto kroku se odstraňují spoje mezi jednotlivými turnaji $\mathcal{T}_i = (A_i, T_i)$, kde $|A_i| > 2$, a větvemi. Mohl by aplikovat pouze tento krok, ovšem jeho použití v kombinaci s prvním krokem je výhodnější.

[15] Rozdělení diamantu tzv. $\mathcal{D}_4 = (B; D)$, kde $|B| = 4 \wedge |D| = 9$, je tímto algoritmem nemožné, protože je nerozhodnutelné (diamant je možné rozdělit na dva různé trojprvkové turnaje se dvěma společnými prvky, ovšem předpokládané rozdělení je na turnaje s maximálně jedním společným prvkem).

Příloha #2

Axiomatizace svazů

Definice P2.1
Mějme množinu A a binární relaci R takovou, že $R \subseteq A^2$, relace R se nazývá *relací uspořádání*, jestliže je

1. reflexivní
$$\forall x \in A : xRx,$$
2. antisymetrická
$$\forall x, y \in A : xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y,$$
3. tranzitivní
$$\forall x, y, z \in A : (xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$$

Pro rozlišení budeme relaci uspořádání značit $\leq$. Množina s relací uspořádání se nazývá *uspořádaná množina* a budeme ji značit $\mathcal{A} = (A; \leq)$.

Definice P2.2
Mějme uspořádanou množinu $\mathcal{A} = (A; \leq)$, pak se $a \in A$ nazývá

- *největší prvek*, jestliže
$$\forall x \in A : x \leq a$$
- *nejmenší prvek*, jestliže
$$\forall x \in A : a \leq x$$
- *maximální prvek*, jestliže
$$\forall x \in A : a \leq x \Rightarrow a = x$$
- textitminimální prvek, jestliže
$$\forall x \in A : x \leq A \Rightarrow a = x$$

Definice P2.3

Mějme uspořádanou množinu $\mathcal{A} = (A; \leq)$ a $B \subseteq A$, pak

- se $c \in A$ nazývá *horní hranice* množiny B v $\mathcal{A}$, jestliže

$$\forall b \in B : b \leq c$$

- se $d \in A$ nazývá *dolní hranice* množiny B v $\mathcal{A}$, jestliže

$$\forall b \in B : d \leq b$$

Definice P2.4

- *Supremem množiny* B rozumíme nejmenší prvek c v množině všech horních hranic B v $\mathcal{A}$. Značíme $\sup_B = c$.
- *Infimem množiny* B rozumíme největší prvek d v množině všech dolních hranic B v $\mathcal{A}$. Značíme $\sup_B = d$.

Definice P2.5

Mějme uspořádanou množinu $\mathcal{A} = (A; \leq)$, pak

- se nazývá *horní polosvaz*, jestliže má každá její dvouprvková množina supremum.
- se nazývá *dolní polosvaz*, jestliže má každá její dvouprvková množina infimum.
- se nazývá *svaz*, jestliže je zároveň horním i dolním polosvazem.

Máme-li svaz $\mathcal{A} = (A; \leq)$, pak tento svaz (Definice P2.5) je také algebrou se dvěma binárními operacemi $\wedge, \vee : A \times A \longrightarrow A$ takovými že $a \wedge b = \inf\{a, b\}$ a $a \vee b = \sup\{a, b\}$, tato skutečnost se značí $\mathcal{A} = (A; \wedge, \vee)$. [*Rach*]

Posudek na práci „O vlastnostech turnajů“ Jakuba Kopřivy,

SOČ 2011

1.Předmět práce, motivace

Předmětem předkládané práce jsou algebraické struktury nazývané „relační systémy“, které mají teoreticky modelovat množinu objektů spolu s jedním studovaným vztahem. Předpokladem je, že o každé dvojici prvku lze jednoznačně rozhodnout, zdali jsou v daném vztahu. Jako příklad můžeme vzít množinu „všech lidí“ a za vztahy:

- „být vlastním sourozencem“ definujeme tak, že A je vlastním sourozencem B, jestliže A a B mají stejné **oba** rodiče,
- „být sestrou“ definujeme tak, že A je sestrou B, jestliže A a B mají společného alespoň jednoho rodiče a A je dívka (žena),
- „být předkem“ definujeme tak, že A je předkem B, jestliže existuje posloupnost lidí, kteří jsou ve vztahu rodič – dítě od A k B.

V teorii relačních (vztahových) systémů se obvykle diskutují obecné vlastnosti jako například:

- „symetrie“; z A je ve vztahu s B plyne B je ve vztahu s A. Příkladem symetrických vztahů jsou „být vlastním sourozencem“, naopak „být sestrou“ není symetrická relace.
- „tranzitivita“; z A je ve vztahu s B a B je ve vztahu s C plyne, že A je ve vztahu s C. Příkladem tranzitivních vztahů jsou vztahy „být předkem“ a „být vlastním sourozencem“.

Obecně studovaných vlastností je mnohem více. Autor se ve své práci zabýval především „turnaji“, což jsou takové vztahové systémy, kdy předpokládáme množinu hráčů **M** a současně libovolní hráči *x,y* z množiny **M** se spolu utkali (v nějakém zápase), přičemž platí právě jedno z tvrzení „*x* zvítězil nad *y*“ nebo „*y* zvítězil nad *x*“. Formálně definujeme relaci turnaj jako relaci reflexivní (předpokládáme, že „*x* zvítězil nad *x*“), antisymetrickou (jestliže „x zvítězil nad *y*“ a „*y* zvítězil nad *x*“, potom „*x=y*“, tedy hráči *x* a *y* jsou ve skutečnosti jediným hráčem) a úplnou („*x* zvítězil nad *y*“ nebo “*y* zvítězil nad *x*“). Vlastnost reflexivity se mírně odlišuje od naší intuitivní představy (žádný hráč nesoupeří sám se sebou). Výhodou ovšem je to, že model je jednoduchý a především, připočteme-li každému hráči jedno vítězství nad sebou samým, na celkovém pořadí turnaje se nic nemění.

Dalším důležitým a v práci zkoumaným pojmem jsou kongruence na turnajích. Kongruence jsou vysoce abstraktním modelem podstatných vlastností. Každá kongruence je potom významnou strukturální vlastností, která ovšem nemusí mít nutně název v lidském jazyce. Jako příklad, množinu lidí můžeme roztřídit na „muže“ a „ženy“, přičemž toto rozdělení lidí je kongruencí vzhledem k relaci „být sestrou“. Tímto roztříděním dojdeme k výroku „ženy jsou sestrami mužů“, což je jistě přirozenou abstrakcí.

2. Výsledky práce

V první části práce autor shrnuje pojmový aparát potřebný k zavedení problematiky. V druhé kapitole zavádí pojem turnaje, kongruence na turnaji a v základních souvislostech studuje tyto pojmy. Těžiště práce je podle mě obsaženo v třetí kapitole, kde autor definuje pojem cyklického turnaje. V jistém, přeneseném smyslu se jedna o situaci, kdy libovolní dva hráči dosáhli v rámci turnaje stejných úspěchů (stejného počtu vítězství a proher). Autor ukazuje, že takováto situace může nastat pouze v případě lichého počtu hráčů, přičemž diskutuje počet cyklických turnajů pro jednotlivé konečné množiny. Dále je zde zaveden pojem tranzitivní turnaj, který, jak se ukáže, je ekvivalentní s lineárně uspořádanou množinou. Tranzitivní turnaj je opačným extrémem k cyklickému turnaji. V tranzitivním turnaji lze jednoznačně stanovit pořadí hráčů (od prvního k poslednímu).

Čtvrtá kapitola, která je technicky nejnáročnější, studuje kongruence na turnajích. Přičemž za nejzajímavější výsledek považuji charakterizaci tříd kongruence ve větě 4.3. V závěru kapitoly autor diskutuje *simple* turnaje (což jsou turnaje, které nemají vlastní kongruence). Nakonec autor aplikuje výsledky v nových situacích (např. sítě apod.).

3. hodnocení práce

Práce vznikala v průběhu školního roku 2010/2011 jako součást absolvované studentské stáže Jakuba Kopřivy na Katedře algebry a geometrie, Přírodovědecké fakulty UP Olomouc. Téma zvolené autorem je vysoce abstraktní a klade na autora nadstandardní požadavky (rozhodně vzhledem k tomu, že se jedná o středoškolskou práci). Autor prokázal schopnost samostatného myšlení při zavádění nových, smysluplných pojmů (např. definice cyklického turnaje) a také při sledování souvislostí mezi definovanými pojmy.

Dosažené výsledky jsou netriviální (v odborném smyslu slova – tedy jsou nesamozřejmými důsledky, k jejichž prokázání musel být použit pokročilý matematický aparát) a přinášejí nové pohledy na některé problémy.

Kladné stránky práce: Tématem lze práci řadit již jako vysokoškolskou. Takto předložená práce sice obsahuje formální chyby, přesto by po obsahové stránce obstála jako základ k bakalářské práci v matematických oborech. Několik dosažených výsledků dokládá, že autor je schopen rozvoje v mimořádně abstraktní problematice univerzální algebry a v základech této disciplíny se již částečně orientuje (což je podle mne u studentů gymnázia stále velmi výjimečné). Práce není v žádném směru kompilátem a autor musel vynaložit značné úsilí s rizikem toho, že výsledky jsou nejisté (u kompilované práce nebo například v experimentálních disciplínách tato rizika nejsou).

Záporné stránky práce: Autorova schopnost formalizovat logickou úvahu je stále ještě nedokonalá, což v některých částech vede ke špatné srozumitelnosti práce. Přestože jsou výsledky většinou věcně správné, zvolená forma prezentace výsledků čtenáři nezjednodušuje práci (jedinou věcnou pochybnost mám u důkazu Věty 3.5, což ovšem nehraje větší roli v hodnocení kvality). V dalších pracích bych autorovi doporučil věnovat stejnou pozornost výsledkům i formalizaci. Odbornost práce v matematice nespočívá ve složité prezentaci jednoduchých věcí, ale naopak v co největším možném zjednodušení komplikovaných pojmů.

Závěrem konstatuji, že práce považuji v kategorii středoškolských prací jako **velmi náročnou a zdařilou** a doporučuji, aby byla takto hodnocena v rámci SOČ. Konstatuji, že klady práce značně převyšují její nedostatky a práce samotná svědčí o velice nadprůměrném vnímání autora v oblasti abstraktních teorií.

Michal Botur

Dne 29.3.2011 v Olomouci

Mgr. Michal Botur, Ph.D.

Katedra algebry a geometrie
Přírodovědecká fakulta
UP Olomouc