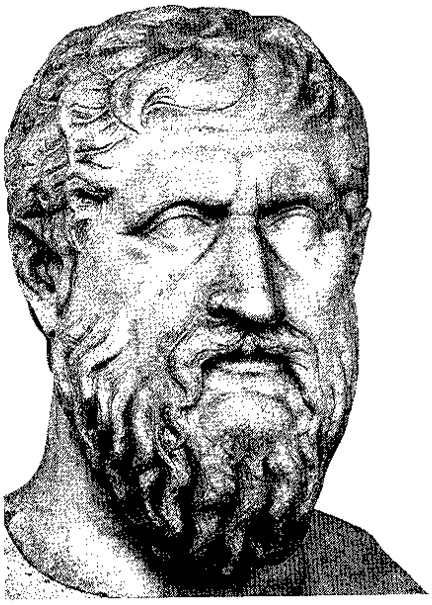
Středoškolská odborná činnost 2008/2009

Obor 01 – matematika



Platónova tělesa

Autor:
Barbora Koutná
Obchodní akademie
tř. Spojenců 11
771 11   OLOMOUC
3. ročník

Zadavatel a konzultant práce:
RNDr. Vladimír Slezák, Ph. D.
Gymnázium Uničov

Konzultant práce:
Mgr. Jakub Lokoč
MFF Univerzity Karlovy

Olomouc, 2008

Tímto prohlašuji, že jsem tuto práci vypracovala samostatně pod vedením RNDr. Vladimíra Slezáka, Ph.D. a uvedla jsem v seznamu literatury veškerou použitou literaturu a všechny další informační zdroje včetně internetu.

V Olomouci dne

podpis autora

Anotace

V rámci své práce, která je věnována středoškolské odborné činnosti, jsem se zaměřila na vysvětlení výskytu pravidelných mnohostěnů, které nás v každodenním životě obklopují a přitom si jejich význam a existenci běžně neuvědomujeme. Stěžejním tématem jsou Platónská tělesa neboli pravidelné konvexní mnohostěny. Je pravdou, že v běžné školní matematice je tento problém zmiňován pouze okrajově. Právě tento fakt mne vedl k tomu zabývat se pravidelnými mnohostěny detailněji a zhodnotit význam historických souvislostí s výzkumem a popsáním mnohostěnů pro dnešní i budoucí generaci, ale i pro další rozvoj jak hlavně v oblasti matematické, tak i v oblasti všech přírodovědných odvětví. V neposlední řadě byl můj záměr učinit toto téma atraktivnější v současné výuce matematiky na středních školách a zvýšení zájmu o obory přírodních věd, které v současné době rychle ustupují humanitním studijním oborům. Stěžejním prvkem je zvýšení motivace a aktivace studentů při studiu tohoto oboru a zjištění, že se jedná o velmi zajímavé a obsáhlé téma, které stojí za to, se jím zabývat v širších souvislostech.

Stanovisko konzultanta práce SOČ Barbory Koutné (3. D) - Platónova tělesa

Práce Barbory Koutné se zabývá pravidelnými mnohostěny, které jsou prostorovými analogiemi pravidelných mnohoúhelníků v rovině. Problematika pravidelných mnohostěnů se řadí mezi klasická matematická témata, má velmi bohatou a zajímavou historii a, co je důležité, přesahuje výrazným způsobem hranice geometrie i celé matematiky. Jde o tématiku velice náročnou (jak říkají matematikové - netriviální), jejíž uchopení vyžaduje poměrně široký všeobecný rozhled a zejména hluboké proniknutí do složité teorie geometrických těles.

Práce je rozdělena do 4 hlavních kapitol - první je nejobsáhlejší a zahrnuje jednak všechny důležité a zajímavé historické konsekvence vývoje teorie platónských těles, a jednak základní teoretické poznatky o těchto tělesech. Následující kapitola pojednává o tom, kde se můžeme s pravidelnými mnohostěny, kterých je právě pět, setkat, a o všech významných aplikacích celé teorie. Další kapitola se věnuje velice náročné problematice duality pravidelných mnohostěnů. Závěrečná část práce pak přibližuje situaci ve čtyřrozměrném prostoru, kde se vyskytují též pravidelné mnohostěny a kde je ukázán příklad tzv. čtyřrozměrné krychle pomocí svazu podmnožin jisté konečné množiny.

Chtěl bych vedle obtížnosti tématu vyzdvihnout i formální a grafickou úroveň práce, která je prvotřídní. Studentka pracovala naprosto samostatně, možností konzultací využívala minimálně, a přesto vznikla práce, která snese nejpřísnější měřítka matematicky exaktního, přitom však čtivého a srozumitelného textu.

Barboře Koutné patří mé hluboké a upřímné uznání, její práce je vynikající.

V Olomouci 24. 3. 2009

RNDr. Vladimír Slezák, Ph.D.
konzultant práce

OBSAH

1 ÚVOD

Tato práce se zabývá problematikou pravidelných mnohostěnů, jejich historií, výskytem v přírodě a umění a jejich dalšími zajímavostmi.

Cílem práce bylo blíže seznámit veřejnost s pravidelnými tělesy. Proto jsem si zvolila právě toto téma, i když se na první pohled může jevit jako „chudé“ a nezajímavé. V konečném důsledku se však jedná o velice zajímavý segment matematiky s historickými souvislostmi.

Žáci na středních školách se s pravidelnými mnohostěny mohou setkat pouze v hodinách stereometrie, kde se o nich pojednává jen velice sporadicky. Je to přitom velice zajímavé téma, které je bohaté svou historií a které může studenty zaujmout a zpestřit výuku. Zároveň může naučit studenty pracovat se vzorci a jejich odvozováním při výpočtech povrchů, objemů a poloměrů opsané a vepsané kulové plochy mnohostěnů. Bylo pro mne překvapující, když jsem si při hledání informací k tomuto tématu vypůjčila dvě komplexně pojaté a detailní publikace, jež by měly obsahovat základní informace o všech odvětvích matematiky, včetně stereometrie. Při důkladném prostudování těchto knih jsem našla jedinou informaci o pravidelných mnohostěnech, a to o pravidelném čtyřstěnu jako jehlanu u přehledu vzorců základních těles v prostoru. Přišlo mi zvláštní, že autoři vynechali tak zajímavou a bohatou část matematiky, která zůstává veřejnosti utajena. I tento fakt bych chtěla mou prací změnit.

Začátek práce je věnován seznámení s platónskými tělesy a jejich vlastnostmi, díky nimž je pravidelných mnohostěnů právě pět a ne více. Použila jsem také přehlednou tabulku, která by měla sloužit k seznámení se se základními vlastnostmi těles.

Dále se poměrně podrobně zabývám významnými matematiky historie, jak byli ohromeni mnohostěnnými útvary, jak a kde je využívali, zobrazovali, a jaké, až nadpřirozené vlastnosti jim přikládali.

Po historii pravidelných mnohostěnů se zaměřuji na moderní pohled matematiky vzhledem k těmto tělesům, na jejich vlastnosti a charakteristiky.

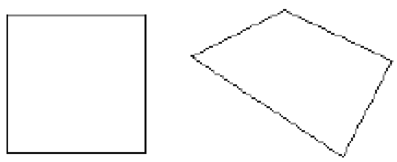
V závěru práce přidávám pár zajímavostí, které jsou úzce spojeny s těmito tělesy a které by mohly studenty zaujmout a pomoci rozvinout jejich představivost pravidelných těles v čtyřrozměrném prostoru.

2 PRAVIDELNÉ MNOHOSTĚNY

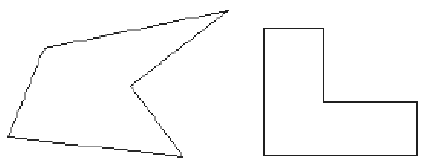
2.1 Mnohostěn

Mnohostěn je část prostoru, která je ohraničena několika mnohoúhelníky. „Je to těleso (*n*-stěn), jehož hranicí je sjednocení n-mnohoúhelníků, u kterých strana každého z nich je zároveň stranou sousedního mnohoúhelníku, a žádné dva sousední mnohoúhelníky neleží v téže rovině.“ [1] Tyto mnohoúhelníky se nazývají stěny mnohostěnu, jejichž vrcholy jsou vrcholy mnohostěnu a jejichž strany jsou hrany mnohostěnu.

Mnohoúhelníky i mnohostěny můžeme rozdělit na *konvexní* (*obr. 1) a nekonvexní* (*obr. 2).* Konvexní mnohostěn obsahuje s každými dvěma svými body X, Y i celou úsečku XY. Pro nekonvexní mnohostěny to neplatí.



obr. 1 konvexní n-úhelník



obr. 2 nekonvexní n-úhelník

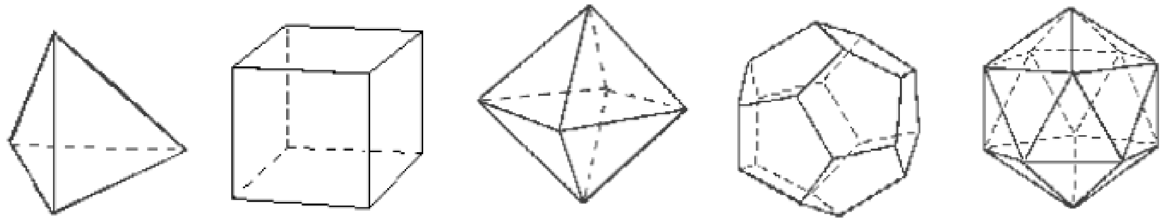
Pro konvexní mnohostěny platí Eulerova věta: V takovém mnohostěnu je součet počtu stěn *(s)* a počtu vrcholů *(v)* roven počtu hran *(h)* zvětšeném o dvě. Tedy platí:

$$\mathbf{s + v = h + 2}$$

Tento vztah se dá snadno odvodit. Stačí si jen vypsat dostatečné množství těles a jejich stěny, vrcholy a hrany. Na tyto údaje se můžete podívat dále v přehledné tabulce.
Mnohostěny můžeme dále rozdělit na pravidelné, polopravidelné a nepravidelné. My se budeme dále zabývat těmi pravidelnými.

2.2 Platónova (platónská) tělesa

Obdobou pravidelných mnohoúhelníků v rovině jsou v prostoru pravidelné mnohostěny (*obr. 3*). Těchto mnohostěnů je právě 5 a jsou to: čtyřstěn – *tetraedr*, šestistěn – *hexaedr*, osmistěn – *oktaedr*, dvanáctistěn – *dodekaedr* a dvacetistěn – *ikosaedr*.



obr. 3 pravidelná tělesa: čtyřstěn, šestistěn, osmistěn, dvanáctistěn, dvacetistěn

Pravidelný mnohostěn má shodné stěny, kterými jsou pravidelné *n*-úhelníky a z každého jeho vrcholu vychází stejný počet hran. Součet vnitřních úhlů pravidelných *n*-úhelníků u jednoho vrcholu musí být menší než 360°.

To, že je těchto těles jen pět, může být pro některé z vás udivující a někteří tomu také nemusí věřit. Dokážu, že jich je opravdu jen pět a ne více.

Nejjednodušší mnohostěn (čtyřstěn) má stěny tvořené čtyřmi rovnostrannými trojúhelníky. Pravidelné mnohostěny, jejichž stěny tvoří rovnostranné trojúhelníky, jsou tři. Další už nejsou. V tetraedru se stýkají ve vrcholu tři rovnostranné trojúhelníky, v oktaedru se stýkají čtyři rovnostranné trojúhelníky a v ikosaedru pět rovnostranných trojúhelníků. V dalším pravidelném mnohostěnu by se muselo stýkat v jednom vrcholu šest rovnostranných trojúhelníků, jenže když těchto šest rovnostranných trojúhelníků s jedním společným vrcholem poskládáme tak, aby měly jeden společný vrchol, dávají dohromady pravidelný šestiúhelník. Nemohou tak tvořit prostorový útvar. *(Vnitřní úhel rovnostranného trojúhelníku má velikost 60° - tedy 6 . 60° = 360°.)*

Se čtverci je to obdobné. Pravidelný mnohostěn se čtvercovými stěnami je pouze jeden (krychle). Zde se v jednom vrcholu stýkají tři čtvercové stěny. Kdyby se stýkaly jen dvě, tak je to málo a čtyři stěny nám už dávají dohromady rovinu a tvoří větší čtverec. *(Vnitřní úhel čtverce má velikost 90° - tedy 4 . 90° = 360°.)*

Pravidelný mnohostěn se stěnami z pravidelných pětiúhelníků je také jen jeden. V dodekaedru se v jednom vrcholu stýkají tři stěny. Kdyby byly jen dvě stěny, je to málo, a kdyby byly čtyři, je to už moc. *(Vnitřní úhel pětiúhelníku má velikost 108° - tedy 4 . 108° = 432°.)*

Šestiúhelníkové a další *n*-úhelníkové stěny jsou vyloučeny. Ale zkusme si to ověřit v případě, že by existoval mnohostěn s šestiúhelníkovými stěnami. V jednom vrcholu by se pak stýkaly buď dvě stěny, což je málo, nebo tři stěny a to je již moc. A stejné je to i pro další mnohoúhelníky. *(Vnitřní úhel šestiúhelníku má velikost 120° - tedy 3 . 120° = 360°.*[8]

Pro pravidelné mnohostěny také můžeme odvodit vztah:

$$\mathbf{2(m + n) - mn > 0}$$

Kde *m* je počet hran u jednoho vrcholu a *n* je počet hran jedné stěny. Tato nerovnost je splněna jen pro hodnoty uvedené v níže uvedené tabulce – právě pro pět pravidelných mnohostěnů. Z toho vyplývá, že jestliže z každého vrcholu mnohostěnu vychází stejný počet hran a každá stěna je ohraničena stejným počtem hran, pak jde o *kombinatoricky pravidelný mnohostěn*.

Mnohostěn	*m*	*n*
Tetraedr	3	3
Hexaedr	3	4
Oktaedr	4	3
Dodekaedr	3	5
Ikosaedr	5	3

Pravidelným mnohoúhelníkům je možné vepsat či opsat kružnici, přičemž obě kružnice mají společný střed. Stejně tak pravidelným mnohostěnům lze vepsat a opsat kulovou plochu, neboť pro všechny pravidelné mnohostěny platí, že střed tělesa má stejnou vzdálenost od jeho vrcholů (střed koule opsané), stejnou vzdálenost od jeho stěn (střed koule vepsané) a tutéž vzdálenost od všech hran. Na opsané kulové ploše leží všechny vrcholy mnohostěnu a vepsaná kulová plocha se dotýká všech stěn mnohostěnu. Ale jak můžeme najít střed koule opsané i vepsané? Nejjednodušší je sestrojit rovinu souměrnosti těchto mnohostěnů. Řezem mnohostěnu rovinou souměrnosti je mnohoúhelník. Najít střed kružnice opsané mnohoúhelníku už není tak složité. Provedeme-li řez čtyřstěnem, dostaneme trojúhelník, šestistěnem – čtyřúhelník, osmistěnem – čtyřúhelník, dvanáctistěnem – šestiúhelník, dvacetistěnem – šestiúhelník.[8]

Vzhledem k vysoké symetrii se platónská tělesa objevují běžně v současné krystalografii, krystalochemii a molekulární fyzice a chemii. Řada tvarů krystalů s vysokou symetrií krystalové mřížky nabývá forem platónských těles (např. krystaly běžné kuchyňské soli mají tvar krychle, pyrit má často tvar dvanáctistěnu apod.). Také symetrické molekuly mají mnohdy tvar těchto těles: metan má čtyři vodíkové atomy ve vrcholech pravidelného čtyřstěnu s uhlíkovým atomem v jeho těžišti, molekula hexafluoridu sírového má tvar pravidelného osmistěnu apod. Více se výskytem pravidelných mnohostěnů budeme zabývat později.

Název	s	h	v	S	V	r	ϱ
Pravidelný čtyřstěn (tetraedr)	4	6	4	$\sqrt{3}a^2$	$\frac{\sqrt{2}a^3}{12}$	$\frac{a\sqrt{6}}{4}$	$\frac{a\sqrt{6}}{12}$
Pravidelný šestistěn (hexaedr)	6	12	8	$6a^2$	a^3	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$	$\frac{a}{2}$
Pravidelný osmistěn (oktaedr)	8	12	6	$2\sqrt{3}a^2$	$\frac{\sqrt{2}a^3}{3}$	$\frac{a\sqrt{2}}{2}$	$\frac{a\sqrt{6}}{6}$
Pravidelný dvanáctistěn (dodekaedr)	12	30	20	$3\sqrt{25+10\sqrt{5}a}$	$\frac{(15+7\sqrt{5})a^3}{4}$	$\frac{a\sqrt{3}(1+\sqrt{5})}{4}$	$\frac{a\sqrt{10(25+11\sqrt{5})}}{20}$
Pravidelný dvacetistěn (ikosaedr)	20	30	12	$5\sqrt{3}a^2$	$\frac{(3+\sqrt{5})5a^3}{12}$	$\frac{a\sqrt{2(5+\sqrt{5})}}{4}$	$\frac{a\sqrt{3}(3+\sqrt{5})}{12}$

a… délka hrany
s… počet stěn
h… počet hran
v… počet vrcholů

S… povrch
V… objem
r… poloměr koule opsané
ϱ… poloměr koule vepsané

2.3 Historie pravidelných mnohostěnů

Výše zmiňovaných pět pravidelných těles znali již staořečtí matematici na přelomu 5. a 4. století př. n. l. Prvním matematikem, který sestrojil pět takzvaných pravidelných těles, byl Theaitetos z Athén (410 – 368 př. n. l.). Ovšem lze také nalézt, že to byl již Pythagoras ze Samu (550 – 501 př. n. l.).[8]

Platónská tělesa svou krásou a matematickými charakteristikami však uchvacovala obrazotvornost lidí i celá staletí po Platónovi. Vynořují se na těch nejméně očekávaných místech – například i v raném vědecko-fantastickém románu Cyrana de Bergerac *Cesta na měsíc, cesta do sluneční říše* je použit k útěku z vězení a letu ke Slunci létající stroj ve tvaru dvacetistěnu.[2]

S prvními z mnohostěnových sítí přišel v roce 1525 Albrech Dürer[1] ve své knize *Pojednání o měřeních s kružítkem a pravítkem*. Na archy papíru nakreslil povrchy mnohostěnů, tyto obrazce lze rozstřihovat a skládat do formy trojrozměrných těles. Mnohostěny můžeme najít také v umění, s čímž se setkáme později u jednotlivých těles.[2]

[1] **Albrecht Dürer**, 1471 – 1528, malíř, grafik a teoretik umění evropského formátu.

2.3.1 Aristoklés Platón (427 – 347 př. n. l.)

O Platónovi se uvádí, že studoval matematiku u pythagorejce Theodora z Kyreny, prvního, kdo prokázal, že iracionální je nejen $\sqrt{2}$, ale i čísla jako $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ až $\sqrt{17}$. Jak Platón napsal ve své *Ústavě*, matematika je pro vzdělání vůdců státu a filozofů absolutní nezbytností. Nápis nad vchodem do jeho *Akademie* v souladu s tím zněl: *„Nevstupuj, kdo jsi neznalý geometrie."* Do určité míry lze Platóna považovat za jednoho z prvních opravdových teoretiků. O jeho teoretických sklonech nejlépe vypovídá to, jak přistupoval k astronomii; namísto pozorování pohybů hvězd Platón zastával názor „ponechat nebesa sobě samým" a soustředit se místo toho na abstraktní nebe matematiky. Sám Platón říkal, že právě jeho Bůh určil pro Vesmír.

Ve svém dialogu *Timaios* se Platón především snažil vysvětlit strukturu hmoty za pomoci pěti pravidelných těles (neboli mnohostěnů), které již do určité míry zkoumali pythagorejci a po nich velmi důkladně i Theaitetos, o kterém jsme se již zmiňovali.

Důvodem, proč se pět pravidelných mnohostěnů nazývá právě po Platónovi je, že jako první popsal tato tělesa následujícími vlastnostmi: jsou to jediná tělesa, jejichž stěny (u jednotlivých těles) jsou totožné a rovnostranné, kolem každého je možné opsat kouli, na které leží všechny vrcholy tělesa. Platón si také povšiml, že stěny prvních čtyř těles lze sestrojit ze dvou typů pravoúhlých trojúhelníků, rovnoramenného trojúhelníku s úhly 45° – 90° – 45° a trojúhelníku s úhly 30° – 90° – 60°. Na to navázal vysvětlením, že se pomocí těchto vlastností dají vysvětlit základní „chemické reakce". V Platónově chemii například voda ohřívaná ohněm produkuje dvě částice páry (vzduch) a jednu částici ohně. Uvedenou chemickou reakci lze vyjádřit i takto:

$$\textbf{[voda]} \rightarrow \textbf{2[vzduch] + [oheň]}$$

Po přiřazení počtu stěn (platónských těles zastupujících příslušné elementy), dostaneme tuto rovnici: **20 = 2 x 8 + 4**. Toto pojetí se přirozeně neslučuje s moderním chápáním struktury hmoty, avšak jeho ústřední myšlenka, podle níž se elementární částice vesmíru a jejich interakce (vzájemné působení) dají popsat pomocí matematické teorie s aspekty symetrie, je jedním z úhelných kamenů dnešního výzkumu fyziky částic.

Dalším důvodem je, že Platón propojil Empedoklovy[2] představy, podle nichž čtyřmi základními látkami jsou země, voda, vzduch a oheň, s „atomickou" teorií hmoty (předpokládající existenci neviditelných částic) Demokrita z Abdér[3]. Jeho „sjednocená" teorie říká, že každý z těchto čtyř elementů odpovídá jinému druhu základní částice a je představován jedním z platónských těles. I když se v současné době detaily přirozeně značně změnily, tak základní myšlenka Platónovy teorie není až tak odlišná od způsobu, jakým John Dalton[4] v 19. století formuloval moderní chemii. Podle Platóna Zemi ztělesňuje krychle, která se vyznačuje stabilitou, špičatý a relativně jednoduchý čtyřstěn

[2] **Empedoklés**, asi 490 – 430 př. n. l., řecký filosof, který definoval dodnes známé 4 elementy
[3] **Démokritos z Abdér**, přibližně 460 – 370 př. n. l., řecký filozof, materialista, jehož základem jsou nekonečné prázdno a v něm se pohybující nekonečné množství atomů.
[4] **John Dalton**, 1766 – 1844, britský chemik a fyzik, zakladatel moderní atomistiky.

zastupuje „všepronikající“ rys ohně, vzduch je reprezentován „pohyblivým“ vzhledem osmistěnu a vodu symbolizuje mnohotvárný dvacetistěn. Páté těleso, dvanáctistěn, připisoval Platón vesmíru jako celku – podle něj byl právě dvanáctistěn tou formou, kterou *„bůh použil, aby souhvězdími protkal celou oblohu“.*

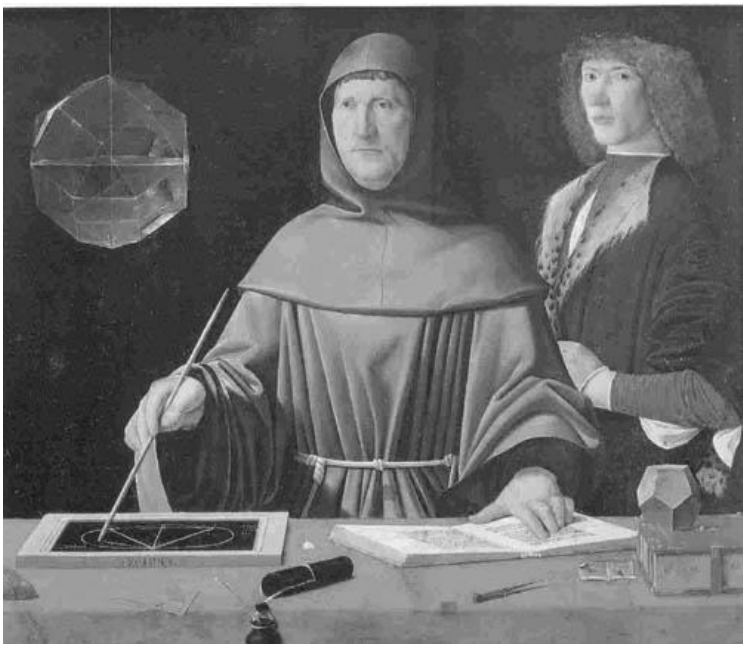
Řecký historik Plutarchos (asi 1. stol. n. l.) o Platónovi napsal: „Čtyřstěn, osmistěn, dvacetistěn a dvanáctistěn, prvotní útvary, které pojmenoval Platón, jsou všechny obdivované díky symetriím a rovnostem svých poměrů a na přírodu nezbylo nic, co by mohla vytvořit a sestavit lepšího či dokonce jen trochu podobného.“[2]

2.3.2 Luca Bartolomeo de Pacioli (1445 – 1514/1517)

Luca Pacioli byl italský františkánský mnich a matematik známý především jako zakladatel účetnictví. Matematice se učil v Benátkách, kde také napsal svou první učebnici aritmetiky. Roku 1494 v Benátkách vydal svou knihu *Summa.* Kniha byla encyklopedického charakteru a shrnovala matematické znalosti své doby v aritmetice, algebře, geometrii a trigonometrii. Právě v této knize si Pacioli podle svých potřeb vypůjčuje (obvykle s uvedením pramene) úlohy týkající se dvacetistěnu a dvanáctistěnu.

Za svého milánského pobytu Pacioli dokončil třísvazkový traktát *Divina Proportione* (Božská proporce), který nakonec vyšel v Benátkách roku 1509. První svazek *Compendio de Divina Proportione* (Kompendium božské proporce) obsahuje analýzu platónských těles i dalších mnohostěnů.

Jeden z nejlepších portrétů matematika vůbec vytvořil Jacopo de'Barbari (1440 – 1515). Zachytil na něm Luku Pacioliho, jak dává žákovi lekci z geometrie (*obr. 4*). V pravé dolní části obrazu stojí na Pacioliho knize *Summa* právě dvanáctistěn, jedno z platónských těles. Sám Pacioli na obraze obkresluje náčrt ze 13. knihy Eukleidových *Základů*. Průhledný mnohostěn vlevo nahoře zvaný rombokubooktaedr (jedno z archimedovských těles s 26 stěnami, z nichž 18 jsou čtverce a 8 rovnostranné trojúhelníky), zpola naplněný vodou a visící ve vzduchu, symbolizuje čistotu a věčnost matematiky. [2]



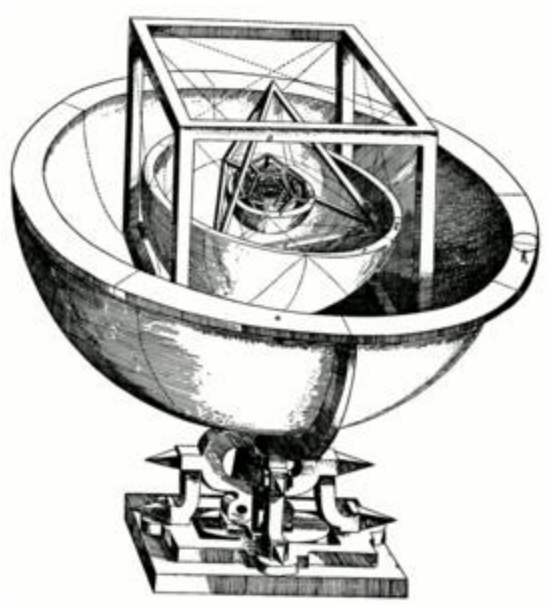
obr. 4 portrét Luca Pacioliho, autor Jacopo de'Barbari

2.3.3 Johannes Kepler (1571 – 1630)

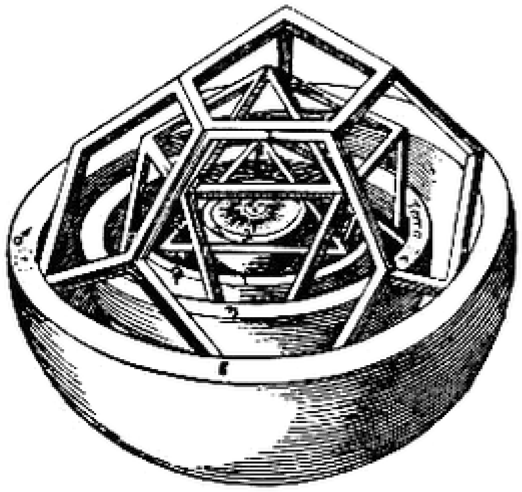
Roku 1597 Kepler publikoval své první dílo *Mysterium Cosmographicum* (Tajemství vesmíru). Názorné schéma *Mysterium Cosmographicum,* které ilustruje Keplerův kosmologický model, můžeme vidět na *obr. 5* a *obr. 6*. Celý název, vypsaný na titulní straně knihy zní: „Předběžný výklad kosmologických pojednání o vesmírném tajemství obdivuhodných proporcí nebeských sfér a o pravdivých a skutečných příčinách jejich počtu, velikostí periodických pohybů, to vše znázorněno pěti pravidelnými geometrickými tělesy.“Keplerova odpověď na otázku, proč existuje šest planet, byla jednoduchá – protože existuje přesně pět pravidelných platónských těles. Podle něj se tehdy šest planet pohybovalo okolo Slunce po kulových plochách vepsaných nebo opsaných pravidelným mnohostěnům. Mezi Merkur a Venuši dal osmistěn, mezi Venuši a Zemi dvacetistěn, mezi Zemi a Mars dvanáctistěn, mezi Mars a Jupiter čtyřstěn a mezi Jupiter a Saturn krychli. Tato tělesa měla představovat vzdálenosti mezi jednotlivými planetami. Přesně podle jeho slov:

„Sféra Země je mírou všech ostatních orbit. Opište kolem ní dvanáctistěn, jeho sféra bude patřit Marsu. Opište kolem Marsu čtyřstěn a sféra, jež jej obklopuje, bude patřit Jupiteru. Opište kolem orbity Jupitera krychli, a její sféra bude patřit Saturnu. Nyní vepište do orbity Země dvacetistěn, do něj se vejde sféra Venuše. Vepište do sféry Venuše osmistěn, a v něm bude sféra Merkuru. Zde máte odůvodnění počtu planet.“[2]

Tuto Keplerovu teorii však rozbil fakt, že vzájemná vzdálenost kulových ploch neodpovídala skutečným vzdálenostem planet od Slunce. Planetární rozestupy sice docela odpovídaly, výrazně však nesouhlasily u jiných (třebaže rozdíly nebyly obvykle větší než 10 procent). A kromě toho, dnes už známe i další planety.



obr. 5 model sluneční soustavy z Mysterium Cosmographicum



obr. 6 vnitřní části modelu

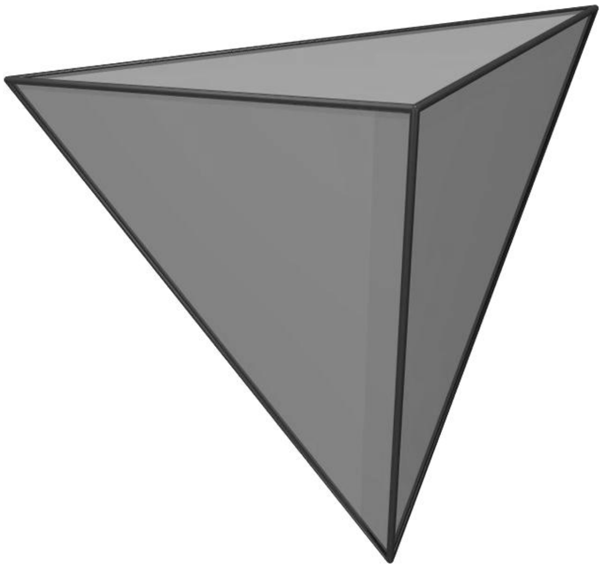
2.3.4 Leonhard Euler (1707 – 1783)

Leonhard Paul Euler byl švýcarský matematik, fyzik a astronom. Patří mezi nejvýznamnější matematiky, napsal 865 prací a jeho díla se vyznačují přesným vyjadřováním a přehlednou symbolikou. Je také znám svými pracemi v oblasti optiky, mechaniky a astronomii.

Také jeho fascinovaly pravidelné mnohostěny. V 18. století formuloval vztah pro každý konvexní mnohostěn, známý jako Eulerova věta, kterou jsme se zabývali již výše. Byl to empirický objev získaný pozorováním a byl matematicky dokázán. Díky tomuto vztahu vznikl další důkaz k tomu, že pravidelných mnohostěnů je právě pět, protože tento vztah pro jiná tělesa neplatí.

Eulerova věta se dá také převést na tvar χ (2) = V – E + F (vertices – vrcholy, edges – hrany, faces – stěny), který je používaný pro teorii grafů, kde je graf tvořen vrcholy, které jsou vzájemně spojeny hranami. Formálně je graf tvořen uspořádanou dvojicí množiny vrcholů V a množiny hran E.[9]

2.4 Pravidelný čtyřstěn – tetraedr



Objem	$V = \frac{\sqrt{2}a^3}{12}$
Povrch	$\sqrt{3}a^2$
Stěna	trojúhelník
Počet vrcholů	4
Počet hran	6
Počet stěn	4
Úhel u vrcholu	60°
Poloměr koule opsané	$r = \frac{a}{4}\sqrt{6}$
Poloměr koule vepsané	$\rho = \frac{a\sqrt{6}}{12}$

Pravidelný čtyřstěn (tetraedr) je trojrozměrné těleso, jehož stěny tvoří čtyři stejné rovnostranné trojúhelníky. Známý je i pod názvem trojboký jehlan. Pravidelný čtyřstěn je také trojrozměrným případem obecnějšího útvaru, tzv. 3-simplexu. Zajímavé je, že všechny vrcholy čtyřstěnu jsou od sebe stejně daleko, na rozdíl od ostatních Platónských těles. Tetraedr byl podle Platóna dříve brán jako symbol ohně, jak jsme se dozvěděli již výše.

Poloměr koule opsané tetraedru je roven vzdálenosti těžiště tělesa od libovolného vrcholu tělesa. Pro výpočet tohoto poloměru musíme vypočítat tělesovou výšku, jelikož těžiště rozděluje výšku jehlanu v poměru 1:3: Výška strany tetraedru $\boldsymbol{v_s} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Těžnice dělí výšku strany v poměru 1:2, z toho $\frac{2}{3}v_s = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ a podle Pythagorovy věty můžeme vypočítat tělesovou výšku:

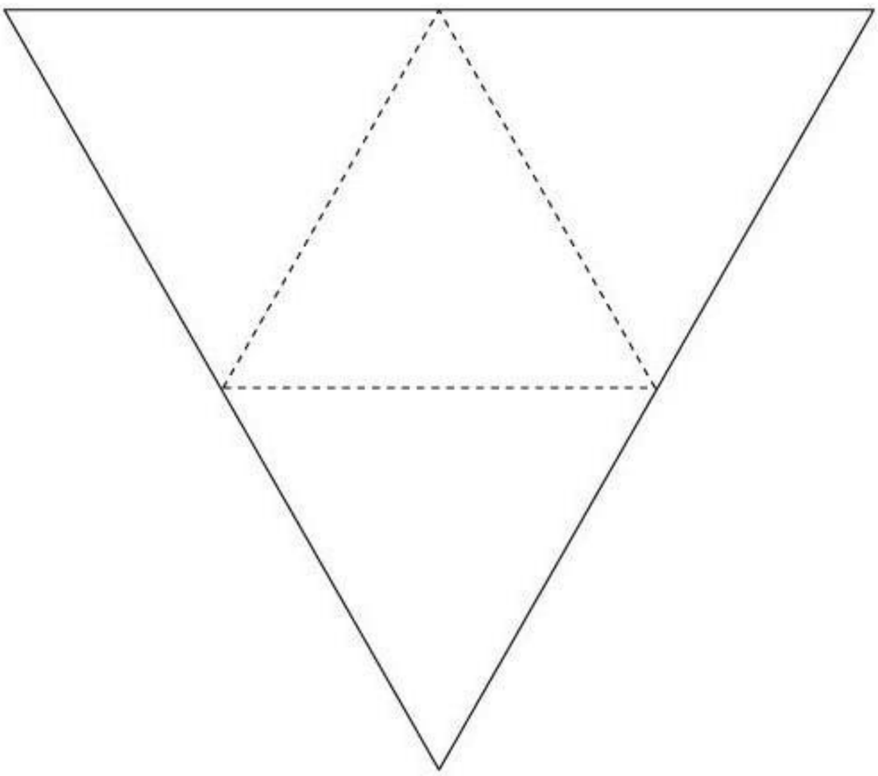
$$\boldsymbol{v} = \sqrt{a^2 - (\frac{a\sqrt{3}}{3})^2} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Z toho už můžeme vypočítat poloměr:

$$\boldsymbol{r} = \frac{3}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a\sqrt{6}}{4}.$$

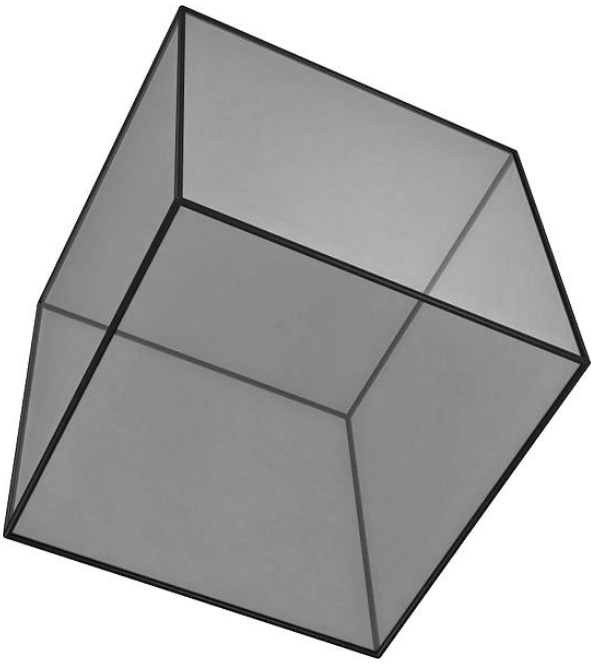
Poloměr koule vepsané pravidelnému čtyřstěnu je vzdálenost těžiště tělesa od libovolné stěny. Dotykové body vepsané koule jsou také středy stěn. Pokud vezmeme vzdálenost těžiště od vrcholu (s; s=r=$\frac{a\sqrt{6}}{4}$), od středu libovolné strany (b; b=*poloměr* ρ) a vzdálenost středu strany od libovolného vrcholu (t; t=$\frac{2}{3}v_s$), můžeme použít Pythagorovu větu: b^2=$s^2 - t^2$.[3] Dále:

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{\rho} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{6}}{4}\right)^2 - (\frac{a\sqrt{3}}{3})^2} = \sqrt{\frac{a^2}{24}} = \frac{a\sqrt{6}}{12}.$$



obr. 7 síť tetraedru

2.5 Pravidelný šestistěn – hexaedr



Objem	$V = a^3$
Povrch	$S = 6a^2$
Stěna	čtverec
Počet vrcholů	8
Počet hran	12
Počet stěn	6
Úhel u vrcholu	90°
Poloměr koule opsané	$r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$
Poloměr koule vepsané	$\rho = \frac{a}{2}$

Pravidelný šestistěn (hexaedr) neboli krychle je trojrozměrné těleso, jehož stěny tvoří šest shodných čtverců, má osm vrcholů a dvanáct hran stejné délky. Hexaedr byl podle Platóna symbolem země.

Krychle je středově souměrná podle svého středu (tj. průsečíku tělesových úhlopříček) a je osově souměrná podle třinácti os: tří spojnic středů protilehlých stěn, čtyř spojnic protilehlých vrcholů a šesti spojnic středů protilehlých hran. Je také rovinově souměrná podle devíti rovin: tří rovin rovnoběžných se stěnami a procházejících středem krychle a šesti rovin určených dvojicí protilehlých hran.

Také díky shodnosti všech svých stěn i hran patří mezi platónská tělesa. Každé dvě stěny krychle jsou rovnoběžné nebo kolmé a každé dvě hrany krychle jsou také rovnoběžné nebo kolmé.

Délka stěnové úhlopříčky je vlastně délkou úhlopříčky čtverce ve vztahu ke straně, kde podle Pythagorovy věty platí:

$$\boldsymbol{u}_{s^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}\,.$$

Délku tělesové úhlopříčky (tj. vzdálenost dvou vrcholů, které neleží ve stejné stěně) lze vypočítat pomocí strany a stěnové úhlopříčky také podle Pythagorovy věty:

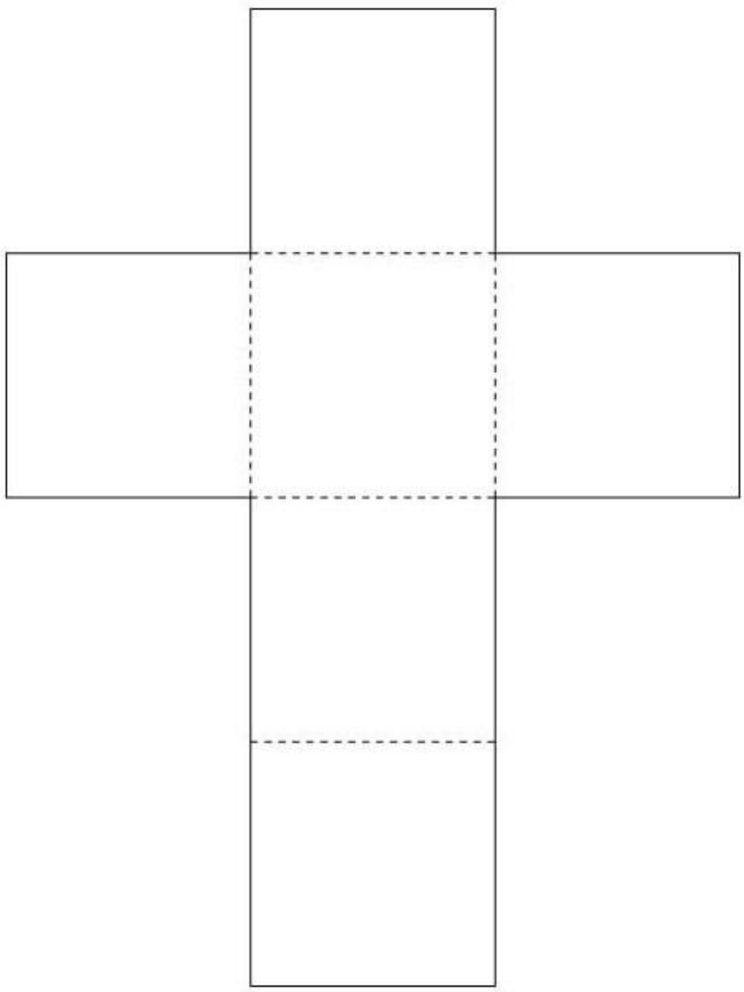
$$\boldsymbol{u} = \sqrt{u_{s^2} + a^2} = \sqrt{(a\sqrt{2})^2 + a^2} = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}\,.$$

Poloměr koule opsané se u šestistěnu rovná polovině délky tělesové úhlopříčky, která prochází středem tělesa. Tedy:

$$\boldsymbol{r} = \frac{u}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}\,.$$

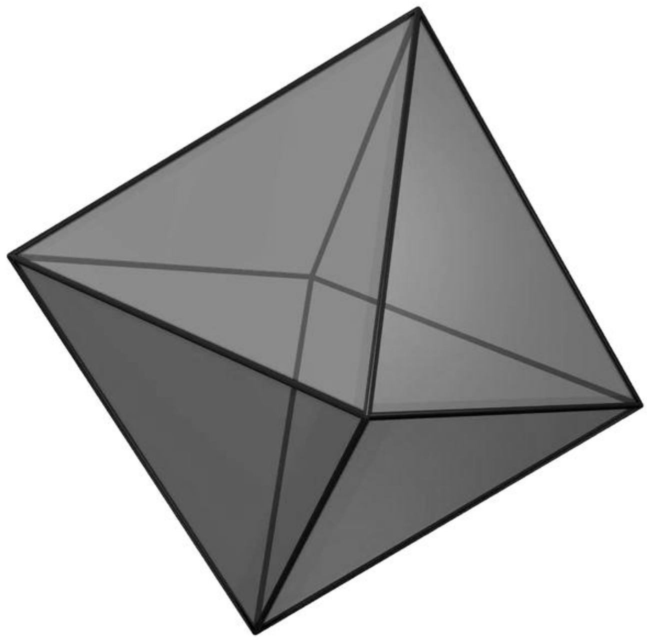
Poloměr koule vepsané do hexaedru je roven vzdálenosti středu tělesa od libovolné stěny.[3] Tedy:

$$\boldsymbol{\rho} = \frac{a}{2}\,.$$



obr. 8 síť hexaedru

2.6 Pravidelný osmistěn – oktaedr



Objem	$V = \frac{\sqrt{2}a^3}{3}$
Povrch	$S = 2\sqrt{3}a^2$
Stěna	trojúhelník
Počet vrcholů	6
Počet hran	12
Počet stěn	8
Úhel u vrcholu	60°
Poloměr koule opsané	$r = \frac{a\sqrt{2}}{2}$
Poloměr koule vepsané	$\rho = \frac{a\sqrt{6}}{6}$

Pravidelný osmistěn (oktaedr) má šest vrcholů a jeho stěnami je osm shodných rovnostranných trojúhelníků. Oktaedr podle Platóna symbolizoval vzduch. S tímto tvarem se můžeme setkat u diamantu, fluoridu nebo třeba kamence.

Délka tělesové úhlopříčky je stejná jako úhlopříčka čtverce se stranou *a*. Tedy:

$$\boldsymbol{u} = a\sqrt{2}\,.$$

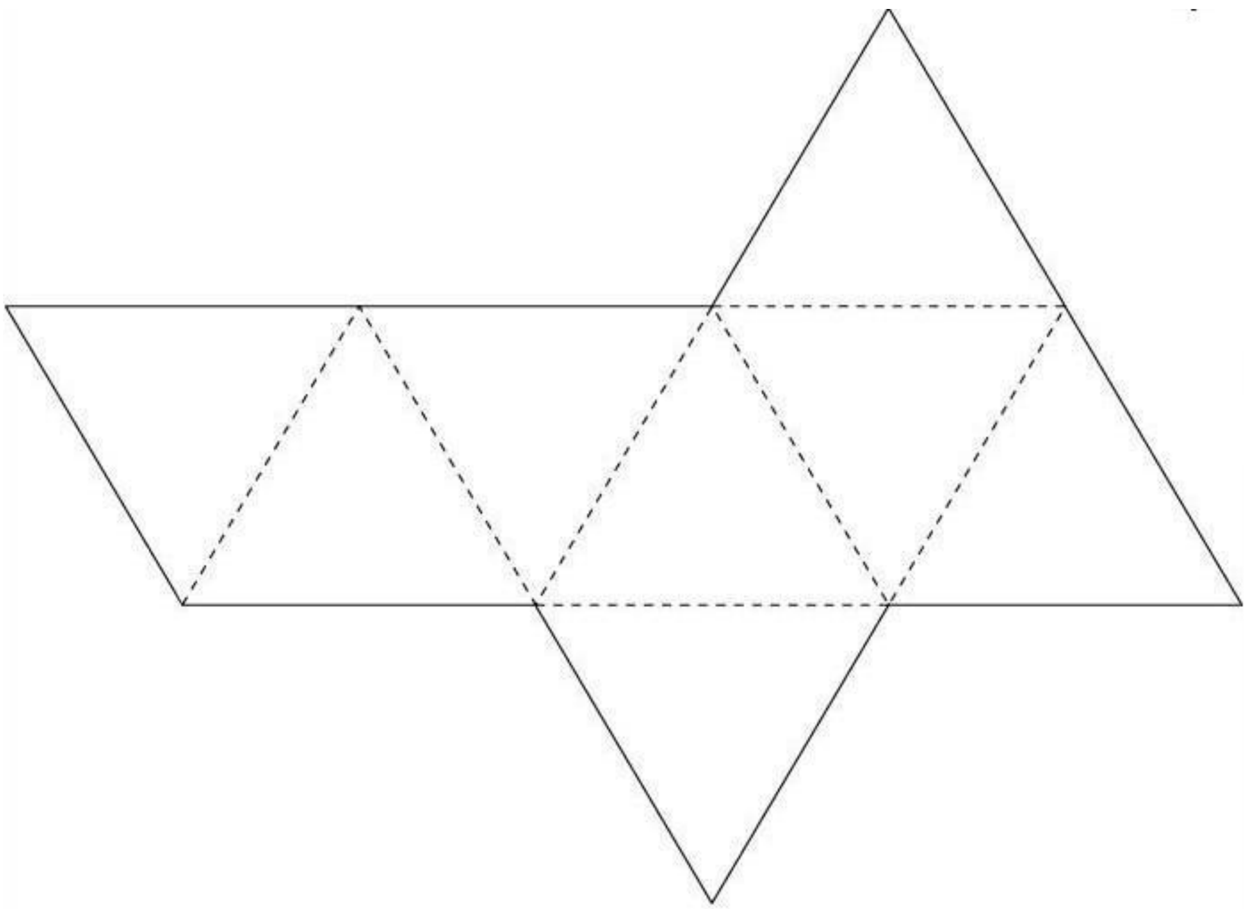
Poloměr koule opsané se rovná polovině délky tělesové úhlopříčky, která prochází středem tělesa, tedy:

$$\boldsymbol{r} = \frac{u}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}\,.$$

Poloměr koule vepsané se rovná vzdálenosti těžiště (středu) tělesa od libovolné stěny. Dotykové body koule jsou středy stran osmistěnu. Vezmeme si pravoúhlý trojúhelník (podobně jako u tetraedru) se stranami: vzdálenost těžiště od vrcholu (s; s=*poloměr koule opsané* $\boldsymbol{r}$), vzdálenost těžiště od středu libovolné strany (f; f=*poloměr* ρ) a vzdálenost středu strany od libovolného vrcholu (t; $t = \frac{2}{3}\, v_s = \frac{a\sqrt{3}}{3}$). Poté můžeme opět využít Pythagorovy věty: $f^2 = s^2 + t^2$.[3]

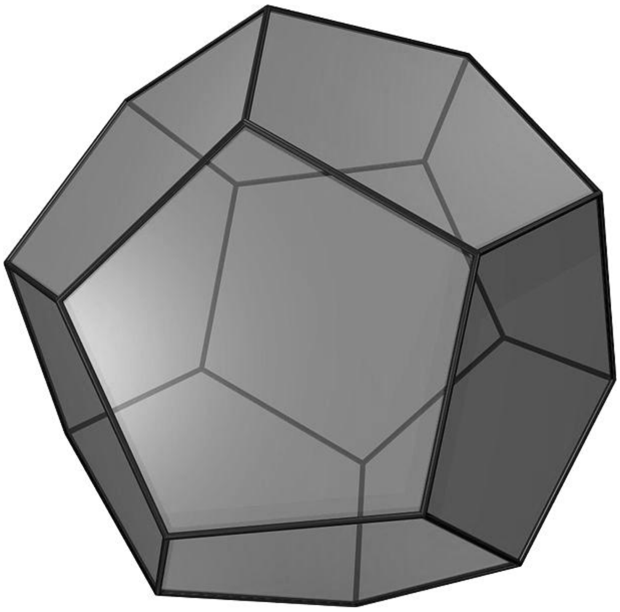
Dále:

$$\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{f} = \sqrt{(\frac{a\sqrt{2}}{2})^2 - (\frac{a\sqrt{3}}{3})^2} = \sqrt{\frac{a^2}{6}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}\,.$$



obr. 9 síť oktaedru

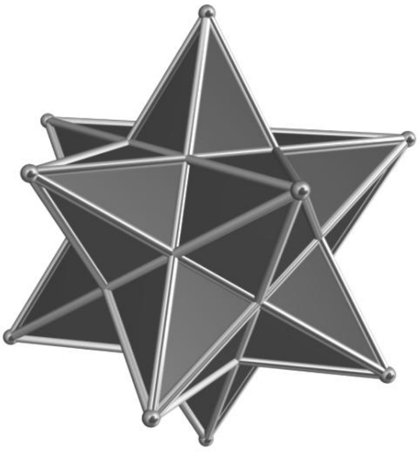
2.7 Pravidelný dvanáctistěn – dodekaedr



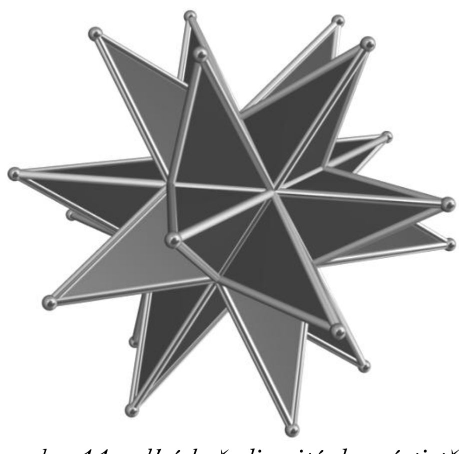
Objem	$V = \dfrac{(15+7\sqrt{5})a^3}{4}$
Povrch	$S = 3\sqrt{25+10\sqrt{5}a}$
Stěna	pětiúhelník
Počet vrcholů	20
Počet hran	30
Počet stěn	12
Úhel u vrcholu	108°
Poloměr koule opsané	$r = \dfrac{a\sqrt{3}(a+\sqrt{5})}{4}$
Poloměr koule vepsané	$\rho = \dfrac{a\sqrt{10(25+11\sqrt{5})}}{20}$

Pravidelný dvanáctistěn je trojrozměrné těleso v prostoru, jehož stěny tvoří dvanáct stejných pravidelných pětiúhelníků a má dvacet vrcholů. Platón ho přiřazoval vesmíru neboli ke všemu kolem nás (Jsoucno).

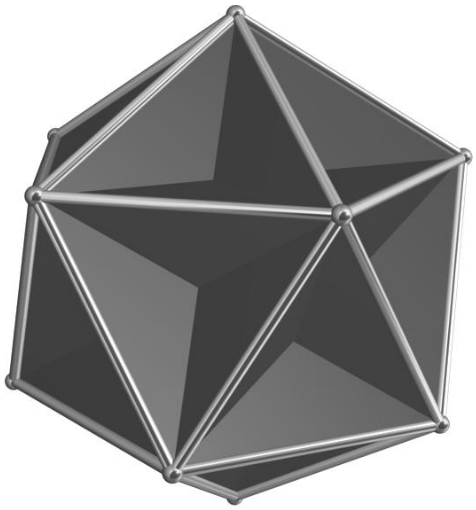
Existují tři hvězdicovité dvanáctistěny, které patří mezi pravidelné nekonvexní mnohostěny (tzv. *Kepler-Poinsotova tělesa*). Jsou to malý hvězdicovitý dvanáctistěn *(obr. 10)*, velký hvězdicovitý dvanáctistěn *(obr. 11)* a velký dvanáctistěn *(obr. 12).*



obr. 10 malý hvězdicovitý dvanáctistěn



obr. 11 velký hvězdicovitý dvanáctistěn



obr. 12 velký dvanáctistěn

Dodekaedr je složitější těleso než ta předchozí, budeme se jím tedy zabývat více a budeme také potřebovat větší množství výpočtů. Jen počet symetrií u dodekaedru stoupá již na 120, tudíž je všechny nebudu vypisovat.

Délku úhlopříčky strany (pravidelného pětiúhelníku) vypočítáme pomocí poměru délky úhlopříčky a strany pětiúhelníku:

$$\frac{u_s}{a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2};$$

$$\boldsymbol{u_s} = \frac{a(1+\sqrt{5})}{2}.$$

Poloměr kružnice opsané pravidelnému pětiúhelníku můžeme vypočítat, když si pětiúhelník rozdělíme na pět rovnoramenných trojúhelníků s přeponou *a* a odvěsnami r_s (*r_s = poloměr kružnice opsané*). Pro jakýkoliv z těchto trojúhelníků platí kosinová věta:

$$a^2 = r_s^2 + r_s^2 - 2r_s r_s cos72°,$$

kde

$$cos72° = \frac{1}{1+\sqrt{5}}.$$

Z toho vyjádříme poloměr r_s^2

$$r_s^2 = \frac{a^2(1+\sqrt{5})}{2\sqrt{5}},$$

z čehož po úpravách dostaneme r_s

$$\boldsymbol{r_s} = \frac{a\sqrt{10(5+\sqrt{5})}}{10}.$$

Poloměr kružnice vepsané pravidelnému pětiúhelníku můžeme vypočítat pomocí pravoúhlého trojúhelníku s přeponou r_s a odvěsnami ρ_s (ρ_s = *poloměr kružnice vepsané*) a $\frac{a}{2}$. V tomto trojúhelníku můžeme aplikovat Pythagorovu větu: $r_s^2 = \rho_s^2 + (\frac{a}{2})^2$. Z toho:

$$\boldsymbol{\rho_s} = \sqrt{r_s^2 - (\frac{a}{2})^2} = \sqrt{\frac{a^2(1+\sqrt{5})}{2\sqrt{5}} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{2\sqrt{5}+5}{5}} .$$

Vzdálenost y, což je vzdálenost bodů EX, kde E je vrchol pravidelného pětiúhelníku a X je střed úhlopříčky strany pravidelného dvanáctistěnu (u_s). Tuto délku strany y, která tvoří odvěsnu pravoúhlého trojúhelníku DXE, pak můžeme vypočítat pomocí Pythagorovy věty: $\boldsymbol{a}^2 = (\frac{u_s}{2})^2 + y^2$. Z toho si vypočteme y:

$$\boldsymbol{y} = a^2 - (\frac{u_s}{2})^2 = \sqrt{a^2 - (\frac{a}{4})^2(1+\sqrt{5})^2} = \frac{a\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}.$$

Chceme-li vypočítat poloměr koule vepsané, musíme si k tomu vypočítat **odchylku sousedních stěn** mnohostěnu. K tomu použijeme pomocný pravidelný trojboký jehlan, který odřízneme z dodekaedru tak, že hrany podstavy mají délku úhlopříčky us a boční hrany jsou hrany dodekaedru. Poté si představíme řez tímto jehlanem rovinou kolmou k boční hraně, která bude procházet hranou podstavy. Pak je řezem rovnoramenný trojúhelník s rameny x a základnou u_s. Nakonec můžeme použít vzorec pro výpočet obsahu trojúhelníku:

$$\frac{a \cdot x}{2} = \frac{u_s \cdot y}{2},$$

odkud

$$\boldsymbol{x} = \frac{a}{8}(1+\sqrt{5})\sqrt{10-2\sqrt{5}}.$$

S vypočteným x můžeme určit odchylku ramen, neboli **odchylku sousedních stěn $\boldsymbol{\omega}$**, kterou vypočítáme pomocí goniometrické funkce:

$$\sin\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{\frac{u_s}{2}}{x} = \frac{a}{4}\left(1+\sqrt{5}\right) : \frac{a}{8}\left(1+\sqrt{5}\right)\sqrt{10-2\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}},$$

z toho

$$\frac{\omega}{2} \approx 58°17‘, \boldsymbol{\omega} \approx 116°34‘.$$

Nyní již můžeme vypočítat **poloměr koule vepsané**, který vypočteme s použitím pravoúhlého trojúhelníku TSY, kde T je střed dodekaedru, S je střed libovolné stěny dvanáctistěnu a Y je střed hrany téže stěny (pravý úhel je u vrcholu S). Pak odvěsna SY (ρ_s) svírá s přeponou TY úhel $\frac{\omega}{2}$ a druhá odvěsna TS je hledaný poloměr ρ:

$$\tan\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{\rho}{\rho_s}$$

odsud

$$\rho = \rho_s \cdot \tan\left(\frac{\omega}{2}\right).$$

Z výše uvedených výpočtů víme, že $\sin\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$. Při použití vztahů mezi goniometrickými funkcemi $sin^2x + cos^2x = 1$ dostaneme, že $\cos(\frac{\omega}{2}) = \sqrt{\frac{6-2\sqrt{5}}{10-2\sqrt{5}}}$. Pak už za použití vztahu; $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ můžeme dosadit do vzorce:

$$\rho = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{2\sqrt{5}+5}{5}} \cdot \frac{\frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}}{\sqrt{\frac{6-2\sqrt{5}}{10-2\sqrt{5}}}} = \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{5(2\sqrt{5}+5)}}{5} \cdot \frac{2}{\sqrt{6-2\sqrt{5}}},$$

po úpravách

$$\boldsymbol{\rho} = \frac{a\sqrt{10(25+11\sqrt{5})}}{20}.$$

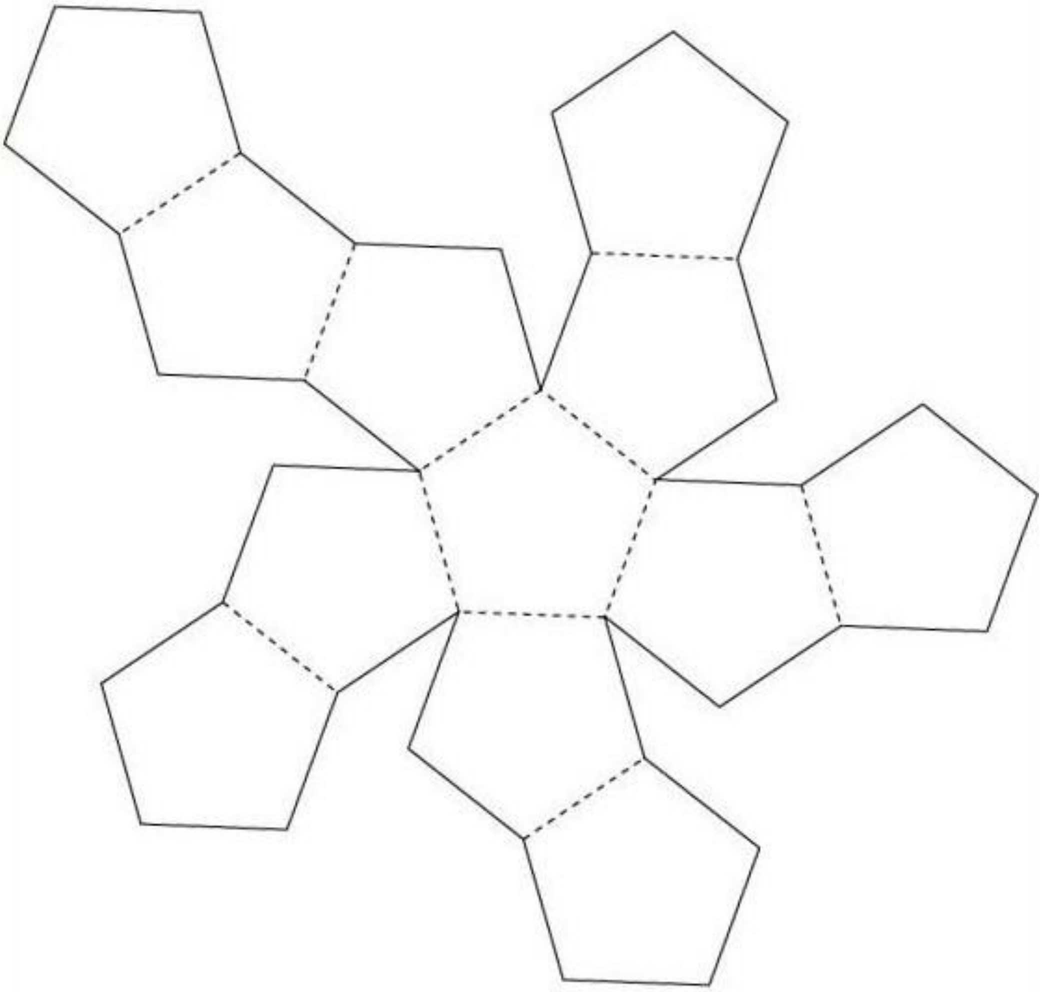
Poloměr koule opsané vypočítáme užitím pravoúhlého trojúhelníku s odvěsnami ρ a r_s a s přeponou r. Můžeme použít Pythagorovu větu:

$$r^2 = r_s^2 + \rho^2 = \left[\frac{a\sqrt{10(5+\sqrt{5})}}{10}\right]^2 + \left[\frac{a\sqrt{10(25+11\sqrt{5})}}{20}\right]^2 = \frac{a^2(3\sqrt{5}+9)}{8}.$$

$$\boldsymbol{r} = \sqrt{\frac{a^2(3\sqrt{5}+9)}{8}} = \frac{a\sqrt{3\sqrt{5}+9}}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{3}\sqrt{2\sqrt{5}+6}}{4} = \frac{a\sqrt{3}\sqrt{(1+\sqrt{5})^2}}{4} = \frac{a\sqrt{3}\,(1+\sqrt{5})}{4}.$$

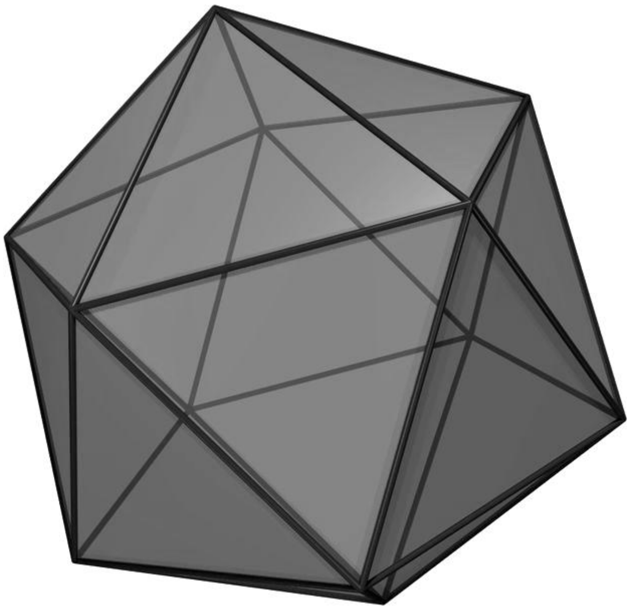
Z poloměru koule opsané dvanáctistěnu můžeme dostat i **délku tělesové úhlopříčky** (procházející středem tělesa), která je dvojnásobkem r.[3] Tedy:

$$\boldsymbol{u} = 2r = \frac{a\sqrt{3}\,(1+\sqrt{5})}{4} \cdot 2 = \frac{a\sqrt{3}\,(1+\sqrt{5})}{2}.$$



obr. 13 síť dodekaedru

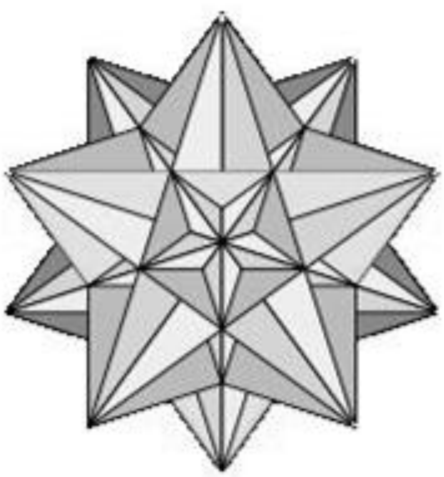
2.8 Pravidelný dvacetistěn – ikosaedr



Objem	$V = \frac{(3+\sqrt{5})5a^3}{12}$
Povrch	$S = 5\sqrt{3}a^2$
Stěna	trojúhelník
Počet vrcholů	12
Počet hran	30
Počet stěn	20
Úhel u vrcholu	60°
Poloměr koule opsané	$r = \frac{a\sqrt{2(5+\sqrt{5})}}{4}$
Poloměr koule vepsané	$\rho = \frac{a\sqrt{3}(3+\sqrt{5})}{12}$

Pravidelný dvacetistěn je trojrozměrné těleso v prostoru, jehož stěny tvoří dvacet stejných rovnostranných trojúhelníků. Ikosaedr má 12 vrcholů a 30 hran. Podle Platóna byl pravidelný dvacetistěn symbolem vody.

U ikosaedru existuje již 59 hvězdicovitých mnohostěnů, ale pouze jeden patří mezi Kepler-Poinsotova tělesa. Je to velký dvacetistěn *(obr. 14)*.



obr. 14 velký dvacetistěn

U pravidelného dvacetistěnu jsou výpočty již také složitější, a tudíž budou i delší. Abychom mohli vypočítat poloměr koule vepsané, musíme si napřed vypočíst odchylku sousedních stěn.

Odchylku sousedních stěn $\boldsymbol{\omega}$ ikosaedru vypočítáme tak, že z tělesa oddělíme pětiboký pravidelný jehlan, jehož podstavou bude pravidelný pětiúhelník. Tímto jehlanem budeme uvažovat řež rovinou, která je kolmá k boční hraně jehlanu a protíná podstavu ve stěnové úhlopříčce. Řezem tak bude rovnoramenný trojúhelník s rameny v_s, základnou u_s (stejná jako u dodekaedru) a ramena trojúhelníku budou svírat úhel ω. V trojúhelníku pak bude platit:

$$\sin\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{\frac{u_s}{2}}{v_s} = \frac{a}{4}\left(1+\sqrt{5}\right) \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{3}},$$

z toho vypočítáme ω

$$\frac{\omega}{2} \approx 69°05', \ \boldsymbol{\omega} \approx 138°11'.$$

Nyní si můžeme vypočítat **poloměr koule vepsané** pomocí pravoúhlého trojúhelníku TSY (obdobně jako u dvanáctistěnu), který má odvěsny ρ a ρ_S. Délka odvěsny ρ_S je rovna jedné třetině délky výšky strany ikosaedru (v_S). Přepona trojúhelníku TY je vzdálenost středu dvacetistěnu od libovolné hrany. V tomto trojúhelníku můžeme využít goniometrické funkce:

$$\tan\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{\rho}{\frac{v_S}{3}}.$$

Z předchozího výpočtu víme, že $\sin\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}$. Opět můžeme použít vztahu mezi goniometrickými funkcemi $sin^2 x + cos^2 x = 1$, z kterého dostaneme, že $\cos\left(\frac{\omega}{2}\right) = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{6}}$. Poté použijeme vztah $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ a dostaneme:

$$\tan\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}}{\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{6}}} = \frac{(1+\sqrt{5})\sqrt{6}}{2\sqrt{3}\sqrt{3-\sqrt{5}}} \cdot \frac{\sqrt{3-\sqrt{5}}}{\sqrt{3-\sqrt{5}}} = \frac{(1+\sqrt{5})\sqrt{2}\sqrt{3-\sqrt{5}}}{2(3-\sqrt{5})} \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} =$$
$$\frac{\sqrt{2\left(2+\sqrt{5}\right)^2(3-\sqrt{5})}}{2} = \frac{\sqrt{14+6\sqrt{5}}}{2} = \frac{\sqrt{9+6\sqrt{5}+5}}{2} = \frac{\sqrt{(3+\sqrt{5})^2}}{2} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

Podle výše uvedeného vztahu již můžeme vypočíst ρ:

$$\boldsymbol{\rho} = \tan\left(\frac{\omega}{2}\right) \cdot \frac{v_S}{3} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{a\sqrt{3}(3+\sqrt{5})}{12}.$$

Poloměr koule opsané je délka přepony pravoúhlého trojúhelníku s odvěsnami ρ a $\frac{2}{3}\,v_s$ (stěnová výška). Je to vzdálenost od středu ikosaedru k libovolnému vrcholu. Pro výpočet této vzdálenosti použijeme Pythagorovu větu:

$$r^2 = \left(\tfrac{2}{3}v_s\right)^2 + \rho^2,$$

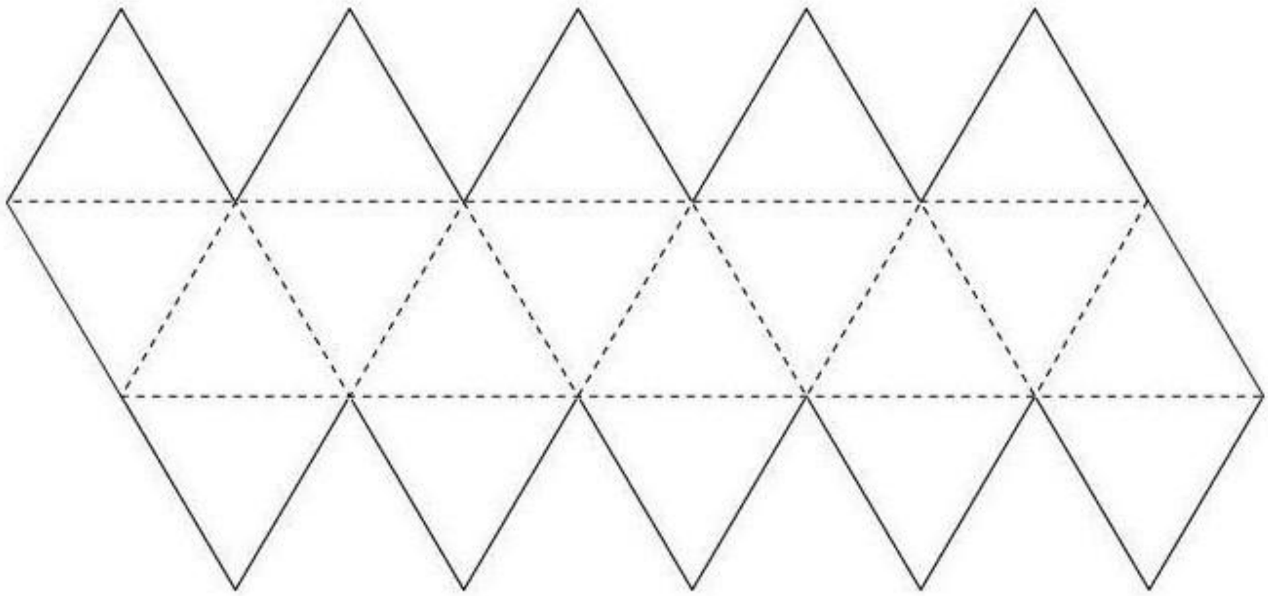
po dosazení dostáváme

$$\frac{a^2}{3} + \frac{a^2\left(3+\sqrt{5}\right)^2}{4 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{a^2}{3}\left(1 + \frac{9+6\sqrt{5}+5}{16}\right) = \frac{a^2}{3} \cdot \frac{15+3\sqrt{5}}{8},$$

$$\boldsymbol{r} = \sqrt{\frac{a^2(15+3\sqrt{5})}{3 \cdot 2 \cdot 4}} = \frac{a\sqrt{15+3\sqrt{5}}}{\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2(5+\sqrt{5})}}{4}.$$

Délka tělesové úhlopříčky, která prochází středem dvacetistěnu, je dvojnásobek poloměru koule opsané, tedy:[3]

$$\boldsymbol{u} = 2r = 2 \cdot \frac{a\sqrt{2(5+\sqrt{5})}}{4} = \frac{a\sqrt{2(5+\sqrt{5})}}{2}.$$



obr. 15 síť ikosaedru

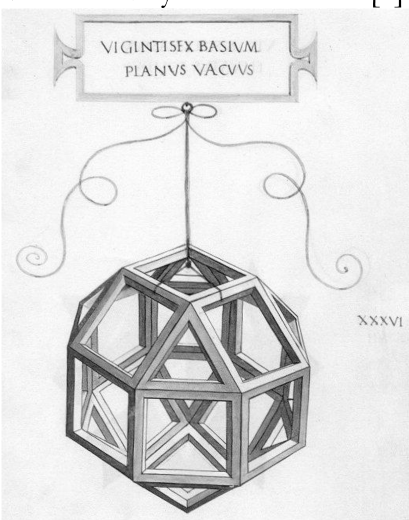
3 VÝSKYT PRAVIDELNÝCH MNOHOSTĚNŮ

3.1 V umění

Názor Platóna, že pravidelný dvanáctistěn znázorňuje jsoucno, s ním sdílel Salvador Dalí[5]. Soudí se tak podle jeho obrazu **Poslední večeře** *(obr. 16)* z roku 1955, kde se nad stolem jakoby vznáší a celý prostor obklopuje část pravidelného dvanáctistěnu. [2]

obr. 16 Salvador Dalí - Poslední večeře

Platónskými tělesy se zabýval, jak už víme, i Luca Pacioli, který se o nich zmiňuje ve své knize *Divina proportione.* Celá kniha byla věnována architektuře a u části, která se zabývala pravidelnými mnohostěny, bylo vyobrazení všech pravidelných i polopravidelných mnohostěnů *(obr. 17)* na 59 tabulkách, které pro Pacioliho vykreslil Leonardo da Vinci, který si velice rád vyráběl i dřevěné modely mnohostěnů. [2]

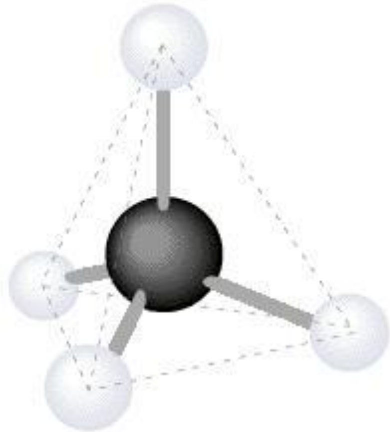


obr. 17 Leonardo da Vinci - rhombicuboctahedron (krychle+osmistěn)

[5] **Salvador Felip Jacint Dalí**, 1904 – 1989, katalánský malíř, představitel surrealismu

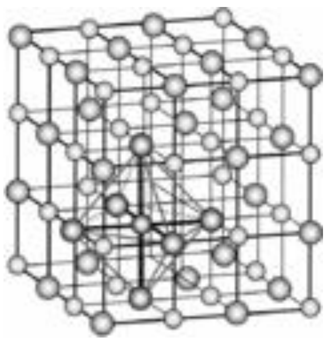
3.2 V přírodní formě

V přírodě můžeme vidět tvar čtyřstěnu v kovalentní vazbě molekul, například v molekule **metanu** (CH_4) – čtyři atomy vodíku leží v každém rohu **čtyřstěnu** s jedním atomem uhlíku v centru. Dalším příkladem je také **amonný iont** (NH_4^+), kdy je v každém vrcholu tetraedru atom vodíku a v centru leží jeden atom dusíku, stejně jako u metanu *(obr. 18).* [10]



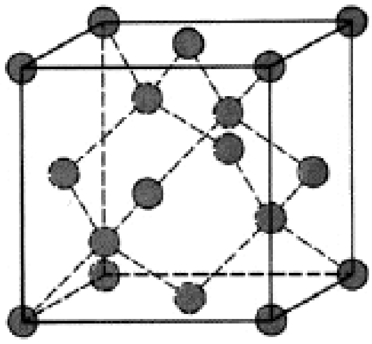
obr. 18 uspořádání atomů v molekulách CH_4 a NH_4^+

Další pravidelná tělesa můžeme najít v **solných krystalech**, kde jsou atomy chloridu sodného (NaCl) uspořádány do tvaru **krychle**, a když se lépe zadíváme, můžeme si povšimnout uspořádání atomů uvnitř krychle do pravidelných **oktaedrů** *(obr. 19).*



obr. 19 struktura NaCl

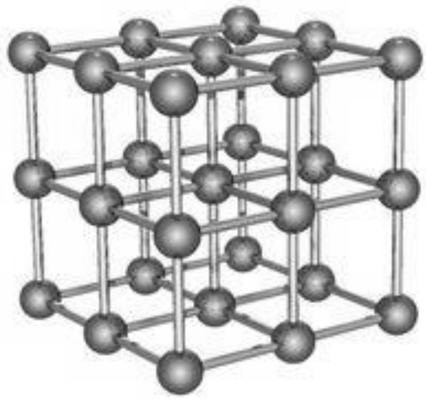
Uhlík je nevyskytovanější prvek v přírodě, takže není divu, že ve dvou svých čistých formách v přírodě využívá uspořádání atomů do pravidelných mnohostěnů. V **diamantu** *(obr. 20)*, nejtvrdší známé látce, je každý atom uhlíku vázán na čtyři další v „super-silném" **krychlovém** uspořádání. A třetí, vysoce stabilní alotrop uhlíku – **fulleren C_{60}** *(obr. 21)*, se skládá z 60 atomů uhlíku uspořádaných do vrcholů **komolého dvacetistěnu** (tj. pravidelný dvacetistěn s „ukrojenými vrcholy"; tvar fotbalového míče).



obr. 20 uspořádání atomů v diamantu

obr. 21 stavba fullerenu

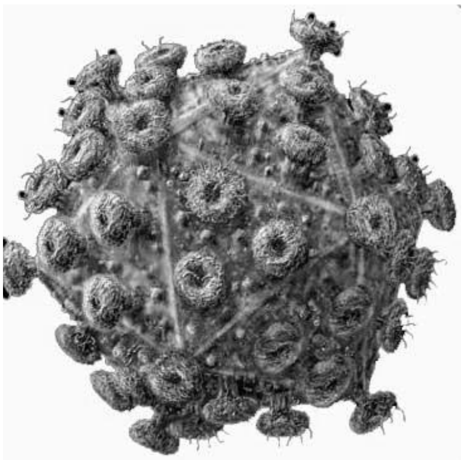
Jako poslední příklad uvádím krystal **alfa-polonium**, jehož každý atom se pravidelně opakuje ve třech směrech a zároveň každé dva atomy jsou od sebe vzdáleny o určitou vzdálenost, která je vždy konstantní. Tímto pravidelným opakováním si vytváří strukturu pravidelného **šestistěnu** *(obr. 22)*.



obr. 22 struktura alfa-polonia

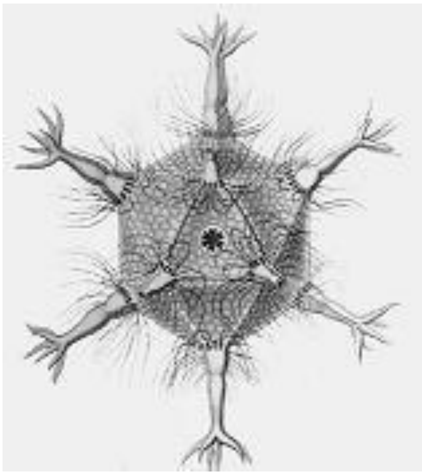
3.3 U organismů

Mnoho virů má tvar **dvacetistěnu**, včetně **viru obrny**, **HIV** *(obr. 23)* a dalších 200 virů, které jsou odpovědné za nachlazení. Dvacetistěnná symetrie totiž umožňuje nejnižší energetickou konfiguraci vzájemně působících částic. [11]



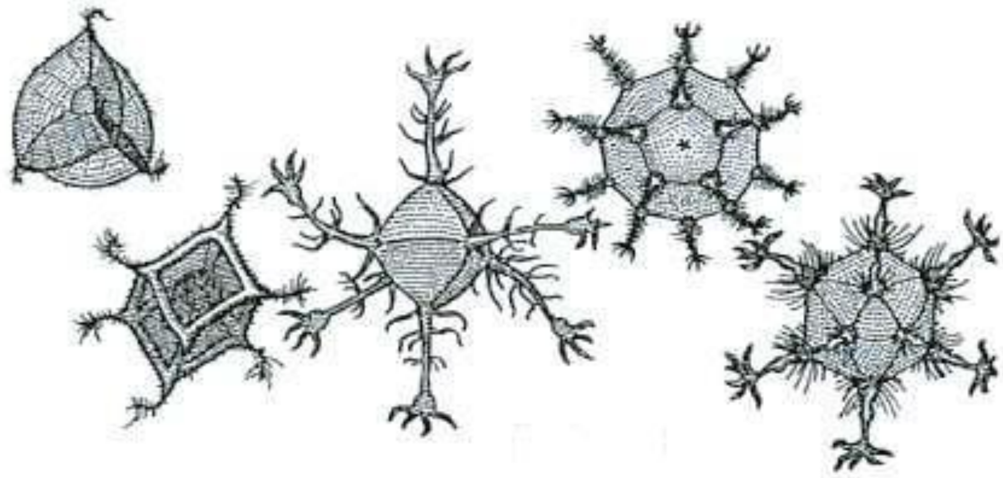
obr. 23 virus HIV

Tvar pěti platónských těles můžeme také najít u **radiolarianů** *(obr. 24)*. Jsou to prvoci, kteří produkují spletité minerální kostry. Můžeme je nalézt v zooplanktonu v oceánech a v jeho pozůstatcích, které pokrývají velkou část mořského dna. [12]



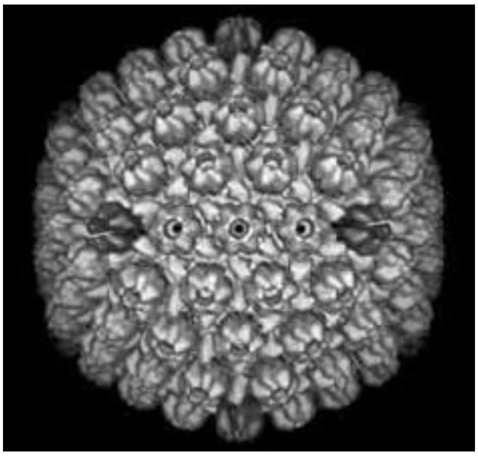
obr. 24 druh radiolariana ve tvaru ikosaedru

Ostatní tvary můžeme najít u dalších prvoků žijících v moři. Tvar **čtyřstěnu**, který je poněkud zaoblený, jak kdyby od vnitřního tlaku, má prvok *Callimitra Aenease*, tvar **šestistěnu** má *Lithocubus geometricus*, **osmistěnu** *Circoporus octahedrus*, **dvanáctistěnu** *Circorrhegma dodecahedrus* a **dvacetistěnu** *Circognia icosahedrus (obr. 25)*.



obr. 25 mořští prvoci

Další, **herpes virus** *(obr. 26)*, má tvar pravidelného **dvacetistěnu**. Virová konstrukce je postavena z identických proteinových jednotek a právě dvacetistěn je nejjednodušší tvar na shromáždění těchto jednotek. Pravidelné těleso je také používáno, protože může být postaveno z jediné základní jednotky bílkoviny, která je použita znovu a znovu, což šetří místo v genomu viru. [11]



obr. 26 herpes virus

3.4 V elektronice

Tvary platónských těles se často využívají také v elektronice. Pravidelných **čtyřstěnů** se využívá jako **rezistorů**. Jestliže každou hranu čtyřstěnu nahradíme rezistorem s odporem jednoho ohmu, pak odpor mezi dvěma vrcholy bude 0,5 ohmu. [10]

Další rezistory se využívají ve tvaru **osmistěnu**, kdy má tento rezistor odpor od 1/2 do 5/12 ohmu. [13]

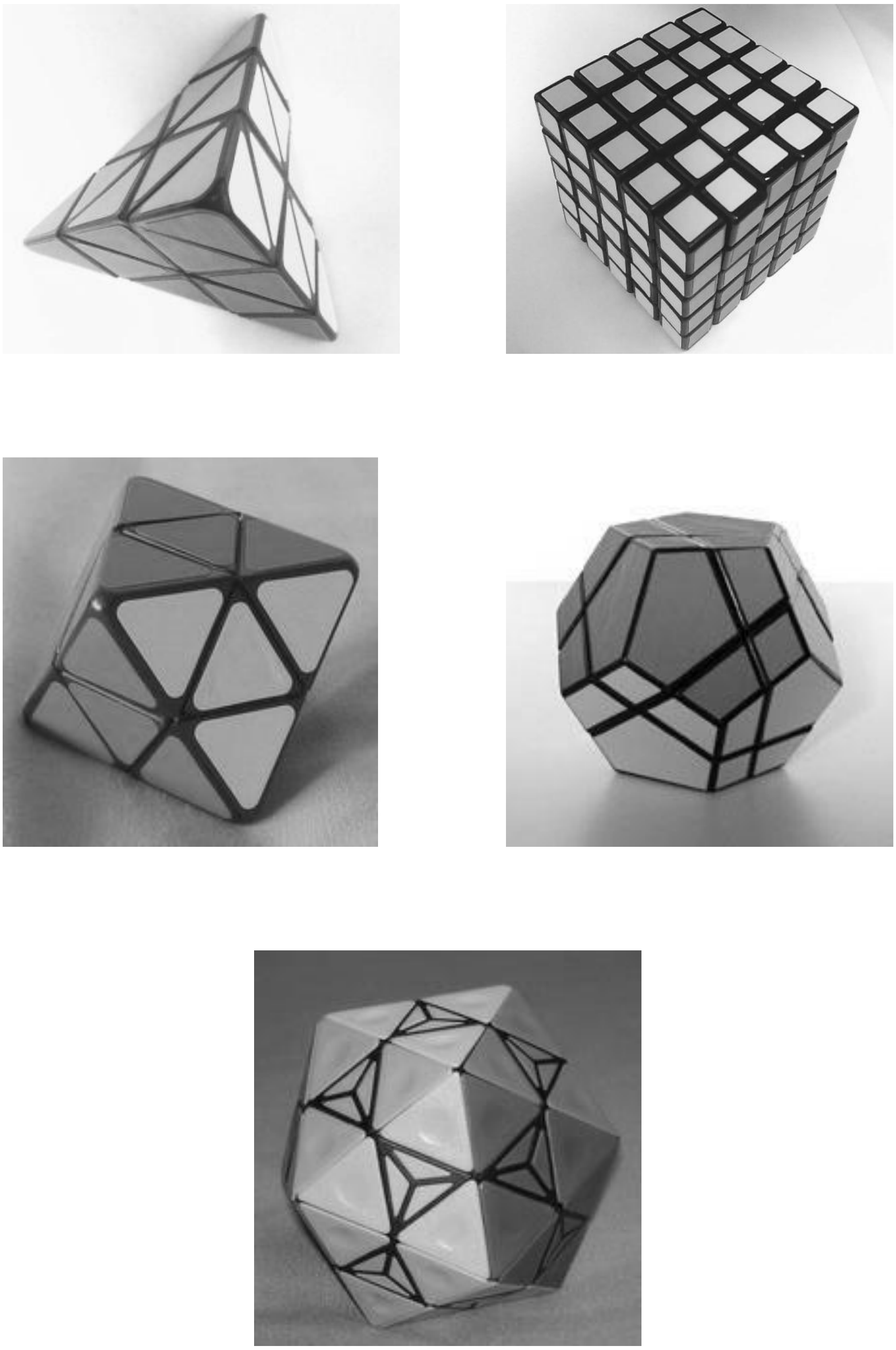
Zobecnění krychle pro vícedimenzionální prostory, tzv. hyperkychle, se využívá při navrhování architektur paralelních superpočítačů. Jednotlivé propojované uzly (procesory nebo paměti) se propojují stejně jako vrcholy hyperkrychle. Ukázalo se, že to vede k minimalizaci nutných propojení mezi jednotlivými uzly se zachováním dostatečně nízké pravděpodobnosti kolize (současný přístup).

3.5 U her

Platónská tělesa se často používají jako **kostky**. Tvar krychle je velmi častý, ale kostky se běžně vyskytují i v dalších tvarech *(obr. 27)*, u tzv. **role-play** her (hry na hrdiny). Takové kostky se označují jako *Dn*, kde *n* je počet stran kostky (např. D8 – oktaedr, D20 – ikosaedr).[12]

obr. 27 role-play kostky

Pravidelné mnohostěny se ale objevují i u jiných her, jako třeba známá **Rubikova kostka**. Každý zná tento hlavolam ve tvaru **krychle**, ale málo kdo ví, že Rubikovy kostky existují ve všech tvarech platónských těles *(obr. 28)*. [14]



obr. 28 Rubikovy kostky ve tvarech pravidelných mnohostěnů

4 DUALITA PRAVIDELNÝCH MNOHOSTĚNŮ

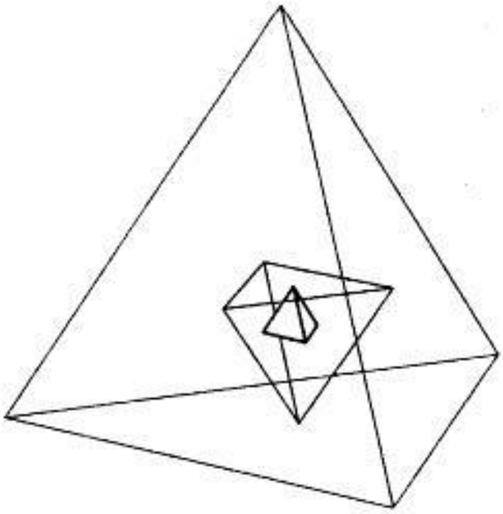
Již výše jsme se dozvěděli, že každému pravidelnému mnohostěnu lze opsat i vepsat kulovou plochu. Také víme, že středy jednotlivých stěn těles jsou dotykové body koule vepsané a odpovídají rovnoměrnému rozmístění bodů na této kulové ploše. Spojením středů stěn jakéhokoli pravidelného mnohostěnu tedy musí vzniknout další pravidelný mnohostěn. Tuto vlastnost platónských těles nazýváme *dualita*.

V 19. století zavedl Ludwig Schläfli[6] označení pravidelných mnohostěnů pomocí uspořádané dvojice [*p, q*], kde *p* značí *p*-úhelník tvořící stěny mnohostěnu a *q* značí počet hran, které se sbíhají v jednom vrcholu. Po přirazení Schläfliho označení k jednotlivým tělesům dostaneme tyto uspořádané dvojice:[15]

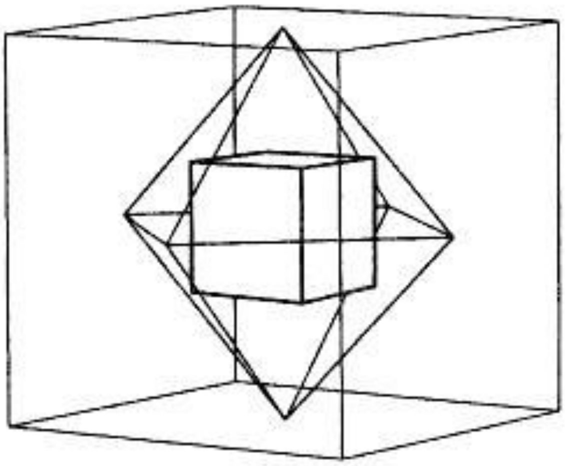
Tetraedr	[*3,3*]
Hexaedr	[*4,3*]
Oktaedr	[*3,4*]
Dodekaedr	[*5,3*]
Ikosaedr	[*3,5*]

Právě z uvedeného přehledu můžeme lehce vyčíst, která tělesa jsou navzájem duální, jelikož počet stěn libovolného z nich se musí rovnat počtu vrcholů druhého z těles. Duální tělesa jsou pak následující: *tetraedr – tetraedr (obr. 29)*, *hexaedr – oktaedr* a naopak *(obr. 30)*, *dodekaedr – ikosaedr* a naopak *(obr. 31).*

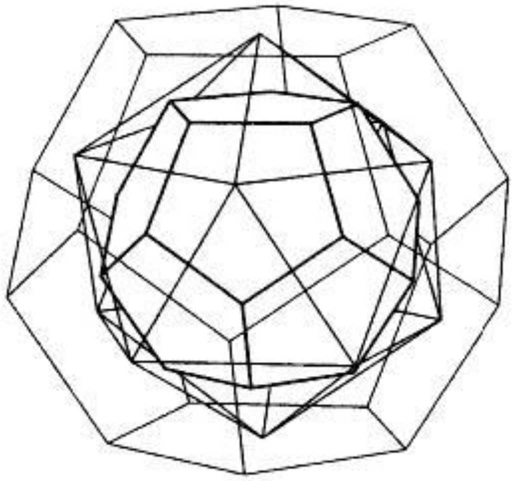
[6] **Ludwig Schläfli**, 1814 – 1895, švýcarský matematik



obr. 29 dualita čtyřstěn – čtyřstěn



obr. 30 dualita šestistěn – osmistěn

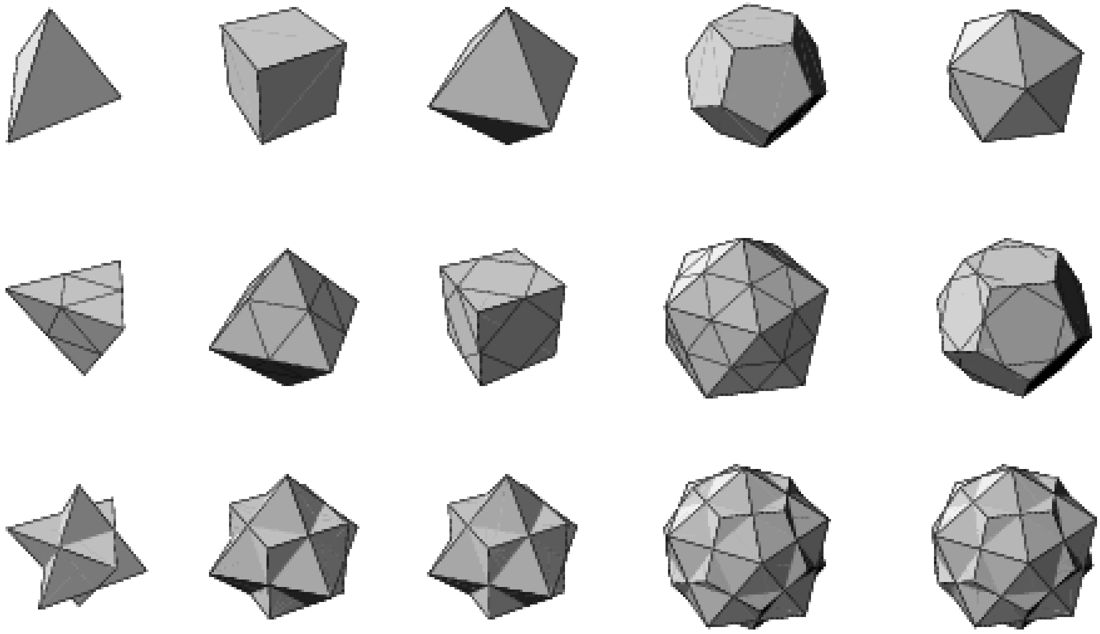


obr. 31 dualita dvanáctistěn - dvacetistěn

Z údajů o platónských tělesech, které známe z předchozích kapitol, si můžeme všimnout, že pravidelný mnohostěn má stejný počet hran jako jeho duál – čtyřstěn je duální sám sebou, počet hran čtyřstěnu i duálu je 6, šestistěn i osmistěn mají každý 12 hran, dvanáctistěn a dvacetistěn mají hran 30.

V případě duálních mnohostěnů můžeme vepsané těleso zvětšit tak, aby jeho hrany protínaly stěny původního mnohostěnu *(obr. 32)*. Pokud bychom chtěli vyrobit tato tělesa v prostoru, musíme zjistit, jaké mnohoúhelníky jejich stěny tvoří. V případě duality *tetraedr – tetraedr* můžeme rovnou vidět, že stěnami jsou rovnostranné trojúhelníky, jejichž celkový počet je 12. V dualitě *hexaedr – oktaedr* jsou stěnami pravoúhlé trojúhelníky (jako kdyby osekané vrcholy krychle) a rovnostranné trojúhelníky (osekané vrcholy osmistěnu).

Důležitou podmínkou je, aby přepona pravoúhlého trojúhelníku byla stejně dlouhá jako strana trojúhelníku rovnostranného. Počet stěn je poté 48 (24 pravoúhlých trojúhelníků + 24 rovnostranných trojúhelníků). Pro dualitu *dodekaedr – ikosaedr* potřebujeme 60 rovnoramenných trojúhelníků, které získáme odseknutím vrcholů pravidelného dvanáctistěnu, a 60 rovnostranných trojúhelníků, jejichž strana musí být shodná jako základna rovnoramenného trojúhelníku. Všechna takto vytvořená tělesa jsou již mnohostěny *nekonvexní*.[15]



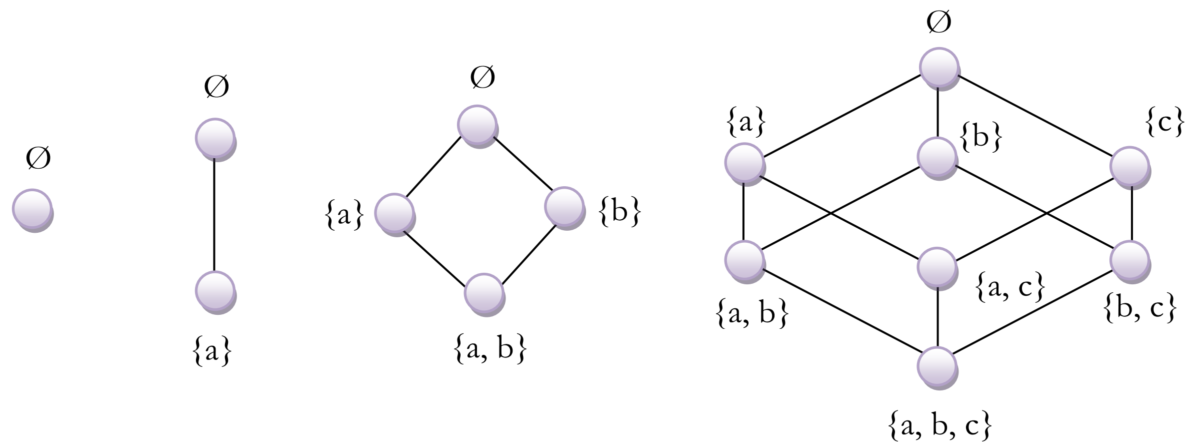
obr. 32 nekonvexních mnohostěnů pomocí duality platónských těles

5 PRAVIDELNÉ MNOHOSTĚNY VE 4D

Ve čtyřrozměrném prostoru existuje právě šest platónských těles. Jsou to 5-nadstěn, 8-nadstěn (*teserakt, hyperkrychle*), 16-nadstěn (*ortoplex, hexadekachoron*), 24-nadstěn (*ikositetrachoron*), 120-nadstěn (*hecatonicosachoron*) a 600-nadstěn (*hexacosichoron*).

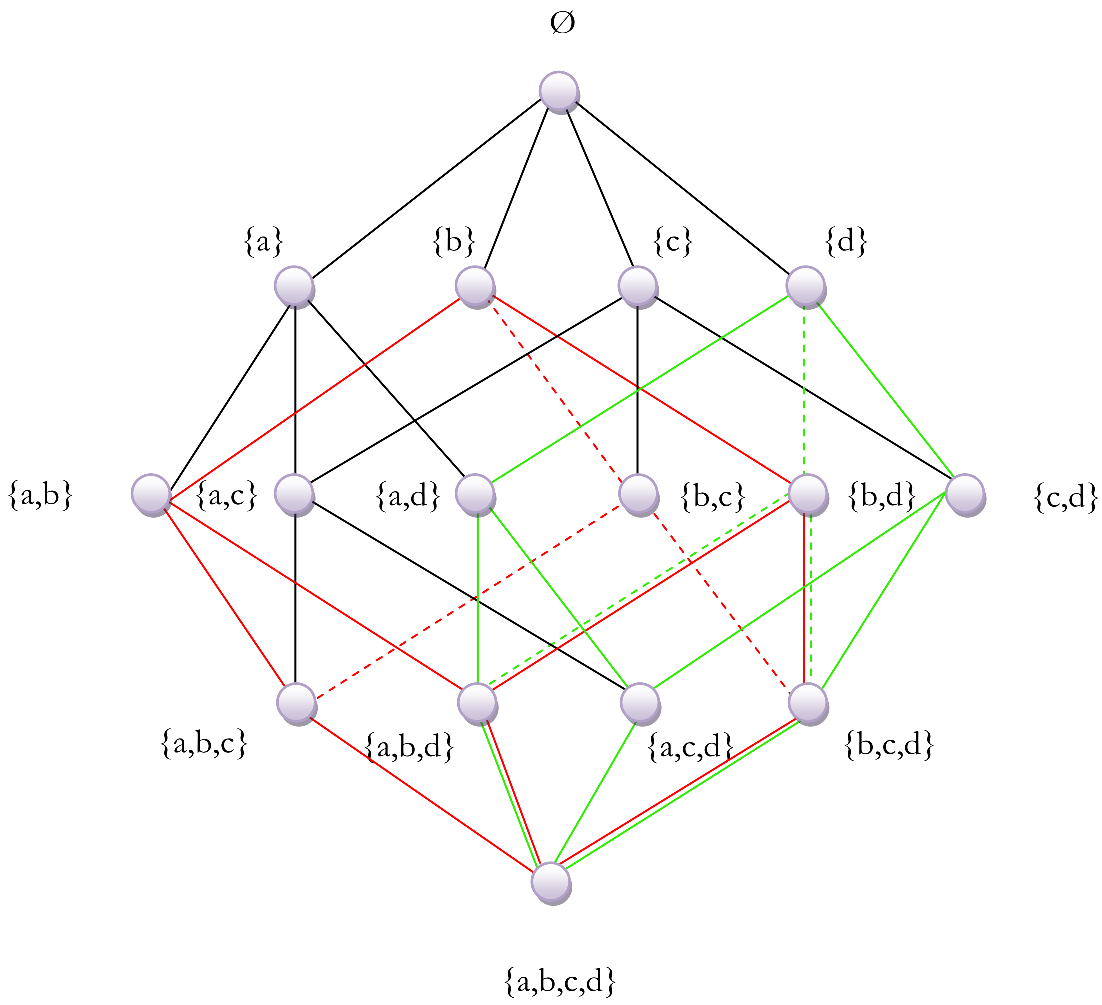
Ačkoliv jsou pro nás tělesa ve 4D těžko představitelná, můžeme si je alespoň částečně představit pomocí jejich alternativ z nižších dimenzí. Pro znázornění *hyperkrychle* použijeme známou strukturu z oblasti teorie množin, tzv. potenční množinu.

Na následujícím obrázku jsou zleva doprava pomocí puntíků zobrazeny prvky potenčních množin k množinám A = Ø, B = {a}, C = {a, b} a D = {a, b, c}. Díky tomu, že prvky potenční množiny jsou uspořádané vzhledem ke vztahu „být podmnožinou“, si je můžeme zakreslit pomocí *Hasseových diagramů* (diagramy na zobrazování uspořádaných množin). Není problém zakreslit Hasseův diagram k libovolné potenční množině *(obr. 33)*.

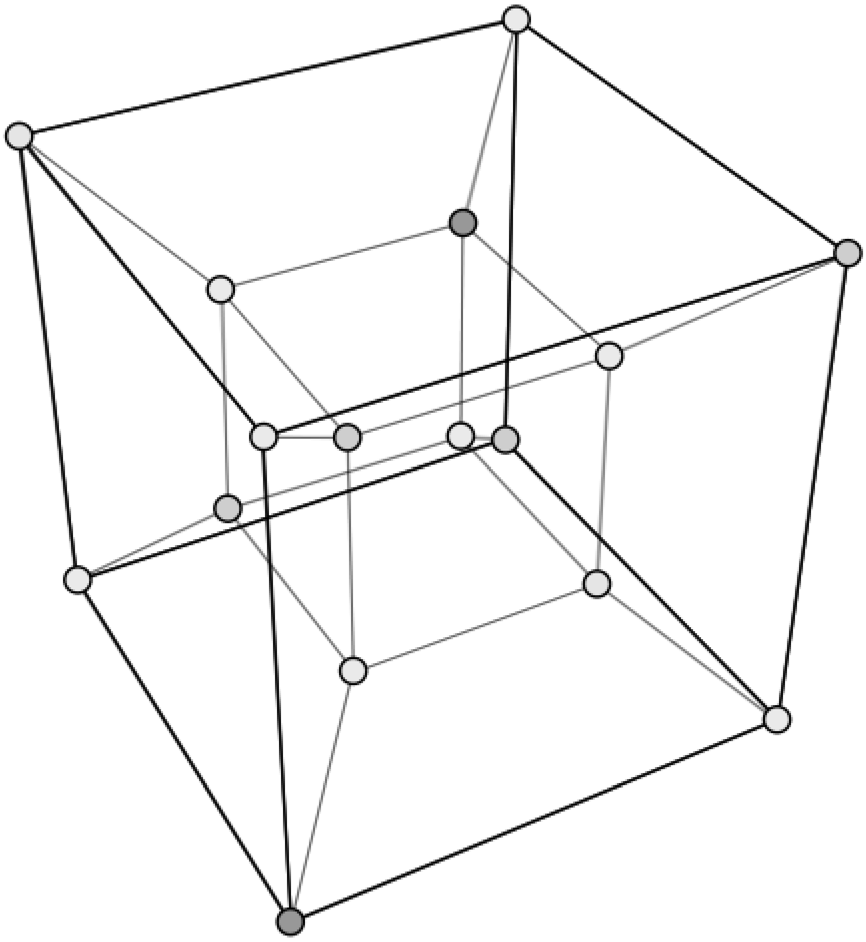


obr. 33 Hasseovy diagramy pro potenční množiny z množin A, B, C a D

Z předchozího obrázku je zřejmé, že s rostoucí dimenzí (tj. počet prvků množiny, ze které tvoříme potenční množinu) roste počet vrcholů hyperkrychle exponenciálně a počet úrovní Hasseova diagramu o 1. Dále je názorné, že Hasseův diagram pro potenční množinu z množiny X odpovídá hyperkrychli pro danou dimenzi rovnou |X|. Tudíž není problém sestrojit hyperkrychli v libovolné dimenzi. **Nyní sestrojíme teserakt pomocí potenční množiny z množiny E = {a, b, c, d}** *(obr. 34)*. Na obrázku je barevně zvýrazněna krychle ve 3D (nepřesný obrázek), která je podmnožinou teseraktu. Hyperkrychli ve 4D si můžeme představit ještě lépe – viz *obr. 35*.



obr. 34 Hasseův diagram k potenční množině E odpovídající teseraktu



obr. 35 hyperkrychle ve 4D

6 ZÁVĚR

Svou prací jsem chtěla ukázat širší veřejnosti, že matematika není jen o vzorcích a složitých výpočtech, ale že se v ní vyskytují velice zajímavá témata, která nám mohou rozšířit obzory v různorodých oborech. Snažila jsem se v práci obsáhnout určení významu pravidelných mnohostěnů, jejich užití v reálném prostředí a jejich význam pro běžné použití v matematických procesech dnešního světa, kdy nás obklopuje spousta environmentálních jevů, které si v běžném životě neuvědomujeme, a přitom mají velice významný podíl na našem vnímání reality.

Analýzou jevu výskytu mnohostěnů v běžném životě jsem chtěla poukázat na to, že ne jednoho matematika, filosofa i malíře tato tělesa okouzlila právě významem, který je podstatný jak pro současnou generaci, tak i pro budoucí vývoj a výzkum. Shrnula jsem historii, využití a výskyt pravidelných mnohostěnů společně s již zmiňovanými vzorci a zároveň jsem přidala i část o ne příliš známém čtyřrozměrném prostoru.

Myslím si, že každý člověk, ať už učitel nebo laik, si zde může najít část, která ho zaujme. Všem nemusí připadat znalost tohoto tématu jako důležitá, ale určitě je zajímavé vědět, jak sama příroda využívá krásy matematiky. Ale tak jako každá část matematiky, je i tato velice komplikovaná a spletitá. Ne nadarmo končí Platónův dialog již z 5. století př. n. l. *Hippias větší* větou: *„Krásné věci jsou nesnadné."*

7 SEZNAM ZDROJŮ

[1] Polák, J.: *Středoškolská matematika v úlohách II.* Prométheus, 1999. ISBN 80-7196-166-3

[2] Livio, M.: *Zlatý řez: příběh fí, nejpodivuhodnějšího čísla na světě.* Argo, Dokořán, 2006. ISBN 80-7203-808-7

[3] Moravec, L., Chmelíková, V.: *Pravidelné mnohostěny.* Univerzita Karlova v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta, 2007.

[4] Hewson, D.: *Zlatý řez.* Jota, 2007. ISBN 978-80-7217-542-0

[5] Chmelíková, V.: *Zlatý řez.* Univerzita Karlova v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta, 2006.

[6] Kepler, J.: *Sen neboli měsíční astronomie.* Paseka, 2004. ISBN 80-7185-634-7

[7] Pomykalová, E.: *Matematika pro gymnázia: Stereometrie.* Prométheus, 2002. ISBN 80-7196-178-7

[8] *Geometrická tělesa,* <http://origami.webz.cz/matematika/pdf/telesa.pdf>

[9] *Leonhard Euler,* <http://cs.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler>

[10] *Tetrahedron,* <http://en.wikipedia.org/wiki/Tetrahedron>

[11] *Icosahedron,* <http://en.wikipedia.org/wiki/Icosahedron>

[12] *Platonic solid,* <http://en.wikipedia.org/wiki/Platonic_solid>

[13] *Octahedron,* <http://en.wikipedia.org/wiki/Octahedron>

[14] *Magic polyhedra,* <http://en.wikipedia.org/wiki/Magic_polyhedra>

[15] Svobodová, V.: *Pravidelné mnohostěny.* Masarykova univerzita v Brně, Přírodovědecká fakulta, 2007. <http://is.muni.cz/th/15501/prif_d/disertace.txt>

[16] *Tajemství dvanáctistěnu,* <http://www.darius.cz/ag_nikola/cl_dvanacti.html>

[17] *Johannes Kepler,* <http://johannes-kepler.navajo.cz>

[18] *Pět Platónových těles,* <http://www.volny.cz/zlaty.rez/diplomka4.html>

[19] *Eulerova věta a mnohostěny,* <http://www.rvp.cz/clanek/1741>

[20] *Platónské těleso,* <http://cs.wikipedia.org/wiki/Platónské_těleso>

[21] *Mnohostěn,* <http://cs.wikipedia.org/wiki/Mnohostěn>

[22] *Hyperkrychle,* <http://cs.wikipedia.org/wiki/Hyperkrychle>

[23] *Cube,* <http://cs.wikipedia.org/wiki/Cube>

[24] *Dodecahedron,* <http://cs.wikipedia.org/wiki/Dodecahedron>

[25] *Krychle,* <http://cs.wikipedia.org/wiki/Krychle>

[26] *Platonic solids,* <http://ourworld.compuserve.com/homepages/dp5/pattern1.htm>

8 SEZNAM OBRÁZKŮ